ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

PIERRE PAPILLON

Sur les surfaces polaires réciproques des conoïdes

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 3e série, tome 25 (1933), p. 239-256

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1933_3_25__239_0>

SUR LES
SURFACES POLAIRES RÉCIPROQUES DES CONOÏDES

Par Pierre PAPILLON

Professeur agrégé au Prytanée Militaire de La Flèche (Sarthe).

§ 1. — Les conoïdes droits possèdent les remarquables propriétés de se transformer en eux-mêmes par les *homothéties* et les *inversions axiales* dont l'élément fondamental coïncide avec l'axe conoïdal[1]; l'équation

$$z = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

reste effectivement invariante par les substitutions

$$\mathfrak{S}(kx, \quad ky, \quad z)$$

et

$$\mathfrak{S}\left(\frac{kx}{x^2+y^2}, \quad \frac{ky}{x^2+y^2}, \quad z\right)$$

qui traduisent analytiquement ces opérations.

Moins évidente, mais de meilleur intérêt, apparaît la transformation par polaires réciproques pour une quadrique centrée ou non : nous exposerons ici les résultats essentiels de son application.

§ 2. — **Polaire réciproque pour un paraboloïde.** — Soit

$$2z = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b}$$

---

[1] Ainsi nommons-nous les deux transformations faisant correspondre à tout point M_1 le point M_2 tel que, sur la perpendiculaire à l'axe (Δ) menée par M_1 et de pied μ,

$$\overline{\mu M_2} = k \, . \, \overline{\mu M_1},$$
$$\overline{\mu M_1} \, . \, \overline{\mu M_2} = k.$$

respectivement.

l'équation de la quadrique directrice; la polaire réciproque de la surface (s) d'équation

$$z = z(x, y)$$

est l'enveloppe des plans

$$X\frac{x}{a} + Y\frac{y}{b} - Z - z = 0,$$

donc le lieu des points caractéristiques définis par le système

$$\begin{cases} X = ap, \\ Y = bq, \\ X\dfrac{x}{a} + Y\dfrac{y}{b} - Z - z = 0, \end{cases}$$

étant posés

$$p \equiv \frac{\partial z}{\partial x}, \qquad q \equiv \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Les coordonnées de tout point sur la surface transformée (S) sont, par suite,

$$\begin{cases} X = ap, \\ Y = bq, \\ Z = px + qy - z; \end{cases} \tag{1}$$

ces formules généralisent celles de Legendre, qui se rapportent au paraboloïde révolutif de paramètre $1 (= a = b)$.

Les lignes asymptotiques, déterminées par l'équation

$$dp \,.\, dx + dq \,.\, dy = 0,$$

sont conservées, puisque la réciprocité de la transformation entraîne

$$\begin{cases} x = aP, \\ y = bQ, \\ z = PX + QY - Z, \end{cases}$$

et qu'alors

$$\begin{aligned} dp \,.\, dx + dq \,.\, dy &= d\left(\frac{X}{a}\right) . \, d(aP) + d\left(\frac{Y}{b}\right) . \, d(bQ), \\ &= dP \,.\, dX + dQ \,.\, dY. \end{aligned}$$

§ 3. — **Polaire réciproque d'un conoïde pour un paraboloïde : les axes sont confondus.** — Prenons pour surface (s) un conoïde droit d'axe $z'z$, donc d'équation

$$z = f\left(\frac{y}{x}\right);$$

d'après cela

$$p = -\frac{y}{x^2} f'\left(\frac{y}{x}\right), \qquad q = \frac{1}{x} f'\left(\frac{y}{x}\right),$$

et

$$\left\{\begin{aligned} X &= -a\frac{y}{x^2} f', \\ Y &= b\,\frac{1}{x}\,f', \\ Z &= -z. \end{aligned}\right.$$

Il est d'ailleurs plus élégant d'observer, et de cette remarque résulte précisément le choix actuel, qu'en (1), Z se réduit à $-z$ pour

$$px + qy = 0;$$

c'est l'équation aux dérivées partielles des conoïdes d'axe $z'z$. Alors

$$\frac{y}{x} = -\frac{p}{q} = -\frac{bX}{aY}.$$

La polaire réciproque (S) admet ainsi l'équation

$$-Z = f\left(-\frac{bX}{aY}\right),$$

soit encore

$$Z = -f\left(-\frac{bX}{aY}\right), \tag{2}$$

$$Z = F\left(\frac{X}{Y}\right).$$

La famille des conoïdes droits coaxiaux se transforme en elle-même, dans l'ensemble, par polaires réciproques relativement à tout paraboloïde de même axe; les lignes asymptotiques sont conservées.

A ces lignes répondent, en coordonnées cylindriques, les équations(¹)

$$\begin{cases} z = \varphi(\theta), \\ r^2 = C\dfrac{d\varphi}{d\theta}. \end{cases}$$

Plus précisément, les changements de variables successifs

$$\begin{array}{lll} \xi = \dfrac{b}{a}X, & \eta = Y, & \zeta = Z, \\ \xi' = -\eta, & \eta' = \xi, & \zeta' = \zeta, \\ x = \xi', & y = \eta', & z = -\zeta', \end{array}$$

font correspondre (2) à (1); ils définissent tour à tour :

la *dilatation orthogonale pure* de plan yOz et de coefficient

$$\frac{b}{a} = 1 - e^2,$$

e désignant l'excentricité des coniques homothétiques qui sectionnent horizontalement la directrice(²),

la *rotation* d'axe $z'Oz$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

la *contraposition* de plan xOy.

Ainsi, la polaire réciproque (S) est la transformée de (s) par le produit

$$\mathfrak{D}\left(yOz, \frac{b}{a}\right) . \mathfrak{R}\left(z'z, \frac{\pi}{2}\right) . \mathfrak{C}(xOy)$$

dont les deux derniers facteurs, permutables, constituent la forme canonique du *retournement* spatial; conséquence immédiate,

Les points correspondants des deux conoïdes déterminent des segments dont les milieux se situent dans un plan directeur commun, le plan tangent au sommet de la quadrique directrice.

(¹) Ces équations ont été étudiées différemment dans les Thèses de Paul Appell et de M. Émile Picard. *Voir* A. Buhl : *Lignes asymptotiques et lignes de courbure* (Journal de Mathématiques pures et appliquées, dirigé par H. Villat. Série 9, t. 8, 1929, p. 45).

(²) Tout aussi bien pourrait être invoquée la dilatation $\mathfrak{D}\left(xOz, \dfrac{a}{b}\right)$; et l'on voit quel rôle analogue jouent les deux plans de symétrie paraboloïdaux, ainsi qu'il convenait à priori.

Si ce plan tangent est un plan de symétrie ou l'axe paraboïdal un axe quaternaire pour le conoïde, ou si ces propriétés coexistent — ce qu'il peut être plus aisé d'observer sur la courbe ou sur la surface dirigeant ledit conoïde — la transformation générale se réduit à l'une des suivantes

$$\mathfrak{D}\left(yOz, \frac{b}{a}\right) . \mathfrak{R}\left(z'z, \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\mathfrak{D}\left(yOz, \frac{b}{a}\right) . \mathcal{C}(xOy),$$

$$\mathfrak{D}\left(yOz, \frac{b}{a}\right),$$

puisqu'alors toute composante non écrite est d'effet nul; ces mêmes symétries se découvriront à l'invariance de l'équation cartésienne, rendue rationnelle, malgré les substitutions

$$\mathfrak{S}(x, y, -z)$$

et

$$\mathfrak{S}(y, -x, z).$$

Appartiennent à ces types les surfaces (s) d'équations respectives

$$e\left(\frac{y}{x}, |z|\right) = 0,$$

$$e\left(\left|\frac{y}{x} + \frac{x}{y}\right|, z\right) = 0, \qquad e\left(\frac{y}{x} - \frac{x}{y}, z\right) = 0,$$

$$e\left(\left|\frac{y}{x} + \frac{x}{y}\right|, |z|\right) = 0, \qquad e\left(\frac{y}{x} - \frac{x}{y}, |z|\right) = 0.$$

§ 3. — **Cas d'une directrice révolutive.** — Lorsque

$$b = a,$$

l'équation transformée s'écrit

$$Z = -f\left(-\frac{X}{Y}\right);$$

ce conoïde se déduit du proposé par le seul *retournement*

$$\mathfrak{R}\left(z'z, \frac{\pi}{2}\right) . \mathcal{C}(xOy).$$

Conséquences. — 1. Si le plan tangent au sommet du paraboloïde est un élément de symétrie pour le conoïde, la polaire réciproque est *transformée par rotation* d'un angle droit autour de l'axe paraboloïdal : c'est un conoïde égal au primitif.

Tel est, particulièrement, le cas des *conoïdes à noyau quadrique* d'équations

$$z^2 = C^2\left(1 - \frac{\alpha^2 x^2}{B^2 x^2 + A^2 y^2}\right);$$

ce sont les lieux des parallèles au plan principal xOy de la quadrique centrée

$$\frac{(x-\alpha)^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} - 1 = 0$$

qui rencontrent $z'z$ et touchent cette quadrique(¹).

2. Si l'axe paraboloïdal est un élément de répétition d'ordre 4 pour le conoïde, la polaire réciproque est *contraposée* pour le plan tangent au sommet du paraboloïde.

3. Enfin, les conoïdes transformés en eux-mêmes sont ceux pour lesquels

$$\mathcal{R}\left(z'z, \frac{\pi}{2}\right) . \mathcal{C}(xOy) = 1;$$

leurs fonctions f sont les solutions de l'équation fonctionnelle

$$f\left(\frac{y}{x}\right) = -f\left(-\frac{x}{y}\right).$$

Passons en coordonnées cylindriques; l'équation conoïdale étant

$$z = \varphi(\theta),$$

la fonction φ satisfait à la fonctionnelle

$$\varphi\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\varphi(\theta). \tag{5}$$

Avant de la résoudre, nous pouvons formuler deux remarques :

1° L'existence d'une solution $\varphi_0(\theta)$ assure celle des solutions dérivées et intégrales

$$\varphi'_0(\theta), \;\ldots\ldots,$$

$$\int \varphi_0(\theta)\, d\theta, \;\ldots,$$

(¹) Le *conoïde à noyau sphérique* a été étudié par M. Maurice d'Ocagne en son *Cours de Géométrie pure et appliquée de l'École Polytechnique*; t. I, § 110.

car (5) entraîne

$$\varphi'\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\varphi'(\theta).$$

2° Toute combinaison linéaire d'un nombre fini de solutions est une solution car

$$\sum \alpha_i \varphi_i\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sum \alpha_i \varphi_i(\theta).$$

Ainsi s'obtient

$$\varphi(\theta) \equiv \sum_{h=1}^{h=n} k_h \sin 2(2h-1)\theta;$$

très particulièrement,

$$\varphi(\theta) \equiv l \sin 2\theta$$

conduit au *conoïde de Plücker* :

Le conoïde de Plücker est sa propre polaire réciproque pour tout paraboloïde de révolution coaxial; les lignes asymptotiques se transforment en elles-mêmes (¹).

La connaissance de la solution particulière $\varphi_0(\theta)$ est d'autant plus précieuse qu'elle provoque la résolution complète de (5). Donnons à sa solution générale la forme

$$\varphi(\theta) \equiv \Phi(\theta) \, . \, \varphi_0(\theta);$$

les relations hypothétiques

$$\varphi_0\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \equiv -\varphi_0(\theta),$$

$$\Phi\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) . \, \varphi_0\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\Phi(\theta) \, . \, \varphi_0(\theta),$$

provoquent en effet celle-ci :

$$\Phi\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \Phi(\theta),$$

déterminant pour $\Phi(\theta)$ toute fonction périodique et de période $\frac{\pi}{2}$, exprimable au moyen de la seule fonction circulaire $\operatorname{tg} 2\theta$.

(¹) Ce sont, rappelons-le brièvement, les génératrices de la surface et des biquadratiques gauches tracées sur les paraboloïdes ayant l'axe et le sommet du paraboloïde directeur, et projetées horizontalement suivant de certaines lemniscates de Bernouilli.

Bref, les conoïdes auto-polaires pour tout paraboloïde de révolution coaxial ont l'équation cylindrique

$$z = \Psi(\operatorname{tg} 2\theta) \cdot \sin 2\theta,$$

la fonction Ψ étant arbitraire.

Et l'on pourra disposer de cet arbitraire pour donner, par exemple, aux lignes asymptotiques de la surface telles projections voulues sur son plan directeur : il suffira d'intégrer, afin d'obtenir Ψ, l'équation différentielle linéaire du premier ordre

$$\begin{cases} \Psi(u) \cos 2\theta + \dfrac{d\Psi}{du} \dfrac{\sin 2\theta}{\cos^2 2\theta} = \mathcal{A}(\theta), \\ u = \operatorname{tg} 2\theta, \end{cases}$$

à second membre connu ; ceci fournit immédiatement

$$\Psi \equiv \Psi_0 + \frac{C}{\sin 2\theta}$$

et

$$z = \Psi_0(\operatorname{tg} 2\theta) \cdot \sin 2\theta + C.$$

En résumé :

Il existe toujours, à une translation près au long de l'axe du paraboloïde, un conoïde auto-polaire unique dont les lignes asymptotiques, autres que les génératrices, admettent sur le plan directeur des projections données.

Remarque. — On vérifie sans peine que cette solution renferme les types décelés en finale du paragraphe 2.

§ 4. — Dans un plan rapporté à un système cartésien normal construisons les points $m(\theta, z)$ et $M\left(\theta + \frac{\pi}{2}, -z\right)$, qui se correspondent à travers le produit permutable

$$\mathcal{T}\left(\frac{\pi}{2}\right)_{\theta'\theta} \cdot \mathcal{R}(\theta'\theta, \pi) \equiv \mathcal{H}_e\left(\theta'\theta, \pi, \frac{\pi}{2}\right);$$

leurs lieux développent les sections des conoïdes (s) et (S) par le cylindre de révolution coaxial et de rayon unitaire.

Nous pouvons donc établir une correspondance polaire entre conoïdes au moyen d'un déplacement hélicoïdal d'un demi-tour et de pas réduit $\frac{1}{2}$ effectué sur toute courbe plane : deux transformées dirigent, après enroulement sur un cylindre de rayon unitaire, deux conoïdes droits coaxiaux au cylindre et l'un est la polaire réciproque de l'autre pour un paraboloïde révolutif de même axe.

Si les courbes transformées se confondent, de même les conoïdes : ce sont leurs propres polaires.

§ 5. — **Cas d'une directrice équilatère.** — Lorsque

$$b = -a,$$

l'équation transformée s'écrit

$$Z = -f\left(\frac{X}{Y}\right);$$

ce conoïde se déduit du proposé par le seul *déplacement*

$$\mathcal{C}(\delta_1 Oz) \,.\, \mathcal{C}(xOy) \equiv \mathcal{R}(\delta'_1\delta_1, \pi)$$

où $\delta'_1 O \delta_1$ désigne la première bissectrice des axes $x'Ox$, $y'Oy$, c'est-à-dire une génératrice principale du paraboloïde.

L'autre génératrice principale, $\delta'_2 O \delta_2$, doit jouer, logiquement, un même rôle; et en effet

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(\delta'_2\delta_2, \pi) &\equiv \mathcal{R}(\delta'_1\delta_1, \pi) \,.\, \mathcal{R}(z'z, \pi)\\ &= \mathcal{R}(\delta'_1\delta_1, \pi),\end{aligned}$$

puisque $z'z$ est axe de symétrie pour les conoïdes.

Par suite, les conoïdes auto-polaires sont ceux pour lesquels les génératrices principales $\delta' O \delta$ sont des axes de symétrie.

Inversement,

Tout conoïde droit possédant un axe binaire perpendiculaire à l'axe conoïdal — il en existe nécessairement un second — est sa propre polaire réciproque pour tout paraboloïde équilatère dont les génératrices principales sont ces axes binaires.

L'exemple le plus simple est celui du conoïde d'équation

$$z = l \operatorname{tg} 2\theta;$$

les projections de ses lignes asymptotiques sur le plan directeur, d'équations polaires

$$r = \frac{k}{\cos 2\theta},$$

sont les *Kreuzcurven* issues des circonférences de centre O.

§ 6. — **Polaire réciproque d'un conoïde pour un paraboloïde : les axes sont perpendiculaires.** — Prenons pour surface (s) un conoïde droit d'axe $x'x$, donc d'équation

$$z = yf(x); \tag{6}$$

d'après cela

$$p = yf'(x), \qquad q = f(x),$$

et

$$\begin{cases} X = ay\,f'(x), \\ Y = b\,f(x), \\ Z = xy\,f'(x). \end{cases}$$

La polaire réciproque (S) admet ainsi l'équation

$$\begin{aligned} Z &= \frac{X}{a} f\left(\frac{Y}{b}\right), \qquad (7) \\ &= X\ F(Y). \end{aligned}$$

La famille des conoïdes droits coaxiaux se transforme, par polaires réciproques relativement à tout paraboloïde d'axe perpendiculaire au précédent, en celle des conoïdes dont l'axe est la perpendiculaire commune aux deux premiers.

La transformation d'ensemble ne diffère pas d'une contraposition pour le bissecteur du dièdre xOy.

Plus précisément, les changements de variables

$$\xi = \frac{X}{a}, \qquad \eta = \frac{Y}{b}, \qquad \zeta = Z,$$

$$x = \eta, \qquad y = \xi, \qquad z = \zeta,$$

font correspondre (7) à (6); ils définissent tour à tour :

une *dilatation pure* normalement à $z'z$; — $x'x$ et $y'y$ en sont les directions principales, $a - 1$ et $b - 1$ les coefficients principaux —,

la *contraposition* de plan $\delta_1 Oz$.

On aperçoit aisément les conclusions relatives à un paraboloïde révolutif ou équilatère.

§ 7. — **Polaire réciproque d'un conoïde pour une quadrique centrée coaxiale.** — 1. Soit

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

l'équation de la quadrique directrice, en laquelle des coefficients peuvent être imaginaires purs s'il s'agit d'un hyperboloïde; la polaire réciproque de la surface (s) d'équation

$$z = z(x, y)$$

est l'enveloppe des plans

$$X\frac{x}{a^2} + Y\frac{y}{b^2} + Z\frac{z}{c^2} - 1 = 0,$$

donc le lieu des points caractéristiques définis par le système

$$\begin{cases} X = -\dfrac{a^2}{c^2}pZ, \\ Y = -\dfrac{b^2}{c^2}qZ, \\ X\dfrac{x}{a^2} + Y\dfrac{y}{b^2} + Z\dfrac{z}{c^2} - 1 = 0. \end{cases}$$

Les coordonnées de tout point sur la surface transformée (S) sont, par suite,

$$\begin{cases} X = -\dfrac{a^2}{c^2}pZ, \\ Y = -\dfrac{b^2}{c^2}qZ, \\ Z = \dfrac{1}{\dfrac{z}{c^2} - \dfrac{px}{a^2} - \dfrac{qy}{b^2}}; \end{cases} \tag{8}$$

en particulier, s'obtiennent pour une directrice sphérique de rayon unitaire les formules

$$\begin{cases} X = \dfrac{p}{px + qy - z}, \\ Y = \dfrac{q}{px + qy - z}, \\ Z = \dfrac{-1}{px + qy - z}, \end{cases} \tag{9}$$

puisqu'ici

$$a = b = c = 1.$$

Un calcul de quelque étendue, mais sans autre difficulté, démontre la conservation des lignes asymptotiques.

2. Prenons pour surface (s) un conoïde droit d'axe $z'z$, donc d'équation

$$z = f\left(\frac{y}{x}\right);$$

choix que demandent les formules (9) puisque Z se réduit à $\frac{1}{z}$ devant la condition caractéristique

$$px + qy = 0$$

et dont il est naturel d'étudier l'extension au cas des directrices centrées les plus générales.

Il vient

$$\frac{y}{x} = -\frac{p}{q} = -\frac{b^2}{a^2}\frac{X}{Y}$$

et la polaire réciproque (S) présente l'équation

$$Z = \frac{1}{\frac{1}{c^2} f\left(-\frac{b^2}{a^2}\frac{X}{Y}\right) + \frac{a^2 - b^2}{a^4} f'\left(-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{X}{Y}\right)} \tag{10}$$

$$= F\left(\frac{Y}{X}\right);$$

le théorème initial du paragraphe 2 s'étend sous la forme suivante :

La famille des conoïdes droits coaxiaux se transforme en elle-même, dans l'ensemble, par polaires réciproques relativement à toute quadrique centrée de même axe ; les lignes asymptotiques sont conservées.

§ 8. — **Cas d'une directrice révolutive.** — Lorsque

$$b = a,$$

l'équation transformée s'écrit

$$Z = \frac{c^2}{f\left(-\frac{X}{Y}\right)};$$

ce conoïde se déduit du proposé par la transformation

$$\mathfrak{R}\left(z'z, \frac{\pi}{2}\right) . \mathfrak{J}(xOy, c^2)\,(^1).$$

(1) Cette *inversion plane* fait correspondre à tout point M_1 le point M_2 tel que, sur la perpendiculaire au plan xOy menée par le point M_1 et de pied μ,

$$\overline{\mu M_1} \cdot \overline{\mu M_2} = c^2;$$

on observera que

$$\mathfrak{J}(P, k') \equiv \mathfrak{J}(P, k) . \mathfrak{D}\left(P, \frac{k'}{k}\right).$$

Conséquences. — 1. Si le plan équatorial de la quadrique est un élément d'anallagmatie plane pour le conoïde, la polaire réciproque est *transformée par rotation* d'un angle droit autour de l'axe révolutif : c'est un conoïde égal au primitif.

Avec une puissance d'inversion différant de celle qui provoque l'invariance du conoïde, la précédente polaire subit une dilatation pure normalement au plan équatorial.

On reconnaît de suite à ces conoïdes l'équation implicite

$$e\left(\frac{y}{x}, z + \frac{c^2}{z}\right) = 0.$$

2. Si l'axe de révolution est un axe de répétition d'ordre 4 pour le conoïde, la polaire réciproque est *inversée* pour le plan équatorial.

3. Enfin, les conoïdes transformés en eux-mêmes sont ceux pour lesquels

$$\mathcal{R}\left(z'z, \frac{\pi}{2}\right) . \mathcal{I}(xOy, c^2) = 1 ;$$

leurs fonctions f sont les solutions de l'équation fonctionnelle

$$f\left(\frac{y}{x}\right) . f\left(-\frac{x}{y}\right) = c^2$$

et, en coordonnées cylindriques, celles de

$$\varphi(\theta) . \varphi\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = c^2.$$

Formulons à son sujet quelques remarques :

1° La multiplication membre à membre des relations

$$\varphi(\theta) . \varphi\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = c^2,$$

$$c^2 = \varphi\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) . \varphi(\theta + \pi),$$

qui donne

$$\varphi(\theta + \pi) = \varphi(\theta),$$

montre que toute solution φ, périodique et de période π, s'exprime au moyen de $\operatorname{tg}\theta$.

2° L'existence d'une solution $\varphi_0(\theta)$ assure celle de la solution $\dfrac{c^2}{\varphi_0(\theta)}$ car la relation hypothétique

$$\varphi_0(\theta) . \varphi_0\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \equiv c^2$$

détermine

$$\frac{c^2}{\varphi_0(\theta)} \cdot \frac{c^2}{\varphi_0\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)} \equiv c^2.$$

3° Dans le cas d'un ellipsoïde directeur, la moyenne géométrique d'un nombre fini de solutions est une solution car c^2 est ici positif et les relations

$$\varphi_i(\theta) \cdot \varphi_i\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \equiv c^2$$

entraînent successivement

$$[\Pi\, \varphi_i(\theta)] \cdot \left[\Pi\, \varphi_i\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\right] \equiv c^{2n}$$

et

$$\sqrt[n]{\Pi\, \varphi_i(\theta)} \cdot \sqrt[n]{\Pi\, \varphi_i\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)} \equiv c^2.$$

Dans le cas d'un hyperboloïde le théorème intéresse un nombre pair de solutions. La plus immédiate apparemment correspond au conoïde

$$z = c\, \mathrm{tg}^2 \theta,$$

cas particulier de

$$z = c\, \mathrm{tg}^2 (2h - 1)\theta.$$

§ 9. — **Résultats géométriques.** — Des considérations analytiques permettent d'apporter, en un sens, quelques précisions aux résultats antérieurs.

Soit la quadrique la plus générale sans point double, d'équation

$$\begin{aligned} \mathrm{Q} \equiv \mathrm{A}x^2 + \mathrm{A}'y^2 + \mathrm{A}''z^2 + 2\mathrm{B}yz + 2\mathrm{B}'zx \\ + 2\mathrm{B}''xy + 2\mathrm{C}a + 2\mathrm{C}'y + 2\mathrm{C}''z + \mathrm{D} = 0 \end{aligned}$$

avec

$$\begin{vmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B}'' & \mathrm{B}' & \mathrm{C} \\ \mathrm{B}'' & \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C}' \\ \mathrm{B}' & \mathrm{B} & \mathrm{A}'' & \mathrm{C}'' \\ \mathrm{C} & \mathrm{C}' & \mathrm{C}'' & \mathrm{D} \end{vmatrix} \neq 0,$$

et la famille des conoïdes droits (s) d'axe $z'Oz$, produits par les droites (g) d'équations paramétriques

$$\begin{cases} x = \alpha\rho, \\ y = \beta\rho, \\ z = z_0, \end{cases}$$

en lesquelles α, β, z_0 sont fonctions d'un même paramètre.

Les polaires réciproques forment une famille de surfaces réglées (S), qu'engendrent les conjuguées (G) des génératrices (g) : si un point m décrit en effet (g), son plan polaire, dont l'enveloppe est (S), tourne autour de (G).

Or, ce plan polaire possède l'équation

$$\begin{aligned} &X(A\alpha\rho + B''\beta\rho\, B'z_0 + C) \\ &\quad + Y(B''\alpha\rho + A'\beta\rho + Bz_0 + C') \\ &\qquad + Z(B'\alpha\rho + B\beta\rho + A''z_0 + C'') \\ &\qquad\quad + (C\alpha\rho + C'\beta\theta + C''z_0 + D) = 0, \end{aligned}$$

de sorte que celles de (G) s'écrivent

$$\begin{cases} X(A\alpha + B''\beta) + Y(B''\alpha + B'\beta) + Z(B'\alpha + B\beta) + (C\alpha + C'\beta) = 0, \\ X(B'z_0 + C) + Y(Bz_0 + C') + Z(A''z_0 + C'') + (C''z_0 + D) = 0. \end{cases}$$

La première montre que (G) prend constamment appui sur l'intersection des plans

$$\begin{aligned} Q'_X &\equiv A\,X + B''Y + B'Z + C\ = 0, \\ Q'_Y &\equiv B''X + A'Y + B\,Z + C' = 0, \end{aligned}$$

c'est-à-dire sur le diamètre conjugué (Π) du plan directeur conoïdal xOy; la seconde que (G) repose encore sur l'intersection des plans

$$\begin{aligned} Q'_Z &\equiv B'X + B\,Y + A''Z + C'' = 0, \\ Q'_T &\equiv C\,X + C'Y + C''Z + D\ = 0, \end{aligned}$$

c'est-à-dire sur la droite conjuguée (Λ) de l'axe conoïdal $z'Oz$.

Soit enfin (c) une courbe de (s), que (g) rencontre en un point n; le plan tangent en n possède un pôle dont le lieu est une courbe (Γ), troisième directrice de (S).

Ainsi,

La polaire réciproque d'un conoïde pour une quadrique est généralement une surface réglée à trois directrices dont deux sont rectilignes.

Cette surface a été étudiée par G. Salmon[1]; en supposant (Γ) algébrique, de degré m et rencontrant les droites (Λ) et (Π) en λ et ϖ points respectivement, (S) a pour degré

$$2m - (\lambda + \varpi),$$

d'après la formule de Cayley-Salmon, et (Γ), (Λ), (Π) en sont des lignes multiples d'ordres 1, $m - \lambda$, $m - \varpi$.

§ 10. — Quand une directrice rectiligne se rejette à l'infini, la surface de Salmon devient conoïdale — oblique ou droite — puisque l'appui de (G) sur cette directrice n'est autre qu'un parallélisme entre droite et plan.

D'une part, (Λ) n'est à l'infini que si $z'z$ est un diamètre pour la quadrique, donc passe au centre de l'ellipsoïde et de l'hyperboloïde ou bien est parallèle à l'axe du paraboloïde.

D'autre part, (Π) n'est à l'infini qu'avec un paraboloïde dont l'axe est parallèle à xOy.

Bref,

La polaire réciproque n'est un conoïde que si le centre de la quadrique directrice se situe sur l'axe conoïdal donné, à distance finie ou infinie.

§ 11. — Recherchons, en terminant, les circonstances qui conduisent à la rectitude du conoïde réciproque.

1. *La quadrique-directrice est ellipsoïdale ou hyperboloïdale.*

Rapportons la quadrique à ses axes, lui donnant l'équation

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + D = 0, \qquad (AA'A'' \neq 0)$$

et soient α, β, γ des paramètres directeurs de l'axe conoïdal; les équations de (Π) s'écrivent aussitôt

$$\frac{Ax}{\alpha} = \frac{A'y}{\beta} = \frac{A''z}{\gamma},$$

tandis que (Λ) est à l'infini dans le plan

$$A\alpha x + A'\beta y + A''\gamma z = 0.$$

---

[1] *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*; vol. VIII, p. 45. L'éminent géomètre a également énuméré quelques singularités de ladite surface dans son *Traité de Géométrie Analytique à trois dimensions* : t. II, §§ 467 et sqq.

Si deux des trois coefficients α, β, γ sont nuls, l'orthogonalité de la droite et du plan se réalise : *l'axe conoïdal se confond avec un axe de la quadrique*, et c'est le cas étudié au paragraphe 7.

Si l'un des coefficients est nul, γ par exemple, l'orthogonalité exige

$$A^2 = A'^2;$$

la quadrique possède l'une des équations

$$(x^2 \pm y^2) + a''z^2 + d = 0 :$$

ou *l'axe conoïdal est un diamètre équatorial pour une quadrique révolutive*, ou c'est *un diamètre d'une section principale équilatère pour un tel hyperboloïde*.

Si aucun des coefficients n'est nul, l'orthogonalité impose

$$A^2 = A'^2 = A''^2;$$

il s'agit du cas précédent en lequel

$$a'' = 1.$$

L'hypothèse du paragraphe 7 est la seule qui transforme l'une en l'autre deux familles de conoïdes droits, la quadrique-directrice étant quelconque.

2. *La quadrique-directrice est paraboloïdale.*

Dans un premier cas l'axe paraboloïdal doit être pris parallèlement à $z'z$; nous le situerons dans le plan xOz en toute généralité, attribuant à la quadrique l'équation

$$Ax^2 + A'y^2 + 2Cx + 2C''z + D = 0. \qquad (AA' \neq 0)$$

L'orthogonalité de la droite (II)

$$\begin{cases} AX + C = 0, \\ Y = 0 \end{cases}$$

et du plan

$$CX + C''Z + D = 0$$

exige la nullité de C : *les axes conoïdal et paraboloïdal sont confondus.*

Dans un second cas, l'axe paraboloïdal doit être pris parallèlement à xOy; nous le situerons dans ce plan et parallèle à $y'y$ en toute généralité, attribuant à la quadrique l'équation

$$Ax^2 + A''z^2 + 2Cx + 2C'y + D = 0. \qquad (AA'' \neq 0)$$

L'orthogonalité de la droite (Λ)

$$\begin{cases} Z = 0, \\ CX + C'Y + D = 0 \end{cases}$$

et du plan

$$AX + C = 0$$

exige la nullité de C' : *les axes conoïdal et paraboloïdal sont perpendiculaires.*

Les hypothèses des paragraphes 3 et 6 sont les seules qui transforment l'une en l'autre deux familles de conoïdes droits.

Décembre 1932