

ANDRÉ HAARBLEICHER

Courbes auto-inverses isogonales par rapport à un triangle

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 4^e série, tome 2 (1938), p. 47-58

http://www.numdam.org/item?id=AFST_1938_4_2__47_0

© Université Paul Sabatier, 1938, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

COURBES AUTO-INVERSES ISOGONALES

PAR RAPPORT A UN TRIANGLE

Par M. ANDRÉ HAARBLEICHER

1. Une courbe auto-inverse isogonale par rapport à un triangle est une courbe qui est sa propre inverse isogonale par rapport à ce triangle.

Une telle courbe a les propriétés réciproques de deux courbes inverses isogonales l'une de l'autre. Par exemple :

Si un point P , autre qu'un sommet du triangle, est point simple ou point multiple d'ordre p de la courbe, le point P' , inverse isogonal de P , en est également point simple ou point multiple d'ordre p . Cette propriété s'applique en particulier aux points cycliques qui sont inverses isogonaux l'un de l'autre.

Si la courbe est tangente à une courbe (C) en un point P , elle est tangente à la courbe inverse isogonale de (C) au point inverse isogonal de P .

Une courbe d'ordre p auto-inverse isogonale par rapport à un triangle T a les sommets Q_1, Q_2, Q_3 , du triangle pour points d'ordre q, r, s tels que $q + r + s = p$. En effet, le nombre des branches de la courbe passant par un sommet Q_3 est égal au nombre de ses points d'intersection, avec le côté opposé Q_1Q_2 , autres que Q_1 et Q_2 ; le point Q_3 est donc d'ordre s égal à $p - q - r$. (La courbe peut ne pas passer par certains des sommets Q_1, Q_2, Q_3 , c'est-à-dire que certaines des valeurs q, r, s peuvent être nulles, leur somme restant égale à p . Exemples : n^{os} 10, 12 à 16, 18 à 22.)

2. Une courbe Φ auto-inverse isogonale par rapport à un triangle T est le lieu de foyers coaxiaux d'une certaine famille de coniques inscrites dans le triangle.

Le lieu des centres des coniques de cette famille est une courbe Q .

La courbe Q peut aussi être définie : le lieu du milieu du segment de droite qui joint deux points inverses isogonaux de la courbe Φ .

3. *Lorsque le centre d'une conique, qui varie en restant inscrite dans un triangle T , décrit une courbe Q , d'ordre n , le lieu des quatre foyers de la conique est une courbe Θ d'ordre $3n$ qui est auto-inverse isogonale par rapport à ce triangle; cette*

courbe a pour points multiples d'ordre n les points cycliques et les sommets du triangle T et pour directions asymptotiques celles de la courbe Q ; elle rencontre le cercle W circonscrit au triangle T en $6n$ points, à savoir les points cycliques et les sommets du triangle qui comptent pour $5n$ et les n points du cercle inverses isogonaux des points à l'infini de la courbe Q .

Une démonstration de ce théorème au moyen des coordonnées isotropes a été donnée au n° 70 de *E. D. I. A. C.* (*).

Les points à l'infini de la courbe sont les centres des paraboles de la famille de coniques qui sont donc au nombre de n . Les foyers de ces paraboles, situées sur la courbe Θ , sont les mêmes n points à l'infini et leurs n points inverses isogonaux sur le cercle W et, pour chaque parabole, les deux points cycliques, soit au total n fois chaque point cyclique. Réciproquement, il n'y a pas d'autre point à l'infini sur la courbe Θ , car tout point à l'infini de cette courbe correspond à une de ces paraboles.

On appellera la courbe Q *courbe primaire* et la courbe Θ *courbe dérivée*.

4. On désignera, dans ce qui suit, par Φ une courbe quelconque auto-inverse isogonale par rapport à un triangle T et par Θ une courbe lieu des quatre foyers d'une conique variable inscrite dans le triangle dont le centre parcourt une courbe Q .

D'après le n° 3, lorsqu'une courbe Φ est d'ordre p et la courbe primaire Q d'ordre n , $p \leq 3n$.

Si $p = 3n$, la courbe Φ est le lieu des quatre foyers des coniques dont le centre parcourt la courbe Q . Elle se confond avec la courbe Θ .

Si $p < 3n$, la courbe Φ n'est le lieu que d'une catégorie de foyers coaxiaux. Dans ce cas, la courbe Θ , lieu des quatre foyers, se décompose en la courbe Φ d'ordre p et une courbe Γ d'ordre $3n - p$, également auto-inverse isogonale par rapport au triangle T . A chaque courbe Φ de cette nature correspond alors une courbe Γ auto-inverse isogonale par rapport au même triangle T et ayant même courbe primaire Q que la courbe Φ .

Les deux courbes Φ et Γ ont ensemble les propriétés de la courbe Θ définies au n° 3 : l'une a les propriétés complémentaires de l'autre. Lorsque la courbe Φ ne passe pas par les points cycliques, la courbe Q est, d'après le n° 3, du même ordre n que la courbe Φ et a les mêmes directions asymptotiques; la courbe Γ est d'ordre $2n$, elle a les points cycliques pour points multiples d'ordre n et n'a pas d'autre direction asymptotique.

Ainsi, une courbe Φ peut être une courbe Θ ou n'être qu'une partie d'une

(*) De l'emploi des droites isotropes comme axes de coordonnées, Gauthier-Villars, 1931. Analyse bibliographique de A. BUIH dans *L'Enseignement mathématique* (1933, t. 32, p. 282).

courbe Θ et former alors, avec une courbe Γ , une courbe Θ . Les théorèmes relatifs à une courbe Φ s'appliquent nécessairement à une courbe Θ . Mais ceux qui concernent une courbe Θ ne s'appliquent pas à une courbe Φ , mais à l'ensemble d'une courbe Φ et d'une courbe Γ .

5. *Lorsque la courbe primaire Q passe par l'un des centres I de cercle tangent aux trois côtés du triangle T , la courbe dérivée Θ a le point I pour point double et les tangentes à la courbe Θ en ce point sont rectangulaires.*

En effet, ce cercle est la position de la conique variable lorsque le centre est en I ; les quatre foyers de cette conique variable dont le centre se rapproche du point I s'en rapprochent également en restant deux par deux sur les deux axes rectangulaires de la conique. Ces axes rectangulaires ont pour limites les tangentes à la courbe Θ .

Lorsque la courbe primaire Q a l'un des centres I de cercle tangent aux trois côtés du triangle comme point multiple d'ordre p , la courbe dérivée Θ a ce point pour point multiple d'ordre $2p$ et les tangentes à la courbe Θ en ce point sont deux à deux rectangulaires.

Réciproquement, *lorsqu'une courbe Φ passe par l'un de ces points, la courbe primaire Q y passe également.*

6. *Toute courbe Φ auto-inverse isogonale par rapport à un triangle T qui a les points cycliques pour points multiples d'ordre p a p foyers doubles situés sur le cercle circonscrit au triangle T .*

Toute courbe Θ d'ordre $3n$, lieu des quatre foyers des coniques inscrites dans un triangle T dont le centre parcourt une courbe Q d'ordre n , a pour foyers doubles les n points d'intersection de la courbe Θ avec le cercle circonscrit au triangle T autres que les sommets du triangle et les points cycliques. Ces points sont inverses isogonaux des points à l'infini de la courbe Q .

En effet, une asymptote à une courbe Φ en un point cyclique i est la limite d'une corde ii' de la courbe Φ lorsque le point i' se rapproche indéfiniment du point i . Le point i' de la courbe Φ est un foyer d'une des coniques de la famille F considérée (n° 2) et par suite la droite ii' est, par définition du foyer, tangente à cette conique. A la limite, l'asymptote à la courbe Φ est tangente à la parabole limite de la conique. Elle passe donc par le foyer f de la parabole situé sur le cercle circonscrit au triangle T . Il en est de même d'une asymptote à la courbe Φ en l'autre point cyclique j . Le point f est donc un foyer double de la courbe Φ . Le même théorème s'applique à chaque parabole de la famille F .

Ces théorèmes permettent, une courbe quelconque étant donnée, d'examiner s'il existe des triangles par rapport auxquels elle est auto-inverse isogonale et de déterminer ces triangles.

7. On peut démontrer comme suit ces théorèmes en utilisant les coordonnées isotropes.

Lemme. *Une droite D de direction isotrope a pour inverse isogonale par rapport à un triangle T une conique ayant une asymptote qui est parallèle à l'autre direction isotrope et qui coupe la droite D sur le cercle circonscrit au triangle T.*

En effet, en prenant comme origine des coordonnées isotropes le centre du cercle W circonscrit au triangle T et en conservant les notations de *E. D. I. A. C.*, l'équation de la droite D étant

$$X - \lambda = 0,$$

on aura pour celle de la conique inverse isogonale (n° 35, *E. D. I. A. C.*)

$$PY^2 - TY - X + S + \lambda XY - \lambda = 0;$$

l'équation de l'asymptote parallèle à l'axe de coordonnées des X est

$$-1 + \lambda Y = 0 \quad \text{ou} \quad Y - \frac{1}{\lambda} = 0;$$

cette asymptote coupe la droite D au point $\left(\lambda, \frac{1}{\lambda}\right)$ sur le cercle W.

L'asymptote, en un point cyclique i à une courbe Φ auto-inverse isogonale, a pour inverse isogonale une conique asymptote à la courbe Φ en l'autre point cyclique j (n° 4). L'asymptote en j à cette conique est également asymptote à la courbe Φ ; donc, d'après le lemme, le point de rencontre des deux asymptotes, foyer double de la courbe Φ , est sur le cercle W. L'application de ce théorème à chaque branche de la courbe Φ qui passe par l'un des points cycliques donne la démonstration pour le cas où les points cycliques sont des points multiples.

Applications : cercle (n° 10), cubique circulaire (n° 24), strophoïde (n° 25), courbe des trois barres (n° 23).

8. *Chaque asymptote à une courbe primaire Q est équidistante de l'asymptote parallèle à la courbe dérivée Θ et du foyer double correspondant de Θ .*

En effet, soit ω' le centre d'une conique de la famille F qui s'éloigne à l'infini sur Q, f'_1 et f' les foyers coaxiaux de cette conique qui se rapprochent l'un du point à l'infini f_1 de Θ dans la même direction que ω' et l'autre du foyer double f inverse isogonal de f_1 ; ω' est le milieu de $f'f'_1$; donc les parallèles à l'asymptote en f_1 menées par f'_1 , ω' et f' sont équidistantes. Il en est de même à la limite : les limites des deux premières sont les asymptotes à Θ et à Q, celle de la troisième la parallèle menée par f .

Applications : cubique circulaire (n° 24); strophoïde (n° 25).

Applications.

9. On prendra comme notations : Q_1, Q_2, Q_3 les sommets du triangle T par rapport auquel les courbes sont auto-inverses isogonales, I, I_1, I_2, I_3 les centres des cercles inscrit et exinscrits dans les angles Q_1, Q_2, Q_3 au triangle T, W le cercle circonscrit au triangle, Φ, Γ, Θ, Q les courbes définies au n° 4.

Pour déterminer les familles de courbes auto-inverses isogonales des différents ordres, on appliquera la méthode générale dont voici l'exemple pour le premier ordre.

Soit, en coordonnées trilinéaires, avec le triangle T comme triangle de référence,

$$AX + BY + CZ = 0$$

l'équation d'une droite. La courbe inverse isogonale a pour équation

$$\frac{A}{X} + \frac{B}{Y} + \frac{C}{Z} = 0$$

ou

$$AYZ + BZX + CXY = 0;$$

l'identification donne

$$AX + BY + CZ = K(AYZ + BZX + CXY),$$

K étant un coefficient. Il faut que les termes du second membre aient un facteur commun, Z par exemple. D'où

$$C = 0, \quad A = KB, \quad B = KA; \quad \text{d'où} \quad K^2 = 1, \quad K = \pm 1$$

et les deux solutions

$$\begin{aligned} X + Y &= 0, \\ X - Y &= 0. \end{aligned}$$

En mettant en facteur X ou Y, on n'obtient pas une solution différente, mais une permutation des sommets du triangle.

Droites auto-inverses isogonales.

10. Φ , bissectrice du triangle T, $Q_2 I_1 I_3$ (ou $Q_3 I_1 I_2$).

Q , la même bissectrice.

Γ , le cercle de diamètre $I I_3$ (ou $I_1 I_2$); il passe par Q_1 et Q_3 ; son centre, foyer double, est sur le cercle W (n° 6).

Coniques auto-inverses isogonales.

11. La méthode du n° 9 donne avec Z^2 et YZ en facteur et $K = \pm 1$, les familles de coniques définies par les quatre équations trilinéaires :

$$\begin{aligned} \mathbf{A} & \quad A(X^2 + Y^2) + BXY = 0; \\ \mathbf{B} & \quad X^2 - Y^2 = 0; \\ \mathbf{C} & \quad A(X^2 + YZ) + B(XY + ZX) = 0; \\ \mathbf{D} & \quad A(X^2 - YZ) + B(XY - ZX) = 0. \end{aligned}$$

12. A. Φ , deux droites passant par un sommet Q_3 du triangle T , inverses isogonales l'une de l'autre, Q_3D et Q_3D' , D et D' étant sur le cercle W .

Q , conique ayant ses asymptotes parallèles à Q_3D et Q_3D' , pour centre le milieu de la droite DD' (n° 8), qui est parallèle à Q_1Q_2 . Les axes sont donc parallèles aux bissectrices de l'angle Q_3 du triangle T et son centre est sur la perpendiculaire élevée au milieu de Q_1Q_2 . En outre, Q_3 a pour polaire Q_1Q_2 par rapport à cette conique.

Γ , deux cercles passant par Q_1 et Q_2 , inverses isogonaux l'un de l'autre. Les points D et D' étant des foyers doubles de la quartique formée par ces deux cercles (n° 6), les centres sont les points d'intersection des droites isotropes passant par D et D' (imaginaires quand le triangle T et les droites Q_3D et Q_3D' sont réels).

13. A. Cas particulier : les deux droites sont les droites isotropes passant par Q_3 .
 Q , droite parallèle à Q_1Q_2 , équidistante de Q_3 et de Q_1Q_2 .

Γ , droite Q_1Q_2 .

Cas limite où la conique variable inscrite dans le triangle T se réduit à deux points : le point Q_3 et un point quelconque du côté Q_1Q_2 .

14. B. Φ , deux bissectrices passant par un sommet Q_3 . C'est deux fois le cas du n° 10.

15. C et D. Φ , conique quelconque passant par Q_2, Q_3, I, I_1 (**C**) ou Q_2, Q_3, I_2, I_3 (**D**). Ce cas a été examiné dans une « Étude sur la courbe des trois barres », *Journal de l'École Polytechnique*, année 1933, page 13, n° 21.

Q , conique passant par I, I_1 (ou I_2, I_3) et ayant mêmes directions asymptotiques que Φ .

Γ , quartique bicirculaire ayant Q_1 pour point double et passant par Q_2, Q_3, I, I_1 (**C**)

ou Q_2, Q_3, I_1, I_2 (D). Γ a pour foyers doubles les deux points B et C d'intersection de Φ et de W autres que Q_2 et Q_3 .

Les parallèles aux asymptotes des coniques Q et Φ menées par B et C se coupent en un point D symétrique du centre de la conique Φ par rapport au centre de la conique Q (n° 8).

16. C et D. Cas particulier : la conique Φ est un cercle. C'est le cas du n° 10 avec interversion de Φ et de Γ .

Cubiques auto-inverses isogonales.

17. La méthode du n° 9 donne, avec Z^3, YZ^2 et XYZ en facteur et $K = \pm 1$, les familles de cubiques définies par les six équations trilinéaires :

$$\begin{aligned} \text{A} \quad & A(X^3 + Y^3) + B(X^2Y + Y^2X) = 0; \\ \text{B} \quad & A(X^3 - Y^3) + B(X^2Y - Y^2X) = 0; \\ \text{C} \quad & A(X^3 + Y^2Z) + B(X^2Y + XYZ) + C(Y^2X + X^2Z) = 0; \\ \text{D} \quad & A(X^3 - Y^2Z) + B(X^2Y - XYZ) + C(Y^2X - X^2Z) = 0; \\ \text{E} \quad & A(Y^2X + Z^2X) + B(Z^2Y + X^2Y) + C(X^2Z + Y^2Z) + DXYZ = 0; \\ \text{F} \quad & A(Y^2X - Z^2X) + B(Z^2Y - X^2Y) + C(X^2Z - Y^2Z) = 0. \end{aligned}$$

18. A et B. Φ , trois droites passant par un sommet du triangle : une bissectrice et deux symétriques par rapport aux bissectrices. C'est une réunion des n° 10 et 12 ou des n° 10 et 13.

19. C et D. Φ , cubique ayant Q_3 pour point double et passant par Q_2, I_1, I_2 (C) ou Q_2, I_1, I_2 (D).

Q, cubique passant par I_1, I_2 (C) ou I_1, I_2 (D).

Γ , courbe du sixième ordre ayant les points cycliques et le point Q_1 pour points triples, le point Q_3 pour point double passant par Q_2, I_1, I_2 (C) ou Q_2, I_1, I_2 (D) et ayant pour foyers doubles les trois points d'intersection de Φ et de W autres que Q_2 et Q_3 .

20. C et D. Cas particulier : Φ , cubique décomposable en :

1° une bissectrice de l'angle Q_3 et une conique Q_2, Q_3, I_1, I_2 ou Q_2, Q_3, II_1 ; c'est une réunion des n° 10 et 15.

2° trois droites : une bissectrice de l'angle Q_3 et deux droites passant par Q_2 et symétriques par rapport aux bissectrices de l'angle Q_3 ; c'est une réunion des n° 10 et 12.

21. C et D. Cas particulier : la cubique Φ est circulaire.

Q , conique passant par I_1, I_3 (**C**) ou I, I_2 (**D**).

Γ , cubique circulaire de la même famille que Φ , ayant Q_1 pour point double et passant par Q_2, I_1, I_3 (**C**) ou Q_2, I, I_2 (**D**).

Le foyer double de chacune des cubiques Φ et Γ est le point d'intersection de l'autre avec le cercle W .

22. C et D. Cas particulier du précédent : la cubique circulaire se décompose en :

1° le cercle $I_3Q_2Q_3I_2$ et la bissectrice $I_1Q_3I_2$ (**C**).

Q , les deux bissectrices $I_1Q_3I_2$ et $I_3Q_4I_2$.

Γ , la bissectrice $I_3Q_4I_2$ et le cercle $Q_1Q_2I_1I_2$ (**C**).

2° la bissectrice $I_3Q_2I_1$ et les deux droites isotropes passant par Q_3 (**C**). C'est une réunion des n° 10 et 13.

23. E. Φ , cubique circonscrite au triangle T et définie par la propriété suivante : Φ est le lieu des points dont le cercle podaire par rapport au triangle T est orthogonal à un cercle fixe et réciproquement.

Autre définition : Φ est le lieu de deux foyers coaxiaux d'une conique qui varie en restant inscrite dans le triangle T de telle façon que le cercle qui a pour diamètre l'axe passant par ces deux foyers reste orthogonal à un cercle fixe et réciproquement.

Q , cubique ayant les mêmes directions asymptotiques que Φ .

Γ , courbe des trois barres, courbe du sixième ordre ayant les points cycliques pour points triples, les sommets Q_1, Q_2, Q_3 du triangle T pour points doubles et les points A, B, C d'intersection de Φ et du cercle W pour foyers doubles. Les triangles $Q_1Q_2Q_3$ et ABC sont circonscrits à une même parabole.

Définition de Γ collatérale de la définition de Φ ci-dessus : la courbe des trois barres est le lieu de deux foyers coaxiaux d'une conique qui varie en restant inscrite dans un triangle de telle façon que le cercle principal qui a pour diamètre l'autre axe de la conique reste orthogonal à un cercle fixe et réciproquement (Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences, 2 novembre 1933. — *Journal de l'École Polytechnique, loc. cit.*).

Réciproquement, toute courbe du sixième ordre qui a les points cycliques pour points triples, les sommets du triangle $Q_1Q_2Q_3$ pour points doubles et trois foyers doubles A, B, C sur le cercle circonscrit au triangle $Q_1Q_2Q_3$ tels que les triangles ABC et $Q_1Q_2Q_3$ soient circonscrits à une même parabole est une courbe des trois barres.

24. E. Cas particulier : la cubique Φ est circulaire.

Q , droite parallèle à l'asymptote non isotrope de Φ .

Ce cas est celui où le cercle orthogonal défini au n° 23 a son centre rejeté à l'infini.

Il n'y a pas de courbe Γ , la courbe Φ se confond avec la courbe Θ (n° 4).

Ainsi : le lieu des foyers des coniques inscrites dans un triangle dont le centre parcourt une droite et une cubique circulaire circonscrite au triangle (n° 3).

Le foyer double A , point d'intersection des asymptotes isotropes est situé sur la cubique (n° 6); c'est le quatrième point d'intersection à distance finie de la cubique et du cercle W .

La droite Q est équidistante du foyer double A et de l'asymptote non isotrope de Φ (n° 8).

Application : le lieu des foyers des coniques inscrites dans un quadrilatère est une cubique circulaire, car le lieu des centres est une droite; son foyer double est le foyer de la parabole inscrite dans le quadrilatère.

Réciproquement, toute cubique circulaire dont le foyer double est sur la courbe est auto-inverse isogonale par rapport à tout triangle formé par les trois points d'intersection (autres que le foyer double et les points cycliques) de cette cubique avec un cercle quelconque passant par le foyer double.

Pour tous ces triangles, la courbe primaire Q est la même droite : la parallèle à l'asymptote de la cubique équidistante de cette asymptote et du foyer double.

En effet, soit Φ la cubique circulaire, f son foyer double situé sur la courbe, D la parallèle à l'asymptote non isotrope équidistante de cette asymptote et du foyer double, W un cercle quelconque passant par le point f , Q_1, Q_2, Q_3 les trois autres points d'intersection à distance finie du cercle W et de la cubique Φ .

Soit Π la parabole de foyer f , d'axe parallèle à D et tangente à Q_2Q_3 . Les secondes tangentes à la parabole Π menées par Q_2 et Q_3 se coupent en un point Q'_1 situé sur le cercle W . Soit Θ la cubique dérivée de la droite D par rapport au triangle $Q'_1Q_2Q_3$. Les cubiques Θ et Φ ont en commun les trois points à l'infini et les asymptotes (n° 3 et 8), ce qui fait trois points en ligne droite et les tangentes en ces points; si elles étaient distinctes, leurs trois autres points d'intersection Q_2, Q_3, f seraient en ligne droite; ces points étant sur un cercle, les deux cubiques sont confondues, le point Q'_1 est confondu avec le point Q_1 et la cubique Φ est dérivée de la droite D par rapport au triangle $Q_1Q_2Q_3$.

25. E. Cas particulier du précédent : cette cubique circulaire a un point double. Les tangentes au point double étant rectangulaires (n° 5), la cubique est une strophoïde.

Ce cas se présente (n° 5 et 24) lorsque la courbe primaire est une droite quelconque passant par le centre d'un des cercles inscrit ou exinscrits au triangle T .
Donc :

Le lieu des foyers des coniques inscrites dans un triangle dont le centre parcourt

une droite passant par le centre d'un cercle inscrit ou exinscrit au triangle est une strophoïde. Le point double de la strophoïde est le centre de ce cercle, le foyer double est le point inverse isogonal, par rapport au triangle, du point à l'infini sur la droite considérée, l'asymptote est la parallèle à cette droite menée par le point symétrique du foyer double par rapport à cette droite.

On définit ainsi une strophoïde : on donne un angle $yo\alpha$ et un point A sur le côté $o\alpha$, par ce point on mène des sécantes qui rencontrent oy en un point B; puis, sur chaque sécante, on porte à partir du point B des longueurs $BM = BM' = BO$. La courbe décrite par les points M et M' est une strophoïde. *Le point A est le foyer double de la strophoïde.*

Corollaires du n° 24. I. *Une strophoïde est auto-inverse isogonale par rapport à tout triangle formé par les trois autres points d'intersection à distance finie de la strophoïde avec un cercle quelconque passant par le point A.*

II. *Si par le point A on fait passer un cercle quelconque qui coupe la strophoïde en trois autres points Q_1, Q_2, Q_3 , le point double de la strophoïde est le centre d'un cercle inscrit ou exinscrit à tout triangle $Q_1Q_2Q_3$ ainsi formé.*

La condition nécessaire et suffisante pour que le lieu des foyers des coniques inscrites dans un quadrilatère soit une strophoïde est que le quadrilatère soit circonscriptible à un cercle. Le point double de la strophoïde est le centre du cercle.

26. F. Φ , cubique passant par les sept points $Q_1, Q_2, Q_3, I, I_1, I_2, I_3$ et réciproquement.

Déterminons la courbe Q. En coordonnées isotropes, le triangle T étant pris comme triangle de base, l'équation de Φ est (E. D. I. A. C.)

$$(1) \quad A(PYW + U) + B(XW + V) + C(PVY - UX) = 0.$$

Soit $X, Y, X_0, Y_0, \xi, \eta$ les coordonnées d'un point P de la courbe Φ , du point P_0 inverse isogonal et du milieu du segment de droite PP_0 , point qui décrit la courbe Q, on a (n° 34, E. D. I. A. C.)

$$(2) \quad U = -PY_0W,$$

$$(3) \quad V = -X_0W,$$

$$(4) \quad 2\xi = X + X_0,$$

$$(5) \quad 2\eta = Y + Y_0;$$

l'équation en ξ, η de Q s'obtient en éliminant X, Y, X₀, Y₀ entre ces cinq équations: (2) et (3) s'écrivent

$$\begin{aligned} S &= 2\xi + PYY_0, \\ T &= XX_0 + 2P\eta. \end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} PYW + U &= PW(Y - Y_0), \\ XW + V &= W(X - X_0), \\ PVY - UX &= PW(-X_0Y + Y_0X). \end{aligned}$$

Donc l'équation (1) devient

$$AP(Y - Y_0) + B(X - X_0) + CP(Y_0X - X_0Y) = 0.$$

En outre,

$$(X - X_0)^2 = (X + X_0)^2 - 4XX_0 = 4\xi^2 + 8P\eta - 4T,$$

$$(Y - Y_0)^2 = (Y + Y_0)^2 - 4YY_0 = 4\eta^2 - 4\frac{S - 2\xi}{P},$$

$$Y_0X - X_0Y = (2\eta - Y)X - (2\xi - X)Y = 2\eta X - 2\xi Y = \pm 2\eta\sqrt{\xi^2 + 2P\eta - T} \pm 2\xi\sqrt{\eta^2 - \frac{S - 2\xi}{P}}.$$

D'où

$$(6) \quad (AP - CP\xi)^2 \left(\eta^2 - \frac{S - 2\xi}{P} \right) - (B - CP\eta)^2 (\xi^2 + 2P\eta - T) = 0;$$

cette équation représente une cubique. Les courbes d'équations

$$\eta^2 - \frac{S - 2\xi}{P} = 0, \quad \xi^2 + 2P\eta - T = 0,$$

sont des coniques passant par I, I₁, I₂, I₃.

Donc la courbe Q est une cubique passant par I, I₁, I₂, I₃.

Γ, courbe du sixième ordre ayant les points cycliques pour points triples, les points Q₁, Q₂, Q₃ pour points doubles, passant par I, I₁, I₂, I₃ et ayant pour foyers doubles les trois points A, B, C d'intersection, autres que Q₁, Q₂, Q₃, de la cubique Φ et du cercle W.

Les triangles Q₁Q₂Q₃ et ABC sont tels qu'un de ces triangles et le symétrique de l'autre par rapport au centre du cercle W sont circonscrits à une même parabole.

27. F. Cas particulier : la cubique Φ est circulaire. Dans l'équation (1) de Φ , $C = 0$; cette équation devient

$$A(PYW + U) + B(XW + V) = 0.$$

Q , d'après l'équation (6), hyperbole équilatère passant par I, I_1, I_2, I_3 , d'équation

$$(7) \quad A^2 P^2 \left(Y^2 - \frac{S - 2X}{P} \right) - B^2 (X^2 + 2PY - T) = 0.$$

Γ , cubique circulaire passant par $Q, Q_2, Q_3, I, I_1, I_2, I_3$. C'est une autre cubique Φ ; l'équation (7) montre que c'est la cubique d'équation

$$A(PYW + U) - B(XW + V) = 0.$$

Le foyer double de chacune des cubiques Φ et Γ est le point d'intersection de l'autre avec le cercle W .

Réciproquement, Q étant une hyperbole équilatère quelconque passant par I, I_1, I_2, I_3 , sa courbe dérivée Θ se décompose en deux cubiques Φ et Γ définies ci-dessus.
