ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

J. DIXMIER

L'adjoint du produit de deux opérateurs fermés

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 4e série (1947), p. 101-106
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1947_4_11__101_0>

L'ADJOINT DU PRODUIT DE DEUX OPÉRATEURS FERMÉS

par J. DIXMIER

1) Introduction: Précisons d'abord nos notations. Soit H un espace d'Hilbert, de dimension quelconque. Si A et B sont deux opérateurs [1] de H, on désigne par D_A le domaine d'existence de A, par Δ_A son domaine des valeurs, par A^* son adjoint, par $\tilde{A}$ son plus petit prolongement linéaire fermé, par AB le produit de A et B; $A > B$ signifie que A est un prolongement de B. Si V et V′ sont deux variétés linéaires, [V] désigne la plus petite variété linéaire fermée contenant V, P_V l'opérateur de projection sur V, $V \dot{+} V'$ désigne la plus petite variété linéaire contenant V et V′, et $V \oplus V' = [V \dot{+} V']$.

Soit H et H′ deux espaces d'Hilbert de même dimension orthogonaux, et U un opérateur isométrique avec $D_U = H$, $\Delta_U = H'$. Si A est un opérateur de H, on appelle image V de A par rapport à H, H′, U, l'ensemble des vecteurs $X + UAX$, où $X \in D_A$. V est linéaire fermée si et seulement si A est linéaire fermé. On peut avoir $V \cap H' \neq 0$, c'est-à-dire que A peut être multiforme [2].

Lorsque A et B sont deux opérateurs linéaires bornés définis dans H, on a la formule bien connue : $(AB)^* = B^* A^*$. Dès qu'on sort du cadre des opérateurs bornés, la formule cesse d'être exacte. Nous allons chercher une formule plus générale.

2) Définition de A. B.: Définissons un nouveau produit des deux opérateurs A et B.

Définition : $X \in D_{A.B}$, *et* $Y = A.BX$ *s'il existe deux suites de vecteurs,* (X_n) *et* (Y_n), *avec* $X_n \in D_B$, $Y_n \in \Delta_A$, $A^{-1} Y_n - BX_n \to 0$ (pour des $A^{-1} Y_n$ et des BX_n bien choisis, puisque B et A^{-1} peuvent être multiformes).

Soit H, H′, H″, trois espaces d'Hilbert de même dimension deux à deux orthogonaux dans $\mathcal{H} = H \oplus H' \oplus H''$. Soit U et U′ des opérateurs isométriques tels que $D_U = H$, $\Delta_U = H$, $D_{U'} = H'$, $\Delta_{U'} = H''$; soit $U'' = U' U$, qui transforme isométriquement H en H″. Soit A et B deux opérateurs de H. Soit V l'image de B par rapport à H, H′, U, et V′ l'image de UAU^{-1} (qui opère dans H′) par rapport à H′, H″, U′. Soit V″ et U″ les images de AB et A. B par rapport à H, H″, V″. Soit enfin, dans $H \oplus H''$, S la symétrie par rapport à H″.

---

1. Tous les opérateurs considérés ici seront supposés implicitement linéaires.
2. Cf. à ce sujet mon travail : "Étude sur les variétés et les opérateurs de Julia, avec quelques applications", Bull. Soc. Math. de France, (1949), chap. I, § 8. (Ce travail est désigné dans la suite par E).

Lemme 1: Soit deux vecteurs, $X \in H$, $X'' \in H''$. *On a:* $X + X'' \in V''$ *si et seulement si il existe un vecteur* $X' \in H'$ *avec* $X + X' \in V$, $X' + X'' \in V'$.

Démonstration: a) Si $X + X'' \in V''$, on a: $X'' = U'' ABX = U' (UAU^{-1})(UB)X$. Soit $X' = UBX \in H'$. On a: $X + X' \in V$, et $X'' = U' (UAU^{-1}) X'$, donc $X' + X'' \in V'$.

b) Si, réciproquement, il existe un $X' \in H'$ avec $X + X' \in V$, $X' + X'' \in V'$, on a: $X' = UBX$, $X'' = U' (UAU^{-1}) X' = U' UABX = U'' ABX$, donc $X + X'' \in V''$.

Lemme 2: On a: (*a*) $S(V'') = (V \dot{+} V') \cap (H \oplus H'')$

(*b*) $S(\dot{V}'') = (V \oplus V') \cap (H \oplus H'')$

Démonstration: Démontrons (a). Soit un vecteur $X + X'' \in V''$ $(X \in H$, $X'' \in H'')$. Soit $X' \in H'$ tel que $X + X' \in V$, $X' + X'' \in V'$ (lemme 1). On a: $S(X + X'') = -X + X'' = (X' + X'') - (X + X') \in V \dot{+} V'$. Donc: $S(X + X'') \in (V \dot{+} V') \cap (H \oplus H'')$.

Réciproquement, soit $X + X''$ $(X \in H$, $X'' \in H'')$ tel que $S(X + X'') = -X + X'' \in V \dot{+} V'$. On a: $-X + X'' = Z + Z'$, où $Z \in V$, $Z' \in V'$. D'où:

$$P_H(-X + X'') = -X = P_H Z + P_H Z' = P_H Z$$
$$P_{H''}(-X + X'') = X'' = P_{H''} Z + P_{H''} Z' = P_{H''} Z'$$
$$P_{H'}(-X + X'') = 0 = P_{H'} Z + P_{H'} Z'$$

Soit: $X' = -P_{H'} Z = P_{H'} Z'$. On a: $X + X' = -P_H Z - P_{H'} Z = -Z \in V$. $X' + X'' = P_{H'} Z' + P_{H''} Z' = Z' \in V'$. Donc (lemme 1): $X + X'' \in V''$.

Démontrons (b). Considérons les suites (X_n), (Y_n) qui interviennent dans la définition de A. B. On a:

$$(X_n + UBX_n) - (U'' Y_n + UA^{-1} Y_n) \in V \dot{+} V' \subset V \oplus V'$$

ou:

$$(X_n - U'' Y_n) + U(BX_n - A^{-1} Y_n) \in V \oplus V'.$$

A la limite:

$$X - U'' Y \in V \oplus V'.$$

Ou:

$$X - U'' Y \in (V \oplus V') \cap (H \oplus H'').$$

Or, $X - U'' Y$ est un vecteur quelconque de $S(\dot{V}'')$. Réciproquement, soit un vecteur de $H \oplus H''$, $X - U'' Y$ $(X \in H$, $Y \in H)$, appartenant à $(V \oplus V') \cap (H \oplus H'')$. Il existe une suite de vecteurs dans $V \dot{+} V'$ qui tend fortement vers $X - U'' Y$, donc des suites de vecteurs $X_n + UX'_n \in V$, $(X_n \in H$, $X'_n \in H)$, et $Z_n + U'^{-1} Z'_n \in V'$ $(Z_n \in H''$, $Z'_n \in H'')$ telles que $X_n + UX'_n + Z_n + U'^{-1} Z'_n \to X - U'' Y$; ceci entraîne: $X_n \to X$, $-Z_n \to U'' Y$, $UX'_n + U'^{-1} Z'_n \to 0$. Ceci exprime que $X \in D_{\widetilde{A.B}}$ et que $U'' Y = \widetilde{A.B}X$. Donc $X - U'' Y \in S(\dot{V}'')$.

Théorème 1: $\widetilde{A.B}$ *est fermé, et* $\widetilde{A.B} > A.B$; $\widetilde{A.B} = \widetilde{\widetilde{A.B}}$.

Démonstration: C'est une conséquence immédiate du lemme 2, et du fait que $V \oplus V'$, fermé, contient $V \dot{+} V'$.

On verra qu'on peut avoir $\widetilde{A.B} \underset{\neq}{>} A\,B$.

Théorème 2: On a: $\widetilde{A.B} = AB$ *si:* (*a*) A *est fermé, et* B *fermé borné; ou si:* (*b*)

A^{-1} *est fermé borné et* B *fermé. On a :* $A.B = \widetilde{AB}$ *si :* (*c*) A *est fermé et* B^{-1} *fermé borné ; ou si :* (*d*) A *est fermé borné et* B *fermé.*

Démonstration : Cas (a) : A est fermé, et B fermé borné. Supposons :

$$(1)\ X_n \to X \qquad (2)\ Y_n \to Y \qquad (3)\ A^{-1}Y_n - BX_n \to 0.$$

(1) entraîne : (4) $BX_n \to BX$; (3) et (4) entraînent : (5) $A^{-1}Y_n \to BX$; (2) et (5) entraînent : $Y \in D_{A^{-1}}$, et $A^{-1}Y = BX$, ou : $Y = ABX$.

Cas (b) : A^{-1} est fermé borné, B est fermé. (2) entraîne : (6) $A^{-1}Y_n \to A^{-1}Y$; (6) et (3) entraînent : (7) $BX_n \to A^{-1}Y$; (1) et (7) entraînent : $X \in D_B$ et $A^{-1}Y = BX$, ou $Y = ABX$.

Cas (c) : A est fermé, et B^{-1} fermé borné. (3) entraîne :

$$(8)\ B^{-1}(A^{-1}Y_n - BX_n) = B^{-1}A^{-1}Y_n - X_n \to 0$$

(8) et (1) entraînent : (9) $B^{-1}A^{-1}Y_n \to X$; (9) et (2) entraînent : $Y \in D_{\widetilde{B^{-1}A^{-1}}}$ et $X = B^{-1}\widetilde{A^{-1}}\,Y = (\widetilde{AB})^{-1}Y$, $Y = \widetilde{AB}X$.

Cas (d) : A est fermé borné et B fermé. (3) entraîne :

$$(10)\ A(A^{-1}Y_n - BX_n) = Y_n - ABX_n \to 0$$

(10) et (2) entraînent : (11) $ABX_n \to Y$; (11) et (1) entraînent : $X \in D_{AB}$ et $Y = \widetilde{A}BX$.

3) Adjoint de AB : Soit W (resp. W', W'', $\dot{W}''$) la variété orthogonale complémentaire de [V] (resp. [V'], [V''], V) dans $H \oplus H'$ (resp. $H' \oplus H''$, $H \oplus H''$ $H \oplus H''$). Soit M la variété linéaire fermée, lieu des vecteurs $Z \in \mathcal{H}$ tels que $P_{H \oplus H'} Z \in W$, $P_{H' \oplus H''} Z \in W'$.

Lemme 3 : On a : $S(P_{H \oplus H''} M) = (W \dot{+} W') \cap (H \oplus H'')$.

Démonstration : Un vecteur $X + X''$ ($X \in H$, $X'' \in H''$) appartient à $P_{H \oplus H''} M$ si et seulement il existe un vecteur $X' \in H'$ tel que $X + X' + X'' \in M$, c'est-à-dire tel que $X + X' \in W$, $X' + X'' \in W'$. $P_{H \oplus H''} M$ est donc défini à partir de W et W' exactement comme V'' à partir de V et V' d'après le lemme 1. La formule à établir n'est donc que la formule (a) du lemme 2 appliquée à W et W'.

Lemme 4 : M *et* $V \oplus V'$ *sont orthogonales complémentaires dans* $\mathcal{H}$.

Démonstration : Si $Z \in M$, $P_{H \oplus H'} Z$ est orthogonal à V, ainsi que $P_{H''} Z$. Donc Z est orthogonal à V, de même à V', donc à $V \oplus V'$. Réciproquement, si Z est orthogonal à $V \oplus V'$, $P_{H \oplus H'} Z$ est orthogonal à V, donc appartient à W ; de même, $P_{H' \oplus H''} Z \in W'$; donc $Z \in M$.

Lemme 5 : On a : $\dot{W}'' = [(W \dot{+} W') \cap (H \oplus H'')]$

Démonstration : On a (lemme 4) : $V \quad V' = \mathcal{H} \ominus M$.

et : $H \oplus H'' = \mathcal{H} \ominus H'$.

Donc : (12) $(V \oplus V') \cap (H \oplus H'') = \mathcal{H} \ominus (M \quad H')$

Or : (13) $(V \oplus V') \cap (H \oplus H'') = S(\dot{V}'')$

d'après le lemme 2. D'autre part :

$$M \oplus H' = [M \dot{+} H'] = [P_{H \oplus H''} M \dot{+} H'] = [P_{H \oplus H''} M] \oplus H'.$$

Donc : (14) $\mathcal{H} \ominus (M \oplus H') = (H \oplus H'') \ominus [P_{H \oplus H''} M]$.

(12) devient, d'après (13) et (14) :

$$S(\dot{V}'') = (H \oplus H'') \ominus [P_{H \oplus H''} M]$$

ou :
$$S(\dot{W}'') = [P_{H \oplus H''} M]$$

ou, d'après le lemme 3, la formule à démontrer.

Lemme 6 : Si A *et* B *sont fermés, on a :* $W'' = (W \oplus W') \frown (H \oplus H'')$.

Démonstration : Faisons jouer, dans le lemme 5, les rôles de V et V à W et W'. Il faut alors remplacer W et W' par $(H \oplus H') \ominus W = [V] = V$ et $(H' \oplus H'') \ominus W' = [V'] = V'$. $(W \dot{+} W') \frown (H \oplus H'')$ est donc remplacé par $(V \dot{+} V') \frown (H \oplus H'') = S(V'')$ (lemme 2). $S(\dot{V}'') = (V \oplus V') \frown (H \oplus H'')$ (lemme 2) est remplacé par $(W \oplus W') \frown (H \oplus H'')$, donc $S(\dot{W}'')$ est remplacé par la variété orthogonale complémentaire de $(W \oplus W') \frown (H \oplus H'')$ dans $H \oplus H''$. Le lemme 5 prouve alors que $S(V'')$ et $S[(W \oplus W') \frown (H \oplus H'')]$ sont orthogonales complémentaires dans $H \oplus H''$. D'où la formule à démontrer.

Théorème 3 : On a : $(A.B)^* = B^* A^*$

et, quand A *et* B *sont fermés* : $(AB)^* = B^*. A^*$.

Démonstration : Par rapport à H, H'', U'', $\dot{V}''$ est l'image de A. B, donc $\dot{W}''$ est l'image de $-(A.B)^{*-1}$ (cf. E, chap. I, § 8) ; d'après le lemme 2 où on remplace V et V' par W et W', $(W \dot{+} W') \frown (H \oplus H'')$ est l'image de $-(-A^{*-1})(-B^{*-1}) = -(B^* A^*)^{-1}$ (en effet, W est l'image de $-B^{*-1}$ par rapport à H, H' U, et W' est l'image de $-A^{*-1}$ par rapport à H', H'', U'). Le lemme 5 prouve alors que $(A.B)^* = B^* \widetilde{A^*}$.

De même, W'' est l'image de $-(AB)^{*-1}$ par rapport à H, H'', U'', et $(W \oplus W') \frown (H \oplus H'')$ est l'image de $-(-A^{*-1}).(-B^{*-1}) = -(B^*. A^*)^{-1}$ par rapport à H, H'', U''. Le lemme 6 prouve donc que : $(AB)^* = B^*. A^*$.

4. Comparaison de (AB)* et de B* A* : Pour montrer qu'on peut avoir $(AB)^* \underset{\neq}{>} B^* A^*$, considérons le cas particulier où H est séparable et à une infinité de dimensions. Nous faisons dans ce § un usage constant des résultats de E.

Lemme 7 : Soit D_1, D'_1 *deux variétés* J *complémentaires non fermées telles que* $D_1 \frown D'_1$ *soit de classe 2. Soit* D_2, D'_2 *deux autres variétés* J *complémentaires non fermées. Il existe un unitaire* U *tel que* $U(D_2) \subset D_1$, $U(D'_2) \subset D'_1$.

Démonstration : Il existe (E, prop. 2, 5) deux variétés linéaires fermées orthogonales complémentaires V_1, V'_1 (resp. V_2, V'_2), deux variétés J non fermées Δ_1, Δ'_1 (resp. Δ_2, Δ'_2), telles que :

$$[\Delta_1] = V_1 \qquad [\Delta'_1] = V'_1 \qquad D_1 = V_1 + \Delta'_1 \qquad D'_1 = V'_1 + \Delta_1$$

(resp. $[\Delta_2] = V_2$ $[\Delta'_2] = V'_2$ $D_2 = V_2 \dotplus \Delta'_2$ $D'_2 = V'_2 \dotplus \Delta_2$)

On a : $D_1 \cap D'_1 = \Delta_1 \dotplus \Delta'_1$, donc l'une au moins des variétés J, Δ_1 et Δ'_1, est de classe 2. Δ_1 par exemple contient un noyau N. Soit N_1 et N_2 deux variétés linéaires fermées orthogonales complémentaires dans N, à ∞ dimensions. En remplaçant V_1 par $V_1 \ominus N_1$ et V'_1 par $V'_1 \oplus N_1$, on voit qu'on peut supposer que Δ_1 et Δ'_1 sont de classe 2. Alors, il existe (E, lemme 8,1) un opérateur isométrique I (resp. I') transformant V_2 en V_1 (resp. V'_2 en V'_1) tel que $I(\Delta_2) \subset \Delta'$ (resp. $I'(\Delta'_2) \subset \Delta'_1$). $U = I P_{V_2} + I' P_{V'_2}$ est un unitaire de H qui répond aux conditions du lemme.

Lemme 8 : On peut trouver deux couples de variétés J *complémentaires,* (D_1, D'_1) *et* (D_2, D'_2) *tels que* D_1 *et* D'_1 *soient disjointes de* D_2 *et* D'_2, *avec* $D_1 \cap D'_1$ *de classe 2.*

Démonstration : Soit V_1, V'_1 deux variétés linéaires fermées orthogonales complémentaires à ∞ dimensions, et V_2, V'_2 deux variétés linéaires fermées orthogonales complémentaires à ∞ dimensions en position p avec V_1 et V'_1, asymptotiques à V_1 et V'_1. $P_{V_2} V_1$ et $P_{V_2} V'_1$ sont non fermées, soit Δ_2 une variété J de classe 3, avec $[\Delta_2] = V_2$, disjointe de $P_{V_2} V_1$ et $P_{V_2} V'_1$ (E, th. 8,3); soit $D'_2 = V'_2 \dotplus \Delta_2$. Soit de même Δ'_2 une variété J de classe 3 avec $[\Delta'_2] = V'_2$ disjointe de $P_{V'_2} V_1$ et $P_{V'_2} V'_1$, et soit $D_2 = V_2 \dotplus \Delta'_2$.

On a : $P_{V_1} D_2 = P_{V_1} V_2 + P_{V_1} \Delta'_2$; $P_{V_1} V_2$ est non fermée, et $P_{V_1} \Delta'_2$ est de classe 3, donc $P_{V_1} D_2$ est non fermée (E, prop. 3,13) ; de même, $P_{V_1} D'_2$ est non fermée. Soit Δ_1 une variété J de classe 2 avec $[\Delta_1] = V_1$, disjointe de $P_{V_1} D_2$ et $P_{V_1} D'_2$ (E, th. 8,3), et soit $D'_1 = V'_1 \dotplus \Delta_1$. Soit de même Δ'_1 une variété J de classe 2 avec $[\Delta'_1] = V'_1$ disjointe de $P_{V'_1} D_2$ et $P_{V'_1} D'_2$ et soit $D_1 = V_1 \dotplus \Delta'_1$.

D_2 et D'_2 sont complémentaires, car $V_2 \subset D_2$, $V'_2 \subset D'_2$ (E, prop. 2,5).

D_1 et D'_1 sont complémentaires, car $V_1 \subset D_1$, $V'_1 \subset D'_1$; $D_1 \cap D'_1 = \Delta_1 \dotplus \Delta'_1$ est de classe 2.

Montrons que par exemple $D'_1 \cap D_2 = 0$. Soit $X \in D'_1 \cap D_2$. On a : $P_{V_1} X \in P_{V_1} D'_1 \cap P_{V_1} D_2 = \Delta_1 \cap P_{V_1} D_2$, donc $P_{V_1} X = 0$, $X \in V'_1$, $X \in V'_1 \cap D_2$; alors : $P_{V'_2} X \in P_{V'_2} V'_1 \cap P_{V'_2} D_2 = P_{V'_2} V'_1 \cap \Delta'_2$, donc $P_{V'_2} X = 0$, $X \in V_2$. Donc $X \in V'_1 \cap V_2$, $X = 0$.

Lemme 9 : On peut trouver deux couples de variétés J *complémentaires* (D_1, D'_1) *et* (D_2, D'_2) *tels que* D_1 *et* D'_1 *soient disjointes de* D_2 et D'_2, *avec* $D_1 \cap D'_1$ *et* $D_2 \cap D'_2$ *de classe 2.*

Démonstration : Soit V et $\overline{V}$ deux variétés linéaires fermées orthogonales complémentaires à ∞ dimensions de H. Soit (d_1, d'_1) et (d_2, d'_2) (resp. ($\overline{d}_1$, $\overline{d}'_1$) et ($\overline{d}_2$, $\overline{d}'_2$)) deux couples de variétés J complémentaires dans V (resp. $\overline{V}$) tels que d_1 et d'_1 (resp. $\overline{d}_1$ et $\overline{d}'_1$) soient disjointes de d_2 et d'_2 (resp. $\overline{d}_2$ et $\overline{d}'_2$) avec $d_1 \cap d'_1$ (resp. $\overline{d}_2 \cap \overline{d}'_2$) de classe 2. Alors, $D_1 = d_1 \dotplus \overline{d}_1$, $D'_1 = d'_1 \dotplus \overline{d}'_1$,

$D_2 = d_2 \dotplus \overline{d}_2$, $D'_2 = d'_2 \dotplus \overline{d'}_2$ répondent aux conditions du lemme.

Lemme 10 : Étant donnés deux couples de variétés J *complémentaires non fermées,* (D_1, D'_1) *et* (D_2, D'_2) *il existe un unitaire* U *tel que* $U(D_2)$ *et* $U(D'_2)$ *soient disjointes de* D_1 *et* D'_1.

Démonstration : immédiate à partir des lemmes 7 et 9.

Théorème 4 : Soit A *et* B *deux opérateurs self. adjoints biunivoques, non bornés et d'inverses non bornés. On peut trouver un unitaire* U *de telle sorte que, en posant* $B' = UBU^{-1}$, *on ait :* $D_{AB'} = D_{B'A} = 0$.

Démonstration: D_A et Δ_A sont complémentaires ; de même D_B et Δ_B. Il suffit de choisir U, d'après le lemme 10, de façon que U (D_B) et U (Δ_B) soient disjointes de D_A et Δ_A.

Remarques: 1) On a alors, avec les notations de E (chap. I, § 8), $AB' = \omega$, donc $(AB')^* = \Omega$. et pourtant, $B'^* A^* = B'A = \omega$.

2) De même, on peut trouver un opérateur linéaire fermé A dans le cas *p* tel que $D_{A^2} = D_{A^{*2}} = 0$.