ROGER HURON

Sur la continuité d'un opérateur intégral

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 4^e série, tome 16 (1952), p. 140-152
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1952_4_16__140_0>

SUR LA CONTINUITÉ D'UN OPÉRATEUR INTÉGRAL

par Roger HURON

RÉSUMÉ : Définition du module de continuité le plus strict d'une fonction $f(x)$. Comparaison de deux modules de continuité. Exemples. Conditions pour que

$$U(\varepsilon) = \int_a^b \frac{\psi(\varepsilon) - \psi(s)}{\varepsilon - s} ds$$

soit continue sur le segment $[a, b]$. Etude de cas où le module de $\psi(\varepsilon)$ est spécifié.

INTRODUCTION

[1] Il s'agit de l'opérateur :

$$U(\varepsilon) = \int_a^b \frac{\psi(\varepsilon) - \psi(s)}{\varepsilon - s} ds \tag{1}$$

qui par l'intermédiaire des formules de M. VILLAT intervient dans les problèmes mixtes harmoniques en hydrodynamique des fluides parfaits.

Nous supposerons une fois pour toutes que l'intégrale écrite au second membre de (1) a un sens. Nous supposerons en outre que $\psi(\varepsilon)$ est une fonction continue de x sur le segment $[a, b]$ (1) et que $\gamma(h)$ désignant son module de continuité l'intégrale :

$$\int_0^h \frac{\gamma(x)}{x} dx \tag{2}$$

est bornée (2)

Ceci posé le résultat principal de notre étude est le suivant :

1° $U(\varepsilon)$ est une fonction continue de ε sur tout *l'intervalle* (a, b) dès que la condition (2) est réalisée.

2° Pour $\varepsilon = a$ (ou $\varepsilon = b$), il faut pour pouvoir affirmer la continuité de $U(\varepsilon)$, supposer en outre que $\gamma(h)$ vérifie une condition de Dini-Lipschitz à savoir :

$$\lim_{h \to 0} \gamma(h) \operatorname{Log} \frac{1}{|h|} = 0 \tag{3}$$

1. Cette hypothèse n'est pas indispensable pour l'existence de $U(\varepsilon)$.
2. (2) entraîne l'existence de (1), mais la réciproque n'est pas vraie; on pourra prendre par exemple :

$$\psi(s) = \frac{\sin \frac{1}{s}}{\operatorname{Log} s} \text{ pour } s \neq 0 \text{ et } \psi(s) = 0 \text{ pour } s = 0.$$

[2] Plan.

Dans la première partie nous donnons les définitions et les propriétés des modules de continuité. Dans la seconde nous démontrons le résultat annoncé ci-dessus. Enfin dans la troisième partie nous signalons quelques conséquences de ce résultat en précisant le module de continuité de $U(\varepsilon)$ lorsque le module de continuité de $\psi(\varepsilon)$ est l'un de ceux signalés dans la première partie.

Première Partie.

[3] Préliminaires.

Considérons une fonction $f(x)$ continue pour $a \leqslant x \leqslant b$.
Posons :

(4) $$\Phi(x, h) = f(x+h) - f(x)$$

La fonction Φ est définie et continue dans le continu :

$$a \leqslant x \leqslant b; \qquad a - x \leqslant h \leqslant b - x$$

Il en résulte que Φ est une fonction continue des deux variables x et h.

[4] Module de continuité le plus strict.

Considérons : $g(x, x') = |f(x) - f(x')|$ fonction définie et continue dans le carré :

$$a \leqslant x \leqslant b; \qquad a \leqslant x' \leqslant b$$

Dans la portion $|x - x'| \leqslant h$ de ce carré $g(x, x')$ a un maximum atteint $\gamma(h)$. D'après la continuité uniforme ce maximum varie continuement avec h comme la portion considérée du carré.

Nous appelons $\gamma(h)$ le module de continuité le plus strict de $f(x)$ sur $[a, b]$ (1).

[5] Propriétés de $\gamma(h)$.

Elles sont presque immédiates. Tout d'abord nous venons de voir que $\gamma(h)$ est une fonction continue de h. D'autre part (2) :

1) Si $\gamma(h)$ s'annule pour une valeur non nulle de h, $f(x)$ se réduit à une constante

2) $\gamma(h)$ est une fonction non décroissante de h

3) quel que soit λ *entier* on a :

$$\gamma(\lambda h) \leqq \lambda \gamma(h)$$

4) quel que soit λ *positif* (entier ou non) on a :

$$\gamma(\lambda h) \leqq (\lambda + 1) \gamma(h)$$

[6] Modules de continuité : définitions.

I. Avec M. J. Kravtchenko (1), nous appelons module de continuité d'une fonction $f(x)$ toute fonction $\varphi(h)$, positive, continue, non décroissante

---

1. Pour certains auteurs, par exemple Ch. de la Vallée Poussin « Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle » (n° 6) $\gamma(h)$ est le module de continuité ou le module d'oscillation (M. Lalesco). Voir aussi J. Favard « Les multiplicateurs d'interpolation » Journal de Math. 1944, p. 228.

2. Ch. de la Vallée Poussin, loc. cit. p. 8.

1. J. Kravschenko « Sur la continuité des dérivées secondes du potentiel », Journal de Mathématiques, 1944, p. 100.

de h s'annulant pour $h = 0$ et telle que :

(5) $$|f(x+h) - f(x)| \leqslant \varphi(h)$$

pour $$0 \leqslant |\lambda| \leqslant h$$

Il est évident que pour tout h :

(6) $$\gamma(h) \leqslant \varphi(h)$$

II. Nous convenons de dire que deux modules de continuité $\varphi_1(h)$ et $\varphi_2(h)$ sont du même ordre s'il est possible de déterminer h_0 tel que pour $h < h_0$ on ait :

$$A < \frac{\varphi_1(h)}{\varphi_2(h)} < B$$

A et B constantes positives bornées. Cela a évidemment lieu si :

(7) $$\underset{h \to 0}{\text{limite}} \frac{\varphi_1(h)}{\varphi_2(h)} = L$$

L quantité finie non nulle.

III. Nous disons que $\varphi_1(h)$ est *plus fort* que $\varphi_2(h)$ [ou que $\varphi_2(h)$ est *plus large* que $\varphi_1(h)$] si :

(8) $$\underset{h \to 0}{\text{limite}} \frac{\varphi_1(h)}{\varphi_2(h)} = 0$$

Toutes les fonctions admettant des modules de continuité du même ordre, c'est-à-dire en définitive de la forme :

(9) $$C\,\varphi_1(h)$$

où C désigne une constante positive arbitraire, seront dite appartenir au même espace abstrait E_1.

Si $\varphi_2(h)$ est plus large que $\varphi_1(h)$ on a : $E_1 \subset E_2$

[7] *Exemple I* :

Posons $L_2 \frac{1}{h} = \text{Log}\left(\text{Log}\frac{1}{h}\right)$; $L_3 \frac{1}{h} = \text{Log}\left(L_2 \frac{1}{h}\right)$ et d'une manière générale :

$$L_p \frac{1}{h} = \text{Log}\left(L_{p-1} \frac{1}{h}\right)$$

expression qui pour h assez petit a toujours un sens.

Alors $$\gamma_p(h) = \frac{1}{\left|L_p \frac{1}{h}\right|} \text{ et } \gamma_{p,\mu}(h) = \frac{1}{\left|L_p \frac{1}{h^\mu}\right|}$$

avec $\mu > 0$, sont deux modules du même ordre.

La propriété se vérifie immédiatement pour

$$\gamma_1 \text{ et } \gamma_{1,\mu} \; ; \; \gamma_2 \text{ et } \gamma_{2,\mu}$$ on a même :

$$\underset{h \to 0}{\text{limite}} \frac{\gamma_2}{\gamma_{2,\mu}} = 1$$

Admettons cette propriété pour γ_{p-1} et $\gamma_{p-1,\,\mu}$, c'est-à-dire :

$$\underset{h \to 0}{\text{limite}} \frac{L_{p-1} \dfrac{1}{h}}{L_{p-1} \dfrac{1}{h^{\mu}}} = 1$$

on en déduit, pour h assez petit :

$$L_{p-1} \frac{1}{h} = (1 + \varepsilon)\, L_{p-1} \frac{1}{h^{\mu}} \tag{10}$$

$|\varepsilon|$ tendant vers zéro avec h. En prenant le logarithme néperien des deux membres de (10) on obtient :

$$L_p \frac{1}{h} = \text{Log}\,(1 + \varepsilon) + L_p \frac{1}{h^{\mu}}$$

ou :

$$\frac{L_p \dfrac{1}{h}}{L_p \dfrac{1}{h^{\mu}}} = 1 + \frac{\text{Log}\,(1 + \varepsilon)}{L_p \dfrac{1}{h^{\mu}}}$$

qui montre que :

$$\underset{h \to 0}{\text{limite}} \frac{\gamma_p\,(h)}{\gamma_{p,\,\mu}\,(h)} = 1$$

la propriété est donc encore vraie pour l'ordre p.

Exemple II :

Les modules :

$$\gamma_n\,(h) = \frac{1}{\left[\text{Log}\,\dfrac{1}{h}\right]^n} \quad \text{et} \quad \gamma_{n,\,k}\,(h) = \frac{1}{\left[\text{Log}\,\dfrac{1}{kh}\right]^n} \tag{11}$$

k constante positive sont du même ordre.

Exemple III :

Comparons les modules :

$$A_{1,\,n} = \frac{C_1}{\left|\, L \dfrac{1}{h} \,\right|^n} \quad \text{et} \quad A_{2,\,n} = \frac{C_2}{\left|\, L_2 \dfrac{1}{h} \,\right|^n} \tag{12}$$

Posons : $\text{Log}\,\dfrac{1}{h} = u$

$$\frac{A_{1,\,n}}{A_{2,\,n}} = \frac{C_1}{C_2} \times \left|\frac{\text{Log}\,u}{u}\right|^n$$

n étant fixé le second membre tend vers zéro avec h.

$A_{1,n}$ est plus fort que $A_{2,n}$. A plus forte raison le module :

(13) $$A_{p,\,n}(h) = \frac{C^{te}}{\left| L_p \dfrac{1}{h} \right|^n}$$

sera-t-il plus large que $A_{1,n}$.

DEUXIÈME PARTIE.

[8] **Étude de la continuité de** U (ε).

1^re partie. — Considérons deux valeurs voisines de ε, ε_1 et ε_2 $(\varepsilon_2 > \varepsilon_1)$. Nous supposons essentiellement dans cette première partie :

(14) $$\varepsilon_1 \neq a\ ; \qquad \varepsilon_2 \neq b$$

c'est dire que l'on peut toujours trouver c et d tels que :

(15) $$a < c \leqslant \varepsilon_1 < \varepsilon_2 \leqslant d < b.$$

Nous avons :

$$\Delta \mathrm{U} = \mathrm{U}(\varepsilon_2) - \mathrm{U}(\varepsilon_1) = \int_a^b \left[\frac{\psi(\varepsilon_2) - \psi(s)}{\varepsilon_2 - s} - \frac{\psi(\varepsilon_1) - \psi(s)}{\varepsilon_1 - s}\right] ds$$

D'après (15) on peut toujours prendre α et β tels que

$$a < \alpha < \varepsilon_1\ ; \qquad \varepsilon_2 < \beta \leqslant b$$

et écrire :

$$\Delta \mathrm{U} = \mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2 + \mathrm{I}_3$$

avec :

$$\mathrm{I}_1 = \int_a^\alpha [\ \ ]\, ds\ ; \quad \mathrm{I}_3 = \int_\beta^b [\ \ ]\, ds\ ; \quad \mathrm{I}_2 = \int_\alpha^\beta [\ \ ]\, ds$$

Étude de $\mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_3$.

On vérifie que l'on peut écrire :

$$\mathrm{I}_1 = \int_a^\alpha [\psi(\varepsilon_2) - \psi(s)]\, \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{(\varepsilon_2 - s)(\varepsilon_1 - s)}\, ds + [\psi(\varepsilon_2) - \psi(\varepsilon_1)] \int_a^\alpha \frac{ds}{\varepsilon_1 - s}$$

$$\mathrm{I}_3 = \int_\beta^b [\psi(\varepsilon_2) - \psi(\varepsilon_1)]\, \frac{ds}{\varepsilon_2 - s} + \int_\beta^b [\psi(\varepsilon_1) - \psi(s)]\, \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{(\varepsilon_2 - s)(\varepsilon_1 - s)}\, ds$$

d'où finalement :

$$\mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_3 = [\psi(\varepsilon_2) - \psi(\varepsilon_1)] \left(\int_a^\alpha \frac{ds}{\varepsilon_1 - s} + \int_\beta^b \frac{ds}{\varepsilon_1 - s}\right)$$
$$+ (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\left[\int_a^\alpha \frac{\psi(\varepsilon_2) - \psi(s)}{\varepsilon_2 - s}\, \frac{ds}{\varepsilon_1 - s} + \int_\beta^b \frac{\psi(\varepsilon_1) - \psi(s)}{\varepsilon_1 - s}\, \frac{ds}{\varepsilon_2 - s}\right]$$

En intégrant nous avons :

$$\mathrm{A} = \int_a^\alpha \frac{ds}{\varepsilon_1 - s} + \int_\beta^b \frac{ds}{\varepsilon_2 - s} = \mathrm{Log} \left| \frac{(\varepsilon_2 - \beta)(\varepsilon_1 - a)}{(\varepsilon_1 - \alpha)(\varepsilon_2 - b)} \right|$$

Jusqu'ici nous n'avons pas fixé α et β, à partir de maintenant prenons. ce qui est toujours possible :

$$|\varepsilon_1 - \alpha| = |\varepsilon_2 - \beta|$$

Nous avons alors :

$$\mathrm{A} = \mathrm{Log} \left| \frac{\varepsilon_1 - a}{\varepsilon_2 - b} \right|$$

quantité toujours bornée d'après l'hypothèse (15). Il en résulte que le premier terme de $I_1 + I_3$ qui s'écrit :

$$A\ [\psi(\varepsilon_2) - \psi(\varepsilon_1)]$$

a sa valeur absolue majorée par : $C^{te}\ \gamma(|\Delta\varepsilon|)$.

Il nous reste à étudier les deux dernières intégrales de $I_1 + I_3$. Prenons par exemple la première [1]

$$|B_1| = \left| \int_a^\alpha \frac{\psi(\varepsilon_2) - \psi(s)}{\varepsilon_2 - s} \frac{ds}{\varepsilon_1 - s} \right| \leqslant \frac{1}{\varepsilon_1 - \alpha} \int_a^\alpha \left| \frac{\psi(\varepsilon_2) - \psi(s)}{\varepsilon_2 - s} \right| ds$$

La dernière intégrale écrite étant bornée, même si α tend vers ε_1, on peut écrire :

$$|B_1| \leqslant \frac{K_1}{\varepsilon_1 - \alpha} \qquad (K_1 \text{ nombre positif fini})$$

On aura de même pour la dernière intégrale de $I_1 + I_3$:

$$|B_2| \leqslant \frac{K_2}{\beta - \varepsilon_2} = \frac{K_2}{\varepsilon_1 - \alpha}$$

Nous pouvons toujours poser :

(16) $$\varepsilon_1 - \alpha = \varphi(\Delta\varepsilon)$$

avec :

(17) $$\lim_{\Delta\varepsilon \to 0} \varphi(\Delta\varepsilon) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\Delta\varepsilon \to 0} \frac{\Delta\varepsilon}{\varphi(\Delta\varepsilon)} = 0$$

Prenons par exemple : $\varepsilon_1 - \alpha = \overline{|\Delta\varepsilon|}^{\mu}$, μ étant un exposant positif inférieur à 1, aussi voisin de zéro que l'on voudra mais non nul, alors :

(18) $$|I_1 + I_3| \leqslant A\ \gamma(\Delta\varepsilon) + K\ |\Delta\varepsilon|^{1-\mu}$$

où A et K sont des constantes bornées.

Étude de I_2.

Il nous suffit d'étudier :

$$C_1 = \left| \int_\alpha^\beta \frac{\psi(\varepsilon_2) - \psi(s)}{\varepsilon_2 - s} ds \right| \leqslant \int_\alpha^\beta \frac{\gamma(|\varepsilon_2 - s|)}{|\varepsilon_2 - s|} ds$$

soit :

$$C_1 \leqslant \int_\alpha^{\varepsilon_2} \frac{\gamma(\varepsilon_2 - s)}{\varepsilon_2 - s} ds + \int_{\varepsilon_2}^\beta \frac{\gamma(s - \varepsilon_2)}{s - \varepsilon_2} ds = \int_0^{\varepsilon_2 - \alpha} \frac{\gamma(y)}{y} dy + \int_0^{\beta - \varepsilon_2} \frac{\gamma(y)}{y} dy$$

Posons :

(19) $$\Gamma(h) = \int_0^h \frac{\gamma(y)}{y} dy$$

1. La majoration faite par M. J. Kravschenko : « Sur le problème de représentation conforme de Helmoltz : théorie des sillages et des proues ». Th. Sc. Paris, n° 2814, p. 33 ligne 20, nous paraît devoir être précisée. Elle suppose que $\gamma_n(\Delta\varepsilon) \geqslant \gamma_n(|s - \varepsilon|)$, ce qui étant donné les propriétés de $\gamma_n(h)$ n'est sûrement vérifié que pour $|s - \varepsilon| < \Delta\varepsilon$; or s décrit le segment : $[-1, \varepsilon - 2\Delta\varepsilon]$.

Par hypothèse, nous savons que $\Gamma(h)$ est borné et tend vers zéro avec h; d'autre part on vérifie aisément que d'après les propriétés de $\gamma(h)$ on a :

$$\Gamma(\lambda h) \leqslant (\lambda + 1)\, \Gamma(h)$$

λ positif.

Comme :
$$\beta - \varepsilon_2 = \varepsilon_1 - \alpha = \varphi(\Delta \varepsilon)$$

$$\varepsilon_2 - \alpha = \varphi(\Delta\varepsilon)\left[1 + \frac{\Delta\varepsilon}{\varphi(\Delta\varepsilon)}\right]$$

on en déduit que pour $\Delta\varepsilon$ suffisamment petit :

(20) $$C_1 \leqslant K_3\, \Gamma[\varphi(|\Delta\varepsilon|)]$$

K_3 constante bornée. En définitive en réunissant (18) et (20) on obtient :

(21) $$|\Delta U(\varepsilon)| \leqslant \lambda_1 \gamma(|\Delta\varepsilon|) + \lambda_2 \frac{|\Delta\varepsilon|}{\varphi(|\Delta\varepsilon|)} + \lambda_3 \Gamma[\varphi(|\Delta\varepsilon|)]$$

où les λ_i $(i = 1, 2, 3)$ sont des constantes bornées, donc :
sur l'intervalle (a, b) $U(\varepsilon)$ *est une fonction continue de* ε *si les hypothèses du n° 1 sont réalisées et elle appartient à l'espace abstrait lié au plus large des modules figurant dans* (21).

2e partie. — Supposons par exemple $\varepsilon_1 = a$; $I_1 = 0$. Le terme A s'écrit maintenant :

$$A = \mathrm{Log}\, \frac{|\varepsilon_2 - \beta|}{|\varepsilon_2 - b|} = \mathrm{Log}\, \frac{\varphi(|\Delta\varepsilon|)}{|\varepsilon_2 - b|}$$

donc I_3 ne tend vers zéro que si :

(22) $$\lim_{\Delta\varepsilon \to 0} \gamma(|\Delta\varepsilon|)\, \mathrm{Log}\, \frac{1}{\varphi(|\Delta\varepsilon|)} = 0$$

Dans ce cas : $\beta - \varepsilon_2 = \varphi(|\Delta\varepsilon|)$ doit satisfaire au système :

$$(23)\left\{\begin{array}{lr} \displaystyle\lim_{\Delta\varepsilon \to 0} \frac{\Delta\varepsilon}{\varphi(|\Delta\varepsilon|)} = 0 & (1) \\ \displaystyle\lim_{\Delta\varepsilon \to 0} \gamma(|\Delta\varepsilon|)\, \mathrm{Log}\, \frac{1}{\varphi(|\Delta\varepsilon|)} = 0 & (2) \end{array}\right.$$

Si nous prenons : $\varphi(|\Delta\varepsilon|) = |\Delta\varepsilon|^{\mu}$ $(0 < \mu < 1)$ nous savons que (23_1) est satisfaite; (23_2) devient :

$$\lim_{\Delta\varepsilon \to 0} \gamma(|\Delta\varepsilon|)\, \mathrm{Log}\, \frac{1}{|\Delta\varepsilon|} = 0$$

qui est la condition de Dini-Lipschitz.

Il en résulte que si $\psi(\varepsilon)$ présente sur (a, b) des discontinuités du 1er ordre et que si sur chaque intervalle où elle est continue son module de continuité vérifie (2) et (3), $U(\varepsilon)$ est continue.

[9] Étude du cas où $\gamma(h) \leqslant M|h|^\lambda$ $\qquad (0 < \lambda < 1)$.

Nous disons que $\psi(\varepsilon)$ est hoëldérienne d'exposant λ [1]. Reprenons le terme :

$$(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \int_a^\alpha \frac{\psi(\varepsilon_2) - \psi(s)}{(\varepsilon_2 - s)(\varepsilon_1 - s)} ds = D_1$$

Nous avons en tenant compte de l'hypothèse :

$$|D_1| \leqslant |\Delta\varepsilon| \int_a^\alpha \frac{|\varepsilon_2 - s|^\lambda}{|\varepsilon_2 - s||\varepsilon_1 - s|} ds = |\Delta\varepsilon| \int_a^\alpha \frac{ds}{|\varepsilon_1 - s||\varepsilon_1 - s + \Delta\varepsilon|^{1-\lambda}}$$

$$|D_1| \leqslant |\Delta\varepsilon| \int_a^\alpha \frac{ds}{|\varepsilon_1 - s|^{2-\lambda} \left|1 + \dfrac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon_1 - s}\right|^{1-\lambda}}$$

Le facteur $\dfrac{1}{\left|1 + \dfrac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon_1 - s}\right|^{1-\lambda}}$ étant borné sur le segment (a, α) on a :

(24) $$|D_1| \leqslant \frac{K_1}{|\lambda - 1|} |\Delta\varepsilon| \left[(\varepsilon_1 - a)^{\lambda - 1} + (\varepsilon_1 - \alpha)^{\lambda - 1}\right]$$

Prenons ici : $\varepsilon_1 - \alpha = \varphi(|\Delta\varepsilon|) = k|\Delta\varepsilon|$, nous aurons, λ étant différent de 1

(25) $$|D_1| < K_2 |\Delta\varepsilon|^\lambda$$

on obtiendrait un résultat analogue pour :

$$(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \int_\beta^b \frac{\psi(\varepsilon_1) - \psi(s)}{(\varepsilon_1 - s)(\varepsilon_2 - s)} . \; ds = D_2$$

D'autre part (19) donne : $\Gamma(h) = h^\lambda$, d'où :

$$C_1 = K_3 |\Delta\varepsilon|^\lambda$$

qui montre que $U(\varepsilon)$ *est hoëldérienne d'exposant* λ *sur l'intervalle* (a, b).

Si $\varepsilon_1 = a$, $U(\varepsilon)$ est encore continue car

$$\gamma(h) \operatorname{Log} \frac{1}{h} = h^\lambda \operatorname{Log} \frac{1}{h}$$

tend vers zéro avec h. Cependant le terme A de (18) s'écrit :

$$A = \lambda \operatorname{Log} |\Delta\varepsilon| - \operatorname{Log}(\varepsilon_2 - b)$$

de sorte que le module de continuité de $U(\varepsilon)$ pour $\varepsilon = a$ n'est pas $|\Delta\varepsilon|^\lambda$ mais :

(26) $$|\Delta\varepsilon|^\lambda \operatorname{Log} \frac{1}{|\Delta\varepsilon|}$$

---

1. Certains auteurs appellent la condition :

$$|\psi(\varepsilon + h) - \psi(\varepsilon)| < M|h| \qquad (0 < \lambda < 1)$$

« Condition de Lipschitz généralisée ».

c'est-à-dire : $|\Delta\varepsilon|^{\lambda'}$, λ' *étant aussi voisin de* λ *que l'on voudra.* Ce résultat est valable pour $\varepsilon = b$.

[10] **Étude du cas où $\gamma(h) = \mathrm{M}\,h$.**

(25) s'écrit maintenant :

$$|\,\mathrm{D}_1\,| \leqslant \mathrm{K}_2\,|\,\Delta\varepsilon\,|\ \operatorname{Log}\frac{1}{\Delta\varepsilon}$$

donc :

U (ε) *est hoëldérienne d'exposant* λ *aussi voisin de* 1 *que l'on voudra sur tout le segment* (a, b).

[11] **Remarque :**

FATOU (Acta Mathematica, t. 30, p 361) et PRIVALOFF (Bull. Sc. Math. de France, 1916, p. 100) ont étudié la fonction :

$$g(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}[f(t) - f(\theta)]\cot\!\operatorname{g}\frac{t-\theta}{2}\,dt$$

qui se différencie de U (ε) en ce que la fonction sous le signe somme est périodique par rapport à t et θ. Les résultats de PRIVALOFF sont valables pour U (ε) dans le cas du n° 10; dans celui du n° 9 ils ne le sont qu'à *l'intérieur de l'intervalle* (a, b), *mais non aux extrémités.*

[12] **Étude d'un autre cas particulier.**

Posons

$$(27)\qquad \mathfrak{L}_p\frac{1}{h} = \mathrm{L}_p\frac{1}{h}\cdot\mathrm{L}_{p-1}\frac{1}{h}\cdots\operatorname{Log}\frac{1}{h}$$

et considérons le module de continuité :

$$(28)\qquad \gamma_{p,n}(h) = \frac{\mathrm{C}^{\mathrm{te}}}{\mathfrak{L}_p\dfrac{1}{h}\cdot\left|\mathrm{L}_{p+1}\dfrac{1}{h}\right|^{n}}$$

n supérieur à 1. Dans ce cas on vérifie facilement que :

$$(29)\qquad \Gamma(h) = \frac{\mathrm{C}^{\mathrm{te}}}{\left|\mathrm{L}_{p+1}\dfrac{1}{h}\right|^{n-1}}$$

Il en résulte que si $\psi(\varepsilon)$ admet (28) comme module de continuité U (ε) est bien définie.

Prenons : $\varphi(|\Delta\varepsilon|) = \overline{\Delta\varepsilon}^{\mu}$

$$\Gamma[\varphi(|\Delta\varepsilon|)] = \frac{\mathrm{C}^{\mathrm{te}}}{\left|\mathrm{L}_{p+1}\dfrac{1}{\overline{\Delta\varepsilon}^{\mu}}\right|^{n-1}}$$

D'après l'exemple I du n° 6 nous voyons que $\Gamma(|\Delta\varepsilon|)$ et $\Gamma[|\Delta\varepsilon|^{\mu}]$ sont du même ordre. D'un autre côté :

$$\gamma_{p,n}(h)\,\mathrm{Log}\frac{1}{h} = \frac{C^{\underline{\underline{te}}}}{L_p\frac{1}{h}\,\ldots\ldots\,L_2\frac{1}{h}\left[L_{p+1}\frac{1}{h}\right]^n}$$

tend vers zéro avec h. Il en est de même de :

$$\frac{\gamma_{p,n}(h)\,\mathrm{Log}\frac{1}{h}}{\Gamma(h)}$$

$\Gamma(h)$ est donc le module de continuité le plus large parmi les modules :

$$\gamma_{p,n}(h)\,\mathrm{Log}\frac{1}{h}\,;\; h^{1-\mu}\,;\; \Gamma(h)$$

qui interviennent au n° 8, donc :

Si $\psi(\varepsilon)$ appartient à l'espace abstrait lié à :

$$\gamma_{p,n}(h) = \frac{C^{\underline{\underline{te}}}}{\mathfrak{L}_p\frac{1}{h}\left|L_{p+1}\frac{1}{h}\right|^n}$$

$U(\varepsilon)$ *appartient à l'espace abstrait lié à :*

$$\Gamma_{p,n}(h) = \frac{C^{\underline{\underline{te}}}}{\left|L_{p+1}\frac{1}{h}\right|^{n-1}}$$

[13] **Conséquences du n° précédent.**

Faisons $p=1$ et convenons que $\mathfrak{L}_0\frac{1}{h}=1$, $\gamma_{p,n}(h)$ devient :

$$\frac{C^{\underline{\underline{te}}}}{\left|\mathrm{Log}\frac{1}{h}\right|^n} = A_n(h)$$

C'est le module de continuité utilisé systématiquement par M. J. KRAVTCHENKO. Nous avons :

$$\Gamma_{o,n}(h) = A_{n-1}(h)$$

c'est-à-dire que nous retrouvons comme cas particulier la propriété signalée par cet auteur.

Montrons que : $\gamma_{p,n}(h)$ est plus large que $A_n(h)$. Remarquons tout d'abord que quel que soit $\lambda > 0$:

$$\frac{L_p u}{u^{\lambda}} \rightarrow 0 \text{ avec } \frac{1}{u} \tag{30}$$

Si on pose : $u = \mathrm{Log}\frac{1}{h}$ dans : $\dfrac{A_n(h)}{\gamma_{p,n}(h)}$

on obtient :

$$C^{te}_{=} \frac{L_{p-1}\, u}{u^{\frac{n-1}{p}}} \cdot \frac{L_{p-2}\, u}{u^{\frac{n-1}{p}}} \cdot \ldots\ldots \frac{\operatorname{Log} u}{u^{\frac{n-1}{p}}} \cdot \left[\frac{L_p\, u}{u^{\frac{n-1}{p^n}}}\right]$$

(33) montre alors que :

$$\lim_{h \to 0} \frac{A_n(h)}{\gamma_{p,\,n}(h)} = 0 \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Reprenons les notations de M. J. Kravtchenko [1] nous avons

$$f(\varepsilon) = \frac{C^{te}_{=}}{\mathfrak{L}_p \frac{1}{\varepsilon}\left[L_{p+1} \frac{1}{\varepsilon}\right]^n}$$

d'où

$$\frac{f'(\varepsilon)}{f(\varepsilon)} = \frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{1}{\mathfrak{L}_p \frac{1}{\varepsilon}} + \frac{1}{\mathfrak{L}_{p-1} \frac{1}{\varepsilon}} + \ldots + \frac{1}{\operatorname{Log} \frac{1}{\varepsilon}} + n \frac{1}{\mathfrak{L}_{p+1} \frac{1}{\varepsilon}}\right]$$

qui montre que :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \frac{f'(\varepsilon)}{f(\varepsilon)} = 0$$

Donc, les conclusions du mémoire cité peuvent s'étendre aux modules de continuité : $\gamma_{p,\,n}(h)$.

1. « Sur les dérivées secondes... » p. 107.