ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

PHAN-VAN-LOC

Diffractions des ondes Ψ_n de l'électron de Dirac

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 4e série, tome 18 (1954), p. 178-192
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1954_4_18__178_0>

© Université Paul Sabatier, 1954, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (http://picard.ups-tlse.fr/~annales/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

DIFFRACTION DES ONDES Ψ_u DE L'ELECTRON DE DIRAC

par PHAN-VAN-LOC

I. — Rappel des résultats en mécanique ondulatoire à une seule fonction d'onde.

L'équation d'onde en l'absence des champs s'écrit :

$$(\partial_u \partial^u - q^2 - k_0^2)\ \psi = 0 \qquad (1)$$

$q = c^{-1}\partial_t$; $\partial_u \partial^u$ est le LAPLACIEN. Pour des ondes monochromatiques $\psi\ (x_u)\ e^{ikct}$, cette équation revêt la forme suivante :

$$(\partial_u \partial^u + K^2)\ \psi = 0 \qquad (1')$$

avec :

$$k = \frac{2\pi W}{ch},\ k_0 = \frac{2\pi}{h}\ m_0 c, \quad K^2 = k^2 - k_0^2. \qquad (2)$$

Si l'on pose :

$$K = \frac{2\pi}{h} \left| \vec{p} \right| \qquad (3)$$

l'onde plane monochromatique, solution de (1) est :

$$\psi = a\ e^{-iKr}\ e^{ikct} \qquad (4)$$

On a la relation bien connue en Dynamique Relativiste entre l'énergie et la quantité de mouvement d'un corpuscule de masse propre m_0 :

$$\frac{W^2}{c^2} - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2 = m_0^2\ c^2$$

L'onde sphérique divergente solution de (1) est :

$$\Psi = a\ \frac{e^{-iKr}}{r}\ e^{ikct} \qquad (5)$$

Dans tous les cas, la longueur d'onde est donnée par :

$$K = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{h}{p}. \qquad (6)$$

Pour étudier la diffraction de l'onde ψ associée à un corpuscule [1], on emploie le Principe de HUYGENS exprimé par la formule de KIRCHHOFF, soit :

$$\begin{matrix} 4\pi\ \psi\ (P) \\ \text{ou zéro} \end{matrix} = \int_S \left\{ \frac{e^{-iKr}}{r} \frac{\partial}{\partial n} \psi - \psi \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{-iKr}}{r} \right\}\ dS' \qquad (7)$$

Or, le comportement des corpuscules tels que l'électron de DIRAC est régi par quatre fonctions d'onde ψ_n, $n = 1, 2, 3, 4$; les ψ_n satisfaisant séparément à l'équation du second ordre (1) sont reliés entre eux par quatre équations aux dérivées partielles du premier ordre qui sont les équations de DIRAC, soit :

$$(q\alpha_0 - ik_0\alpha_4 - \alpha_u\partial^u)\,\psi_n = 0 \tag{8}$$

les α_u, $u = 1, 2, 3$, α_4 sont les quatre matrices de la théorie de DIRAC, α_0 est la matrice unité à quatre rangs. On fait la sommation sur les indices muets.

L'application de la formule de KIRCHHOFF à chacune des quatre fonctions d'onde donne des ψ_n qui, dans la région de diffraction, ne satisfont pas aux équations du premier ordre (8); il est donc nécessaire d'employer d'autres formules appropriées, de même que pour les ondes électromagnétiques, il faut remplacer la formule de KIRCHHOFF par celle de KOTTLER.

II. — Expression du principe de Huygens en théorie de Dirac.

Partons de l'identité fondamentale :

$$4\pi\,\psi_n(x_u, ct) = (q^2 - \partial_u\partial^u + k_0^2)\left\{-c\int_v \frac{dv'}{r}\frac{\partial}{\partial r}\int_{-\infty}^{t-r/c}\psi_n(x'_u, c\tau)\,J_0(k_0\gamma)\,d\tau\right\} \tag{1}$$

avec $\qquad r = \sqrt{(x_u - x'_u)(x^u - x'^u)}, \quad \gamma = \sqrt{c^2(t-\tau)^2 - r^2}\,;$

J_0 est la fonction de BESSEL de première espèce d'ordre zéro. L'opérateur du second ordre se décompose en deux opérateurs du premier ordre :

$$(q^2 - \partial_u\partial^u + k_0^2) = (\alpha_u\partial^u + ik_0\alpha_4 + q\alpha_0)\,(q\alpha_0 - ik_0\alpha_4 - \alpha_u\partial^u). \tag{2}$$

Introduisons alors quatre nouvelles fonctions Φ_n appelées [2[potentiels des fonctions d'onde et définies par :

$$4\pi\,\Phi_n = (q\alpha_0 - ik_0\alpha_4 - \alpha_u\partial^u)\left\{-c\int_v dv'\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\int_{-\infty}^{t-r/c}\psi_n(x'_u, c\tau)\,J_0(k_0\gamma)\,d\tau\right\} \tag{3}$$

L'identité (1) prend alors la forme simple :

$$\psi_n(x_u, ct) = (\alpha_u\partial^u + ik_0\alpha_4 + q\alpha_0)\,\Phi_n(x_u, ct). \tag{4}$$

Nous allons effectuer les transformations sur l'expression (3). Dérivons sous le signe somme en remarquant que pour des fonctions de r, $\partial_u = -\partial'_u$. On a :

$$-\alpha_u\partial^u\{\ldots\} = -\alpha_u\left\{-c\int_v dv'.\,\partial^u\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\int_{-\infty}^{t-r/c}\psi_n(x'_u, c\tau)\,J_0(k_0\gamma)\,d\tau\right]\right\}$$

$$= -\alpha_u c\int_v \partial'^u\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\int_{-\infty}^{t-r/c}\psi_n(x'_u, c\tau)\,J_0(k_0\gamma)\,d\tau\right]dv' \tag{5}$$

$$+\, c\int_v \frac{dv'}{r}\frac{\partial}{\partial r}\int_{-\infty}^{t-r/c}\alpha_u\,\partial'^u\,\psi_n(x'_u, c\tau).\,J_0(k_0\gamma)\,d\tau.$$

Pour l'opérateur $q = c^{-1}\partial_t$, on a :

$$q\left\{\ldots\right\} = -c\int_v \frac{dv'}{r}\frac{\partial}{\partial r}\int_{-\infty}^{t-r/c} \psi_n(x'_u, c\tau)\, q\mathrm{J}_0(k_0\gamma)\, d\tau - c\int_v \frac{dv'}{r}\frac{\partial}{\partial r}\psi_n(x'_u, ct-r)(c^{-1})$$

$$= -c\int_v \frac{dv'}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[-\int_{-\infty}^{t-r/c}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial\tau}\Big(\psi_n(x'_u, c\tau)\mathrm{J}_0(k_0\gamma)\Big)d\tau + \int_{-\infty}^{t-r/c} q\psi_n(x'_u, c\tau) \times \mathrm{J}_0(k_0\gamma)\, d\tau\right]$$

$$-\int_v \frac{dv'}{r}\frac{\partial}{\partial r}\psi_n(x'_u, ct-r)$$

$$= \int_v \frac{dv'}{r}\frac{\partial}{\partial r}\psi_n(x'_u, ct-r) + \int_v \frac{dv'}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big[\psi_n(x'_n, c\tau)\,\mathrm{J}_0(k_0\gamma)\Big]_{\tau\to-\infty}$$

$$-c\int_v \frac{dv'}{r}\frac{\partial}{\partial r}\int_{-\infty}^{t-r/c} q\,\psi_n(x'_n, c\tau)\,\mathrm{J}_0(k_0\gamma)\, d\tau - \int_v \frac{dv'}{r}\frac{\partial}{\partial r}\psi_n(x'_u, ct-r).$$

Les deux termes extrêmes se détruisent, et comme $\mathrm{J}_0(k_0\gamma) \to 0$ pour $\gamma \to \infty$, il vient tout simplement :

$$q\,\alpha_0\left\{\ldots\right\} = -c\int_v \left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\int_{-\infty}^{t-r/c} q\alpha_0\,\psi_n(x'_u, c\tau)\,\mathrm{J}_0(k_0\gamma)\, d\tau\right\} dv' \qquad (6)$$

On transforme d'abord la première intégrale du second membre de (5) en intégrale de surface; on additionne membre à membre (5) et (6), puis à l'égalité ainsi obtenue, on ajoute de part et d'autre la même quantité $-ik_0\alpha_4\left\{-c\int_v\ldots\right\}$. Il vient :

$$4\pi\,\Phi_n = -c\int_s \alpha_u\, n^u\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\int_{-\infty}^{t-r/c}\psi_n(x'_u c\tau)\,\mathrm{J}_0(k_0\gamma)\, d\tau\right] dS'$$

$$-c\int_v \frac{dv'}{r}\frac{\partial}{\partial r}\int_{-\infty}^{t-r/c}(q\alpha_0 - ik_0\alpha_4 - \alpha_u\,\partial'^u)\,\psi_n(x'_u, c\tau)\,\mathrm{J}_0(k_0\gamma)\, d\tau. \qquad (7)$$

Les expressions (4) et (7) forment ensemble une identité très générale concernant une fonction quelconque $\psi_n(x_u, ct)$. Mais si les ψ_n sont des fonctions d'onde de Dirac, obéissant en l'absence de champ aux équations :

$$(q\alpha_0 - ik_0\alpha_4 - \alpha_u\partial'^u)\ \psi_n\ (x'_u\, c\tau)\ =\ 0$$

le second membre de (7) se réduit à la seule intégrale de surface, soit :

$$4\pi\,\Phi_n(x_u, ct) = -c\int_s \alpha_u\, n^u\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\int_{-\infty}^{t-r/c}\psi_n(x'_u, c\tau)\,\mathrm{J}_0(k_0\gamma)\, d\tau\right] dS' \qquad (8)$$

Les formules (4) et (8) constituent l'expression du Principe de HUYGENS en Mécanique Ondulatoire à quatre fonctions d'onde de DIRAC. Elles donnent ψ_n pour un point P situé à l'intérieur de la surface fermée S et zéro à l'extérieur. Les n^u sont les composantes de la normale extérieure à la surface S.

Dans le cas particulier des fonctions d'onde variant sinusoïdalement avec le temps, c'est-à-dire de la forme $\psi_n(x_u)\, e^{ikct}$ l'expression (8) s'écrit, après suppression du facteur e^{ikct} :

$$4\pi\,\Phi_n(x_u) = -c\int_s \alpha_u\, n^u\,\psi_n(x'_u)\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\int_{-\infty}^{t-r/c} e^{-ik\sqrt{\gamma^2+r^2}}\ \mathrm{J}_0(k_0\gamma)\, d\tau\right] dS' \quad (9)$$

Si nous prenons γ comme variable d'intégration à la place de τ l'intégrale définie devient :

$$\int_{-\infty}^{t-r/c} e^{-ik\sqrt{\gamma^2+r^2}}\, J_0(k_0\gamma)d\tau = \frac{1}{c}\int_0^\infty \frac{e^{-ik\sqrt{\gamma^2+r^2}}}{\sqrt{\gamma^2+r^2}}\, J_0(k_0\gamma)\,\gamma d\gamma$$

Cette dernière intégrale a pour valeur

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ik\sqrt{\gamma^2+r^2}}}{\sqrt{\gamma^2+r^2}}\, J_0(k_0\gamma)\,\gamma d\gamma = \frac{e^{-i\sqrt{k^2-k_0^2}\,r}}{i\sqrt{k^2-k_0^2}} \tag{10}$$

en utilisant une identité connue [**3**]

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ix\sqrt{1-m^2}}}{i\sqrt{1-m^2}}\, J_0(my)\, mdm = \frac{e^{-i\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}} \tag{11}$$

et en y posant :

$$m = \frac{i\gamma}{r},\quad \frac{x}{r} = k,\ \frac{\gamma}{r} = ik_0$$

Eu égard à (10), la formule (9) devient :

$$4\pi\,\Phi_n(x_u) = \int_S \frac{e^{-iKr}}{r}\,\alpha_u\, n^u\, \psi_n(x'_u)\, dS'$$

L'expression du Principe de HUYGENS dans le cas des ondes monochromatiques est donc :

$$4\pi\,\psi_n(x_u) = (ik\alpha_0 + ik_0\alpha_4 + \alpha_u\partial^u)\int_S \frac{e^{-iKr}}{r}\,\alpha_u\, n^u\, \psi_n(x'_u)\, dS' \tag{12}$$

Cette formule a été donnée tout d'abord par M. E. DURAND [4] qui l'a déduite d'une identité analogue à (1) écrite pour les fonctions sinusoïdales par rapport au temps.

III. — Solution par les intégrales de contour.

La formule (II, 12) peut être utilisée dans les problèmes de diffraction, à la manière de la formule de KIRCHHOFF appliquée à un seul ψ. L'intégrale de surface sera étendue simplement à l'ouverture percée dans l'écran. La surface S est donc une cloison limitée par le contour C de l'ouverture. A partir de l'expression générale (8), nous avons montré [**5**] que dans ce cas, on peut transformer les intégrales de surface en intégrales de contour. En se bornant aux ondes monochromatiques, c'est l'expression (II, 12) qui subira les transformations successives suivantes.

Tout d'abord, on a les relations entre opérateurs :

$$\begin{aligned}(\alpha_u\partial^u)\,(\alpha_u n^u) &= n_u\partial^u - (n^v\partial^w - n^w\,\partial^v)\,\alpha_v\alpha_w \\ (\alpha_u n^u)\,(\alpha_u\partial^u) &= n_u\partial^u + (n^v\partial^w - n^w\,\partial^v)\,\alpha_v\alpha_w\end{aligned} \tag{1}$$

$(u, v, w) = 1, 2, 3,$ et l'on fait usage de la règle de sommation sur les indices muets.

Ensuite on opère les dérivations sous le signe somme dans l'expression (II, 12) en notant toujours que $\partial^u = -\partial'^u$ pour des fonctions de r. On a successivement :

$$\alpha_u \partial^u \int_s \frac{e^{-iKr}}{r} \alpha_u n^u \psi_n \, ds' = -\int_s [n_u \partial'_u - (n^v \partial'^w - n^w \partial'^v) \alpha_v \alpha_w] \left(\frac{e^{-iKr}}{r} \psi_n \right) dS'$$
$$+ \int_s \frac{e^{-iKr}}{r} [n_u \partial'^u - (n^v \partial'^w - n^w \partial'^v) \alpha_v \alpha_w] \psi_n \, dS'.$$

$$4\pi \psi_n (x_u) = -\int_s n_u \partial'^u \left(\frac{e^{-Kr}}{r} \psi_n \right) dS'$$
$$+ \int_s (n^v \partial'^w - n^w \partial'^v) \alpha_v \alpha_w \left(\frac{e^{-iKr}}{r} \psi_n \right) dS'$$
$$+ \int_s \frac{e^{-iKr}}{r} \Big[(ik\alpha_0 + ik_0 \alpha_4) (\alpha_u n^u)$$
$$+ n_u \partial'^u - (n^v \partial'^w - n^w \partial'^v) \alpha_v \alpha_w \Big] \psi_n \, dS'$$

Des équations de Dirac : $(ik\alpha_0 - ik_0\alpha_4 - \alpha_u\partial'^u) \psi_n (x_u') = 0$, on déduit :

$$(ik\alpha_0 - ik_0\alpha_4) \psi_n = \alpha_u\partial'^u \psi_n$$

Multiplions en avant les deux membres par $\alpha_u n^u$; en utilisant (1) et en remarquant que pour les matrices du type Dirac,

$$\alpha_u\alpha_4 = -\alpha_4\alpha_u$$

on a :

$$(\alpha_u n^u) (ik\alpha_0 - ik_0\alpha_4) \psi_n = (\alpha_u n^u) (\alpha_u \partial'^u) \psi_n$$
$$(ik\alpha_0 + ik_0\alpha_4) (\alpha_u n^u) \psi_n = n_u \partial'^u + (n^v \partial'^w - n^w \partial'^v) \alpha_v\alpha_w\psi_n \tag{3}$$

En portant (3) dans (2), on fait apparaître dans la troisième intégrale de (2) des termes en $(n^v \partial'^w - n^w \partial'^v)\alpha_v\alpha_w \psi_n$ qui se détruisent, et il ne reste plus que l'expression suivante :

$$4\pi \psi_n (x_n) = -\int_s n_u \partial'^u \left(\frac{e^{-iKr}}{r} \psi_n \right) dS' + 2 \int_s \frac{e^{-iKr}}{r} n_u \partial'^u \psi_n \, dS'$$
$$+ \int_s (n^v \partial'^w - n^w \partial'^v) \alpha_v \alpha_w \left(\frac{e^{-iK_r}}{r} \psi_n \right) dS'$$

Comme on a :

$$\int_s \partial'^u \left(\frac{e^{-iKr}}{r} \psi_n \right) dS' = \int_s \left(\partial'^u \frac{e^{-iKr}}{r} \right) \psi_n \, dS' + \int_s \frac{e^{-iKr}}{r} \partial'^u \psi_n \, dS'$$

on obtient finalement :

$$4\pi \psi_n (x_u) = \int_s \left\{ \frac{e^{iKr}}{r} \frac{\partial}{\partial n} \psi_n - \psi_n \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{iKr}}{r} \right\} dS'$$
$$+ \int_s (n^v \partial'^w - n^w \partial'^v) \alpha_v \alpha_w \left(\frac{e^{-iKr}}{r} \psi_n \right) dS' \tag{4}$$

ou encore :
$$4\pi\,\psi_n(x_u) = \int_s \left\{ \frac{e^{-iKr}}{r} \frac{\partial}{\partial n} \psi_n - \psi_n \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{-iKr}}{r} \right\} dS' + \oint_c \frac{e^{-iKr}}{r} \overline{\alpha}_u\, \psi_n\, dl^u. \tag{5}$$

avec $\overline{\alpha}_u = 1/2\ (\alpha_v\alpha_w - \alpha_w\alpha_v)$ et en transformant dans (4), la deuxième intégrale de surface en intégrale de contour par la formule :

$$\int_s [\vec{n} \times \overrightarrow{\text{grad}}\, A]\, dS = \oint_c A\, \vec{dl}.$$

On retrouve sous une forme très condensée, grâce à l'usage systématique des matrices de DIRAC, des formules obtenues par A. RUBINOWICZ [6]. Notons cependant que dans les formules écrites par A. RUBINOWICZ, au lieu des fonctions d'onde ψ_n qui interviennent dans l'intégrale de surface, ce sont des fonctions $\Phi = e^{-iK\rho}/\rho$ pour des sources ponctuelles d'électrons; ces fonctions correspondent à nos potentiels Φ_n, et ne satisfont qu'à l'équation, du second ordre (I, 1), les fonctions d'onde ψ_n devant s'en déduire par (II, 4).

Lorsque les ondes ψ_n ne dépendent pas de la variable y par exemple et que S est une surface cylindrique, l'élément de surface est $dS' = dl.\ d\eta$, dl étant l'élément d'arc de la courbe Γ intersection du plan $x0z$ avec les génératrices du cylindre (*fig.* 1). On a écrit (xyz), (ξ, η, ζ) à la place de x_u, x'_u.

La formule (5) devient :

$$4\pi\,\psi_n(x_u) = \int_\Gamma \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-iKr'}}{r'} d\eta \cdot \frac{\partial}{\partial n} \psi_n - \psi_n \frac{\partial}{\partial n} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-iKr'}}{r'} d\eta \right] dl + \int_c \frac{e^{-iK\rho}}{\rho} \overline{\alpha}_u\, \psi_n\, dl^u.$$

en désignant par ρ la distance de P à un point courant du contour C de l'ouverture diffrigente.

On a : $r^2 + \eta^2 = r'^2$; $\eta d\eta = r'dr'$

$$\frac{d\eta}{r'} = \frac{dr'}{\eta} = \pm \frac{dr'}{\sqrt{r'^2 - r^2}} \quad \begin{cases} + \text{ si } \eta > 0 \\ - \text{ si } \eta < 0 \end{cases}$$

Si l'on pose : $\dfrac{r'}{r} = u$, $dr' = r du$

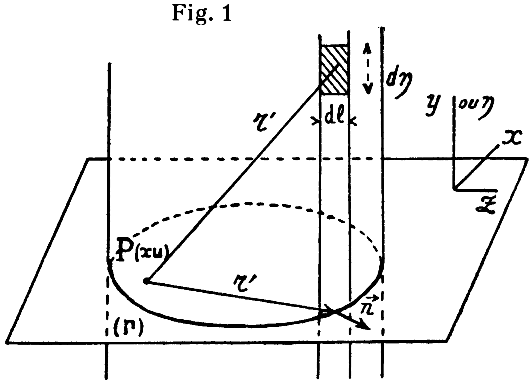
on a : $$\frac{d\eta}{r'} = \frac{dr'}{\sqrt{r'^2 - r^2}} = \frac{du}{\sqrt{u^2 - 1}},$$

de sorte que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-iKr'}}{r'} d\eta = 2 \int_1^{\infty} \frac{e^{-iKru}}{\sqrt{u^2 - 1}} du = \frac{\pi}{i} H_0^{(2)}(Kr)$$

$H_0^{(2)}(Kr)$ est la fonction de HANKEL d'ordre zéro.

Fig. 1



On obtient alors une formule qui est à (5) ce que la formule de WEBER est à celle de KIRCHHOFF, soit :

$$\psi_n(x_u) = \frac{1}{4i}\int_\Gamma \left\{ H_0^{(2)}(Kr)\frac{\partial}{\partial n}\psi_n - \psi_n \frac{\partial}{\partial n} H_0^{(2)}(Kr) \right\} dl + \frac{1}{4\pi}\int_C \frac{e^{-iK\rho}}{\rho}\, \overline{\alpha}_u \psi_n\, dl^u. \quad (6)$$

Dans les problèmes de diffraction, Γ sera réduite à sa partie éclairée, C étant toujours le contour de l'ouverture.

IV. — **1. Ondes planes et demi-plan.**

L'onde plane monochromatique est donnée par : $\psi_n = a_n e^{-i K r} e^{ikct}$ (1)

Pour que les a_n ne soient pas tous nuls, on doit avoir la condition :

$$\frac{W^2}{c^2} - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2 = m_0^2 c^2 \quad (2)$$

qui est la relation en Dynamique Relativiste entre W et $\vec{p}$, déjà rencontrée au § I. Si l'on se borne aux énergies positives, on sait que les valeurs des a_n sont [7] :

$$a_1 = -\frac{p_z C_1 + (p_x + ip_y) C_2}{\frac{W}{c} + m_0 c} \qquad a_2 = -\frac{(p_x - ip_y) C_1 - p_z C_2}{\frac{W}{c} + m_0 c} \quad (3)$$

$$a_3 = C_1 \qquad a_4 = C_2$$

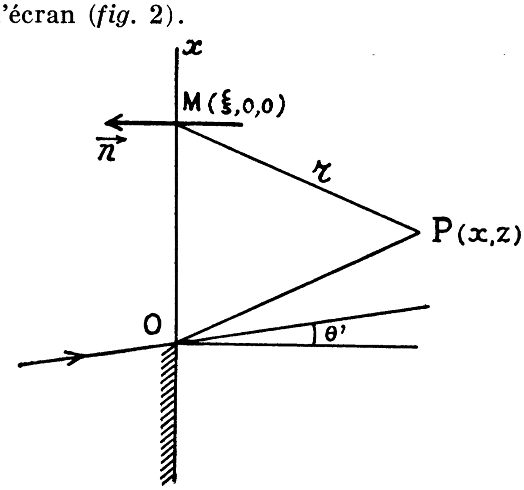
C_1, C_2 étant deux constantes arbitraires.

Lorsque l'onde plane aborde le plan de l'écran sous l'incidence θ' on a :

$$\psi_n = a_n e^{-iK(x \sin\theta' + z \cos\theta')} \quad (4)$$

où l'on a omis le facteur e^{ikct}

C'est la formule (III, 6) qu'il faut utiliser, la courbe Γ est l'axe Oz le contour de l'ouverture est ici le bord du demi-plan pris comme axe $y'Oy$, y ou η variant de $-\infty$ à $+\infty$. Le calcul sera conduit identiquement comme quand on applique la formule de WEBER à la variable lumineuse; il a été développé dans ce dernier cas par M. E. DURAND [8], sauf que dans le cas actuel des ondes ψ_n, il y a la contribution de l'intégrale curviligne étendue au bord de l'écran (*fig.* 2).



On a :

$$\psi_n(x, 0) = a_n\, e^{-iKx\sin\theta'}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial n}\psi_n\right)_{z=0} = a_n\, iK\cos\theta'\, e^{-iKx\sin\theta'}$$

$$\frac{\partial}{\partial n} H_0^{(2)}(Kr) = -\frac{Kz}{r} H_1^{(2)}(Kr)$$

L'onde diffractée au point P est donnée par :

$$\psi_n = e^{-iKx\sin\theta'}\left\{\frac{a_n}{4i}\int_0^{+\infty}\left[iK\cos\theta'.\, H_0^{(2)}(Kr) + \frac{Kz}{r} H_1^{(2)}(Kr)\right]d\xi + \frac{\alpha_3\alpha_4 a_n}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-iK\rho}}{\rho}d\eta.\right.$$

Sous incidence normale, $\theta' = 0$, ceci se réduit à :

$$\psi_n = \left\{\frac{K}{4}\int_0^{+\infty} H_0^{(2)}(Kr)\, d\xi + \frac{Kz}{4i}\int_0^{+\infty} H_1^{(2)}(Kr)\frac{d\xi}{r} + \frac{\alpha_3\alpha_4}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-iK\rho}}{\rho}d\eta\right\} a_n \tag{5}$$

En posant : $x - \xi = m$, d'où $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + z^2} = \sqrt{z^2 + m^2}$,
il vient :

$$\psi_n = a_n\left\{\frac{K}{4}\int_{-\infty}^{x} H_0^{(2)}(Kr)dm + \frac{Kz}{4i}\int_{-\infty}^{x} H_1^{(2)}(Kr)\frac{dm}{r}\right\} + \frac{\alpha_3\alpha_4 a_n}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-iK\rho}}{\rho}d\eta. \tag{6}$$

On utilise les identités :

$$\int_{-\infty}^{0} \text{ ou } \int_0^{+\infty} H_0^{(2)}(K\sqrt{z^2+m^2})\, dm = \frac{e^{-iK|z|}}{K}$$

$$\int_{-\infty}^{0} \text{ ou } \int_0^{+\infty} H_1^{(2)}(K\sqrt{z^2+m^2})\frac{dm}{\sqrt{z^2+m^2}} = -\frac{e^{-iK|z|}}{iK|z|} \tag{7}$$

l'expression (6) se réduit dans ses deux premières intégrales au facteur a_n près, à :

$$\frac{e^{-iKz}}{2} + \frac{K}{4}\int_0^{x} H_0^{(2)}(Kr)\, dm + \frac{Kz}{4i}\int_0^{x} H_1^{(2)}(Kr)\frac{dm}{r}. \tag{8}$$

Dans les conditions d'approximation courantes, z est très grand et $z \gg x$, c'est-à-dire qu'on se place loin du bord de l'écran et près de l'ombre géométrique.

Puisque Kz est grand, on peut remplacer les fonctions de HANKEL par leurs formes asymptomatiques :

$$H_0^{(2)}(v) \sim \left(\frac{2}{\pi v}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-i\left(v-\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$H_1^{(2)}(v) \sim i\left(\frac{2}{\pi v}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-i\left(v-\frac{\pi}{4}\right)}$$

Ensuite comme $z \gg x$, on peut prendre $\sqrt{z^2 + m^2} \# z$ dans l'amplitude et $\sqrt{z^2 + m^2} \# z + m^2/2z$ dans la phase.

Pour introduire les intégrales de FRESNEL :

$$U(v) = \int_0^v \cos\left(\frac{\pi}{2} u^2\right) du, \qquad V(v) = \int_0^v \sin\left(\frac{\pi}{2} u^2\right) du, \tag{9}$$

il suffit dès lors de poser $v = \sqrt{2/\lambda z}\, |x|$ avec $K = 2\pi/\lambda$.

L'expression (8) devient :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \left(\frac{1}{2} \pm U\right) - i\left(\frac{1}{2} \pm V\right) \right\} e^{-iKz+i\frac{\pi}{4}}$$

(+) si $x>0$, P étant dans la partie éclairée, et (—) si $x<0$, P dans l'ombre géométrique.

Pour l'intégrale étendue au bord du demi-plan, on a :

$$\rho = \sqrt{x^2 + z^2 + \eta^2} = \sqrt{r_0^2 + \eta^2}$$

Le même calcul effectué comme au § III, conduit à :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-iK\rho}}{\rho}\, d\eta = \frac{\pi}{i} H_0^{(2)}(Kr_0).$$

Ici encore, on ne prendra que la valeur asymptotique de $H_0^{(2)}(Kr_0)$ et $\sqrt{z^2 + x^2} \# z$, en négligeant les termes très petits, $x^2/2z$ et suivants. D'où :

$$\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-iK\rho}}{\rho}\, d\eta \sim -\frac{i}{4\pi} \sqrt{\frac{\lambda}{z}}\, e^{-iKz+i\frac{\pi}{4}}.$$

L'expression définitive de l'onde diffractée est :

$$\psi_n = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2} \pm U\right) - i\left(\frac{1}{2} \pm V + \frac{\alpha_3\, \alpha_4}{4\pi} \sqrt{\frac{\lambda}{z}}\right) \right\} a_n\, e^{-iKz+i\frac{\pi}{4}}. \tag{10}$$

On retrouve bien la vibration de FRESNEL, avec, dans l'amplitude, un terme additionnel très petit, au moins dans les conditions d'approximation où l'on se place. Le facteur de phase aussi est corrigé de $\pi/4$. Voici l'ordre de grandeur de ce terme complémentaire :

Dans l'expérience de diffraction de BÖRSCH, on a :

$$\lambda = 6{,}6\ 10^{-10}\ \text{cm} \qquad z = 31{,}3\ \text{cm}$$

$$\frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{\lambda}{z}} \sim 3{,}7.\ 10^{-6}$$

IV. — **2. Ondes planes et fente.**

Considérons une fente indéfinie à bords parallèles; la variable ξ varie de ξ_1 à ξ_2 au lieu de 0 à $+\infty$. On désigne aussi par r_0 et r_0', les distances du point $P(x, z)$ aux points d'intersection du plan xOz respectivement avec les bords inférieur et supérieur de la fente (*fig.* 3).

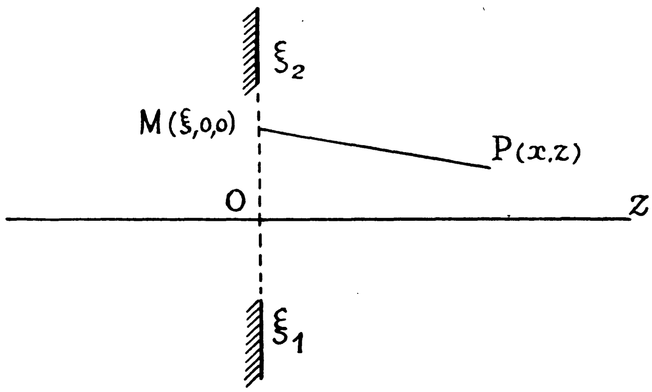


Fig. 3

On peut reproduire point par point le calcul du paragraphe précédent, mais avec les nouvelles limites des variables.

Avec :

$$x - \xi_1 = m_1, \quad x - \xi_2 = m_2$$

on a, au lieu de (10), l'expression suivante pour l'onde diffractée par la fente :

$$\psi_n = a_n \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \Big[\mathrm{U}(v_1) - \mathrm{U}(v_2) \Big] - i \Big[\mathrm{V}(v_1) - \mathrm{V}(v_2) \Big] \right\} e^{-i\mathrm{K}z + i\frac{\pi}{4}} \tag{11}$$
$$+ \frac{1}{4i} \alpha_3 \alpha_4 a_n \, [\mathrm{H}_0^{(2)}(\mathrm{K}r_0) - \mathrm{H}_0^{(2)}(\mathrm{K}r'_0)],$$

les fonctions de Hankel qui y figurent seront prises en valeurs asymptotiques.

Pour retrouver le résultat (10) du demi-plan, il suffit, dans (11), de faire :

$$\xi_1 = 0, \ \xi_2 \to +\infty, \ r_0' \to \infty$$

d'où : $m_1 = x$, $m_2 \to -\infty$ et $v_1 = v$, $v_2 \to -\infty$

et de noter que :

$$\mathrm{U}(-\infty) \text{ ou } \mathrm{V}(-\infty) = -\frac{1}{2}$$
$$\mathrm{H}_0^{(2)}(\mathrm{K}r_0')_{r'_0 \to \infty} \to 0$$

V. — **Les ondes sphériques en théorie de Dirac.**

Soient des ondes issues d'une source ponctuelle :

$$\psi_n = a_n \frac{e^{-i\mathrm{K}r}}{r} e^{-ikct} \tag{1}$$

Elles satisfont à l'équation du second ordre :

$$(\partial_u \partial^u + k^2 - k_0^2)\, \psi_n = 0$$

Mais il faut qu'elles satisfassent aussi aux équations aux dérivées partielles du premier ordre de DIRAC :

$$(ik\alpha_0 - ik_0\alpha_4 - \alpha_u\partial^u)\ \psi_n = 0 \tag{2}$$

En faisant ψ_n dans (2), on cherche la relation entre les constantes k et K pour que les a_n existent.

On a $\partial^u r = \xi_u$, ξ_u étant les cosinus directeurs de $\vec{r}$:

$$\partial^u \left(\frac{e^{-iKr}}{r}\right) = -\left(i\mathrm{K} + \frac{1}{r}\right)\frac{e^{-iKr}}{r}\,\xi_u.$$

On pose : $\mathrm{K} = \dfrac{2\pi}{h}\left|\vec{p}\right|$

avec :

$$\mathrm{K}^2 = \frac{4\pi^2}{h^2}\left[\frac{\mathrm{W}^2}{c^2} - m_0^2\,c^2\right] = k^2 - k_0^2, \qquad \mathrm{K}\xi_1 = \frac{2\pi}{h}p_x,\ \text{etc.}$$

En substituant (1) dans (2), on a quatre équations linéaires et homogènes en a_n. Pour que ce système admette une solution en a_n, il faut que le déterminant soit nul; cette condition donne :

$$k^2 - k_0^2 = -\left(i\mathrm{K} + \frac{1}{r}\right)^2 \tag{3}$$

Si la source ponctuelle est à l'infinie, $r \to \infty$, on retrouve bien la condition qui relie l'énergie aux moments en Mécanique Relativiste pour une particule libre déjà plusieurs fois rencontrée :

$$\frac{\mathrm{W}^2}{c^2} - m_0^2\,c^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$$

Si la condition (3) est satisfaite, non seulement le déterminant des a_n est nul, mais les mineurs du troisième ordre sont nuls, de sorte que deux des a_n sont arbitraires, soit : $a_3 = \mathrm{C}_1$, $a_4 = \mathrm{C}_2$ les deux autres s'expriment à l'aide de ceux-là.

Les quatre coefficients a_n sont :

$$a_3 = \mathrm{C}_1 \qquad a_4 = \mathrm{C}_2$$

$$a_1 = -\frac{\left(i\mathrm{K} + \frac{1}{r}\right)\xi_3\,\mathrm{C}_1 + \left(i\mathrm{K} + \frac{1}{r}\right)(\xi_1 + i\xi_2)\,\mathrm{C}_2}{i\,(k + k_0)}$$

$$a_2 = \frac{\left(i\mathrm{K} + \frac{1}{r}\right)\xi_3\,\mathrm{C}_2 - \left(i\mathrm{K} + \frac{1}{r}\right)(\xi_1 - i\,\xi_2)\,\mathrm{C}_1}{i\,(k + k_0)}$$

VI. — **1. Source ponctuelle et ouverture circulaire dans l'écran plan.**

Nous utilisons la formule (§ III, 4). La source S et le point P sont à grande distance de l'écran plan, de sorte que r, r_0 seront considérés comme constants dans l'amplitude et ne varient que dans l'exponentielle. Les

a_n contiennent un terme en $1/r_0$ et peuvent aussi être mis hors du signe d'intégration (*fig.* 4).

On a :

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-iKr}}{r}\right)=\left(iK+\frac{1}{r}\right)\frac{e^{-iKr}}{r}\cos(\vec{n},\vec{r})$$

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-iKr_0}}{r_0}\right)=\left(iK+\frac{1}{r_0}\right)\frac{e^{-iKr_0}}{r_0}\cos(\vec{n},\vec{r_0})$$

$$\partial'_u\left[\frac{e^{-iK(r+r_0)}}{rr_0}\right]=\left\{\left(iK+\frac{1}{r}\right)\cos(Ox_u,\vec{r})+\left(iK+\frac{1}{r_0}\right)\cos(Ox_u,\vec{r_0})\right\}\frac{e^{-iK(r+r_0)}}{rr_0}.$$

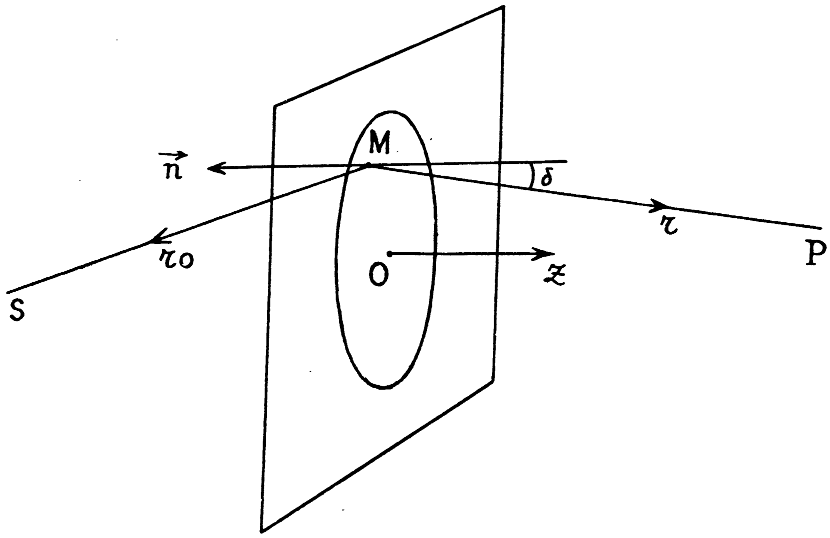


Fig. 4

Pour les très petites longueurs d'onde, r, r_0 sont grands devant λ, et comme $K = 2\pi/\lambda$, $K \gg \frac{1}{r}$, $K \gg \frac{1}{r_0}$; avec les axes choisis, $(n_1, n_2) = 0$, $n_3 = -1$, on a :

$$4\pi\,\psi_n = iK\int_s \frac{e^{-iK(r+r_0)}}{rr_0}\Big\{[\cos(0z,\vec{r}) - \cos(0z,\vec{r_0})]\,a_n \tag{1}$$

$$+[\cos(Oy,\vec{r})+\cos(Oy,\vec{r_0})]\,\alpha_2\alpha_3 a_n - [\cos(Ox,\vec{r})+\cos(Ox,\vec{r_0})]\,\alpha_3\alpha_1 a_n\Big\}ds'$$

En général, les dimensions de l'ouverture sont petites en comparaison avec r, r_0; on peut donc faire les approximations suivantes :

$$\cos(Oz,\vec{r}) = -\cos(Oz,\vec{r_0}) = \cos\delta$$

$$\cos(Oy,\vec{r}) = \ldots = \cos(Ox,\vec{r_0}) \# \sin\delta$$

et considérer $\cos\delta$, $\sin\delta$ comme constants, de sorte que le crochet $\{\ldots\}$ peut se mettre hors du signe d'intégration. Dès lors, le calcul devient classique; on peut trouver le développement d'un calcul identique dans l'ouvrage [1] : « Optique Électronique et Corpusculaire », de M. Louis DE BROGLIE. On pose :

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad R_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$$

$$\frac{x}{R} = \alpha \quad \frac{y}{R} = \beta \qquad \frac{x_0}{R_0} = -\alpha_0 \quad \frac{y_0}{R_0} = -\beta_0$$

D'où :

$$r = R - \alpha\xi - \beta\eta + \frac{\xi^2 + \eta^2}{2R} - \frac{(\alpha\xi + \beta\eta)^2}{2R} + \ldots$$

$$r_0 = R_0 + \alpha_0\xi + \beta_0\eta + \frac{\xi^2 + \eta^2}{2R_0} - \frac{(\alpha_0\xi + \beta_0\eta)^2}{2R_0} + \ldots$$

ξ, η sont les coordonnées de l'élément de surface dS'.

L'onde diffractée par une ouverture quelconque percée dans l'écran plan a pour expression :

$$\psi_n(P) = \text{Constante} \iint\limits_{\text{ouverture}} e^{iK[\xi(\alpha-\alpha_0) + \eta(\beta-\beta_0) - f(\xi,\eta)]} d\xi\, d\eta. \tag{2}$$

avec :

$$f(\xi,\eta) = \frac{1}{2}\left[(\xi^2+\eta^2)\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_0}\right) - \frac{(\alpha\xi + \beta\eta)^2}{R} - \frac{(\alpha_0\xi + \beta_0\eta)^2}{R_0}\right] \tag{3}$$

et la valeur suivante pour la constante, facteur de l'intégrale :

$$\frac{iK}{2\pi} \frac{e^{-iK(R+R_0)}}{RR_0} \left[\cos\delta + \sin\delta\,(\alpha_2\alpha_3 - \alpha_3\alpha_1)\right] a_n \tag{4}$$

D'après (2), on voit que l'expression obtenue pour chaque ψ_n en appliquant (§ III, 4) ne diffère de celle obtenue pour un seul ψ par l'usage de la formule de KIRCHHOFF que par la constante (4). Dans le cas d'un seul ψ, on a en effet pour cette constante, la valeur :

$$\frac{iK}{2\pi} \cos\delta \, \frac{e^{-iK(R+R_0)}}{RR_0}.$$

Pour une ouverture circulaire, il est naturel d'utiliser les coordonnées cylindriques :

$$\xi = \rho\cos\varphi, \qquad \eta = \rho\sin\varphi, \qquad dS' = \rho\, d\rho\, d\varphi$$

On pose :

$$K(\alpha - \alpha_0) = \sigma\cos\varphi', \qquad K(\beta - \beta_0) = \sigma\sin\varphi'$$

d'où :

$$\sigma = K\sqrt{(\alpha - \alpha_0)^2 + (\beta - \beta_0)^2}$$

En considérant σ et φ' comme constants et en négligeant le terme $f(\xi, \eta)$ — diffraction de FRAUNHOFER — on trouve :

$$\psi_n(P) = \text{Constante.}\ \pi a^2.\ \frac{2\, J_1(\sigma a)}{\sigma a}.$$

a est le rayon de l'ouverture circulaire.

VI. — **2. Diffraction par le demi-plan.**

Si l'on part de la formule (§ III, 5), la partie provenant de l'intégrale de surface a la même valeur que s'il s'agissait de la formule de KIRCHHOFF appliquée à un seul ψ. L'intégrale de contour est étendue comme toujours au bord de l'écran, suivant l'axe des η, η variant de $(-\infty)$ à $(+\infty)$ (*fig.* 5).

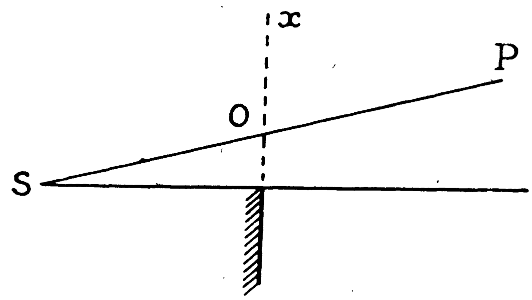


Fig. 5

L'origine O sera prise sur la droite SP; on peut faire les hypothèses simplificatrices suivantes : la source S est sur le même plan horizontal que le bord de l'écran et P est dans le plan vertical, perpendiculaire à ce bord. On a :

$$\alpha = \alpha_0 = \sin\delta, \qquad \beta = \beta_0 = 0, \qquad \gamma = \gamma_0 = \cos\delta$$

Nous n'insisterons pas sur le calcul de l'intégrale de surface qui est identique à celui de M. L. DE BROGLIE dans l'ouvrage précité. En posant :

$$C = \iint \cos K\, [\xi(\alpha - \alpha_0) + \eta(\beta - \beta_0) - f(\xi, \eta)]\, d\xi d\eta$$
$$S = \iint \sin K\, [\xi(\alpha - \alpha_0) + \eta(\beta - \beta_0) - f(\xi, \eta)]\, d\xi d\eta$$

on trouve :

$$C = a\left[\left(\frac{1}{2} - U\right) - \left(\frac{1}{2} - V\right)\right], \quad S = a\left[\left(\frac{1}{2} - U\right) + \left(\frac{1}{2} - V\right)\right],$$

avec $a = \dfrac{\lambda}{2\cos\delta\left(\dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{R_0}\right)}$

de sorte que l'intégrale de surface a pour valeur :

$$\frac{1}{4\pi}\int_s \Big\{\ldots\Big\}\, dS' = a_n\, \frac{i.\cos\delta}{\lambda}\, \frac{e^{-iK(R+R)}}{R\,R_0}\, [C + i\,S]$$

Voici la contribution de l'intégrale de contour : sur l'axe des η, $\xi = 0$; on pose :

$$\frac{\pi}{\lambda}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R_0}\right)\eta^2 = \frac{\pi}{2} v^2$$

d'où

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\frac{\pi}{\lambda}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{Ro}\right)\eta^2}\, d\eta = \frac{1}{\sqrt{2/\lambda\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{Ro}\right)}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\frac{\pi}{2}v^2}\, dv.$$

On voit apparaître ici les intégrales de FRESNEL (IV, 9). Avec ces intégrales, l'intégrale de contour a pour valeur :

$$\frac{1}{4\pi}\int_c \left\{\ldots\right\} dl = \frac{\alpha_3\,\alpha_4\,a_n}{4\,\pi}\,\frac{e^{-iK(R+Ro)}}{R\,R_0}\cdot\frac{(1-i)}{\sqrt{\frac{2}{\lambda}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{Ro}\right)}}$$

De ce qui précède, il apparaît que dans les applications aux problèmes usuels de diffraction des ondes ψ_n associées à un particule, et surtout dans les conditions d'approximation où l'on se place, les résultats obtenus ne sont pas très différents de ceux obtenus en appliquant la formule de KIRCHHOFF à un seul ψ.

Nous exprimons notre profonde gratitude à M. Émile DURAND à qui nous devons la précieuse direction dans notre travail.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BROGLIE (Louis de), Optique Électronique et Corpusculaire, Hermann, 1950.

[2] DURAND (E.), Math. pures et appl. 28, 1949, p. 85.

[3] WHITTAKER et WATSON, Modern Analysis, p. 384.

[4] DURAND (E.), Comptes Rendus, 236, 1953, p. 1337.

[5] PHAN VAN LOC, Comptes Rendus, 238, 1954, p. 2494.

[6] RUBINOWICZ (A.), Acta Physica Polonica, XII, 3, 1934.

[7] BROGLIE (Louis de), Théorie des Particules de spin 1/2, Gauthier-Villars, 1952, p. 79.

[8] DURAND (E.), Revue d'Optique, t. 28, n° 6, 1949.