ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

JEAN COMBES

Sur quelques théorèmes de P. Davis, P. Erdös et A. Rényi

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 4e série, tome 26 (1962), p. 139-150
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1962_4_26__139_0>

SUR QUELQUES THÉORÈMES de P. DAVIS, P. ERDÖS et A. RÉNYI

par Jean COMBES

1. — Introduction.

Cet article, qui concerne les zéros des dérivées successives des fonctions analytiques, fait suite à d'autres articles sur le même sujet parus dans les *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse* et signalés à la bibliographie sous les numéros [2] et [3]. Il en conserve les notations et la méthode : celle des systèmes infinis triangulaires qui est exposée dans [1].

Soit $f(z) = \sum_{0}^{\infty} a_n z^n / n!$ une fonction holomorphe dans le disque $|z| < \mathrm{R}$ ($\mathrm{R} > 0$, fini ou non) ; supposons que chacune des dérivées successives $f^{(p)}$ admette dans ce disque au moins un zéro z_p ($p = 0, 1, 2 \ldots$; on a posé $f^{(0)} = f$). Les coefficients a_n de f satisfont au système $\mathrm{AX} = 0$, où X est le vecteur-colonne de composantes $x_1 = a_0, \ldots x_{n+1} = a_n, \ldots$, et $\mathrm{A} = (a_{ij})$ la matrice triangulaire régulière définie comme suit : les indices i des lignes et j des colonnes prennent toutes les valeurs entières de 1 à $+\infty$, $a_{ij} = 0$ si $j < i$, $a_{ii} = 1$, $a_{n+1, n+p+1} = z^p{}_n / p!$ (n, p entiers $\geqslant 0$). Soit $\mathrm{B} = (b_{ij})$ l'inverse à gauche de A; c'est aussi une matrice triangulaire régulière : $b_{ij} = 0$ si $j < i$, $b_{ii} = 1$; quant à l'élément $b_{n+1, n+p+1}$, il est important de le calculer ou du moins de majorer son module. L'expression donnée dans [3], p. 173, montre immédiatement que

$$(1) \qquad |b_{n+1,\, n+p+1}| \leqslant \frac{(|z_n| + \ldots + |z_{n+p-1}|)^p}{p!}$$

Nous avions en fait dans [3], comme P. Davis dans [4], majoré par $\exp(|z_n| + \ldots + |z_{n+p-1}|)$. Mais les termes qui forment $b_{n+1, n+p+1}$ étant tous de degré p par rapport aux variables z_i, on a bien la majoration plus précise (1).

Comme nous l'avons remarqué dans [3], p. 173, la majoration (1) ne dépend que des *modules* des éléments de la matrice A, et vaut par suite aussi pour l'inverse à gauche $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A} = 2\,\mathrm{I} - \mathrm{A}'$, I désignant la matrice infinie unité, et A′ la matrice déduite de A en remplaçant tous les éléments par leur module (voir [1], pp. 258-259 et [2], p. 93).

Il est possible d'établir des majorations autres que (1) : on en trouvera dans [2] et [3] pour diverses hypothèses faites sur la suite (z_n). D'autre part, $b_{n+1,\, n+p+1}$ est le terme constant du polynôme de GONTCHAROFF relatif à la suite $z_n, z_{n+1}, \ldots z_{n+p-1}$ (voir [2], p. 92, et [5]). D'après [5], p. 12 on a donc :

$$|\, b_{n+1,\, n+p+1} \,| \leqslant \frac{1}{p\,!} \left(|\, z_n \,| + |\, z_n - z_{n+1} \,| + \ldots + |\, z_{n+p-2} - z_{n+p-1} \,| \right)^p$$

Mais, pour le problème que nous allons traiter dans le paragraphe suivant, c'est la majoration (1) qui est la mieux adaptée.

2. — Extension d'un théorème de P. Davis.

P. DAVIS a examiné dans [4] le cas où on suppose :

(2) $$|z_0| + |z_1| + \ldots + |z_n| \leqslant n + 1 \textit{ pour tout } n.$$

On a alors, d'après (1), pour $n \geqslant 0$ et $p > 0$:

$$|b_{n+1,\, n+p+1}| \leqslant (n+p)^p / p\,! < e^{n+p}$$

d'où l'on déduit que, *si* f *n'est pas identiquement nulle,* $\sum\limits_{0}^{\infty} \mathrm{e}^n |\mathrm{a}_n|$ *diverge, donc* f *ne peut être une fonction entière de croissance moindre que (ordre 1, type 1/*e).

On a utilisé le fait que, pour une solution de AX = 0 autre que la solution banale X = 0, le produit $\mathcal{B}X'$ n'existe pas (voir [1], p. 260, ou [2], p. 93). P. DAVIS a montré d'autre part que, dans l'énoncé précédent, le nombre $1/e$ ne peut être remplacé par un nombre plus grand.

Il est facile de traiter de même (1) le cas où *l'hypothèse* (2) *est remplacée par la suivante :*

(3) $$|z_0| + |z_1| + \ldots + |z_{n-1}| \leqslant \varphi(n) \text{ pour tout } n \geqslant 1,$$

$\varphi(n)$ étant une fonction positive donnée croissante (2) de n, qui *tend vers l'infini avec* n. On sait, en effet, qu'il n'y a pas lieu de supposer $\varphi(n)$ bornée, la série $\Sigma\, |z_n|$ étant nécessairement divergente si f n'est pas identiquement nulle. Cela découle immédiatement d'un résultat de GONTCHAROFF (voir [5], p. 15); on le retrouve d'ailleurs en utilisant (1) : si $\sum\limits_{0}^{\infty} |z_n| = \mathrm{L} < +\infty$, on a : $|b_{n+1,\, n+p+1}| \leqslant \dfrac{\mathrm{L}^p}{p!}$. Si f n'est pas identiquement nulle, $\mathcal{B}X'$ n'existe pas, donc il existe une valeur k de n pour laquelle la série $\sum\limits_{p=0}^{\infty} \dfrac{\mathrm{L}^p}{p!} \quad |a_{k+p}|$

(1) Une telle extension est suggérée et en partie traitée dans [4].
(2) Au sens large.

diverge; le rayon de convergence de la série $f(z)$ est donc au plus L. Mais, en raisonnant sur $f^{(q)}$ avec q choisi tel que $\sum_{q}^{\infty} |z_n| < \varepsilon$, on voit qu'il est au plus ε. Donc il est nul.

C'est pourquoi, pour examiner les conséquences de la condition (3), nous supposons que $\varphi(n)$ tend vers l'infini avec n. La condition (3) entraîne que, pour $n \geqslant 0$, $p > 0$ on a :

$$|b_{n+1,\, n+p+1}| \leqslant (\varphi(n+p))^p/p!$$

Comme ci-dessus, si f n'est pas identiquement nulle, il existe un entier k tel que $\sum_{p=0}^{\infty} (\varphi(k+p))^p |a_{k+p}|/p!$ diverge. De là on déduit que f ne peut être une fonction entière de croissance trop faible. Pour préciser ce point, nous serons conduits à comparer à la croissance de la fonction entière définie par la série $\Phi(z) = \sum_{1}^{\infty} z^n/(\varphi(n))^n$ ou par des séries extraites de celle-ci; aussi faisons-nous l'hypothèse supplémentaire que la suite $\varphi(n)$ est *régulière,* exprimant par là que toutes les séries extraites de $\Phi(z)$ définissent des fonctions entières ayant le même ordre, et dans le cas d'un ordre fini positif [3] le même type. La condition pour qu'il en soit ainsi est que $\dfrac{\log \varphi(n)}{\log n}$ ait une limite, finie ou non, lorsque $n \to +\infty$, et que de plus, si l'ordre est ρ fini positif, $(\varphi(n))^\rho/n$ ait une limite.

Dans ces conditions, si f n'est pas identiquement nulle, on a pour une infinité de valeurs de p :

$$|a_{k+p}|/p! \geqslant \frac{1}{p^2(\varphi(k+p))^p} \geqslant \frac{1}{p^2(\varphi(k+p))^{k+p}}$$

ce qui entraîne que, si f est entière, elle a un ordre au moins égal à celui de Φ, et de plus, si f et Φ ont même ordre fini positif, le type de f est supérieur ou égal à celui de Φ. Nous disons que la croissance de f est au moins égale à celle de Φ. D'où le

THÉORÈME. — *Soit* f *une fonction non identique à* 0, *holomorphe dans le disque* $|z| < R$, *et dont les dérivées* $f^{(n)}$ *s'annulent chacune en au moins un point* z_n *de ce disque* $(n = 0, 1, 2 \dots)$. *On suppose que l'on a, pour tout* $n \geqslant 1$, $|z_0| + \dots + |z_{n-1}| \leqslant \varphi(n)$, $\varphi(n)$ *étant une fonction positive donnée croissante de* n, *qui tend vers l'infini avec* n, *et qui est régulière au sens*

(3) Il est clair qu'on pourrait aussi introduire une classification parmi les fonctions d'ordre nul, ou parmi les fonctions d'ordre infini.

indiqué. f *ne peut être une fonction entière de croissance moindre que celle de la fonction entière* $\Phi(z) = \sum_{1}^{\infty} z^n/(\varphi(n))^n$.

Si par exemple $\varphi(n) = n^\beta$ $(\beta > 0)$, Φ a pour ordre $1/\beta$ et pour type β/e (le théorème de Davis correspond à $\beta = 1$). Si $\varphi(n) = \log n$, Φ est d'ordre infini; si $\varphi(n) = k^n$ $(k > 0)$, Φ est d'ordre nul et le théorème, tel qu'il a été donné, est sans intérêt : il faudrait préciser l'étude en classant les fonctions d'ordre nul.

On sait d'après [4] que la borne trouvée pour la croissance de f est exacte dans le cas où $\varphi(n) = n$.

Nous allons chercher s'il en est de même lorsque $\varphi(n) \sim kn^\beta$ $(k > 0, \beta > 0)$: c'est, en quelque sorte, le cas général, puisque c'est celui où l'ordre et le type de Φ sont finis positifs, avec, pour valeurs respectives, $\rho = 1/\beta$ et $\tau = \beta/(ek^{1/\beta})$. Nous verrons que la borne trouvée est *exacte pour l'ordre,* mais *peut-être pas pour le type* (sauf dans le cas $\beta = 1$) : pour cela nous construirons une fonction satisfaisant aux hypothèses du théorème, ayant pour ordre $\rho = 1/\beta$, et un type qui, s'il n'est pas égal à τ, est du moins *fini.* On ne restreint pas la généralité en donnant à k une valeur particulière, par exemple $k = 1$: il suffit de changer z en kz. Prenant donc $\varphi(n) \sim n^\beta$, on aura une constante D_β, finie, supérieure ou égale à β/e, qui sera le plus grand nombre pouvant remplacer le type de Φ dans l'énoncé du théorème. Remarquons qu'on a la même constante D_β si l'on fait l'hypothèse plus particulière $\varphi(n) = n^\beta$: en effet soit une fonction f, d'ordre $1/\beta$, de type supérieur ou égal à D_β mais arbitrairement voisin de D_β, et satisfaisant aux hypothèses du théorème avec $\varphi(n) \sim n^\beta$; soit $\lambda > 1$ et arbitrairement voisin de 1; en remplaçant par 0 les premiers coefficients de f en nombre suffisant, on obtient une fonction g qui satisfait aux hypothèses du théorème avec $\varphi(n) = \lambda n^\beta$.

Pour construire un contre-exemple, nous utilisons les propriétés ci-dessous :

a) On a, lorsque l'entier $n \to +\infty$, pour tout $\alpha < 1$:

$$1 + 2^{-\alpha} + \ldots + n^{-\alpha} \sim n^{1-\alpha}/1 - \alpha.$$

b) p étant un entier positif, considérons la fonction :

$$g_p(z) = 1 + z^p/p! + \ldots + z^{kp}/(kp)! + \ldots$$

Posons $z^p/p! = t$. On obtient ainsi :

$$G_p(t) = 1 + t + \ldots + t^k (p!)^k/(kp)! + \ldots$$

Lorsque $p \to +\infty$, $G_p(t)$ tend uniformément vers $1 + t$ dans tout compact du plan (t) : on le voit aisément en utilisant la formule de Stirling. Il en résulte que le module commun des p zéros de $g_p(z)$ les plus proches de l'origine est équivalent à $(p!)^{1/p}$ ou encore à p/e.

c) m_0 et p étant des entiers positifs, et α un nombre inférieur à 1, considérons la fonction entière $h(z) = \sum_{m=m_0}^{+\infty} z^{mp}/((mp)!)^{1-\alpha}$. h a pour ordre $1/1-\alpha$ et pour type $1-\alpha$.

Toutes ses dérivées d'ordre inférieur à m_0p, ainsi que ses dérivées d'ordre non multiple de p, s'annulent à l'origine. La dérivée d'ordre mp est, à un facteur près :

$$1 + \frac{z^p}{p!}\left(\frac{(mp+p)!}{(mp)!}\right)^\alpha + \dots + \frac{z^{kp}}{(kp)!}\left(\frac{(mp+kp)!}{(mp)!}\right)^\alpha + \dots$$

Si on pose $z = t/(mp)^\alpha$, on obtient une fonction qui, lorsque $m \to +\infty$, tend uniformément dans tout compact du plan (t) vers $1 + t^p/p! + \dots + t^{kp}/(kp)! + \dots$. Le coefficient de $t^{kp}/(kp)!$ tend en effet vers 1 lorsque $m \to +\infty$, et est toujours majoré par 1 si $\alpha \leqslant 0$, par $((kp+1)!)^\alpha$ si $0 < \alpha < 1$.

Soient λ et μ deux nombres satisfaisant à $1 < \mu < \lambda$. Si m_0 et p ont été pris assez grands, la dérivée d'ordre mp de h, pour tout $m \geqslant m_0$, admettra un zéro de module inférieur à $\mu\, p/e(mp)^\alpha$; il en résulte d'après *a*), en augmentant au besoin m_0, que la fonction h satisfait aux hypothèses du théorème, avec $\varphi(n) = \dfrac{\lambda}{e(1-\alpha)}\, n^{1-\alpha}$, ou $\dfrac{\lambda}{e\beta}\, n^\beta$, si on pose $1-\alpha = \beta$.

Comme λ peut être pris aussi près de 1 qu'on veut, on voit que :

$$D_\beta \leqslant \beta/(e\beta)^{1/\beta}.$$

Ce majorant de D_β est supérieur au minorant β/e, sauf, précisément, lorsque $\beta = 1$.

3. — Une conjecture de P. Erdös et A. Rényi.

A la fin de l'article signalé à la bibliographie sous le numéro [6], P. Erdös et A. Rényi ont émis l'hypothèse que, pour toute fonction entière non identiquement nulle, si z_n désigne un zéro de la dérivée d'ordre n, on a :

$$\limsup_{n \to +\infty} \frac{|z_0| + |z_1| + \dots + |z_{n-1}|}{\log n} = +\infty$$

Remarquons que, d'après un résultat de P. Csillag (voir [7]), pour une fonction entière qui n'est pas de la forme $\exp(az+b)$, toutes les dérivées sauf au plus deux admettent au moins un zéro : on peut donc, en remplaçant f par une dérivée convenable, supposer que $z_0, z_1, \dots$ existent.

Si on considère une fonction f satisfaisant aux hypothèses du théorème établi au paragraphe 2, avec $\varphi(n) = k \log n$, on a vu que f ne peut être une fonction entière d'ordre *fini*; mais on n'a pas exclu *toutes* les fonctions d'ordre *infini*. Nous allons montrer qu'en fait *la conjecture de* P. Erdös *et*

A. Rényi *est inexacte,* et qu'elle l'est encore si on remplace $\log n$ par des fonctions à croissance de plus en plus lente, comme $\log_2 n = \log(\log n)$, $\log_3 n, \dots$.

Soit un nombre $a > 2$, et un nombre b compris entre a et $a^2/2$. Soit $\psi(n)$ une fonction positive croissante de n, tendant vers l'infini avec n, et telle qu'on puisse trouver une suite croissante S d'entiers n_k ayant les propriétés suivantes :

$$a < \frac{\psi(n_{k+1})}{\psi(n_k)} < b\,;$$

$$\frac{n_{k+1}}{n_k} \to +\infty \quad \text{avec } k.$$

Considérons la fonction entière $\sum\limits_{n\in S} (z/\psi(n))^n = g(z)$. Toutes les dérivées de g dont l'ordre n'appartient pas à S s'annulent à l'origine. Considérons l'une des autres dérivées, par exemple celle d'ordre n_1. A un facteur près elle est égale à :

$$1 + C_{n_2}^{n_1} z^{n_2-n_1} \frac{(\psi(n_1))^{n_1}}{(\psi(n_2))^{n_2}} + \dots + C_{n_k}^{n_1} z^{n_k-n_1} \frac{(\psi(n_1))^{n_1}}{(\psi(n_k))^{n_k}} + \dots$$

Pour $|z| = b\,\psi(n_1)$, le k-ième terme écrit a son module majoré par : $\left(\dfrac{2b}{a^2}\right)^{n_k}$ qui est le terme général d'une série convergente. Le second terme a un module au moins égal à $C_{n_2}^{n_1}/b^{n_1}$, qu'on peut supposer supérieur à un nombre N arbitrairement donné (en amputant, s'il le faut, la suite S de ses premiers termes). D'après le théorème de Rouché, la dérivée d'ordre n_1 s'annule donc dans le disque de centre 0 et de rayon $b\,\psi(n_1)$. On voit ainsi que, pour la fonction g, en prenant toujours pour z_n le zéro de $g^{(n)}$ le plus proche de l'origine ($z_n = 0$ si n n'appartient pas à S), on a :

$$|z_0| + |z_1| + \dots + |z_{n_k}| < b\left[\psi(n_1) + \dots + \psi(n_k)\right] < \frac{a\,b}{a-1}\,\psi(n_k).$$

Il est clair que, en prenant $\psi(n) = \log n$, ou $\psi(n) = \log_2 n, \dots$ on peut satisfaire aux hypothèses utilisées dans la construction du contre-exemple. La conjecture qui termine [6] est donc inexacte.

Remarque. — Dans les deux paragraphes précédents nous avons utilisé la majoration (1), qui ne dépend que des modules des éléments de la matrice A, et est a fortiori valable quand ces modules sont diminués. Il s'ensuit que les résultats obtenus restent vrais si, au lieu de définir z_n comme un zéro de $f^{(n)}$, on le définit par la propriété qu'il existe des $\alpha_{n,n+p}$, de module $\leqslant 1$, tels que :

$$a_n + \dots + \alpha_{n,n+p}\, a_{n+p}\, z_n^p/p! + \dots = 0 \ (^4).$$

(4) Voir [3], p. 172. Signalons à ce propos un oubli : pour les fonctionnelles désignées p. 172 par (5), on a indiqué la condition $|\alpha_{ij}| \leqslant 1$; il faut évidemment lui ajouter $|\alpha_{ii}| = 1$.

4. — Fonctions dont les dérivées successives s'annulent plusieurs fois dans un disque.

Dans les articles [6] et [8] P. Erdös et A. Rényi, reprenant un problème étudié par Pólya, ont établi des résultats concernant le nombre de zéros des dérivées successives de $f(z)$ dans le disque $|z| \leqslant r$, $f(z)$ étant une fonction holomorphe pour $|z| < R$ avec $R > r$. Certains de leurs résultats ont été améliorés par H.S. Wilf [9].

On peut aborder aussi cette question par la méthode des systèmes infinis d'équations linéaires : en fait ce n'est pas exactement le même problème que nous serons amenés à traiter, mais un problème voisin. Le principe que nous appliquons est le suivant.

Soit $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n/n!$ une fonction holomorphe dans le disque $|z| < R$, et s'y annulant en $z_0, z_1, \ldots z_p$, que nous supposons d'abord distincts (p : entier > 0). Nous retiendrons non les $p + 1$ équations $f(z_0) = 0, \ldots, f(z_p) = 0$, mais une combinaison linéaire convenablement choisie. Cela revient à faire une combinaison linéaire des $p + 1$ suites $(1, z_0, z_0^2, \ldots), \ldots, (1, z_p, z_p^2, \ldots)$. Il est intéressant d'utiliser celle qui commence par 1 suivi de p termes nuls. On l'obtient avec des coefficients λ_i donnés par le système :

$$\begin{cases} \lambda_0 + \lambda_1 + \ldots + \lambda_p = 1 \\ \lambda_0 z_0 + \lambda_1 z_1 + \ldots + \lambda_p z_p = 0 \\ \quad\ldots\ldots \\ \lambda_0 z_0^p + \lambda_1 z_1^p + \ldots + \lambda_p z_p^p = 0 \end{cases}$$

dont le déterminant est le déterminant de Vandermonde $\Delta = \Delta(z_0, \ldots z_p)$.

Pour $n > p$, le $(n+1)$ième terme de la suite obtenue est $\lambda_0 z_0^n + \ldots + \lambda_p z_p^n$. C'est le quotient par Δ du déterminant formé en remplaçant dans Δ la première ligne par $(z_0^n \ldots z_p^n)$. Amenant dans ce dernier la première ligne à la dernière place, et mettant en facteur $(-1)^p z_0 z_1 \ldots z_p$, il reste à calculer le déterminant Δ' déduit de Δ en remplaçant les exposants p de la dernière ligne par $n - 1$. On retranche dans Δ' la première colonne aux p suivantes, on met en facteur $(z_1 - z_0)(z_2 - z_0) \ldots (z_p - z_0)$. Et on continue de la même façon. Finalement on voit que Δ' est le produit de Δ par un polynôme homogène de degré $n - p - 1$ en $z_0, \ldots z_p$, dont on établit aisément l'expression : $\sum z_0^{\alpha_0} \ldots z_p^{\alpha_p}$, la sommation étant étendue à tous les systèmes d'entiers positifs ou nuls α_i pour lesquels $\alpha_0 + \ldots + \alpha_p = n - p - 1$. Ce polynôme comprend C_{n-1}^p termes.

On voit d'ailleurs que, en opérant comme indiqué, on a calculé des *différences divisées*, et que :

$$\Delta' = \Delta . \quad D_p(z^{n-1}),$$

en désignant par $D_p(z^{n-1})$ la différence divisée d'ordre p de la fonction z^{n-1} relativement aux $p+1$ valeurs $z_0, \dots z_p$.

Si donc f s'annule aux points $z_0, \dots z_p$ du disque $|z| < R$, on a :

$$(4)\quad a_0 + (-1)^p z_0 z_1 \dots z_p \left[\frac{a_{p+1}}{(p+1)!} + \dots + \frac{a_n}{n!} D_p(z^{n-1}) + \dots\right] = 0$$

Nous avons jusqu'ici supposé les z_i distincts. Il est clair que la formule (4), où interviennent les *polynômes* $D_p(z^{n-1})$ est valable sans cela : on le montre aisément soit par voie algébrique, soit par continuité en considérant $f(z) + \varepsilon$. Remarquons aussi qu'on peut écrire le premier membre de (4) sous la forme $(-1)^p z_0 \dots z_p D_p\left(\frac{f(z)}{z}\right)$ (calculé pour $z_0, \dots z_p$ distincts et non nuls, et prolongé par continuité).

Appliquons ce qui précède à l'un des problèmes examinés par P. Erdös et A. Rényi, en considérant maintenant *une fonction* $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n/n!$, *holomorphe pour* $|z| < R$ *avec* $R > 1$, *et dont chaque dérivée* $f^{(k)}$ *s'annule en au moins* $p+1$ *points, distincts ou non, du disque* $|z| \leqslant 1$: soit z_{0k}, $z_{1k}, \dots z_{pk}$. On écrit pour chaque dérivée $f^{(k)}$ l'équation (4), qui est de la forme

$$a_k + \sum_{n=p+1}^{\infty} \mu_{k\,n}\, a_{n+k} = 0$$

et l'on voit que $|\mu_{k,n}| \leqslant \dfrac{C^p_{n-1}}{n!}$ puisque la somme des coefficients de $D_p(z^{n-1})$ est C^p_{n-1}. Le vecteur-colonne X de composantes $a_0, a_1, a_2 \dots$ satisfait donc à $AX = 0$, A étant une matrice triangulaire régulière dont chaque ligne a ses éléments majorés en module, à partir de la diagonale principale, par :

$$1 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad \frac{1}{(p+1)!} \quad \dots \quad \frac{C^p_{n-1}}{n!} \quad \dots$$

Soit $\varphi_p(t)$ la fonction $1 - \dfrac{t^{p+1}}{(p+1)!} \dots - \dfrac{C^p_{n-1}\, t^n}{n!} \dots$ Elle admet un zéro positif t_p. En raisonnant comme il a été fait souvent dans [2] et [3], on voit que, *si* f *n'est pas identique à* 0, *elle ne peut être une fonction entière de croissance moindre que* (*ordre* 1, *type* t_p).

Appelons, comme dans [9], ω_{p+1} *le plus grand nombre* ω *pour lequel est vraie la proposition suivante :* toute fonction entière de croissance moindre que (ordre 1, type ω) dont chaque dérivée $f^{(k)}$ s'annule $p+1$ fois dans le disque $|z| \leqslant 1$ est identiquement nulle (5). Dans [8] est établi que $\omega_{p+1} \geqslant \frac{p+1}{e}$. Dans [9] cette inégalité a été améliorée par H.S. WILF.

Nous venons de montrer ici : $\omega_{p+1} \geqslant t_p$. Comme $\varphi_p(t) = 1 - \int_0^t \frac{t^p}{p!} e^t \, dt$, t_p est racine de

$$e^t \left(\frac{t^p}{p!} - \frac{t^{p-1}}{(p-1)!} + \ldots + (-1)^p \right) = 1 + (-1)^p .$$

On voit ainsi que $t_1 = 1$, $t_2 = 1{,}3 \ldots$, $t_3 = 1{,}5 \ldots$. Il est facile d'établir que, lorsque $p \to +\infty$, $t_p \sim \lambda p$ le nombre positif λ étant donné par l'égalité $\lambda \exp(1 + \lambda) = 1$. Pour cela, on remarque d'abord que, d'après la formule de Stirling, un nombre a positif quelconque étant donné, la racine positive de l'équation $\frac{t^p}{p!} e^t = a$ est, lorsque $p \to +\infty$, équivalente à λp. D'autre part l'intégrale $\int_0^t \frac{t^p}{p!} e^t \, dt$ est, pour $t > 0$, inférieure à $\frac{t^p}{p!} e^t$ (il suffit de comparer les dérivées de ces deux expressions); pour $0 < t < p + 1$, elle est certainement supérieure à $\frac{1}{2} \frac{t^{p+1}}{(p+1)!} e^t$. Or il est clair que $t_p < p + 1$, puisque déjà $\int_0^{p+1} \frac{t^p}{p!} dt$ est supérieur à 1. t_p est donc compris entre les racines positives des deux équations : $\frac{t^p}{p!} e^t = 1$, $\frac{t^{p+1}}{(p+1)!} e^t = 2$, d'où résulte bien la propriété $t_p \sim \lambda p$.

Ces calculs permettent de comparer l'inégalité $\omega_{p+1} \geqslant t_p$ que nous avons établie à l'inégalité $\omega_{p+1} \geqslant \frac{p+1}{e}$, qui est obtenue dans [8]. $\frac{p+1}{e}$ vaut 0,735 ... pour $p = 1$, 1,103 ... pour $p = 2$, 1,47 ... pour $p = 3$, et, pour ces valeurs de p, l'inégalité de [8] est moins bonne; elle devient meilleure dès que p est assez grand, puisque, visiblement, $\lambda < 1/e$. Quant aux résultats donnés par H. S. WILF, et qui font intervenir la fonction de BESSEL $I_0(x)$, ils paraissent meilleurs dans tous les cas. [9] donne en effet : $\omega_2 \geqslant 1{,}1$; $\omega_3 \geqslant 1{,}49$; et, lorsque $p \to +\infty$,

$$\omega_p \geqslant \frac{p}{e} + \frac{\log p}{4e} + O(1) .$$

Remarquons toutefois que, *du moins pour les valeurs impaires de* p, t$_p$ *est bien la valeur exacte de la constante analogue à* ω_{p+1} pour le problème que nous avons en réalité traité, celui où on étudie les fonctions $f(z)$ ayant la propriété suivante : pour chaque dérivée $f^{(k)}$ il existe, dans le

(5) ω_{p+1} est évidemment fini. L'exemple de $\sin (2p + 1) \frac{\pi}{4} (z + 1)$ montre que $\omega_{p+1} \leqslant (2p + 1) \pi/4$.

disque $|z| \leqslant 1$, $p+1$ points z_0, $z_1 \ldots z_p$, dépendant de k, pour lesquels $(-1)^p z_0 \ldots z_p \; D_p \left(\frac{f^{(k)}(z)}{z}\right) = 0$ (l'expression écrite en premier membre est toujours prolongée par continuité s'il y a des z_i nuls ou confondus; par exemple, pour $k=0$ et $p=1$, elle vaut $\frac{z_1 f(z_0) - z_0 f(z_1)}{z_1 - z_0}$ si $z_1 \neq z_0$, $f(z_0) - z_0 f'(z_0)$ si $z_1 = z_0$).

Supposons p impair et prenons, pour chaque dérivée $f^{(k)}$, tous les z_i égaux à 1. L'équation (4) correspondante s'écrit :

$$a_k - \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{C^p_{n-1}}{n!} \; a_{n+k} = 0 \; .$$

Et l'on obtient une fonction f répondant à la question en prenant $a_n = t_p^n$; cette fonction est d'ordre 1, et de type t_p, qui est donc le plus grand des nombres τ pour lesquels toute fonction ayant la propriété voulue et dont la croissance est inférieure à (ordre 1, type τ) est identiquement nulle.

5. — Autres problèmes.

On pourrait, en appliquant la méthode précédente, étudier d'autres problèmes généralisant ceux où l'on considère seulement une valeur de chaque dérivée successive. Donnons des indications sur deux d'entre eux.

a) On reprend le problème traité ci-dessus, mais *au lieu de supposer les* $p+1$ *points correspondants à* $f^{(k)}$ *situés dans le disque* $|z| \leqslant 1$, *on les suppose dans le disque* $|z| \leqslant r_k$, *la suite* (r_k) *étant une suite croissante de nombres positifs donnés.*

Dans le paragraphe précédent, où r_k était égal à 1 pour tout k, on avait, d'après [2], utilisé la matrice $\mathcal{A}$ dont la première ligne est formée des coefficients successifs de $\varphi_p(t)$ et dont les autres lignes se déduisent par translation parallèle à la diagonale principale. Le calcul de son inverse $\mathcal{B}$ revient à calculer les coefficients de $1/\varphi_p(t)$, qui admet t_p pour pôle simple. Les éléments de la première ligne de $\mathcal{B}$ sont donc majorés par 1, K/t_p, K/t^2_p, ..., K étant une constante convenable; et les autres lignes de $\mathcal{B}$ se déduisent par translation parallèle à la diagonale principale.

En reprenant les calculs dans l'hypothèse actuelle, et en raisonnant comme dans [2], p. 95, b, on voit que la première ligne de la nouvelle matrice $\mathcal{B}$ est majorée par 1, $(K/t_p)r_0$, $(K/t^2_p)r_0 r_1$, ..., $(K/t^n_p)r_0 r_1 \ldots r_{n-1}$, ..., et la $(k+1)^{\text{ième}}$, à partir de la diagonale principale, par :

$$1, \; (K/t_p)\,r_k, \; (K/t^2_p)\,r_k\, r_{k+1}, \; \ldots$$

Il s'ensuit que, *pour une fonction* f *non identique à* 0 *et ayant la propriété requise,* $\sum_{0}^{\infty} |a_n| r_0 r_1 \ldots r_{n-1}/t^n_p = +\infty$. Si, par exemple, $r_k = (k+1)^\alpha$ (avec $\alpha > 0$), f ne peut être de croissance moindre que $\left(\text{ordre } \rho = \frac{1}{\alpha+1}, \text{ type } \frac{t^\rho_p}{\rho}\right)$.

b) Au lieu de ne considérer que des *zéros* des dérivées successives, on peut s'intéresser à des *valeurs quelconques*. Four simplifier nous nous limitons à $p = 1$ et au disque-unité.

Soit f holomorphe dans le disque $|z| \leqslant 1$, et soient deux suites (z_n) et (z'_n) de points de ce disque. Posons $f(z) = \sum_{0}^{\infty} a_n z^n/n!$

$$\text{et } c_n = \frac{z'_n f^{(n)}(z_n) - z_n f^{(n)}(z'_n)}{z'_n - z_n} \text{ si}$$

$z'_n \neq z_n$, $c_n = f^{(n)}(z_n) - z_n f^{(n+1)}(z_n)$ si $z'_n = z_n$. Les coefficients de f vérifient le système :

$$a_0 - z_0 z'_0 \frac{a_2}{2!} \ldots - z_0 z'_0 (z_0^{n-2} + \ldots + z'^{n-2}_0) \frac{a_n}{n!} + \ldots = c_0$$

$$\ldots \text{ etc } \ldots$$

On utilise comme au paragraphe 4 la matrice $\mathcal{Q}$ associée à $\varphi_1(t)$ et son inverse $\mathcal{B}$; les éléments de $\mathcal{B}$ sont tous inférieurs à une constante K, puisque $t_1 = 1$.

Soit E l'espace vectoriel sur C formé par les fonctions entières de croissance moindre que (ordre 1, type 1). Appelons h la fonction définie par $h(z) = \sum_{0}^{\infty} c_n z^n/n!$.

En raisonnant comme en [2], pp. 97-98, on voit que, *si* f $\in$ E, *la fonction* h *a la même croissance que* f (même ordre, et si cet ordre n'est pas nul, même type), et que, les suites (z_n) et (z'_n) étant données, *l'application* f $\to$ h *est un automorphisme de E.*

Il en résulte, en s'exprimant de façon imprécise, qu'une fonction f de E pour laquelle chacune des dérivées successives $f^{(n)}$ est petite en deux points pas trop proches a une croissance faible. Par exemple si on a deux suites (z_n) et (z'_n) de points du disque-unité telles que $\sqrt[n]{|z_n - z'_n|} \to 1$, et si une fonction f de E satisfait à $|f^{(n)}(z_n)| \leqslant \lambda^n$, $|f^{(n)}(z'_n)| \leqslant \lambda^n$ pour $n > n_0$, λ étant un nombre donné appartenant à $[0,1[$, f est au plus du type λ de l'ordre 1.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. COMBES, Sur certains systèmes infinis d'équations linéaires (I). *Annales de la Fac. des Sc. de Toulouse,* 4e série, tome XXI, 1957 (1959), pp. 255-265.

[2] J. COMBES, Sur certains systèmes infinis d'équations linéaires (II et III). *Annales de la Fac. des Sc. de Toulouse,* 4e série, tome XXIII, 1959 (1962), pp. 85-113.

[3] J. COMBES, Sur les valeurs prises par les dérivées successives des fonctions analytiques. *Annales de la Fac. des Sc. de Toulouse,* 4e série, tome XXIV, 1960 (1963), pp. 167-180.

[4] P. DAVIS, Completeness theorems for sets of differential operators. *Duke Math. Journal,* 20, 1953, pp. 345-357.

[5] W. GONTCHAROFF, Recherches sur les dérivées successives des fonctions analytiques. *Annales de l'École Normale Supérieure,* 3e série, tome 47, 1930, pp. 1-78.

[6] P. ERDÖS and A. RÉNYI, On the number of zeros of successive derivatives of analytic functions. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.,* 7, 1956, pp. 125-144.

[7] P. CSILLAG, Über ganze Funktionen, welche drei nicht verschwindende Ableitungen besitzen. *Math. Annalen,* 110, 1935, pp. 745-752.

[8] P. ERDÖS and A. RÉNYI, On the number of zeros of successive derivatives of entire functions of finite order. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.,* 8, 1957, pp. 223-225.

[9] H. S. WILF, Whittaker's constant for lacunary entire functions. *Proc. of the American Math. Society,* 14, 1963, pp. 238-242.