

LUCIO BOCCARDO

Régularité $W_0^{1,p}$ ($2 < p < +\infty$) de la solution d'un problème unilatéral

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5^e série, tome 3, n° 1 (1981), p. 69-74

http://www.numdam.org/item?id=AFST_1981_5_3_1_69_0

© Université Paul Sabatier, 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

REGULARITE $W_0^{1,p}(2 < p < +\infty)$ DE LA SOLUTION
D'UN PROBLEME UNILATERAL

Lucio Boccardo ⁽¹⁾

(1) *Instituto di Matematica, Universita' Degli Studi Dell'Aquila Degli Abruzzi - 67100 L'Aquila - Italia.*

Résumé : On démontre un résultat de régularité $W^{1,p}$, $p \in (2, +\infty)$, et de dépendance continue des données de la solution d'un problème unilatéral.

Summary : In this paper, we prove a $W^{1,p}$ regularity and continuous dependence result of solution to a unilateral problem.

Dans cet article on s'intéresse à la régularité $W_0^{1,p}(\Omega)$ de la solution du problème unilatéral

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} u \in H_0^1(\Omega), u \geq \psi \text{ p.p. dans } \Omega \\ a(u, v-u) \geq \langle f, v-u \rangle \\ \forall v \in H_0^1(\Omega), v \geq \psi \text{ p.p. dans } \Omega, \end{array} \right.$$

où Ω est un ouvert borné de classe C^2 de \mathbb{R}^N , $f \in W^{-1,p}(\Omega)$, $\psi \in W^{1,p}(\Omega)$ ($\psi \leq 0$ sur $\partial\Omega$) et $2 < p < +\infty$.

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} (u-z) \in H_0^1(\Omega), (u-z) \geq \psi - z \text{ p.p. dans } \Omega \\ a((u-z), v - (u-z)) \geq 0 \\ \forall v \in H_0^1(\Omega), v \geq \psi - z \text{ p.p. dans } \Omega. \end{array} \right.$$

En changeant ψ en $\psi - z \in W^{1,p}(\Omega)$, on peut remplacer f par 0.

Deuxième étape.

On va voir maintenant que l'on peut supposer $\psi = 0$ sur $\partial\Omega$. En effet, comme l'on a supposé $f = 0$, on a

$$a(u, \varphi) \geq 0 \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega), \varphi \geq 0;$$

et donc, d'après le principe du maximum, u est positive p.p. dans Ω . Mais on ne change pas la solution du problème unilatéral que nous considérons ici en remplaçant ψ par $\sup(\psi, 0)$; et comme $\sup(\psi, 0) \in W_0^{1,p}(\Omega)$, on voit qu'on peut supposer que l'obstacle ψ est dans $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Troisième étape.

On s'est donc ramené au problème :

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} u \in H_0^1(\Omega), u \geq \psi \text{ p.p. dans } \Omega \\ a(u, v - u) \geq 0 \\ \forall v \in H_0^1(\Omega), v \geq \psi \text{ p.p. dans } \Omega \end{array} \right.$$

avec $\psi \in W^{1,p}(\Omega)$. On va obtenir la conclusion en employant deux résultats d'interpolation : un théorème d'interpolation non linéaire de L. Tartar [11] et un théorème d'interpolation d'espaces de Sobolev de R. Devore et K. Schurer [8].

On définit par $S(\psi)$ la solution u de (5). On a, d'une part si ψ et $\hat{\psi} \in H_0^1(\Omega)$,

$$(6) \quad \|S(\psi) - S(\hat{\psi})\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{\beta}{\alpha} \|\psi - \hat{\psi}\|_{H_0^1(\Omega)}$$

(la démonstration est classique) et, d'autre part si $\psi \in W_0^{1,\infty}(\Omega)$,

$$(7) \quad \|S(\psi)\|_{W_0^{1,\infty}(\Omega)} \leq C_1 \|\psi\|_{W_0^{1,\infty}(\Omega)} \quad (C_1 > 0)$$

(cf. [7], théorème 1).

D'après un théorème d'interpolation non linéaire de L. Tartar ([11] théorème 3) l'application S envoie $E_p := (H_0^1(\Omega), W_0^{1,\infty}(\Omega))_{1-2/p,p}$ dans lui-même et

$$(8) \quad \|S(\psi)\|_{E_p} \leq \sup(C_1, \beta/\alpha) \|\psi\|_{E_p}$$

Mais d'après un résultat de [8], paragraphe 5, E_p n'est autre que $W_0^{1,p}(\Omega)$, avec une norme équivalente. On a donc

$$(9) \quad \|S(\psi)\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq C_2 \|\psi\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}. \quad (C_2 > 0)$$

Conclusion.

Revenant au problème initial (1), on a démontré que la solution u appartient à $W_0^{1,p}(\Omega)$ et, à partir de (9), on a

$$(10) \quad \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq C_3 \left\{ \|\psi\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \|f\|_{W^{-1,p}(\Omega)} \right\} \quad \blacksquare$$

La majoration (10) montre que, pour $f \in W^{-1,p}(\Omega)$ fixé, l'application qui à $\psi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ associe la solution u de (1) est bornée de $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. Le théorème suivant montre que cette application est séquentiellement continue de $W_0^{1,p}(\Omega)$ -faible dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ -faible. Le problème de la continuité de $W_0^{1,p}(\Omega)$ -fort dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ -fort est ouvert.

THEOREME 2. Soient $2 < p < +\infty$, $f \in W^{-1,p}(\Omega)$ et ψ_ϵ une suite de fonctions qui converge dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ -faible vers ψ_0 ($\psi_\epsilon \leq 0$ sur $\partial\Omega$). Alors, si l'on appelle u_ϵ (resp. u_0) la solution de l'inéquation posée sur ψ_ϵ (resp. ψ_0), on a que u_ϵ converge vers u_0 dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ -faible et dans $W_0^{1,q}(\Omega)$ -fort, pour tout q tel que $2 < q < p$.

Démonstration. Puisque $p > 2$, le théorème 1 de [3] entraîne que u_ϵ converge vers u_0 dans $H_0^1(\Omega)$ -fort. L'inégalité (10) donne alors la première conclusion.

Mais évidemment on a aussi

$$\begin{aligned} \|u_\epsilon - u_0\|_{W_0^{1,q}(\Omega)} &\leq C_4 \|u_\epsilon - u_0\|_{H_0^1(\Omega)}^r \|u_\epsilon - u_0\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^s \\ &\leq C_5 \|u_\epsilon - u_0\|_{H_0^1(\Omega)}^r, \end{aligned}$$

$$\text{où } r = \frac{2(p-q)}{q(p-2)} \text{ et } s = \frac{p(q-2)}{q(p-2)} \quad \blacksquare$$

Remarque 1. La conclusion du théorème 2 est fausse si $p = 2$ (voir [3]).

Remarque 2. Toutes les conclusions précédentes restent valables si on étudie des problèmes bilatéraux.

Remerciements

Ce problème m'a été signalé par M. H. Brézis que je remercie vivement. Ce travail a été effectué pendant un séjour à l'Université Paris VI où l'auteur était boursier du C.N.R. (Italien).

REFERENCES

- [1] M. BIROLI. «*Une estimation dans L^p du gradient de la solution d'une inéquation elliptique du second ordre*». C.R. Acad. Sci. Paris 288 (1979), 453-455.
- [2] L. BOCCARDO. «*An L^S -estimate for the gradient of solutions of some strongly nonlinear unilateral problems*». Preprint.
- [3] L. BOCCARDO, F. MURAT. «*Convergence des obstacles dans des problèmes unilatéraux*». Preprint.
- [4] H. BREZIS. «*Problèmes unilatéraux*». J. Math. Pures et Appl. 5 (1972), 1-168.
- [5] H. BREZIS, D. KINDERLEHRER. «*The smoothness of solutions to nonlinear variational inequalities*». Indiana Univ. Math. J. 23 (1974), 831-844.
- [6] H. BREZIS, G. STAMPACCHIA. «*Sur la régularité de la solution d'inéquations elliptiques*». Bull. Soc. Math. de France, 96 (1968), 153-180.
- [7] M. CHIPOT. «*Sur la régularité lipschitzienne de la solution d'inéquations elliptiques*». J. Math. Pures et Appl. 57 (1978), 69-76.
- [8] R. DEVORE, K. SCHERER. «*Interpolation of linear operators on Sobolev spaces*». Annals of Math. 109 (1975), 583-599.
- [9] M. GIAQUINTA, G. MODICA. «*Regolarità lipschitziana per la soluzione di alcuni problemi di minimo con vincolo*». Annali di Mat. Pura Appl. 106 (1975), 95- .
- [10] J.L. LIONS, E. MAGENES. «*Problemi ai limiti non omogenei III*». Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 15 (1961), 41-101.
- [11] L. TARTAR. «*Interpolation non linéaire et régularité*». J. Funct. Anal. 9 (1972), 469-489.

(Manuscrit reçu le 8 août 1980)