

GÉRARD RAUZY

Discrépance d'une suite complètement équirépartie

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5^e série, tome 3, n° 2 (1981), p. 105-112

http://www.numdam.org/item?id=AFST_1981_5_3_2_105_0

© Université Paul Sabatier, 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

DISCREPANCE D'UNE SUITE COMPLETEMENT EQUIREPARTIE

Gérard Rauzy ⁽¹⁾

(1) Université d'Aix Marseille II, Faculté des Sciences de Luminy, Département de Mathématiques
13288 Marseille Cédex 2 - France.

Résumé : Nous construisons une suite complètement équirépartie sur $[0,1]$ et de faible discrèpance.

Summary : We construct a sequence completely uniformly distributed on the unit interval with small discrepancy.

Pour répondre à une question posée par COQUET, nous construisons une suite w à termes dans $[0,1[$ complètement équirépartie et dont la discrèpance à l'origine $D^*(N)$ vérifie :

$$\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \frac{ND^*(N)}{\log N} \leq \frac{1}{\log 2} .$$

On peut du reste affiner ce résultat en employant les méthodes de R. BEJIAN et H. FAURE.

1. - LES SUITES w_T

Nous commençons par construire «à la Van der Corput» des suites w_T de la manière suivante. Soit T un couple (t, τ) où t appartient à \mathbb{N} et τ est une permutation de $\{0, \dots, 2^t - 1\}$.

La suite w_T associée est définie par :

$$(i) \quad \text{si } n < 2^t \quad w_T(n) = \frac{\tau(n)}{2^t}$$

$$(ii) \quad \text{si } n \geq 2^t \text{ et si } k \text{ est l'entier défini par : } 2^k \leq n < 2^{k+1} \text{ alors}$$

$$w_T(n) = w_T(n - 2^k) + \frac{1}{2^{k+1}} .$$

• Les propriétés suivantes sont évidentes :

$$(1.1) \quad \text{Si } k \geq t, w_T \text{ induit une bijection de l'ensemble } \{0, \dots, 2^k - 1\} \text{ sur l'ensemble}$$

$$\left\{ \frac{h}{2^k} ; h = 0, \dots, 2^k - 1 \right\} .$$

$$(1.2) \quad \text{Si } k \geq t, w_T \text{ induit une bijection de l'ensemble } \{2^k, \dots, 2^{k+1} - 1\} \text{ sur l'ensemble}$$

$$\left\{ \frac{2h+1}{2^{k+1}} ; h = 0, \dots, 2^k - 1 \right\} .$$

$$(1.3) \quad \text{Si } n \text{ appartient à } \mathbb{N} \text{ et si } r \text{ est le reste de la division de } n \text{ par } 2^t$$

$$w_T(n) \in \left[\frac{\tau(r)}{2^t}, \frac{\tau(r)+1}{2^t} \right[.$$

2. - DISCREPANCE DES SUITES w_T

• Soient a, b des entiers tels que $0 \leq a < b$, soient x un élément de $[0, 1]$, v une suite à termes dans $[0, 1]$. Nous désignons par $R(a, b, x, v)$ la quantité :

$$R(a, b, x, v) = \text{card} \{ n ; a \leq n < b, v_n \in [0, x] \} - (b-a)x .$$

On a évidemment, si $a < b < c$,

$$R(a, c, x, v) = R(a, b, x, v) + R(b, c, x, v)$$

et la discrédance à l'origine D^* de la suite v est définie pour N supérieur ou égal à 1 par :

$$ND^*(N) = \sup_{x \in [0, 1]} |R(0, N, x, v)| .$$

On sait par ailleurs que la discrédance D de la suite v vérifie :

$$\forall N \geq 1 \quad D^*(N) \leq D(N) \leq 2D^*(N)$$

• Soit k un entier supérieur ou égal à t , soient θ un élément de $\left[0, \frac{1}{2^k}\right[$ et x un élément de $[0,1]$. Il résulte de la propriété (1.1) que pour tout entier n inférieur ou égal à 2^k , $w_T(n) + \theta$ appartient à $[0,1]$.

En outre, toujours d'après (1.1) :

$$\text{card} \left\{ n < 2^k, w_T(n) + \theta < x \right\} = \text{card} \left\{ m < 2^k, \frac{m}{2^k} + \theta < x \right\} = h + 1$$

h désignant l'entier tel que $\frac{h}{2^k} < x - \theta \leq \frac{h+1}{2^k}$.

On en déduit la majoration :

$$(2.1) \quad |R(0, 2^k, x, w_T + \theta)| \leq 1.$$

• Soit maintenant k un élément de \mathbb{N} , N un élément de $\{1, \dots, 2^k\}$, θ un élément de $\left[0, \frac{1}{2^k}\right[$ et x un élément de $[0,1]$.

Nous allons montrer par récurrence la relation :

$$(2.2) \quad |R(0, N, x, w_T + \theta)| \leq 2^t + \frac{\log N}{\log 2}$$

La relation (2.2) est en effet vérifiée pour N inférieur ou égal à 2^t car dans ce cas, quelle que soit la suite v , on a :

$$|R(0, N, x, v)| \leq N \leq 2^t$$

Supposons la relation (2.2) vérifiée pour tout entier inférieur ou égal à 2^k où $k \geq t$ et soit N tel que $2^k < N \leq 2^{k+1}$ et θ tel que $0 \leq \theta < \frac{1}{2^{k+1}}$. On a alors :

$$R(0, N, x, w_T + \theta) = R(0, 2^k, x, w_T + \theta) + R(2^k, N, x, w_T + \theta)$$

Le deuxième terme s'écrit par définition de w_T :

$$R(2^k, N, x, w_T + \theta) = R(0, N - 2^k, x, w_T + \theta')$$

où $\theta' = \theta + \frac{1}{2^{k+1}}$ appartient à $\left[0, \frac{1}{2^k}\right[$.

Majorant $R(0, 2^k, x, w_T + \theta)$ en vertu de (2.1), et $R(0, N - 2^k, x, w_T + \theta')$ en vertu de

l'hypothèse de récurrence, on obtient :

$$|R(0, N, x, w_T + \theta)| \leq 1 + 2^t + \frac{\log(N-2^k)}{\log 2} = 2^t + \frac{\log(2N-2^{k+1})}{\log 2}$$

d'où la majoration cherchée puisque :

$$2N - 2^{k+1} = N - (2^{k+1} - N) \leq N.$$

• La relation (2.2) permet de donner immédiatement une majoration de la discrédance des suites w_T . Il en résulte également que si k appartient à \mathbb{N} , si N est un entier tel que $2^k < N \leq 2^{k+1}$, et si x est un élément de $[0,1]$ on a :

$$(2.3) \quad |R(2^k, N, x, w_T)| \leq 2^t + \frac{\log(N-2^k)}{\log 2}.$$

3. - LA SUITE w

• Soit $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite d'entiers vérifiant :

$$0 \leq t_k \leq k \quad \text{et} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} 2^{t_k/k} = 0$$

Soit, par ailleurs, pour tout k dans \mathbb{N} , τ_k une permutation de $\{0, \dots, 2^{t_k} - 1\}$ et soit T_k le couple (t_k, τ_k) .

Nous allons définir la suite w de la manière suivante :

$$w(0) = 0 \quad \text{et si} \quad 2^k \leq n < 2^{k+1} \quad w(n) = w_{T_k}(n)$$

Nous précisons ultérieurement le choix des T_k de manière à assurer la complète équi-répartition de la suite w , mais nous pourrions d'ores et déjà majorer sa discrédance.

• Il résulte de la relation $0 \leq t_k \leq k$ et de la proposition (1.2) que la suite w induit une bijection de l'ensemble $\{0, \dots, 2^k - 1\}$ sur l'ensemble des $\frac{h}{2^k}$ où $h = 0, \dots, 2^k - 1$.

En particulier, pour tout k de \mathbb{N} et tout x de $[0,1]$

$$|R(0, 2^k, x, w)| \leq 1.$$

Par ailleurs, si $2^k < N \leq 2^{k+1}$:

$$R(2^k, N, x, w) = R(2^k, N, x, w_{T_k})$$

et la majoration obtenue en (2.3) s'applique, d'où :

$$|R(0, N, x, w)| \leq 1 + 2^{t_k} + \frac{\log(N-2^k)}{\log 2} \leq 2^{t_k} + \frac{\log N}{\log 2}$$

Comme $2^{t_k}/\log N \leq 2^{t_k}/(k \log 2)$ tend vers 0 quand N tend vers l'infini, on en déduit bien :

$$\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \frac{ND^*(N)}{\log N} \leq \frac{1}{\log 2}$$

4. - FIN DE LA CONSTRUCTION DE w

• Commençons par un lemme :

LEMME. Soient s et m des entiers supérieurs ou égaux à 1. Il existe une suite u périodique de période m^s (c'est-à-dire, telle que $u(n + m^s) = u(n)$), à termes dans $\{0, \dots, m-1\}$ et telle que les m^s s -uplets de la forme :

$$(u(n), \dots, u(n+s-1)) \text{ où } n = 0, \dots, m^s-1$$

soient tous distincts. C'est-à-dire encore que, pour tout s -uplet (x_1, \dots, x_s) d'éléments de $\{0, \dots, m-1\}$, il existe exactement un entier n dans l'intervalle $\{0, \dots, m^s-1\}$ tel que :

$$(u(n), \dots, u(n+s-1)) = (x_1, \dots, x_s).$$

(Voir par exemple PRIMATH n° 3 - A. BLANCHARD - Quelques questions liées à la théorie des corps finis, ou PRIMATH n° 4 - G. RAUZY - Mots circulaires et réseaux électriques, ou KNUTH - The art of computer programming, Addison Wesley 1971 - Vol. 2 Ch. 3 paragraphe 3.2.2).

• Définissons maintenant une application σ de \mathbb{N} dans $0, \dots, m^s-1$ de la manière suivante :

- (i) Si $0 \leq n < m^s$ et si $n = mq + r$ où $0 \leq r < m$ et donc $0 \leq q < m^{s-1}$, on pose $\sigma(n) = m^{s-1} u(r) + q$
- (ii) Si $n \geq m^s$, $\sigma(n) = \sigma(n-m^s)$.

L'application σ possède alors les propriétés suivantes :

(4.1) La restriction de σ à $\{0, \dots, m^s-1\}$ est une permutation de cet ensemble.

(4.2) Si r désigne le reste de la division de n par m^{s-1} , $\frac{\sigma(n)}{m^s}$ appartient à l'intervalle $\left[\frac{u(r)}{m}, \frac{u(r)+1}{m} \right[$.

De (4.2) on déduit aisément en utilisant la propriété énoncée dans le lemme que si $P(x_1, \dots, x_s)$ est le pavé de $[0, 1]^s$

$$P(x_1, \dots, x_s) = \left[\frac{x_1}{m}, \frac{x_1+1}{m} \right] \times \dots \times \left[\frac{x_s}{m}, \frac{x_s+1}{m} \right]$$

(x_1, \dots, x_s entiers appartenant à $\{0, \dots, m-1\}$), il existe exactement un entier n dans $\{0, \dots, m^s-1\}$ tel que $\left(\frac{\sigma(n)}{m^s}, \dots, \frac{\sigma(n+s-1)}{m^s} \right)$ appartienne à $P(x_1, \dots, x_s)$.

• Particularisons en posant $m = 2^s$. Soit $t = s^2$ et soit τ la permutation de $\{0, \dots, 2^t-1\}$ en lui-même, restriction de σ à cet ensemble.

Posons $T = (t, \tau)$.

D'après (1.3), si n appartient à \mathbb{N} et si r est le reste de la division de n par 2^t :

$$w_T(n) \in \left[\frac{\tau(r)}{2^t}, \frac{\tau(r)+1}{2^t} \right].$$

Posons

$$r = qm + \rho = q \times 2^s + \rho \text{ où } 0 \leq \rho < 2^s.$$

Par construction de τ , c'est-à-dire de σ , on a :

$$\tau(r) = m^{s-1} u(\rho) + q$$

d'où :

$$\frac{\tau(r)}{2^t} = \frac{u(\rho)}{2^s} + \frac{q}{2^t} \text{ et } \frac{q}{2^t} < \frac{1}{2^s} \text{ donc } \frac{q+1}{2^t} \leq \frac{1}{2^s}$$

Par ailleurs, ρ est le reste de la division de n par 2^s . Finalement on obtient :

(4.3) Si ρ désigne le reste de la division de n par 2^s , on a :

$$w_T(n) \in \left[\frac{u(\rho)}{2^s}, \frac{u(\rho)+1}{2^s} \right]$$

En outre, si x_1, \dots, x_s sont des éléments de $\{0, \dots, 2^s-1\}$ et si $P(x_1, \dots, x_s)$ désigne le pavé de $[0, 1]^s$ défini par :

$$P(x_1, \dots, x_s) = \left[\frac{x_1}{2^s}, \frac{x_1+1}{2^s} \right] \times \dots \times \left[\frac{x_s}{2^s}, \frac{x_s+1}{2^s} \right]$$

dans tout intervalle I de \mathbb{N} formé de 2^t entiers consécutifs il existe exactement un entier n tel que :

$$(w_T(n), \dots, w_T(n+s-1)) \in P(x_1, \dots, x_s)$$

• Appelons $T(s)$ le couple (t, τ) construit dans ce paragraphe. Nous allons maintenant, complètement déterminer w , en choisissant T_k de la manière suivante :

- (i) Si $k = 0, 1, 2$ T_k est l'unique couple (t, τ) avec $t = 0$.
- (ii) Si $k \geq 3$ $T_k = T([(\log k)^{1/3}])$ où $[z]$ désigne la partie entière de z .

Pour $k \geq 3$, on aura alors $t_k = [(\log k)^{1/3}]^2 < (\log k)^{2/3}$, soit en particulier $t_k \leq k$ et $\lim_{k \rightarrow \infty} 2^{t_k}/k = 0$.

5. - COMPLETE EQUIREPARTITION DE w

• Il suffit de montrer qu'étant donnés des entiers p et q strictement positifs et un q -uplet quelconque (z_1, \dots, z_q) d'entiers appartenant à $\{0, \dots, 2^p - 1\}$, on a :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \text{card} \left\{ n < N, (w_{(n)}, \dots, w_{(n+q-1)}) \in P \right\} = \frac{1}{2^{pq}}$$

où P désigne le pavé de $[0, 1]^q$ défini par :

$$P = \left[\frac{z_1}{2^p}, \frac{z_1+1}{2^p} \right[\times \dots \times \left[\frac{z_q}{2^p}, \frac{z_q+1}{2^p} \right[$$

• Soit alors k un entier assez grand pour que :

$$s = [(\log k)^{2/3}] \geq \max(p, q)$$

et soit N un entier tel que $2^k < N \leq 2^{k+1}$. Nous allons évaluer :

$$F = \text{card} \left\{ n, 2^k \leq n < N, (w_{(n)}, \dots, w_{(n+q-1)}) \in P \right\}.$$

• Posons $t = t_k = s^2$, $T = T_k$ et remarquons que si $N + q - 1 \leq 2^{k+1}$ ce nombre est égal à :

$$\text{card} \left\{ n, 2^k \leq n < N, (w_{T(n)}, \dots, w_{T(n+q-1)}) \in P \right\}$$

Supposons tout d'abord $N = 2^k + m 2^t$ avec $m < 2^{k-t}$. Il résulte alors de (4.3) que :

$$\text{card} \left\{ n, 2^k \leq n < N, (w_{T(n)}, \dots, w_{T(n+q-1)}) \in P \right\} = \frac{m 2^t}{2^{pq}} = \frac{N - 2^k}{2^{pq}}$$

Par ailleurs, si $2^k + m 2^t < N \leq 2^k + (m+1) 2^t$,

$$\text{card} \left\{ n, 2^k + m 2^t \leq n < N, (w_{T(n)}, \dots, w_{T(n+q-1)}) \in P \right\} \leq 2^t$$

Finalement on a dans tous les cas :

$$\left| F - \frac{N-2^k}{2^{pq}} \right| \leq 2^t$$

On en déduit l'existence d'un réel C tel que si N vérifie $2^k < N \leq 2^{k+1}$ on a :

$$\left| \text{card} \{ n < N, (w(n), \dots, w(n+q-1)) \in P \} - \frac{N}{2^{pq}} \right| < C + \sum_{h=0}^k 2^{th}$$

Comme $2^{tk}/k \rightarrow 0$ quand $k \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{2^k} \left(C + \sum_{h=0}^k 2^{th} \right) \rightarrow 0 \text{ quand } k \rightarrow \infty$$

ce qui termine la démonstration.

Remarquons que l'on aurait pu donner de la même manière une majoration de la discrédance dans $[0,1]^q$ de la suite w .

(Manuscrit reçu le 24 février 1981)