ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

RIVEREAU

# Sur les invariants des équations linéaires

*Annales de la faculté des sciences de Toulouse 1re série*, tome 4, nº 4 (1890), p. M1-M5
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1890_1_4_4_M1_0>

SUR LES INVARIANTS

DES

# ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES,

PAR M. L'ABBÉ RIVEREAU,

Professeur à l'Institut catholique d'Angers.

Dans le Chapitre III du Mémoire *Sur la réduction des équations différentielles aux formes intégrables,* Halphen donne une méthode qui semble peu applicable pour la formation des invariants de ces équations. Nous allons en indiquer une autre et calculer les invariants des équations du quatrième ordre et du cinquième ordre. Nous pouvons supposer, sans nuire à la généralité, que l'équation n'a pas de second terme. Un changement de fonction ramènera au cas général.

Soit donc

$$y^{(m)}+\frac{m(m+2)}{1.2}a_2y^{(m-2)}+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a_3y^{(m-3)}+\ldots+ma_{m-1}y'+a_my=0$$

une équation d'ordre $m$. Faisons le changement de fonction et de variable

$$y=\eta u(x),\qquad \frac{d\xi}{dx}=\mu(x),$$

où $\eta$ et $\xi$ désignent la nouvelle fonction et la nouvelle variable. Nous désignerons par $\eta'$, $\eta''$, ..., $\eta^{(m)}$ les dérivées de cette fonction par rapport à $\xi$, et par $u'$, $u''$, ..., $\mu'$, $\mu''$ les dérivées de $u$ et $\mu$ par rapport à $x$. On aura les formules de transformation

$$\begin{aligned}
y &= \eta u,\\
y' &= \eta'\mu u+\eta u',\\
y'' &= \eta''\mu^2u+\eta'(2\mu u'+\mu' u)+\eta u'',\\
y''' &= \eta'''\mu^3u+3\eta''\mu(\mu u'+\mu' u)+\eta'(3\mu u''+3\mu' u'+\mu'' u)+\eta u''',
\end{aligned}$$

$$y^{\text{IV}} = \eta^{\text{IV}}\mu^4 u + 2\eta'''\mu^2(2\mu u' + 3\mu' u) + \eta''[6\mu^2 u'' + 12\mu\mu' u' + (4\mu\mu'' + 3\mu'^2)u]$$
$$+ \eta'(4\mu u''' + 6\mu' u'' + 4\mu'' u' + \mu''' u) + \eta u^{\text{IV}},$$

$$y^{\text{V}} = \eta^{\text{V}}\mu^5 u + 5\eta^{\text{IV}}\mu^3(\mu u' + 2\mu' u) + 5\eta'''\mu[2\mu^2 u'' + 6\mu\mu' u' + (2\mu\mu'' + 3\mu'^2)u]$$
$$+ 5\eta''[2\mu^2 u''' + 6\mu\mu' u'' + (4\mu\mu'' + 3\mu'^2)u' + (\mu\mu''' + 2\mu'\mu'')u]$$
$$+ \eta'(5\mu u^{\text{IV}} + 10\mu' u''' + 10\mu'' u'' + 5\mu''' u' + \mu^{\text{IV}} u) + \eta u^{\text{V}},$$

$$y^{\text{VI}} = \eta^{\text{VI}}\mu^6 u + 3\eta^{\text{V}}\mu^4(2\mu u' + 5\mu' u) + 5u^{\text{IV}}\mu^2[3\mu^2 u'' + 12\mu\mu' u' + (4\mu\mu'' + 9\mu'^2)u]$$
$$+ 5\eta'''[4\mu^3 u''' + 18\mu^2\mu' u'' + 6\mu(2\mu\mu'' + 3\mu'^2)u' + 3(\mu^2\mu''' + 4\mu\mu'\mu'' + \mu'^3)u]$$
$$+ \eta''[15\mu^2 u^{\text{IV}} + 60\mu\mu' u''' + 15(4\mu\mu'' + 3\mu'^2)u''$$
$$+ 30(\mu\mu''' + 2\mu'\mu'')u' + (6\mu\mu^{\text{IV}} + 15\mu'\mu''' + 10\mu''^2)u]$$
$$+ \eta'(6\mu u^{\text{V}} + 15\mu' u^{\text{IV}} + 20\mu'' u''' + 15\mu''' u'' + 6\mu^{\text{IV}} u' + \mu^{\text{V}} u) + \eta u^{\text{VI}}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y^{(m)} = \eta^{(m)}\mu^m u + \eta^{(m-1)}\mu^{m-2}\left[m\mu u' + \frac{m(m-1)}{1.2}\mu' u\right]$$
$$+ \eta^{(m-2)}\mu^{m-4}\left\{\frac{m(m-1)}{1.2}\mu^2 u'' + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2}\mu\mu' u'\right.$$
$$\left. + \left[\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\mu\mu'' + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{8}\mu'^2\right]u\right\}$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

L'équation transformée sera

$$\eta^{(m)} + m\alpha_1\eta^{(m-1)} + \frac{m(m-1)}{1.2}\alpha_2\eta^{(m-2)} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\alpha_3\eta^{(m-3)} + \ldots + \alpha_m\eta = 0.$$

Donnons à $u$ et $\mu$ des valeurs particulières U et M qui annulent $\alpha_1$ et $\alpha_2$. On aura

$$\frac{U'}{U} = -\frac{m-1}{2}\frac{M'}{M},$$

$$\frac{U''}{U} + (m-2)\frac{M'U'}{MU} + \frac{m-2}{3}\frac{M''}{M} + \frac{(m-2)(m-3)}{4}\frac{M'^2}{M^2} + a_2 = 0.$$

Cette dernière équation peut être remplacée par

$$\frac{M''}{M} = \frac{3}{2}\frac{M'^2}{M^2} + \frac{6}{m+1}a_2;$$

on aura ensuite

$$\frac{\mathrm{M}'''}{\mathrm{M}} = 3\,\frac{\mathrm{M}'^3}{\mathrm{M}^3} + \frac{24}{m+1}\,a_2\,\frac{\mathrm{M}'}{\mathrm{M}} + \frac{6}{m+1}\,a_2',$$

$$\frac{\mathrm{M}^{\mathrm{IV}}}{\mathrm{M}} = \frac{15}{2}\,\frac{\mathrm{M}'^4}{\mathrm{M}^4} + \frac{90}{m+1}\,a_2\,\frac{\mathrm{M}'^2}{\mathrm{M}^2} + \frac{30}{m+1}\,a_2'\,\frac{\mathrm{M}'}{\mathrm{M}} + \frac{144}{(m+1)^2}\,a_2^2 + \frac{6}{m+1}\,a_2'',$$

$$\frac{\mathrm{M}^{\mathrm{V}}}{\mathrm{M}} = \frac{45}{2}\,\frac{\mathrm{M}'^5}{\mathrm{M}^5} + \frac{360}{m+1}\,a_2\,\frac{\mathrm{M}'^3}{\mathrm{M}^3} + \frac{135}{m+1}\,a_2'\,\frac{\mathrm{M}'^2}{\mathrm{M}^2} + \frac{1224}{(m+1)^2}\,a_2^2\,\frac{\mathrm{M}'}{\mathrm{M}}$$
$$+ \frac{36}{m+1}\,a_2''\,\frac{\mathrm{M}'}{\mathrm{M}} + \frac{468}{(m+1)^2}\,a_2 a_2' + \frac{6}{m+1}\,a_2'''.$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Puis

$$\frac{\mathrm{U}''}{\mathrm{U}} = \frac{(m-1)(m-2)}{4}\,\frac{\mathrm{M}'^2}{\mathrm{M}^2} - \frac{3(m-1)}{m+1}\,a_2,$$

$$\frac{\mathrm{U}'''}{\mathrm{U}} = -\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{8}\,\frac{\mathrm{M}'^3}{\mathrm{M}^3} + \frac{3(m-1)(3m-5)}{2(m+1)}\,a_2\,\frac{\mathrm{M}'}{\mathrm{M}} - \frac{3(m-1)}{m+1}\,a_2',$$

$$\frac{\mathrm{U}^{\mathrm{IV}}}{\mathrm{U}} = + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{16}\,\frac{\mathrm{M}'^4}{\mathrm{M}^4} - \frac{3(m-1)(m-2)(3m-7)}{2(m+1)}\,a_2\,\frac{\mathrm{M}'^2}{\mathrm{M}_2}$$
$$+ \frac{3(m-1)(2m-3)}{m+1}\,a_2'\,\frac{\mathrm{M}'}{\mathrm{M}} + \frac{9(m-1)(3m-5)}{(m+1)^2}\,a_2^2 - \frac{3(m-1)}{m+1}\,a_2'',$$

$$\frac{\mathrm{U}^{\mathrm{V}}}{\mathrm{U}} = -\frac{(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)}{32}\,\frac{\mathrm{M}'^5}{\mathrm{M}^5}$$
$$+ \frac{15(m-1)(m-2)(m-3)^2}{4(m+1)}\,a_2\,\frac{\mathrm{M}'^3}{\mathrm{M}^3} - \frac{15(m-1)(m-2)^2}{2(m+1)}\,a_2'\,\frac{\mathrm{M}'^2}{\mathrm{M}^2}$$
$$- \frac{9(m-1)[15(m-2)^2+1]}{2(m+1)^2}\,a_2^2\,\frac{\mathrm{M}'}{\mathrm{M}}$$
$$+ \frac{3(m-1)(5m-7)}{2(m+1)}\,a_2''\,\frac{\mathrm{M}'}{\mathrm{M}} + \frac{18(m-1)(5m-8)}{(m+1)^2}\,a_2 a_2' - \frac{3(m-1)}{m+1}\,a_2'''$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Si l'on pose

$$y = \mathrm{Y}\mathrm{U}(x), \qquad \frac{d\mathrm{X}}{dx} = \mathrm{M}(x),$$

où Y est une fonction de X, dont les dérivées, par rapport à cette variable, seront désignées par $Y'$, $Y''$, ..., $Y^{(m)}$; l'équation réduite sera

$$Y^{(m)}+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}A_3Y^{(m-3)}$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}A_4Y^{(m-4)}+\ldots+A_mY=0.$$

On vérifiera facilement que

$$A_3=\frac{1}{2M^3}(2a_3-3a'_2)=\frac{B_3}{2M^3}.$$

$B_3$ est un invariant. C'est l'invariant de Halphen. Sa valeur est indépendante de l'ordre $m$ de l'équation.

On aura ensuite

$$A_4=\frac{1}{M^4}\left[-3(2a_3-3a'_2)\frac{M'}{M}+a_4-\frac{9}{5}a''_2-\frac{3(5m+7)}{5(m+1)}a_2^2\right].$$

$A_4$ n'est pas un invariant, mais on peut former l'expression

$$A_4-2\frac{dA_3}{dX}=\frac{1}{M^4}\left[a_4-2a'_3+\frac{6}{5}a''_2-\frac{3(5m+7)}{5(m+1)}a_2^2\right]=\frac{B_4}{M^4},$$

où $B_4$ est un second invariant.

On a aussi

$$A_5=\frac{1}{M^5}\left\{15(2a_3-3a'_2)\frac{M'^2}{M^2}-10\left[a_4-\frac{9}{5}a''_2-\frac{3(5m+7)}{5(m+1)}a_2^2\right]\frac{M'}{M}\right.$$
$$\left.+a_5-2a'''_2+\frac{84}{m+1}a_2a'_2-\frac{10(m+7)}{m+1}a_2a_3\right\}.$$

On en déduit l'expression

$$A_5-\frac{5}{2}\frac{dA_4}{dX}+\frac{15}{7}\frac{d^2A_3}{dX^2}$$
$$=\frac{1}{M^5}\left[a_5-\frac{5}{2}a'_4+\frac{15}{7}a''_3-\frac{5}{7}a'''_2-\frac{5(7m+13)}{7(m+1)}a_2(2a_3-3a'_2)\right]=\frac{B_5}{M^5}.$$

$B_5$ est le troisième invariant. En calculant $A_6$, on aura de même un nouvel invariant.

Il est facile de voir qu'un invariant $B_i$ se reproduit multiplié par $\frac{1}{\mu^i}$ lorsqu'on fait le changement de fonction et de variable

$$(1) \qquad y = \eta u(x), \qquad \frac{d\xi}{dx} = \mu(x).$$

En effet, supposons que $B_i$ soit un invariant de l'équation suivante :

$$(2) \qquad f(y, y', \ldots) = 0,$$

obtenu à l'aide de l'équation réduite fournie par la transformation

$$(3) \qquad y = YU(x), \qquad \frac{dX}{dx} = M(x).$$

La substitution (1) change l'équation (2) en l'équation

$$(2') \qquad \varphi(\eta, \eta', \ldots) = 0.$$

Ramenons cette équation (2)′ à une forme réduite par la transformation

$$(3') \qquad \eta = Y_1 U_1(\xi), \qquad \frac{dX_1}{d\xi} = M_1(\xi),$$

et désignons par $(U_1)$ et $(M_1)$ ce que deviennent les fonctions $U_1$ et $M_1$ de $\xi$ quand on remplace $\xi$ par sa valeur en $x$ tirée de (1).

Les formules (1), (3) et (3)′ donnent

$$y = Y_1 u(U_1), \qquad \frac{dX_1}{dx} = \mu(M_1).$$

On en conclut que les deux équations réduites précédentes se déduisent l'une de l'autre par le changement de U en $u(U_1)$ et de M en $\mu(M_1)$. Ceci posé, soit $\mathcal{B}_i$ l'expression tirée de (2)′, comme $B_i$ a été tirée de (2). On aura

$$\frac{(\mathcal{B}_i)}{(M_1)^i} = \frac{B_i}{\mu^i (M_1)^i},$$

d'où

$$(\mathcal{B}_i) = \frac{B_i}{\mu^i}.$$

Cela prouve que les expressions $B_i$ sont bien des invariants, mais des invariants relatifs. Leurs dérivées ne sont pas des invariants.