ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

PATRICK LABORDE

Étude d'un problème d'évolution non monotone

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5e série, tome 5, nº 1 (1983), p. 1-14
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1983_5_5_1_1_0>

Annales Faculté des Sciences Toulouse
Vol V, 1983, P. 1 à 14

ETUDE D'UN PROBLEME D'EVOLUTION NON MONOTONE

Patrick Laborde (1)

(1) U.E.R. de Mathématiques et d'Informatique, Laboratoire Associé au C.N.R.S., Université de Bordeaux I, Cours de la Libération, 33405 Talence Cédex - France.

Résumé : On considère une équation différentielle du premier ordre avec contrainte sur l'état : $\frac{du}{dt} + Au \ni f$, $u \in K$ dans $[0,T]$ et $u(0) = u_o$, où A est un opérateur multivoque donné défini sur un compact K de $\mathbb{R}^N$. On étudie d'abord l'approximation de ce problème par une méthode de régularisation ; grâce aux propriétés de A, qui ne sont pas du type monotonie, on justifie la convergence des solutions approchées vers une solution du problème posé. On établit ensuite l'unicité de cette solution. Enfin, on donne une caractérisation de la vitesse.

Summary : We consider a first order differential equation with state constraint : $\frac{du}{dt} + Au \ni f$, $u \in K$ on $[0,T]$ and $u(0) = u_o$, where A is a given multivalued operator defined on a compact K lying in $\mathbb{R}^N$. We first study the approximation of this problem by a regularization method ; owing to the properties of A, which are not of monotonicity type, we prove the convergence of the approximate solutions to a solution of the studied problem. Second, we obtain the unicity of this solution. Finally, we give a caracterization of the derivative.

1. - LE PROBLEME

Soit K, un fermé de $\mathbb{R}^N$ d'intérieur non vide, le domaine de définition de *l'opérateur multivoque* A :

$$(1.1) \qquad Av = \begin{cases} \{\mu v\,,\, \mu \geqslant 0\} \text{ si } v \in \mathrm{Fr}\, K \\ \\ 0 \text{ si } v \in \mathrm{Int}\, K\,, \end{cases}$$

en notant respectivement Fr K et Int K la frontière de K et son intérieur.
Le problème étudié :

Trouver une fonction u : $[0,T] \to \mathbb{R}^N$ *vérifiant dans* $[0,T]$, *la contrainte*

$$(1.2) \qquad u(t) \in K,$$

et l'équation différentielle

$$(1.3) \qquad \frac{du}{dt}(t) + Au(t) \ni f(t),$$

avec la condition initiale

$$(1.4) \qquad u(0) = u_o\,.$$

On fait les *hypothèses sur l'opérateur* A suivantes :

$$K \text{ borné, } 0 \in \mathrm{Int}\, K,$$

et il existe une application $\varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ positivement homogène et lipschitzienne telle que :

$$K = \{v : \varphi(v) \leqslant 1\}.$$

Cette condition est satisfaite, en particulier si K est convexe (avec $0 \in \mathrm{Int}\, K$), en prenant pour φ la fonction jauge de K.

Les *données* du problème satisfont :

$$f \in [L^2(0,T)]^N,\ u_o \in K.$$

Remarquons que, dans le *cas particulier* :

$$(1.5) \qquad K = B \text{ boule unité fermée de } \mathbb{R}^N,$$

l'équation (1.3) s'écrit :

$$(1.6) \qquad \frac{du}{dt} + \partial I_K(u) \ni f,$$

où $\partial I_K(u)$ est le sous-différentiel de la fonction indicatrice du convexe K = B. Il s'agit alors d'un problème d'évolution avec opérateur maximal monotone ; cf. par exemple : BREZIS, H[2] .

L'équation (1.6) peut s'interpréter (après une translation sur l'inconnue) en termes de *processus de rafle* par un convexe variable selon la terminologie de MOREAU, J.J. [7] .

En général, l'opérateur A (1.1) n'est pas monotone, ni perturbation lipschitzienne d'un opérateur monotone.

Dans ce travail, on montre d'abord l'équivalence de l'équation (1.3) avec une *inéquation variationnelle* présentant un certain caractère *non-linéaire* lié au défaut de monotonie de l'opérateur A.

On définit ensuite une équation régularisée (univoque) par une méthode de pénalisation de la contrainte. L'opérateur de pénalisation associé à A naturellement n'est pas monotone. On établit une propriété de convergence uniforme des solutions pénalisées vers une solution de l'équation initiale. D'où, en particulier, un résultat d'existence pour le problème posé.

On démontre ensuite *l'unicité* de la solution, en étudiant l'évolution d'une certaine fonction de l'écart entre deux solutions, fonction construite à l'aide d'une borne supérieure.

On termine en donnant une *caractérisation de la vitesse* - plus exactement de la dérivée à droite $\frac{d^+u}{dt}$ - de la solution u. Cette propriété exprime que, si par exemple le second membre f est continu, il existe $\frac{d^+u}{dt}(t)$ à chaque instant t, construite à l'aide d'une projection (non-orthogonale associée à l'opérateur A) sur le cône tangent $T_K(u(t))$ à K en u(t).

Notre *motivation* est l'étude de problèmes intervenant en théorie de la plasticité. On sait que dans la théorie mathématique classique le comportement est décrit par une loi de normalité par rapport au convexe de la plasticité. Le problème consiste à étudier une équation d'évolution faisant intervenir le sous-différentiel de la fonction indicatrice d'un ensemble convexe fermé, c'est-à-dire un opérateur multivoque maximal monotone. Dans l'analyse mathématique de la plasticité classique, il est donc possible d'utiliser les techniques de monotonie. Or, cette propriété fait défaut dans les équations traduisant certains types de comportement plastique. Dans ce travail, on s'intéresse à un problème modèle qui prend en compte ce caractère non-monotone du problème mécanique.

On connaît des résultats d'existence de solutions d'équations différentielles avec un opérateur multivoque non nécessairement maximal-monotone : cf. par exemple CASTAING, C. [3] et, plus récemment, l'ouvrage de AUBIN, J.P. - CELLINA, A. [1] . Les résultats analogues à ceux qu'il est possible d'obtenir pour le problème particulier envisagé ici (régularisation, unicité,...) ne sont formulés que dans le cadre de la maximale monotonie.

Cet article établit les démonstrations de résultats annoncés dans [5]. Certains compléments pourront être trouvés dans la référence [4]. Le cas d'un opérateur plus général a été abordé dans [6].

2. - FORMULATIONS EQUIVALENTES

Remarquons d'abord que le caractère multivoque de l'équation (1.3) peut être pris en compte par l'introduction d'un *multiplicateur* λ, en écrivant le problème sous la forme ci-dessous - utile pour la suite - :

Trouver un couple de fonctions $u : [0,T] \to \mathbb{R}^N$ et $\lambda : [0,T] \to \mathbb{R}$ qui vérifie, dans $[0,T]$, le *système de complémentarité* :

$$(2.1) \qquad \begin{cases} u' + \lambda u = f \\ \lambda \geqslant 0 \,, \ \varphi(u) - 1 \leqslant 0 \\ \lambda(\varphi(u) - 1) = 0 \end{cases}$$

avec la condition initiale (1.4).

On a noté u' pour $\dfrac{du}{dt}$. Dans la suite $\| \cdot \|$ et $(\cdot , \cdot)$ désigneront respectivement la norme euclidienne et le produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^N$.

Soit, maintenant, l'application $\Theta : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$

$$\Theta v = \varphi(v) \, \| v \|^{-1} \, v \ \text{ si } \ v \neq 0 \,, \ \Theta 0 = 0.$$

Cette application met en correspondance bijective K avec la boule unité fermée B.

LEMME 2.1. *Le problème* (1.2) (1.3) *est équivalent dans* $[0,T]$ *à l'inéquation variationnelle suivante :*

$$(2.2) \qquad (u'(t) - f(t) \,, \Theta v - \Theta u(t)) \geqslant 0 \qquad \forall v \in K, \ \ u(t) \in K.$$

Preuve. On constate d'abord que la condition $u(t) \in K$ équivaut à : $\Theta u(t) \in B$. Mais, puisque Θv décrit B quand v décrit K, l'inéquation (2.2) revient à la condition : $u'(t) - f(t)$ est une normale rentrante à B au point $\Theta u(t)$. Autrement dit, il existe un réel $\lambda \geqslant 0$ tel que

$$u'(t) - f(t) = - \lambda \ u(t),$$

avec $\lambda = 0$ si $\| \Theta u(t) \| < 1$, c'est-à-dire si $\varphi(u(t)) < 1$, ou encore si $u(t) \in \operatorname{Int} K$.

La formulation (2.2) est une *inéquation variationnelle d'évolution* avec un caractère *non-linéaire* intervenant dans la présence de l'application Θ.

Dans le *cas particulier* (1.5) Θ est une homothétie et (2.2) devient une inéquation variationnelle «classique» sur le convexe $K = B$:

$$
(2.3) \qquad \begin{cases} (u'(t) - f(t)\,,\ v - u(t)) \geqslant 0 & \forall\, v \in K \\ u(t) \in K. \end{cases}
$$

La présence de la non linéarité dans (2.2) traduit la non-monotonie de l'opérateur A pour le cas général. Par un changement d'inconnue, il est d'ailleurs possible de «transporter» la non-linéarité sous le signe de dérivation, avec un opérateur monotone d'autre part. Cette dernière formulation ne nous a cependant pas permis d'utiliser des résultats connus concernant les équations d'évolution avec opérateur maximal monotone.

3. - REGULARISATION

Soit $\Pi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ l'application définie par

$$
(3.1) \qquad \Pi\, v = \varphi(v)^{-1}\, v \quad \text{si} \quad v \notin K\,, \quad \Pi\, v = v \quad \text{si} \quad v \in K.
$$

Etant donné $\epsilon > 0$, on considère alors le *problème régularisé*

$$
(3.2) \qquad u'_\epsilon + \frac{1}{\epsilon}\,(u_\epsilon - \Pi\, u_\epsilon) = f \quad \text{dans} \quad [0,T]
$$

$$
(3.3) \qquad u_\epsilon(0) = u_o\,.
$$

L'application : $v \to v - \Pi\, v$ dans l'équation (3.2) joue le rôle d'un opérateur de *pénalisation* (non monotone) de la contrainte $u \in K$.

On montre que Π vérifie une propriété de Lipschitz, cf. [3] . L'équation (3.2) est donc une équation différentielle ordinaire lipschitzienne, qui possède une unique solution $u_\epsilon \in [H^1(0,T)]^N$ satisfaisant la condition initiale (3.3).

THEOREME 3.1. *Lorsque* $\epsilon \to 0$, *il existe une suite extraite de solutions pénalisées* u_ϵ *qui converge uniformément vers une fonction* $u \in [H^1(0,T)]^N$ *vérifiant* (1.2) (1.3) *p.p. dans* $[0,T]$ *et* (1.4).

Remarque 3.1. On démontre, dans le paragraphe suivant, l'unicité de la solution u du problème posé. D'où, en fait, la convergence uniforme de toute la famille des u_ϵ.

Remarque 3.2. Le théorème entraîne, en particulier, l'existence d'une solution $u \in [H^1(0,T)]^N$ de l'équation différentielle (1.2) (1.3), par conséquent aussi l'existence d'un multiplicateur λ définit p.p. dans $[0,T]$ et vérifiant p.p. le système de complémentarité (2.1). De plus : $\lambda \in L^1(0,T)$.

En effet, par hypothèse : $0 \in \text{Int } K$, il existe donc $r_o > 0$ tel que si $\| v \| \leqslant r_o$ on ait $v \in \text{Int } K$. Donc, lorsque $\| u(t) \| \leqslant r_o$ on a $\varphi(u(t)) < 1$ et $\lambda(t) = 0$. Il suit que :

$$0 \leqslant \lambda(t) \leqslant r_o^{-2} \lambda(t) \quad \| u(t) \| \quad \text{pp.}$$

En mutipliant l'équation (2.1) par $u(t)$ et en tenant compte de la régularité de la solution, on vérifie l'assertion.

Remarque 3.3. On peut aussi envisager une méthode d'approximation du problème initial par *discrétisation.* Si $k > 0$ est le pas de discrétisation de l'intervalle de temps $[0,T]$, la valeur u_k^{n+1} de la solution discrète u_k à l'instant discret $t_{n+1} = t_n + k$ s'exprime, en fonction de la valeur u_k^n à l'instant précédent t_n, par :

$$u_k^{n+1} = \Pi(u_k^n + k\, f_k^n),$$

où f_k^n est la valeur moyenne du second membre dans l'intervalle élémentaire (t_n, t_{n+1}). Il s'agit d'une version non classique de *l'algorithme de rattrapage* de MOREAU, J.J. [7], version étudiée en détail dans [4].

La démonstration du théorème s'appuie sur l'estimation a priori suivante :

LEMME 3.1. *La famille des solutions pénalisées* u_ϵ *vérifie :*

$$u_\epsilon \in \textit{Borné de } [H^1(0,T)]^N \textit{ indépendant de } \epsilon > 0.$$

Preuve. La démonstration se décompose en trois étapes :

1ère étape : L'équation pénalisée (3.2) peut se réécrire comme suit :

$$u'_\epsilon + \lambda_\epsilon u_\epsilon = f \qquad \text{p.p. dans } [0,T] \tag{3.4,a}$$

$$\lambda_\epsilon = \frac{1}{\epsilon} (1 - \varphi(u_\epsilon)^{-1})^+ \text{ avec la notation } \varphi^+ = \max(\varphi,0). \tag{3.4,b}$$

Montrons que la direction de pénalisation $\| u_\epsilon \|^{-1} u_\epsilon$ possède une vitesse bornée indépendamment de ϵ.

On introduit, pour cela, les notations :

$$r_\epsilon = \rho(\| u_\epsilon \|),\ z_\epsilon = r_\epsilon^{-1}\, u_\epsilon ,$$

où la fonction auxiliaire ρ est définie par :

(3.5) $$\rho(x) = x \text{ si } x \geqslant r_o ,\ \rho(x) = \frac{1}{2}\, r_o(x^2\, r_o^{-2} + 1) \text{ sinon,}$$

la constante r_o étant choisie, comme dans la remarque 3.2 , telle que si $\| v \| \leqslant r_o$ on ait $\varphi(v) < 1$. L'introduction de ρ est purement technique : elle permet de justifie les calculs qui suivent dans l'espace $H^1(0,T)$.

On va montrer que :

(3.6) $$\| z'_\epsilon \| \leqslant C \| f \| \quad \text{p.p. dans } I = \{ t : \| u(t) \| > r_o \}.$$

La solution pénalisée u_ϵ appartient à $[H^1(0,T)]^N$; par un argument classique de densité, on vérifie que $r_\epsilon \in H^1(0,T)$, $z_\epsilon \in [H^1(0,T)]^N$ et que :

(3.7) $$u'_\epsilon = r'_\epsilon\, z_\epsilon + r_\epsilon\, z'_\epsilon \quad \text{p.p.}$$

(3.8) $$r'_\epsilon = \inf(\| u_\epsilon \|^{-1}, r_o^{-1})\, (u_\epsilon , u'_\epsilon) \text{ pp.}$$

La composante $\omega_\epsilon = r_\epsilon\, z'_\epsilon$ de la vitesse u'_ϵ dans (3.7) qui est normale à la direction z_ϵ de pénalisation, lorsqu'elle agit, s'exprime à partir de (3.4,a) indépendamment de λ_ϵ. Précisément, en tenant compte de (3.7) (3.8), l'équation pénalisée entraîne que :

(3.9) $$\omega_\epsilon = r_\epsilon\, z'_\epsilon = f - (f,z_\epsilon) z_\epsilon \quad \text{p.p. dans} \quad I_\epsilon = \{ t : \| u_\epsilon(t) \| > r_o \}.$$

D'où l'on déduit l'estimation préliminaire cherchée (3.6).

2ème étape : Montrons ensuite que :

(3.10) $$w_\epsilon = \Pi\, u_\epsilon \in \text{Borné de } [H^1(0,T)]^N \text{ indépendant de } \epsilon > 0.$$

On a indiqué dans le paragraphe 2 que l'application Π est lipschitzienne ; $w_\epsilon = \Pi\, u_\epsilon$ satisfait donc, comme u_ϵ , la propriété : $w_\epsilon \in [H^1(0,T)]^N$. On peut réécrire w_ϵ comme suit (en choisissant $r_o < 1$ dans la définition de ρ (3.5)) :

$$w_\epsilon = \inf(1, [\rho(\varphi(u_\epsilon))]^{-1}) u_\epsilon ,$$

ou bien encore, avec notation évidente

$$w_\epsilon = \begin{cases} u_\epsilon \text{ p.p. dans } I_\epsilon^- = \{t : \varphi(u_\epsilon(t)) \leqslant 1\} \\ \\ v_\epsilon \text{ p.p. dans } I_\epsilon^+ = [0,T] \setminus I^- . \end{cases}$$

On vérifie que $v_\epsilon \in [H^1(0,T)]^N$. En s'appuyant sur le fait que l'espace H^1 est réticulé (cf. NECAS [6]) on montre que :

$$w'_\epsilon = u'_\epsilon \text{ p.p. dans } I_\epsilon^-, \ w'_\epsilon = v'_\epsilon \text{ pp. dans } I_\epsilon^+. \tag{3.11}$$

Dans I_ϵ^+, on a : $v_\epsilon = [\varphi(u_\epsilon)]^{-1} u_\epsilon$ et, puisque φ est positivement homogène : $v_\epsilon = [\varphi(z_\epsilon)]^{-1} z_\epsilon$. L'application $z_\epsilon \to [\varphi(z_\epsilon)]^{-1} z_\epsilon$ étant lipschitzienne sur la sphère unité, il vient :

$$\| v'_\epsilon \| \leqslant C_1 \| z'_\epsilon \| \text{ p.p. dans } I_\epsilon^+ . \tag{3.12}$$

D'autre part, dans I_ϵ^-, l'équation pénalisée donne : $u'_\epsilon = f$ p.p., ce qui joint à (3.11) (3.12) (3.6) entraîne l'estimation (3.10).

3ème étape : Le lemme se déduit de cette estimation comme suit. On note :

$$\Phi_\epsilon = u_\epsilon - w_\epsilon .$$

Il vient :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \| \Phi_\epsilon \|^2 - (u'_\epsilon, \Phi_\epsilon) = - (w'_\epsilon, \Phi_\epsilon),$$

et en intégrant :

$$\frac{1}{2} \| \Phi_\epsilon(T) \|^2 - \frac{1}{2} \| \Phi_\epsilon(0) \|^2 - \int_0^T (u'_\epsilon, \Phi_\epsilon) dt = - \int_0^T (w'_\epsilon, \Phi_\epsilon) dt.$$

Puisque $u_0 \in K : \Phi_\epsilon(0) = 0$, donc :

$$- \int_0^T (u'_\epsilon, \Phi_\epsilon) dt \leqslant - \int_0^T (w'_\epsilon, \Phi_\epsilon) dt.$$

Compte tenu de l'équation pénalisée (3.2) :

$$\frac{1}{\epsilon} \int_0^T \| \Phi_\epsilon \|^2 dt \leqslant \int_0^T (f - w'_\epsilon, \Phi_\epsilon) dt.$$

L'inégalité de Schwarz entraîne, grâce à l'estimation intermédiaire (3.10), que :

$$\frac{1}{\epsilon}\left(\int_0^T \| \Phi_\epsilon \|^2 \, dt\right)^{1/2} \leqslant \text{constante indépendante de } \epsilon > 0.$$

En reprenant l'équation pénalisée on en déduit que :

$$u'_\epsilon \in \text{Borné de } [L^2(0,T)]^N \text{ indépendant de } \epsilon > 0.$$

D'où le lemme.

Preuve du théorème. L'estimation a priori du lemme précédent entraîne l'existence d'une suite extraite $\{u_{\epsilon(n)}\}_n$ et d'une fonction $u \in [H^1(0,T)]^N$ tel que l'on ait (Reillich-Kondrachoff)

(3.13,a) $$u_{\epsilon(n)} \longrightarrow u \quad \text{uniformément dans } [0,T]$$

(3.13,b) $$u'_{\epsilon(n)} \longrightarrow u' \quad \text{dans } [L^2(0,T)]^N \text{ faible.}$$

En considérant l'équation pénalisée (3.2) on voit que l'estimation du lemme 3.1 conduit à :

$$\int_0^T \| u_\epsilon(t) - \Pi\, u_\epsilon(t) \|^2 \, dt \leqslant C\, \epsilon^2 \quad \text{pour tout } \epsilon > 0.$$

Grâce à la propriété de Lipschitz de Π indiquée plus haut et à la convergence (3.13,a) il vient :

$$\int_0^T \| u(t) - \Pi\, u(t) \|^2 \, dt = 0,$$

ce qui équivaut, par définition de Π (3.1), à :

(3.14) $$u(t) \in K \ \text{ p.p. } \ t \in [0,T].$$

La solution pénalisée u_ϵ dans (3.4) vérifie l'inéquation variationnelle, analogue à celle satisfaite par u après intégration en temps (lemme 2.1) :

$$\int_0^T (u'_\epsilon(t) - f(t), \Theta\, v(t) - \Theta\, u_\epsilon(t))dt \geqslant 0,$$

pour tout $v \in [L^2(0,T)]^N$ tel que $v(t) \in K$ p.p.

Les propriétés de convergence (3.13) de $\{u_{\epsilon(n)}\}$ permettent de passer à la limite dans l'inéquation précédente pour obtenir :

$$\int_0^T (u'(t) - f(t), \Theta\, v(t) - \Theta\, u(t))dt \geqslant 0.$$

Un raisonnement classique, utilisant un théorème de Lebesgue, conduit à l'inéquation instantanée (2.2) vérifiée p.p. dans [0,T] . Il résulte du Lemme 2.1 que la limite u est solution du problème initial.

4. - UNICITE

THEOREME. *Le problème initial possède une unique solution* $u \in [H^1(0,T)]^N$.

Remarque 4.1. La démonstration suivante s'adapte pour un obtenir un résultat de dépendance lipschitzienne de la solution du problème d'évolution par rapport à la donnée initiale u_o et une propriété de dépendance localement lipschitzienne par rapport au second membre f.

Preuve. On se donne deux solutions u, $u_* \in [H^1(0,T)]^N$ et on note λ, $\lambda_* \in L^2(0,T)$ les multiplicateurs associés par la formulation (2.1). Soit aussi E la partie de [0,T] définie, à un ensemble de mesure nulle près, par :

$$E = \{ t : (\lambda(t)\, u(t) - \lambda_*(t)\, u_*(t), u(t) - u_*(t)) < 0 \}.$$

Remarquons que, par définition des multiplicateurs (2.1), on a :

$$\frac{d}{dt} \| u - u_* \|^2 = -2(\lambda u - \lambda_* u_* , u - u_*),$$

et par conséquent :

$$(4.1) \qquad \frac{d}{dt} \| u - u_* \|^2 > 0 \text{ p.p. dans E}, \quad \leqslant 0 \text{ p.p. dans } [0,T] \setminus E.$$

Mais, avec des notations analogues à celles du paragraphe précédent :

$$r = \rho(\| u \|),\ z = r^{-1} u \text{ (de même pour } u_*),$$

on peut montrer l'existence d'une constante C_o (faisant intervenir, en particulier, la constante de Lipschitz de φ, cf. [3]) telle que :

$$(4.2) \qquad \| u - u_* \|^2 \leqslant C_o \| z - z_* \|^2 \text{ dans E}.$$

Considérons alors la fonction g définie dans [0,T] par :

$$g = \max(g_1, g_2) \text{ avec } g_1 = \| u - u_* \|^2,\ g_2 = C_o \| z - z_* \|^2.$$

Montrons que $g \equiv 0$ donc que $u \equiv u_*$.

La régularité de la solution u entraîne que $z \in [H^1(0,T)]^N$, de même pour u_* , donc $g'_1 , g'_2 \in L^2(0,T)$. Il suit, cf. NECAS [8] , que $g' \in L^2(0,T)$ et que :

$$g' = \begin{cases} g'_1 & \text{p.p. dans } E_1 = \{t : g_1(t) \geqslant g_2(t)\} \\ g'_2 & \text{p.p. dans } E_2 = [0,T] \setminus E_1 . \end{cases}$$

Supposons l'existence d'un instant $\tau > 0$ tel que $g(\tau) \neq 0$ et notons

$$t_0 = \sup\{t \leqslant \tau : g(t) = 0\}.$$

Par continuité, on a : $g(t_0) = 0$. De plus $u(t_0) = u_*(t_0) \in \mathrm{Fr}\, K$, par définition de t_0 et puisque $u' = u'_* = f$ p.p. quand u et $u^* \in \mathrm{Int}\, K$. Donc, $\| u(t_0) \| = \| u_*(t_0) \| > r_0$. Par continuité, il existe $t_1 \in]t_0, \tau]$ tel que $\| u(t) \|$ et $\| u_*(t) \| > r_0$ pour tout $t \in [t_0 , t_1]$.

D'une part, pour presque tout $t \in E_1$, on sait d'après (4.2) que $t \notin E$; il vient :

(4.3) $$g'(t) = g'_1(t) \leqslant 0 \quad \text{p.p.} \quad t \in E_1 .$$

D'autre part, dans $E_2 \cap [t_0 , t_1]$, on raisonne comme pour l'obtention des estimations lors de l'étude de la pénalisation. Considérons la composante $\omega = rz'$ de la vitesse u' normale à la direction de Au (quand $Au \neq 0$). Elle s'exprime dans $[t_0 , t_1]$, à partir de l'équation (2.1), indépendamment de multiplicateur λ de manière analogue à (3.9) :

$$\omega = f - (f,z)z \quad \text{p.p. dans } [t_0 , t_1]$$

L'application $v \to \rho(\| v \|)$ étant contractante et minorée par une constante > 0, la remarque précédente permet de vérifier que :

$$\| z' - z'_* \| \leqslant C_1 \| f \| (\| u - u^* \| + \| z - z^* \|) \quad \text{p.p. dans } [t_0 , t_1] .$$

Par construction de E_2 , on en déduit :

$$\| z' - z'_* \| \leqslant C_2 \| f \| \| z - z_* \| \quad \text{p.p. dans } E_2 \cap [t_0 , t_1] .$$

Il suit que (p.p. dans $E_2 \cap [t_0 , t_1]$) :

$$\begin{aligned} g' = g'_2 &= 2\, C_0 (z' - z'_* , z - z_*) \\ &\leqslant 2\, C_0\, C_2 \| f \| \| z - z_* \|^2 = C \| f \| g. \end{aligned}$$

Cette propriété, jointe à (4.3), permet de conclure que :

$$g' \leqslant C \parallel f \parallel g \text{ p.p. dans } [t_o , t_1] .$$

Grâce au fait que $f \in [L^2(0,T)]^N$ et que $g(t_o) = 0$, le lemme de Gronwall entraîne que $g = 0$ dans $[t_o , t_1]$, ce qui est en contradiction avec la définition de t_o. D'où l'unicité.

L'idée d'introduire une fonction de type borné supérieure pour mesurer l'écart entre deux solutions est due à Y. HAUGAZEAU.

5. - CARACTERISATION DE LA VITESSE

Soit $T_K(v)$ *le cône tangent* à K en $v \in K$, c'est-à-dire l'ensemble des direction θ telles qu'il existe une suite $v_h \in K$ vérifiant :

$$\lim v_h = v , \quad \lim \frac{1}{\epsilon_h} (v_h - v) = \theta$$

pour une suite scalaire positive $\epsilon_h \to 0$.

Pour $v \in K$ et une direction donnée d, on note :

$$\Lambda(v ; d) = \left\{ \mu \geqslant 0 : d - \mu v \in T_K(u) \right\};$$

on peut vérifier que $\Lambda(v ; d)$ est une intervalle fermé non vide et non borné à droite.

Faisons *l'hypothèse supplémentaire* sur K (c'est-à-dire sur φ) suivante :

(5.1) $$T_{Fr\,K}(u) \subset Fr\, T_K(u).$$

Cette condition est, en particulier, satisfaite si φ est différentiable ou bien convexe.

Soit un point de Lebesgue à droite de f, c'est-à-dire un instant t pour lequel il existe :

$$\lim_{h \to 0_+} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f(s)ds = f(t + 0).$$

Alors :

THEOREME. *Moyennant l'hypothèse supplémentaire* (5.1), *en tout point* t *de Lebesgue à droite de* f, *il existe :*

$$\lim_{h \to 0_+} \frac{1}{h} (u(t + h) - u(t)) = \frac{d^+ u}{dt} (t),$$

et

$$\frac{d^+ u}{dt}(t) = f(t+0) - \lambda_o\,(u(t)\,;f(t+0))\,u(t),$$

où

$$\lambda_o(v\,;d) = \inf \Lambda(v\,;d).$$

Remarque 5.1. Par définition de λ_o le résultat précédent entraîne que :

- si $u(t) \in \mathrm{Int}\,K$ ou bien si $u(t) \in \mathrm{Fr}\,K$ et $f(t+0) \in T_K(u(t))$, on a $\frac{d^+ u}{dt}(t) = f(t+0)$;

- si $f(t+0) \in T_K(u(t))$ on a, en particulier : $\frac{d^+ u}{dt}(t) \in \mathrm{Fr}\,T_K(u(t))$.

Remarque 5.2. Dans le *cas classique* K = B, le théorème exprime que $\frac{d^+ u}{dt}(t)$ est la projection de $f(t+0)$ sur $T_K(u(t))$, ou bien encore l'élément de norme minimale de $f(t+0) - \partial\, I_K(u(t))$. On retrouve une propriété connue des équations différentielles avec opérateur maximal monotone : cf. BREZIS [2] .

On trouvera une démonstration détaillée du résultat de ce paragraphe dans [4] .

REFERENCES

[1] AUBIN J.P. - CELLINA A. *«Inclusions différentielles».* Cahiers de Mathématiques de la décision. CEREMADE et à paraître.

[2] BREZIS H. *«Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes non linéaires dans les espaces de Hilbert».* North-Holland (1973).

[3] CASTAING C. *«Solutions continues à droite d'une équation différentielle multivoque avec contrainte sur l'état».* C.R. Acad. Sc. Paris, t. 288 (5 mars 1979).

[4] LABORDE P. Rapport interne n° 8012, U.E.R. de Mathématiques et Informatique, Université de Bordeaux I, (1980).

[5] LABORDE P. *«Sur un problème d'évolution non-monotone».* C.R. Acad. Sc. Paris, t. 292 (2 février 1981), série I, 319-322.

[6] LABORDE P. *«Processus de rafle non convexe».* C.R. Acad. Sc. Paris, t. 293 (14 décembre 1981).

[7] MOREAU J.J. *«Evolution problem associated with a moving convex set in a Hilbert space».* J. Diff. Equ. 26 (1977), p. 347-374.

[8] NECAS J. *«Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques».* Masson (1967).

(Manuscrit reçu le 29 septembre 1981)