

ANTONIO DE BIVAR-WEINHOLTZ

RÉMI PIRAUX

Formule de Trotter pour l'opérateur $-\Delta + q^+ - q^- + iq'$

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5^e série, tome 5, n° 1 (1983), p. 15-37

http://www.numdam.org/item?id=AFST_1983_5_5_1_15_0

© Université Paul Sabatier, 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

FORMULE DE TROTTER POUR L'OPERATEUR

$$-\Delta + q^+ - q^- + iq'$$

Antonio de Bivar-Weinholtz ⁽¹⁾ et Rémi Piraux ⁽²⁾

(1) C.M.A.F., 2 av. Gama Pinto, 1699 Lisboa Codex - Portugal.

(2) 102, Bd Kellermann, 75013 Paris - France.

Résumé : On démontre la convergence de la formule de Trotter pour $(e^{-t\bar{A}})_t \geq 0$, où A est une réalisation dans $L^2(\Omega)$ de l'opérateur de Schrödinger $(-\Delta - q^-) + (q^+ + iq')$ (q^+ , q^- , q' , fonctions réelles définies dans Ω , q^+ , $q^- \geq 0$). On montre simultanément que A est fermable et \bar{A} m-accretif. Dans § 2 on suppose que q^+ , $q' \in L^1_{loc}(\Omega)$, $q^- \in L^\infty(\Omega)$; dans § 3, que $q^+ \in L^1_{loc}(\Omega)$, $q^- \in L^\infty(\Omega) + L^p(\Omega)$ ($p = \frac{N}{2}$, si $N \geq 3$, $p > 1$ si $N = 1, 2$) et $q' \in L^{1+\epsilon}_{loc}(\Omega)$, $\epsilon > 0$ arbitraire.

Summary : We prove the convergence of the Trotter product formula for $(e^{-t\bar{A}})_t \geq 0$, A being a realization in $L^2(\Omega)$ of the Schrödinger operator $(-\Delta - q^-) + (q^+ + iq')$ (q^+ , q^- , q' real valued functions defined on Ω , q^+ , $q^- \geq 0$). We simultaneously show that A is closable and \bar{A} m-accretive. In § 2 we suppose q^+ , $q' \in L^1_{loc}(\Omega)$, $q^- \in L^\infty(\Omega)$; in § 3, $q^+ \in L^1_{loc}(\Omega)$, $q^- \in L^\infty(\Omega) + L^p(\Omega)$ ($p = \frac{N}{2}$, if $N \geq 3$, $p > 1$ if $N = 1, 2$) and $q' \in L^{1+\epsilon}_{loc}(\Omega)$, $\epsilon > 0$ arbitrarily small.

1. - INTRODUCTION. RAPPEL DE QUELQUES RESULTATS

Soit Ω un ouvert (non vide) de \mathbb{R}^N , $V \in L^1_{loc}(\Omega)$. On définit une réalisation dans $L^2(\Omega)$ de l'opérateur de Schrödinger $-\Delta + V$ par :

$$D(A) = \{u \in H^1_0(\Omega) : \forall u \in L^1_{loc}(\Omega), -\Delta u + Vu \in L^2(\Omega)\}$$

$$\forall u \in D(A), Au = -\Delta u + V u$$

On note :

$$q = \operatorname{Re}(V), q' = \operatorname{Im}(V), q^+ = \max(q, 0), q^- = \max(-q, 0),$$

et on fait les hypothèses suivantes :

$$(1) \quad q^- \in L^\infty(\Omega) + L^p(\Omega) \quad \text{où} \quad \begin{cases} p = \frac{N}{2} & \text{si } N \geq 3 \\ p > 1 & \text{si } N = 2 \\ p = 1 & \text{si } N = 1 \end{cases}$$

$$(2) \quad \text{Si } N \geq 2 \text{ ou bien } q' \in L_{\text{loc}}^{1+\epsilon}(\Omega), \text{ ou bien } q^- \in L^{\frac{N}{2}+\epsilon}(\Omega) \text{ (pour un } \epsilon > 0 \text{ arbitraire).}$$

Le résultat suivant est alors connu (Théorème 3.1 de [3]) :

THEOREME 1.1. (Brézis-Kato) : *A est fermable dans $L^2(\Omega)$ et il existe $\lambda_1 > 0$ tel que $\bar{A} + \lambda_1$ soit m-accréatif. En plus si $u \in D(\bar{A})$, alors $u \in H_0^1(\Omega)$, $q |u|^2 \in L^1(\Omega)$ et :*

$$\operatorname{Re}(\bar{A}u, u) = \int_{\Omega} |Du|^2 + \int_{\Omega} q |u|^2.$$

Si on fait l'hypothèse supplémentaire :

$$(3) \quad |q'(x)| \leq Mq^+(x) + h(x) \quad \text{p.p. dans } \Omega \text{ où } M \geq 0 \text{ et :}$$

$$h \in L_{\text{loc}}^r(\Omega) \text{ avec} \quad \begin{cases} r = \frac{2N}{N+2} & \text{si } N \geq 3 \\ r > 1 & \text{si } N = 2 \\ r = 1 & \text{si } N = 1 \end{cases}$$

alors A est fermé dans $L^2(\Omega)$, c'est-à-dire, $A = \bar{A}$. En particulier, si $q' = 0$ alors A est auto-adjoint.

Dans le cas où $q \geq 0$ et $V \in L_{\text{loc}}^r(\Omega)$ (r défini dans (3)) Kato (Théorème II de [6]) démontre la convergence de la formule de Trotter :

$$(4) \quad \forall u \in L^2(\Omega), \forall T > 0 \quad e^{-t\bar{A}} u = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(e^{\frac{t}{n}\Delta} e^{-\frac{t}{n}V} \right)^n u,$$

uniformément en $t \in [0, T]$.

Dans le § 2 on détaille la démonstration du résultat présenté en [1], c'est-à-dire, on généralise le résultat de Kato en démontrant la formule de Trotter sous les hypothèses plus faibles $q(x) \geq \alpha \in \mathbb{R}, \forall V \in L^1_{loc}(\Omega)$, et simultanément on obtient une nouvelle démonstration, dans ce cas particulier, du résultat de Brézis et Kato (Théorème 1 ci-dessus).

Dans le § 3 on démontre un résultat similaire dans le cas où $q^- \neq 0$ vérifie l'hypothèse (1) et $q' \in L^{1+\epsilon}_{loc}(\Omega)$ ($\epsilon > 0$ arbitraire) : on obtient dans ce cas la formule (4) avec Δ remplacé par $\Delta + q^-$.

2. - CAS D'UN POTENTIEL A PARTIE REELLE BORNEE INFERIEUREMENT

On suppose que $q(x) \geq -\alpha \in \mathbb{R}$ p.p. dans Ω ($V \in L^1_{loc}(\Omega)$ vérifie donc (1) et (2), car $q^- \in L^\infty(\Omega)$). On a alors le :

THEOREME 2.1. *A est fermable et $\bar{A} + \alpha$ est m-accréatif. Le semi-groupe fortement continu $(e^{-t\bar{A}})_{t \geq 0}$ engendré par \bar{A} est donné par la formule de Trotter :*

$$(5) \quad \forall u \in L^2(\Omega), \forall T > 0, e^{-t\bar{A}} u = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(e^{\frac{t}{n}\Delta} e^{-\frac{t}{n}V} \right)^n u$$

uniformément en $t \in [0, T]$ (pour $\| \cdot \|_{L^2(\Omega)}$).

Démonstration du Théorème 2.1. On peut supposer $q \geq 0$; on s'y ramène en appliquant le Théorème à $q + \alpha$.

Première étape. A est accréatif. On suit [3] : on considère $u \in D(A)$ et on pose $T = V u$. Alors :

$$\cdot T \in H^{-1}(\Omega) \cap L^1_{loc}(\Omega)$$

$$\cdot \operatorname{Re}(T\bar{u}) = q |u|^2 \geq 0 ;$$

donc, d'après le résultat de [2], $q |u|^2 \in L^1(\Omega)$ et :

$$\int_{\Omega} q |u|^2 = \operatorname{Re} \langle T, u \rangle = \operatorname{Re} \langle Au + \Delta u, u \rangle$$

d'où :

$$\operatorname{Re}(Au, u) = \int_{\Omega} |Du|^2 + \int_{\Omega} q |u|^2 \geq 0.$$

Deuxième étape. Si $\lambda > 0$, $\text{Im}(\lambda + A) \supset L^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ et pour $u \in L^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$:

$$(6) \quad t(1 - e^{t(\Delta-\lambda)} e^{-tV})^{-1} u \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} (\lambda + A)^{-1} u \text{ dans } L^2(\Omega).$$

On pose :

$$W_{t,\lambda} = t(1 - e^{t(\Delta-\lambda)} e^{-tV})^{-1} e^{t(\Delta-\lambda)} ;$$

d'après le Théorème spectral $e^{t(\Delta-\lambda)}$ admet un inverse (non borné) qu'on note $e^{t(\lambda-\Delta)}$. On démontre facilement le .

LEMME 2.1. Soient $(U_t)_{t > 0}$, $(V_t)_{t > 0}$ des familles d'opérateurs bornés définis sur un espace de Banach X , tels que U_t admette un opérateur inverse (non borné) U_t^{-1} et que l'on ait :

$$|U_t| \leq e^{-\lambda t}, \quad |V_t| \leq 1.$$

Alors $(U_t^{-1} - V_t)^{-1}$ est un opérateur défini sur X . On a :

$$(U_t^{-1} - V_t)^{-1} = (1 - U_t V_t)^{-1} U_t.$$

Si de plus $\lim_{t \rightarrow 0^+} U_t x = x$, alors :

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} (t(1 - U_t V_t)^{-1} - t(U_t^{-1} - V_t)^{-1})x = 0.$$

Alors si on applique le Lemme 1 à $U_t = e^{t(\Delta-\lambda)}$, $V_t = e^{-tV}$, on a :

$$W_{t,\lambda} = t(e^{t(\lambda-\Delta)} - e^{-tV})^{-1}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} (t(1 - e^{t(\Delta-\lambda)} e^{-tV})^{-1} - W_{t,\lambda})u = 0$$

donc, pour montrer (6) il suffit de montrer :

$$(7) \quad W_{t,\lambda} u \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} (\lambda + A)^{-1} u \text{ dans } L^2(\Omega).$$

Dans la suite on utilisera le :

LEMME 2.2. a) Si $v \in L^2(\Omega)$ alors $W_{t,\lambda} v \in H_0^1(\Omega)$ et il existe $C_\lambda > 0$ tel que :

$$\forall v \in L^2(\Omega) \quad \|W_{t,\lambda} v\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C_\lambda \|v\|_{L^2(\Omega)}$$

$$b) \forall v \in L^2(\Omega) \mid W_{t,\lambda} v \mid \leq t(e^{t(\lambda-\Delta)} - 1)^{-1} \mid v \mid \text{ p.p. dans } \Omega.$$

$$c) \forall v \in L^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \mid W_{t,\lambda} v \mid_{L^s(\Omega)} \leq \frac{1}{\lambda} \mid v \mid_{L^s(\Omega)} \text{ si } s = 2, \infty.$$

(Démonstration à la fin du § 2).

On vérifie que pour montrer (7) il suffit d'avoir la convergence dans $L^2_{\text{loc}}(\Omega)$. En effet pour tout compact K de Ω :

$$\begin{aligned} \cdot \mid W_{t,\lambda} u - (\lambda + A)^{-1} u \mid_{L^2(\Omega)} &\leq \mid W_{t,\lambda} u - (\lambda + A)^{-1} u \mid_{L^2(K)} + \\ &+ \mid (\lambda + A)^{-1} u \mid_{L^2(\Omega \setminus K)} + \mid W_{t,\lambda} u \mid_{L^2(\Omega \setminus K)}, \end{aligned}$$

et d'après le Lemme 2.b) :

$$\mid W_{t,\lambda} u \mid_{L^2(\Omega \setminus K)} \leq \mid t(e^{t(\lambda-\Delta)} - 1)^{-1} \mid u \mid_{L^2(\Omega \setminus K)}.$$

Donc, comme :

$$t(e^{t(\lambda-\Delta)} - 1)^{-1} \mid u \mid \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{} (\lambda - \Delta)^{-1} \mid u \mid \text{ dans } L^2(\Omega)$$

la convergence de $W_{t,\lambda} u$ vers $(\lambda + A)^{-1} u$ dans $L^2_{\text{loc}}(\Omega)$ entraîne :

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow 0^+} \mid W_{t,\lambda} u - (\lambda + A)^{-1} u \mid_{L^2(\Omega)} &\leq \mid (\lambda + A)^{-1} u \mid_{L^2(\Omega \setminus K)} + \\ &+ \mid (\lambda - \Delta)^{-1} \mid u \mid_{L^2(\Omega \setminus K)} \end{aligned}$$

pour tout compact K de Ω . On peut donc conclure :

$$\limsup_{t \rightarrow 0^+} \mid W_{t,\lambda} u - (\lambda + A)^{-1} u \mid_{L^2(\Omega)} = 0,$$

d'où (7). D'après le Théorème de Rellich il suffit donc de montrer qu'on a :

$$(8) \quad W_{t,\lambda} u \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{} (\lambda + A)^{-1} u \text{ dans } H^1_0(\Omega) \text{ faible.}$$

Soit $u \in L^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$; d'après le Lemme 2.a), si $t'_n \xrightarrow[n]{} 0^+$, on peut extraire une sous-suite $w_{t'_n}$ de $w_{t'_n} = W_{t'_n, \lambda} u$ telle que :

$$(9) \quad w_{t'_n} \xrightarrow[n]{} w \text{ dans } H^1_0(\Omega) \text{ faible et p.p. dans } \Omega.$$

On va montrer que $w = (\lambda + A)^{-1} u$. On a :

$$t_n^{-1} (1 - e^{-t_n(\Delta - \lambda)}) e^{-t_n V} w_{t_n} = e^{t_n(\Delta - \lambda)} u,$$

donc, pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, si on note (\cdot, \cdot) le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$:

$$(10) \quad \left(\frac{1 - e^{-t_n V}}{t_n} w_{t_n}, \phi \right) + \left(\frac{1 - e^{t_n(\Delta - \lambda)}}{t_n} e^{-t_n V} w_{t_n}, \phi \right) = (e^{t_n(\Delta - \lambda)} u, \phi)$$

d'après (9) :

$$\frac{1 - e^{-t_n V}}{t_n} w_{t_n} \xrightarrow[n]{\bar{\phi}} V w \bar{\phi} \text{ p.p. dans } \Omega$$

d'autre part :

$$\left| \frac{1 - e^{-t_n V}}{t_n} w_{t_n} \bar{\phi} \right| \leq \lambda^{-1} \|u\|_{L^\infty(\Omega)} |V| |\phi|,$$

d'après le Lemme 2.c). Etant donné que $V \in L^1_{loc}(\Omega)$, le Théorème de Lebesgue donne :

$$(11) \quad V w \bar{\phi} \in L^1(\Omega) \text{ et } \left(\frac{1 - e^{-t_n V}}{t_n} w_{t_n}, \phi \right) = \int_{\Omega} \frac{1 - e^{-t_n V}}{t_n} w_{t_n} \bar{\phi} \xrightarrow[n]{\bar{\phi}} \int_{\Omega} V w \bar{\phi}.$$

De plus :

$$e^{-t_n V} \frac{1 - e^{t_n(\Delta - \lambda)}}{t_n} \phi \xrightarrow[n]{\bar{\phi}} (\lambda - \Delta)\phi \text{ dans } L^2(\Omega) :$$

donc, puisque $w_{t_n} \xrightarrow[n]{\bar{\phi}} w$ dans $L^2(\Omega)$ faible :

$$(12) \quad \left(\frac{1 - e^{t_n(\Delta - \lambda)}}{t_n} e^{-t_n V} w_{t_n}, \phi \right) = \left(w_{t_n}, e^{-t_n V} \frac{1 - e^{t_n(\Delta - \lambda)}}{t_n} \phi \right) \xrightarrow[n]{\bar{\phi}} (w, (\lambda - \Delta)\phi).$$

Finalement :

$$(13) \quad (e^{t_n(\Delta - \lambda)} u, \phi) \xrightarrow[n]{\bar{\phi}} (u, \phi)$$

On obtient alors de (10) - (13), $V w \in L^1_{loc}(\Omega)$ et :

$$\langle V w + (\lambda - \Delta)w, \bar{\phi} \rangle_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}} = \langle u, \bar{\phi} \rangle_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}}.$$

Donc, dans $\mathcal{D}'(\Omega)$:

$$-\Delta w + V w = u - \lambda w \in L^2(\Omega);$$

par conséquent $w \in D(A)$ et :

$$w = (\lambda + A)^{-1} u.$$

w étant indépendant de la sous-suite t_n , on déduit (8) de (9), ce qui termine la deuxième étape.

Troisième étape. $D(A)$ est dense dans $L^2(\Omega)$. Soit $u \in L^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ et t_n une suite de réels positifs vérifiant :

$$(14) \quad nt_n \xrightarrow{n} 0^+ \text{ et } \|W_{t_n, n} u - (n + A)^{-1} u\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{n^2}.$$

D'après le Lemme 2.c), on a :

$$\|n W_{t_n, n} u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{L^2(\Omega)},$$

donc, pour une sous-suite, on a :

$$u_n = n W_{t_n, n} u \xrightarrow{n} f \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ faible.}$$

On va montrer que $f = u$, ce qui, d'après (14) prouvera la densité de $D(A)$ dans $L^2(\Omega)$.

D'après la définition de $W_{t_n, n}$ on a pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$:

$$(15) \quad \frac{1}{n} \left(\frac{1 - e^{-t_n V}}{t_n} u_n, \phi \right) + \left(u_n, e^{-t_n \bar{V}} \frac{1 - e^{t_n(\Delta - n)}}{n t_n} \phi \right) = (e^{t_n(\Delta - n)} u, \phi)$$

mais du Lemme 2.c) on déduit que :

$$\|u_n\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|u\|_{L^\infty(\Omega)},$$

donc :

$$(16) \quad \left| \frac{1}{n} \left(\frac{1 - e^{-t_n V}}{t_n} u_n, \phi \right) \right| \leq \frac{1}{n} \int_{\Omega} |V| |\phi| \|u\|_{L^\infty(\Omega)} \xrightarrow{n} 0$$

d'autre part :

$$(17) \quad \frac{1 - e^{t_n(\Delta - n)}}{n t_n} \phi = \frac{1 - e^{-n t_n}}{n t_n} \phi + \frac{e^{-n t_n}}{n} \frac{1 - e^{t_n \Delta}}{t_n} \phi \xrightarrow{n} \phi,$$

dans $L^2(\Omega)$, et évidemment :

$$(18) \quad (e^{t_n(\Delta - n)} u, \phi) \xrightarrow{n} (u, \phi)$$

de (15) - (18) on déduit donc que :

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega) \langle f, \bar{\phi} \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = \langle u, \bar{\phi} \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}}, \text{ d'où } f = u.$$

Quatrième étape. Conclusion. D'après les étapes 2 et 3 et le Théorème 3.4 de [5] A est fermable et \bar{A} m -accréatif. La démonstration de (5) repose alors sur un Lemme de Chernoff (Théorème 1.1 de [4]), d'après lequel il suffit de montrer que :

$$(*) \quad \forall u \in L^2(\Omega) \quad t(1 - e^{t(\Delta-1)} e^{-tV})^{-1} u \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{} (1 + A)^{-1} u \text{ dans } L^2(\Omega).$$

Or :

$$\begin{aligned} \left\| t(1 - e^{t(\Delta-1)} e^{-tV})^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(L^2)} &= \left\| t \sum_{n \geq 0} (e^{t(\Delta-1)} e^{-tV})^n \right\|_{\mathcal{L}(L^2)} \leq \\ &\leq t \sum_{n \geq 0} e^{-nt} = \frac{t}{1 - e^{-t}} \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{} 1. \end{aligned}$$

Les opérateurs du premier membre de (6) sont donc uniformément bornés en norme pour $t \rightarrow 0^+$; $L^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ étant dense dans $L^2(\Omega)$, la deuxième étape permet alors de déduire (*). ■

Démonstration du Lemme 2.

a) Soit $v \in L^2(\Omega)$, alors :

$$W_{t,\lambda} v = t(e^{t(\lambda-\Delta)} - e^{-tV})^{-1} v \in D(e^{t(\lambda-\Delta)}) \subset \text{Im}(e^{t\Delta}) \subset D(\Delta) \subset H_0^1(\Omega)$$

et :

$$v = t^{-1}(e^{t(\lambda-\Delta)} - e^{-tV})W_{t,\lambda} v;$$

par conséquent :

$$\left(\frac{e^{t(\lambda-\Delta)} - 1}{t} W_{t,\lambda} v, W_{t,\lambda} v \right) + \left(\frac{1 - e^{-tV}}{t} W_{t,\lambda} v, W_{t,\lambda} v \right) = (v, W_{t,\lambda} v).$$

Or, d'après le Théorème spectral et puisque $W_{t,\lambda} v \in D(\Delta)$:

$$\left(\frac{e^{t(\lambda-\Delta)} - 1}{t} W_{t,\lambda} v, W_{t,\lambda} v \right) \geq ((\lambda - \Delta)W_{t,\lambda} v, W_{t,\lambda} v) \geq C_\lambda \|W_{t,\lambda} v\|_{H_0^1(\Omega)}^2;$$

d'autre part, de $\operatorname{Re} V \geq 0$ on déduit :

$$\operatorname{Re} \left(\frac{1 - e^{-tV}}{t} W_{t,\lambda} v, W_{t,\lambda} v \right) \geq 0.$$

Il en résulte :

$$\|W_{t,\lambda} v\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C_\lambda \|v\|_{L^2(\Omega)}.$$

b) On a :

$$W_{t,\lambda} v = t(1 - e^{t(\Delta - \lambda)} e^{-tV})^{-1} e^{t(\Delta - \lambda)} v = t \sum_{n \geq 0} (e^{t(\Delta - \lambda)} e^{-tV})^n e^{t(\Delta - \lambda)} v$$

(série convergente dans $L^2(\Omega)$) ; or :

$$\forall f \in L^2(\Omega) : |e^{t\Delta} f| \leq e^{t\Delta} |f| \text{ p.p. dans } \Omega,$$

donc :

$$\begin{aligned} |W_{t,\lambda} v| &\leq t \sum_{n \geq 0} e^{(n+1)t(\Delta - \lambda)} |v| = t(1 - e^{t(\Delta - \lambda)})^{-1} e^{t(\Delta - \lambda)} |v| = \\ &= t(e^{-t(\lambda - \Delta)} - 1)^{-1} |v|. \end{aligned}$$

c) Si $v \in L^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ et $p = 2, \infty$, on a :

$$\|e^{t\Delta} v\|_{L^p(\Omega)} \leq \|v\|_{L^p(\Omega)}$$

donc :

$$\begin{aligned} \|W_{t,\lambda} v\|_{L^p(\Omega)} &\leq t \sum_{n \geq 0} \| (e^{t(\Delta - \lambda)} e^{-tV})^n e^{t(\Delta - \lambda)} v \|_{L^p(\Omega)} \leq \\ &\leq t \sum_{n \geq 0} e^{-(n+1)t\lambda} \|v\|_{L^p(\Omega)} = \frac{t e^{-t\lambda}}{1 - e^{-t\lambda}} \|v\|_{L^p(\Omega)} \\ &\leq \frac{1}{\lambda} \|v\|_{L^p(\Omega)}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

3. - CAS D'UN POTENTIEL A PARTIE REELLE NON BORNEE INFERIEUREMENT

On examine maintenant un cas où on n'a pas nécessairement $q^- \in L^\infty(\Omega)$. On supposera que $N \geq 2$, q^- vérifiant l'hypothèse (1), c'est-à-dire :

$$(1) \quad q^- \in L^\infty(\Omega) + L^p(\Omega) \quad \text{où} \quad \left\{ \begin{array}{l} p = \frac{N}{2} \text{ si } N \geq 3 \\ p > 1 \text{ si } N = 2, \end{array} \right.$$

et qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que :

$$(2) \quad q^+ \in L^{1+\epsilon}(\Omega),$$

le Théorème 1.1 est donc applicable à l'opérateur de Schrödinger avec un tel potentiel. Cependant, si $q^- \in L^\infty(\Omega)$ l'opérateur de multiplication par e^{-tV} n'est pas borné dans $L^2(\Omega)$ ce qui exclut la validité de la formule (4) pour cet opérateur. Ceci nous amène à scinder le potentiel, en posant :

$$B = -\Delta - q^-, \text{ l'opérateur } A \text{ avec } V = q^-,$$

$$V' = q^+ + iq^+$$

On peut maintenant espérer que soit valable une formule de Trotter :

$$\forall u \in L^2(\Omega) e^{-t\bar{A}} u = \lim_n \left(e^{-\frac{t}{n} B} e^{-\frac{t}{n} V'} \right)^n u$$

On démontrera cette formule, tout en présentant, comme dans le § 2, une nouvelle démonstration du Théorème 1.1, dans ce cas particulier.

On commence par rappeler le résultat suivant de [3] qui caractérise la constante λ_1 du Théorème 1.1 et qui repose sur l'inégalité de Sobolev dans $H_0^1(\Omega)$:

PROPOSITION 3.1. Pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\lambda_\epsilon > 0$ tel que :

$$\forall u \in H_0^1(\Omega) : \int_\Omega q^- |u|^2 \leq \epsilon \int_\Omega |Du|^2 + \lambda_\epsilon \int_\Omega |u|^2$$

On en déduit alors, pour l'opérateur B, la conclusion du Théorème 1.1 qui admet dans ce cas une formulation plus précise.

PROPOSITION 3.2. $B + \lambda_1$ est l'opérateur auto-adjoint positif dans $L^2(\Omega)$ qui est associé à la forme sesquilinéaire à domaine $H_0^1(\Omega)$:

$$a(u,v) = \int_{\Omega} Du \overline{Dv} - \int_{\Omega} q^- u \overline{v} + \int_{\Omega} \lambda_1 u \overline{v},$$

laquelle est un produit scalaire sur H_0^1 équivalent au produit scalaire usuel.

B est donc le générateur d'un semi-groupe fortement continue $(e^{-tB})_{t \geq 0}$ et on a le :

THEOREME 3.1. A est fermable et $\overline{A} + \lambda_1$ est m -accrétif. Le semi-groupe fortement continu engendré par A est donné par la formule de Trotter :

$$(19) \quad \forall u \in L^2(\Omega), \forall T > 0, e^{-tA} u = \lim_n \left(e^{-\frac{t}{n}B} e^{-\frac{t}{n}V'} \right)^n u,$$

uniformément en $t \in [0, T]$ (pour $\| \cdot \|_{L^2(\Omega)}$).

Démonstration du Théorème 3.1. La démonstration suit le schéma de celle du Théorème 2.1.

Première étape. A est accrétif. On procède comme dans le cas du § 2 ; on utilise le résultat de [2] , avec, cette fois-ci :

$$f = -q^- |u|^2 \in L^1(\Omega) \text{ (pour } u \in D(A) \subset H_0^1(\Omega)),$$

d'après la proposition 3.1.

Deuxième étape. Il existe λ_ϵ tel que si $\lambda > \lambda_\epsilon$ alors $\text{Im}(\lambda + A) \supset L^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ et pour $u \in L^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$:

$$(20) \quad t(1 - e^{-t(B+\lambda)} e^{-tV'})^{-1} u \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} (\lambda + A)^{-1} u \text{ dans } L^2(\Omega).$$

On pose :

$$W_{t,\lambda} = t(1 - e^{-t(B+\lambda)} e^{-tV'})^{-1} e^{-t(B+\lambda)} ;$$

d'après le Théorème spectral $e^{-t(B+\lambda)}$ admet un opérateur inverse (non borné) qu'on note $e^{t(B+\lambda)}$. On peut donc appliquer le Lemma 2.1 à $U_t = e^{-t(B+\lambda)}$, $V_t = e^{-tV'}$, ce qui donne :

$$W_{t,\lambda} = t(e^{t(B+\lambda)} - e^{-tV'})^{-1},$$

et pour montrer (2) il suffit de montrer :

$$(21) \quad W_{t,\lambda} u \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{} (\lambda + A)^{-1} u \text{ dans } L^2(\Omega).$$

Afin d'établir des estimations sur $W_{t,\lambda} u$ on commence par montrer quelques propriétés de l'opérateur B . On rappelle, en le précisant, un résultat de [3] (Théorème 2.3) ; dans la suite on supposera toujours que $\lambda > \lambda_1$.

PROPOSITION 3.3. *Pour chaque $s \in [2, +\infty[$ il existe $\alpha_s > 0$ tel que si $g \in L^2(\Omega) \cap L^s(\Omega)$ et Ψ est l'unique solution dans $H_0^1(\Omega)$ de :*

$$-\Delta \Psi - q^- \Psi + \lambda \Psi = g \text{ dans } \Omega \ (\lambda > \lambda_1) ;$$

alors :

1. si g est réelle, Ψ est réelle ; si $g \geq 0$ p.p. dans Ω , $\Psi \geq 0$ p.p. dans Ω .

2. $\Psi \in L^s(\Omega)$ et si $\lambda > \alpha_s$:

$$(22) \quad \|\Psi\|_{L^s(\Omega)} \leq \frac{1}{\lambda - \alpha_s} \|g\|_{L^s(\Omega)}$$

Démonstration de la Proposition 3.3.

1. De l'unicité on déduit que si g est réelle, alors Ψ est réelle. Si $g \geq 0$, on procède comme dans [3] ; en multipliant l'équation par $-\Psi^-$, on obtient :

$$\int_{\Omega} |\Delta \Psi^-|^2 - \int_{\Omega} q^- |\Psi^-|^2 + \lambda \int_{\Omega} |\Psi^-|^2 \leq 0,$$

donc, si $\lambda > \lambda_1$, cela implique $\Psi^- = 0$.

2. On peut toujours supposer que $g \geq 0$ p.p. dans Ω ; en effet, si $\tilde{\Psi}$ est la solution correspondante à $|g|$ on a :

$$|\Psi| \leq \tilde{\Psi} \text{ p.p. dans } \Omega$$

(il suffit de remarquer que pour tout $\eta \in \mathbb{R}$ $\operatorname{Re}(e^{i\eta} \Psi)$ est la solution correspondante à $\operatorname{Re}(e^{i\eta} g)$ car si on note $\phi_{\eta,+}$, $\phi_{\eta,-}$ les solutions respectivement correspondantes à $\operatorname{Re}(e^{i\eta} g)^+$, $\operatorname{Re}(e^{i\eta} g)^-$ on a $\phi_{\eta,+}$, $\phi_{\eta,-} \geq 0$ p.p. et :

$$\begin{aligned} |\Psi(x)| &= \sup_{\eta \in \mathbb{R}} |\operatorname{Re}(e^{i\eta} \Psi(x))| = \sup_{\eta \in \mathbb{R}} |\phi_{\eta,+}(x) - \phi_{\eta,-}(x)| \leq \\ &\leq \sup_{\eta \in \mathbb{R}} (\phi_{\eta,+}(x) + \phi_{\eta,-}(x)) \leq \tilde{\Psi} \end{aligned}$$

puisque $\phi_{\eta,+} + \phi_{\eta,-}$ est la solution correspondante à $|\operatorname{Re}(e^{i\eta} g)| \leq |g|$, et d'après 1.).

On reprend alors la méthode suivie dans [3]. Pour chaque $k \in \mathbb{N}_1$ on note :

$$q_k^- = \min(q^-, k)$$

et on résout dans $H_0^1(\Omega)$:

$$(23) \quad -\Delta \Psi_k - q_k^- \Psi_k + \lambda \Psi_k = g \geq 0 \quad \text{p.p. ;}$$

Alors $\Psi_k \geq 0$ p.p. . Pour simplifier on note $\Psi = \Psi_k$ et on pose maintenant :

$$\phi_n = \min(\Psi, n), \text{ pour } n \in \mathbb{N}_1.$$

On multiplie (23) par ϕ_n^{r-1} ($2 \leq r \leq s$) et on intègre par parties :

$$(24) \quad \frac{4(r-1)}{r^2} \int_{\Omega} \left| D(\phi_n^{\frac{r}{2}}) \right|^2 + \lambda \int_{[\Psi \leq n]} \phi_n^r \leq \|g\|_{L^r} \|\phi_n\|_{L^r}^{r-1} +$$

$$+ \epsilon \|D(\phi_n^{\frac{r}{2}})\|_{L^2}^2 + \lambda_\epsilon \|\phi_n\|_{L^r}^r + k \int_{[\Psi > n]} \Psi^r$$

(où on s'est servi de la Proposition 3.1) ; si on choisit $\epsilon > 0$, $\epsilon < \frac{4(r-1)}{r^2}$ on en déduit, d'après l'inégalité de Sobolev (si $N \geq 3$) :

$$\|\phi_n\|_{L^r}^2 \leq C_r \|g\|_{L^r}^r + \|\Psi\|_{L^r}^r + k \int_{[\Psi > n]} \Psi^r$$

(où $\frac{1}{2^*} = \frac{1}{2} - \frac{1}{N}$), donc si on suppose $\Psi \in L^r(\Omega)$ on peut passer à la limite en n ce qui donne :

$$\Psi \in L^{r \frac{2}{2^*}}(\Omega)$$

en itérant ce processus à partir de $r = 2$ on obtient $\Psi_k \in L^{s \frac{2^*}{2}}(\Omega)$, donc a fortiori $\Psi_k \in L^s(\Omega)$.

Si $N = 2$ on a $\Psi_k \in H_0^1(\Omega) \subset \bigcap_{r \geq 2} L^r$.

$\neq \infty$

On revient maintenant à (24) ; si on choisit maintenant $\epsilon = \frac{4(r-1)}{r^2}$, on en déduit (pour $r = s$) :

$$\lambda \int_{[\Psi \leq n]} \phi_n^r \leq \|g\|_{L^s} \|\phi_n\|_{L^s}^{s-1} + \lambda_\epsilon \|\phi_n\|_{L^s}^s + k \int_{[\Psi > n]} \Psi^r$$

Comme $\Psi \in L^s(\Omega)$, on obtient, en passant à la limite en n :

$$\lambda \int_{\Omega} \Psi^s \leq \|g\|_{L^s} \|\Psi\|_{L^s}^{s-1} + \lambda_{\epsilon} \|\Psi\|_{L^s}^s$$

donc, si on pose :

$$\alpha_s = \lambda_{\epsilon},$$

on obtient :

$$\|\Psi_k\|_{L^s(\Omega)} \leq \frac{1}{\lambda - \alpha_s} \|g\|_{L^s(\Omega)}$$

mais en multipliant (23) par Ψ_k on montre facilement d'après la Proposition 3.1 que :

$$\Psi_k \xrightarrow[k]{H_0^1(\Omega)} \Psi$$

donc

$$\|\Psi\|_{L^s(\Omega)} \leq \frac{1}{\lambda - \alpha_s} \|g\|_{L^s(\Omega)}. \blacksquare$$

COROLLAIRE. a) Pour tout $v \in L^2(\Omega)$ $|e^{-tB} v| \leq e^{-tB} |v|$.

b) Pour tout $s \in [2, +\infty[$, $v \in L^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ on a $e^{-tB} v \in L^s(\Omega)$ et :

$$(25) \quad \|e^{-tB} v\|_{L^s(\Omega)} \leq e^{t\alpha_s} \|v\|_{L^s(\Omega)}$$

Démonstration du Corollaire. Il suffit d'appliquer la formule exponentielle :

$$e^{-t(B + \alpha_s)} v = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}(B + \alpha_s)\right)^{-n} v \text{ dans } L^2(\Omega);$$

d'après ce qu'on a vu dans la démonstration de la Proposition 3.3-2, on a :

$$\left| \left(1 + \frac{1}{n}(B + \alpha_s)\right)^{-n} v \right| \leq \left(1 + \frac{1}{n}(B + \alpha_s)\right)^{-n} |v| \text{ p.p. dans } \Omega$$

ce qui montre a). En utilisant (22) on obtient :

$$v \in L^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{n}(B + \alpha_s)\right)^{-n} v \in L^s(\Omega) \quad \forall s \in [2, +\infty[$$

et

$$\left\| \left(1 + \frac{1}{n}(B + \alpha_s)\right)^{-n} v \right\|_{L^s(\Omega)} \leq \|v\|_{L^s(\Omega)} \text{ d'où b). } \blacksquare$$

On se servira dans la suite du :

LEMME 3.1. a) Si $v \in L^2(\Omega)$, alors $W_{t,\lambda} v \in H^1_0(\Omega)$ et il existe $C_\lambda > 0$ tel que :

$$\forall v \in L^2(\Omega) \quad \|W_{t,\lambda} v\|_{H^1(\Omega)} \leq C_\lambda \|v\|_{L^2(\Omega)}$$

b) Si $v \in L^2(\Omega)$:

$$\operatorname{Re} \int_{\Omega} \frac{1 - e^{-tV'}}{t} |W_{t,\lambda} v|^2 \leq C_\lambda^2 \|v\|_{L^2(\Omega)}^2$$

c) $\forall v \in L^2(\Omega)$, $|W_{t,\lambda} v| \leq t(e^{t(B+\lambda)} - 1)^{-1} |v|$ p.p. dans Ω .

d) Si $s \in [2, +\infty[$ et $\lambda > \alpha_s$, alors $\forall v \in L^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$:

$$W_{t,\lambda} v \in L^s(\Omega)$$

$$\|W_{t,\lambda} v\|_{L^s(\Omega)} \leq \frac{1}{\lambda - \alpha_s} \|v\|_{L^s(\Omega)}$$

Démonstration du Lemme 3.1. a), b). Si $v \in L^2(\Omega)$ on a :

$$W_{t,\lambda} v = t(e^{t(\lambda + B)} - e^{-tV'})v \in D(e^{t(\lambda + B)}) \subset \operatorname{Im}(e^{-tB}) \subset D(B) \subset H^1_0(\Omega)$$

d'après la Proposition 3.2) ; on peut donc reproduire la démonstration du Lemme 2.3-1) et obtenir (en utilisant la Proposition 3.2) :

$$C_\lambda \|W_{t,\lambda} v\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq ((\lambda + B)W_{t,\lambda} v, W_{t,\lambda} v) \leq \left(\frac{e^{t(B+\lambda)} - 1}{t} W_{t,\lambda} v, W_{t,\lambda} v \right)$$

d'où :

$$\begin{aligned} C_\lambda \|W_{t,\lambda} v\|_{H^1(\Omega)}^2 + \operatorname{Re} \int_{\Omega} \frac{1 - e^{-tV'}}{t} |W_{t,\lambda} v|^2 &\leq \operatorname{Re}(v, W_{t,\lambda} v) \leq \\ &\leq \|v\|_{L^2(\Omega)} \|W_{t,\lambda} v\|_{H^1(\Omega)} \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure.

c) En utilisant a) du corollaire précédent il suffit de reproduire la démonstration du lemme 2.3-b).

d) On a :

$$W_{t,\lambda} v = t \sum_{n \geq 0} (e^{-t(B+\lambda)} e^{-tV'})^n e^{-t(B+\lambda)} v$$

(convergence dans $L^2(\Omega)$)

alors si $v \in L^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ et $s \in [2, +\infty[$, d'après (25) :

$$\| (e^{-t(B+\lambda)} e^{-tV'})^n e^{-t(B+\lambda)} v \|_{L^s(\Omega)} \leq e^{(n+1)(\alpha_s - \lambda)t} \| v \|_{L^s(\Omega)}$$

donc, si $\lambda > \alpha_s$ on a bien $W_{t,\lambda} v \in L^s(\Omega)$ et :

$$\| W_{t,\lambda} v \|_{L^s(\Omega)} \leq \frac{t e^{(\alpha_s - \lambda)t}}{1 - e^{(\alpha_s - \lambda)t}} \| v \|_{L^s(\Omega)} \leq \frac{1}{\lambda - \alpha_s} \| v \|_{L^s(\Omega)}. \quad \blacksquare$$

On revient maintenant à la démonstration de (21) ; comme dans la démonstration du Théorème 2.1, en utilisant maintenant le Lemme 3.1-a), c) on se ramène à vérifier que si :

$$w_{t_n} = W_{t_n, \lambda} u \xrightarrow{n} w \text{ dans } H_0^1(\Omega) \text{ faible et p.p.}$$

pour une suite $t_n \xrightarrow{n} 0^+$ et pour λ assez grand, alors nécessairement :

$$w = (\lambda + A)^{-1} u.$$

On a évidemment une formule analogue à (10) ; c'est-à-dire, pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$:

$$(26) \quad \left(\frac{1 - e^{-t_n V'}}{t_n} w_{t_n}, \phi \right) + \left(\frac{1 - e^{-t_n(B+\lambda)}}{t_n} e^{-t_n V'} w_{t_n}, \phi \right) = (e^{-t_n(B+\lambda)} u, \phi).$$

Or :

$$\left(\frac{1 - e^{-t_n V'}}{t_n} w_{t_n}, \phi \right) = \int_{\Omega} \frac{1 - e^{-t_n q^+} \cos(t_n q')}{t_n} w_{t_n} \bar{\phi} + i \int_{\Omega} \frac{e^{-t_n q^+} \sin(t_n q')}{t_n} w_{t_n} \bar{\phi}$$

mais :

$$\left| e^{-t_n q^+} \frac{\sin(t_n q')}{t_n} \bar{\phi} \right| \leq |q'| |\phi| \in L^{1+\epsilon}(\Omega)$$

$$e^{-t_n q^+} \frac{\sin(t_n q')}{t_n} \bar{\phi} \xrightarrow{n} q' \bar{\phi} \text{ p.p. dans } \Omega$$

donc le théorème de Lebesgue donne :

$$e^{-t_n q^+} \frac{\sin(t_n q')}{t_n} \bar{\phi} \xrightarrow{n} q' \bar{\phi} \text{ dans } L^{1+\epsilon}(\Omega)$$

d'autre part si on pose $s = (1+\epsilon)' = 1 + \frac{1}{\epsilon} \geq 2$ (on peut supposer $\epsilon \leq 1$), on a d'après le Lemme 3.1-d), que si $\lambda > \lambda_\epsilon = \alpha_s$:

$$\|w_{t_n}\|_{L^s(\Omega)} \leq \frac{1}{\lambda - \lambda_\epsilon} \|u\|_{L^s(\Omega)}$$

donc, au moins pour une sous-suite :

$$w_{t_n} \xrightarrow{n} w \text{ dans } L^{(1+\epsilon)'(\Omega)} \text{ faible}$$

ceci implique que :

$$\begin{aligned} & i \int_{\Omega} e^{-t_n q^+} \frac{\sin(t_n q')}{t_n} w_{t_n} \bar{\phi} = \\ (27) \quad & = i \langle e^{-t_n q^+} \frac{\sin(t_n q')}{t_n} \bar{\phi}, w_{t_n} \rangle_{L^{1+\epsilon}(\Omega) \times L^{(1+\epsilon)'(\Omega)}} \\ & \xrightarrow{n} i \langle q' \bar{\phi}, w \rangle_{L^{1+\epsilon}(\Omega) \times L^{(1+\epsilon)'(\Omega)}} = i \int_{\Omega} q' w \bar{\phi} \end{aligned}$$

D'autre part on a, par Lebesgue :

$$\left(\operatorname{Re} \frac{1 - e^{-t_n V'}}{t_n} \right)^{1/2} \longrightarrow \sqrt{q^+} \text{ dans } L^2_{\text{loc}}(\Omega) \text{ fort ;}$$

on en déduit d'abord, d'après le Lemme 3.1 b), puisque $w_{t_n} \xrightarrow{n} w$ dans $L^2(\Omega)$ faible, avec $\|w_{t_n}\|_{L^2} \leq C$:

$$\left(\operatorname{Re} \frac{1 - e^{-t_n V'}}{t_n} \right)^{1/2} w_{t_n} \longrightarrow \sqrt{q^+} w \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ faible,}$$

au moins pour une sous-suite. Ensuite, on a donc :

$$(28) \quad \left\{ \begin{aligned} & q^+ w \in L^1_{\text{loc}}(\Omega) \\ & \operatorname{Re} \int_{\Omega} \frac{1 - e^{-t_n V'}}{t_n} w_{t_n} \phi = \left(\left(\operatorname{Re} \frac{1 - e^{-t_n V'}}{t_n} \right)^{1/2} w_{t_n}, \left(\operatorname{Re} \frac{1 - e^{-t_n V'}}{t_n} \right)^{1/2} \phi \right) \\ & \longrightarrow (\sqrt{q^+} w, \sqrt{q^+} \phi) = \int_{\Omega} q^+ w \bar{\phi} \end{aligned} \right.$$

De (27) et (28) on déduit finalement que $V'w \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ et :

$$(29) \quad \left(\frac{1 - e^{-t_n V'}}{t_n} w_{t_n}, \phi \right) \xrightarrow{n} \int_{\Omega} V' w \bar{\phi} = \langle V'W, \bar{\phi} \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}}$$

On a évidemment :

$$(30) \quad (e^{-t_n(B+\lambda)} u, \phi) \xrightarrow{n} (u, \phi),$$

et il ne nous reste qu'à examiner un des termes de (26) :

$$\left(\frac{1 - e^{-t_n(B+\lambda)}}{t_n} e^{-t_n V'} w_{t_n}, \phi \right) = \left(w_{t_n}, e^{-t_n V'} \frac{1 - e^{-t_n(B+\lambda)}}{t_n} \phi \right);$$

si $N \geq 4$ on a $q^- \in L^{\frac{N}{2}}(\Omega) + L^{\infty}(\Omega) \subset L^2_{\text{loc}}(\Omega)$, donc $\mathcal{D}(\Omega) \subset D(B)$ et :

$$e^{-t_n V'} \frac{1 - e^{-t_n(B+\lambda)}}{t_n} \phi \xrightarrow{n} (B+\lambda)\phi \text{ dans } L^2(\Omega).$$

Comme on a :

$$w_{t_n} \xrightarrow{n} w \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ faible,}$$

et d'après le Lemme 3.1 les $\|w_{t_n}\|_{L^2(\Omega)}$ sont bornées, on a :

$$(31)_a \quad \left(\frac{1 - e^{-t_n(B+\lambda)}}{t_n} e^{-t_n V'} w_{t_n}, \phi \right) \xrightarrow{n} (w, (B+\lambda)\phi) = \\ = \langle -\Delta w - q^- w + \lambda w, \bar{\phi} \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}}$$

Dans les cas $N = 2, 3$ on n'a pas nécessairement $q^- \in L^2_{\text{loc}}$; pour obtenir l'analogue de (31)_a on se sert alors du Lemme suivant :

LEMME 3.2: Pour chaque $r \in \{p, 2, p'\}$ il existe $\mu_r > 0$ et un opérateur B_r dans $L^r(\Omega)$ tels que :

1. $B_r + \mu_r$ est m-accréatif dans $L^r(\Omega)$.
2. $B_2 = B$.
3. Si $u \in L^2(\Omega) \cap L^r(\Omega)$, alors $e^{-tB} u = e^{-tB_r} u \forall t \geq 0$.
4. $\mathcal{D}(\Omega) \subset D(B_p)$ et $\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $B_p \phi = -\Delta \phi - q^- \phi$.

(Démonstration à la fin de I-3).

On a donc :

$$e^{-t_n V'} \frac{1 - e^{-t_n(B+\lambda)}}{t_n} \bar{\phi} = e^{-t_n V'} \frac{1 - e^{-t_n(B_p+\lambda)}}{t_n} \bar{\phi} \xrightarrow{n} (B_p+\lambda)\bar{\phi}$$

dans $L^p(\Omega)$. D'autre part, d'après le Lemme 3.1-d), en augmentant au besoin λ_ϵ , on a pour $\lambda > \lambda_\epsilon$: $\|w_{t_n}\|_{L^p} \leq C$, donc au moins pour une sous-suite :

$$w_{t_n} \xrightarrow{n} w \text{ dans } L^{p'}(\Omega) \text{ faible,}$$

puisque $p < 2 \Rightarrow p' > 2$. Alors :

$$(31)_b \left(\frac{1 - e^{-t_n(B+\lambda)}}{t_n} e^{-t_n V'} w_{t_n}, \phi \right) = \left\langle w_{t_n}, e^{-t_n V'} \frac{1 - e^{-t_n(B+\lambda)}}{t_n} \bar{\phi} \right\rangle_{L^{p'} \times L^p}$$

$$\xrightarrow{n} \left\langle w, (B_p+\lambda)\bar{\phi} \right\rangle_{L^{p'} \times L^p} = \int_{\Omega} w(-\Delta - q^- + \lambda)\bar{\phi} = \left\langle (-\Delta - q^- + \lambda)w, \bar{\phi} \right\rangle_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}}$$

En passant (26) à la limite en n , on obtient alors d'après (29) - (31) :

$$V' w \in L^1_{loc}(\Omega)$$

$$\left\langle -\Delta w - q^- w + V' w + \lambda w, \phi \right\rangle_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}} = \left\langle u, \bar{\phi} \right\rangle_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}}$$

donc, dans $\mathcal{D}'(\Omega)$:

$$-\Delta w + Vw = u - \lambda w \in L^2(\Omega),$$

d'où : $w \in D(A)$, $(\lambda+A)w = u$, ce qui termine la deuxième étape.

Troisième étape. $D(A)$ est dense dans $L^2(\Omega)$. On reproduit la troisième étape de la démonstration du Théorème 2.1 en remplaçant (14) par :

$$nt_n \xrightarrow{n} 0^+ \text{ et } \|W_{t_n, n+\alpha_s} u - (n+A+\alpha_s)^{-1} u\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{n^2},$$

et en se servant de l'estimation du Lemme 3.1-d) :

$$\|n W_{t_n, n+\alpha_s} u\|_{L^s(\Omega)} \leq \|u\|_{L^s(\Omega)},$$

avec $s = (1+\epsilon)' = 1 + \frac{1}{\epsilon}$, pour démontrer l'étape correspondante à (16).

Dans ce qui correspond à (17), on se sert des Lemmes 3.2, 3.1 quand $N = 2,3$, en augmentant au besoin α_3 .

Quatrième étape. On conclut comme dans la démonstration du Théorème 2.1. On remarquera qu'il suffit de montrer (19) avec B remplacé par $B + \lambda_\epsilon$. ■

Démonstration du Lemme 3.2. On pose par définition :

$$\cdot B_2 = B, \quad \mu_2 = \lambda_1.$$

Si $r = p'$ on pose $\mu_r = \alpha_r$. D'après la Proposition 3.3, si on considère la résolvante de $B_2 + \mu_r$:

$$R_\lambda^{(2)} = \left(\frac{1}{\lambda} (B_2 + \mu_r) + 1 \right)^{-1},$$

on a (estimation (22)) :

$$\| R_\lambda^{(2)} u \|_{L^r(\Omega)} \leq \| u \|_{L^r(\Omega)} \quad \forall u \in L^2(\Omega) \cap L^r(\Omega).$$

$R_\lambda^{(2)} / L^2(\Omega) \cap L^r(\Omega)$ se prolonge donc en une contraction $R_\lambda^{(r)}$ de $L^r(\Omega)$ qui en est la fermeture.

D'autre part $B / R_\lambda^{(2)} (L^2(\Omega) \cap L^r(\Omega))$ est fermable dans $L^r(\Omega)$; en effet si dans ce domaine $u_n \xrightarrow[n]{} 0$, $Bu_n \xrightarrow[n]{} f$ dans $L^r(\Omega)$, alors :

$$\cdot -\Delta u_n \xrightarrow[n]{} 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega)$$

$$\cdot q^- u_n \xrightarrow[n]{} 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega) \text{ (puisque } r = p' \text{ et } q^- \in L_{loc}^p(\Omega))$$

donc :

$$Bu_n = -\Delta u_n - q^- u_n \xrightarrow[n]{} 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega)$$

ce qui implique $f = 0$. On note B_r la fermeture de cet opérateur ; alors $R_\lambda^{(r)}$ est évidemment la résolvante de $B_r + \mu_r$ et cet opérateur est donc bien m -accréatif dans $L^{p'}(\Omega)$. D'autre part la formule exponentielle et la définition de $R_\lambda^{(p')}$ garantissent que :

$$\forall u \in L^2(\Omega) \cap L^{p'}(\Omega) : e^{-tB_{p'}} u = e^{-tB} u.$$

Maintenant, la théorie de la dualité dans les semi-groupes donne :

$$\cdot B_p^* + \mu_p \text{ est } m\text{-accréatif dans } L^p(\Omega).$$

$$e^{-tB_p^*} = (e^{-tB_{p'}})^*$$

on pose alors :

$$B_p = B_{p'}^*, \mu_p = \mu_{p'}$$

(ici * désigne l'opérateur transposé dans la dualité $\langle L^p, L^{p'} \rangle$). Mais si $u \in L^2(\Omega) \cap L^p(\Omega)$, on a, pour tout $v \in L^{p'}(\Omega) \cap L^2(\Omega) (\supset \mathcal{D}(\Omega))$:

$$\begin{aligned} \langle e^{-tB_p} u, v \rangle_{L^p \times L^{p'}} &= \langle u, e^{-tB_{p'}} v \rangle_{L^p \times L^{p'}} = \langle u, e^{-tB_2} v \rangle_{L^p \times L^{p'}} = \\ &= \int_{\Omega} u(e^{-tB_2} v) = \int_{\Omega} (e^{-tB_2} u)v, \end{aligned}$$

donc :

$$e^{tB_2} u \in L^p(\Omega) \text{ et } e^{-tB_p} u = e^{-tB} u.$$

Montrons finalement que $\mathcal{D}(\Omega) \subset D(B_p)$. Comme $B_p = B_{p'}^*$, par définition de $B_{p'}$, on a a fortiori :

$$B_p = \left(B /_{R_\lambda^{(2)}(L^{p'}(\Omega) \cap L^2(\Omega))} \right)^*$$

mais si $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $v \in R_\lambda^{(2)}(L^{p'}(\Omega) \cap L^2(\Omega))$, on a :

$$\begin{aligned} \langle \phi, Bv \rangle_{L^p \times L^{p'}} &= \int_{\Omega} \phi(-\Delta v - q^- v) = \\ &= \int_{\Omega} \underbrace{v(-\Delta \phi - q^- \phi)}_{\in L^p} = \langle -\Delta \phi - q^- \phi, v \rangle_{L^p \times L^{p'}} \end{aligned}$$

d'où :

$$\phi \in D(B_p)$$

$$B_p \phi = -\Delta \phi - q^- \phi. \blacksquare$$

Remarques. 1) Dans le cas $N = 1$ si on suppose $q^- \in L^1(\Omega) + L^\infty(\Omega)$ avec les hypothèses supplémentaires $q^-, q' \in L^{1+\epsilon}_{loc}(\Omega)$ (pour un $\epsilon > 0$), la démonstration précédente est évidemment valable.

2) Il serait aussi intéressant d'analyser le cas où on suppose seulement $q' \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ et en plus de l'hypothèse (1) l'autre alternative de l'hypothèse (2), c'est-à-dire, si $N \geq 2$:

$$q^- \in L^{\frac{N}{2} + \epsilon}_{\text{loc}}(\Omega) \quad (\text{pour un certain } \epsilon > 0) ;$$

nos méthodes ne s'adaptent pas directement à ce cas là.

REFERENCES

- [1] A. BIVAR-WEINHOLTZ, R. PIRAUX. «*Formule de Trotter pour l'opérateur de Schrödinger avec un potentiel singulier complexe*». C.R. Acad. Sc. Paris, 288, Série A, 1979, p. 539-542.
- [2] H. BREZIS, F. BROWDER. «*Sur une propriété des espaces de Sobolev*». C.R. Acad. Sc. Paris, 287, Série A, 1978, p. 113-115.
- [3] H. BREZIS, T. KATO. «*Remarks on the Schrödinger operator with singular complex potentials*». J. Math. Pures et Appl. 58, 1979, p. 137-151.
- [4] P.R. CHERNOFF. «*Product formulas, non linear semigroups, and addition of unbounded operators*». Mem. An. Math. Society, n^o 140 (1974).
- [5] T. KATO. «*Perturbation Theory for linear operators*». Springer-Verlag (2nd edition - 1976).
- [6] T. KATO. «*On some Schrödinger operators with a singular complex potential*». Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, Ser. IV, 5 (1978), p. 105-114.

(Manuscrit reçu le 23 mai 1981)