ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

FRANÇOIS LAUDENBACH

Un principe de prolongement mis en défaut en géométrie symplectique

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5e série, tome 7, nº 2 (1985), p. 161-167

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1985_5_7_2_161_0>

Annales Faculté des Sciences Toulouse
Vol VII, 1985, P 161 à 167

UN PRINCIPE DE PROLONGEMENT MIS EN DEFAUT EN GEOMETRIE SYMPLECTIQUE

François Laudenbach (1)

(1) Université Paris-Sud et UA 1169 du CNRS, Bât. 425, Mathématique F-91405 Orsay Cédex.

Résumé. On aborde un nouvel aspect de la rigidité en géométrie symplectique. Il se peut que la place manque pour exécuter une isotopie hamiltonienne balayant une grande aire.

Summary. A new feature of the rigidity in symplectic geometry is considered. It may be that there is not enough room in order to perform a hamiltonian isotopy sweeping a large area.

1. - INTRODUCTION

Soit (M^{2n},ω) une variété symplectique de dimension 2n. Pour une sous-variété X, une isotopie $f_t : X \to M$, $t \in [0,1]$, est dite *hamiltonienne* si, pour tout lacet γ de X et tout $t \leqslant 1$, $\int_{C_t(\gamma)} \omega = 0$ où $C_t(\gamma)$ est le cylindre singulier engendré par les $f_u(\gamma)$, $0 \leqslant u \leqslant t$. On peut évoquer l'identité ci-dessus en disant que l'aire balayée par γ est identiquement nulle. Pour un chemin α joignant x_o à x dans X, on convient d'orienter $C_t(\alpha)$ comme le carré $[0,1] \times [0,1]$ où la première variable paramètre α et où la seconde paramètre l'isotopie. On introduit alors la fonction de Hamilton à la source $K : X \times [0,1] \to \mathrm{IR}$, définie par :

$$K_t(x) - K_t(x_o) = \frac{d}{dt}\left(\int_{C_t(\alpha)} \omega\right).$$

L'hypothèse hamiltonienne affirme que K est une fonction bien définie à l'addition près d'une fonction du temps t (si X est connexe). Prenant $K_t(x_o) = 0$, $K_t(x)$ est la fonction vitesse d'aire balayée par un segment α joignant le point-base x_o au point x.

Si $\varphi_t : M \to M$ est une isotopie hamiltonienne et si $\dot{\varphi}_t$ désigne la dérivée partielle par rapport au temps, le hamiltonien associé est la fonction H_t qui vérifie l'équation de Hamilton :

$$(*) \qquad dH_t = - i(\dot{\varphi}_t)\omega,$$

l'égalité étant sous-entendue au point $\varphi_t(x)$. Dans ce cas, l'équation de Hamilton à la source est $K_t = H_t \circ \varphi_t$.

M. Chaperon m'a transmis l'observation suivante : la fonction K_t est le hamiltonien (usuel) de l'isotopie $t \mapsto \varphi_t^{-1}$.

Lorsque l'on se donne une isotopie hamiltonienne $f_t : X \to \text{int } M$ et que l'on cherche à l'étendre en isotopie ambiante de M (laissant fixe un voisinage du bord), on voit que non seulement le hamiltonien H_t est donné sur $f_t(X)$, mais aussi que son 1-jet est donné le long de cette sous-variété. Par prolongement des 1-jets de fonctions, on a le principe de prolongement suivant :

Si X est compact (pour garantir l'intégrabilité jusqu'au temps 1), toute isotopie hamiltonienne de plongements de X dans l'intérieur de M se prolonge en isotopie hamiltonienne ambiante. Cet énoncé peut être mis sous forme d'un théorème de fibration.

Si maintenant ∂X est non vide et si $f_t(X) \cap \partial M = f_t(\partial X)$, on sait que la géométrie des lignes caractéristiques de ∂M (= lignes tangentes au noyau de la forme induite par ω sur ∂M) met en défaut le principe d'extension. Mais toujours dans le cas à bord, il se présente naturellement des problèmes de prolongements dont la mise en défaut est un degré plus subtil. En voici un qui a retenu mon attention.

PROBLEME 1. Soit M une variété symplectique ouverte ayant deux composantes de bord $\partial_o M$, $\partial_1 M$. Soit X une sous-variété lagrangienne compacte, connexe, proprement plongée : pour $i = 0,1$, $\partial_i X = \partial_i M \cap X$. Soit α un arc joignant $\partial_o X$ à $\partial_1 X$ dans X. Peut-on étendre une isotopie hamiltonienne de α rel. $\partial\alpha$ en une isotopie hamiltonienne de X rel. ∂X ? (Une isotopie rel. ... laisse fixe les points de la partie ... .)

Voici un autre problème qui apparaît dans des problèmes d'engouffrement de sous-variétés lagrangiennes.

PROBLEME 2. Soit X l'anneau $S^{n-1} \times [0,1]$, $n \geqslant 2$, muni d'une métrique riemannienne produit.

Soit $M = \{ (q,p) \in T^*X \mid q \in X,\ p \in T_q^* X,\ \| p \| < R \}$; X est identifié à la section nulle de T^*X. Soit k une fonction numérique donnée sur [0,1]. Existe-t-il une isotopie hamiltonienne de X dans M rel. ∂X, à partir de la section nulle, dont la fonction de Hamilton à la source K_t vérifie $K_t \mid S^{n-1} \times \{0\} = 0$ et $K_t \mid S^{n-1} \times \{1\} = k(t)$?

Nous démontrerons :

1) Si le problème 1 avait toujours une réponse positive, il en serait de même du problème 2.
2) Le problème 2 a une solution si et seulement si, pour tout $t \in [0,1]$:

$$(**) \qquad \left| \int_0^t k(u)du \right| < R \times (\text{distance de } S^{n-1} \times \{0\} \text{ à } S^{n-1} \times \{1\})$$

(Observer que, pour n = 1, cette inégalité est évidente).

Ainsi le principe d'extension posé dans le problème 1 est en général mis en défaut.

L'inégalité obtenue au 2) ci-dessus peut sans doute se déduire des récents travaux de Gromov ([G]). Comme l'on comprend mieux ce dont on est soi-même l'auteur, je la déduis ici de mon travail avec J.C. Sikorav (LS).

2. - IMPLICATION DU PROBLEME 1 SUR LE PROBLEME 2

2.1. - Soit $A = S^1 \times [0,1]$ un anneau symplectique ; à conjugaison près, la structure symplectique est fixée par l'aire totale. Soit une fonction $k : [0,1] \to \mathbb{R}$. Alors, il existe une isotopie hamiltonienne f_t de A rel. ∂A dont la fonction de Hamilton à la source K_t vérifie :

$$K_t \mid S^1 \times \{0\} = 0 \qquad \text{et} \qquad K_t \mid S^1 \times \{1\} = k(t).$$

En effet, dans un anneau, on peut prendre un rayon et lui faire balayer une aire arbitrairement grande (Figure 1).

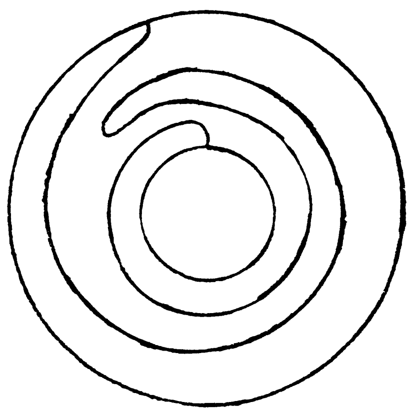

Figure 1

2.2. - Il y a beaucoup d'anneaux symplectiques dans une variété symplectique : toute courbe fermée simple γ est l'âme d'un anneau symplectique A. Cela résulte du théorème de Weinstein ([W] , lecture 5) sur les voisinages tubulaires de sous-variétés isotropes : le plongement isotrope de γ dans M s'étend en un plongement symplectique d'un voisinage de la section nulle du cotangent $T^*\gamma$.

On obtient aisément le complément suivant : Soit α un arc simple de M et $x \in \operatorname{int} \alpha$. Si on choisit le lacet γ passant par x de sorte que $\omega(T_x\gamma, T_x\alpha) \neq 0$, on peut imposer que T_xA soit engendré par $T_x\gamma$ et $T_x\alpha$. Enfin, si $\gamma \cap \alpha = x$, situation générique lorsque $n \geqslant 2$, on peut imposer que $A \cap \alpha$ soit un rayon de l'anneau A.

2.3. - Prenons les notations du problème 1, avec $n \geqslant 2$. Soient x_0 , x_1 les extrémités de α, respectivement dans $\partial_0 X$ et dans $\partial_1 X$. Considérons un anneau symplectique A comme en 2.2 et l'isotopie hamiltonienne portée par A comme en 2.1. Celle-ci fournit une isotopie hamiltonienne de plongements de α rel. $\partial\alpha$ dont la fonction de Hamilton à la source vérifie $K_t(x_0) = 0$ et $K_t(x_1) = k(t)$.

En admettant le prolongement des isotopies hamiltoniennes, on aurait une isotopie hamiltonienne de plongements de X dans M dont la fonction de Hamilton à la source vérifierait, si $\partial_0 X$ et $\partial_1 X$ sont connexes :

$$K_t(\partial_0 X) = 0 \qquad \text{et} \qquad K_t(\partial_1 X) = k(t),$$

ce qui résoudrait positivement le problème 2.

3. - MAJORATION DE L'AIRE BALAYEE

Le problème 2 va être ici résolu négativement en prenant pour M non pas un tube du cotangent de $S^{n-1} \times [0,1]$ mais une variété beaucoup plus grosse (de volume infini), conduisant néanmoins à la meilleure borne pour l'aire balayée.

3.1. - Soit Y une variété fermée ; on écrit :

$$T^*(Y \times [0,1]) = (T^*Y) \times [0,1] \times \mathbb{R},$$

les deux dernières coordonnées étant notées s, σ ; par extension, un point de T^*Y est noté (y,η), $y \in Y$, $\eta \in T^*_y Y$ et la forme symplectique est $-(d\eta \wedge dy + d\sigma \wedge ds)$. On considère $M \subset T^*(Y \times [0,1])$ définie par $|\sigma| < 1$; c'est une variété ouverte à bord : $\partial_i M$ est défini par $s = i$, $i = 0,1$. Soit X la section nulle de $T^*(Y \times [0,1])$ et α un chemin joignant $\partial_0 X = Y \times \{0\}$ à $\partial_1 X = Y \times \{1\}$ dans X.

PROPOSITION. *Au cours d'une isotopie hamiltonienne* $f_t : X \to M$, rel. ∂X, *où* f_0 *est l'injection* $X \subset M$, *l'aire balayée par* α *est bornée en module par* 1.

Remarque. Cette majoration est de toute évidence la meilleure possible. L'inégalité (**) s'en déduit aisément.

Démonstration. Il suffit de considérer le cas où f_t est stationnaire sur un voisinage de ∂X. Soit alors K_t la fonction de Hamilton à la source avec $K_t \mid \partial_0 X = 0$. Posons $k(t) = K_t(\partial_1 X) \in \mathbb{R}$. Choisissons une fonction $\rho_t(s)$ vérifiant :

$$\rho_t(s) = 0 \text{ pour s voisin de 0 et de 1, } \int_0^1 \rho_t(s)ds = \int_0^t k(u)du,$$

et $\rho_0(s) = 0$ pour tout $s \in [0,1]$. On peut alors construire une nouvelle isotopie hamiltonienne de X dans $T^*(Y \times [0,1])$ par $\hat{f}_t(y,s) = (y,0,s,\rho_t(s))$. On observe sur ces formules que sa fonction de Hamilton à la source $\hat{K}_t$, choisie nulle sur $\partial_0 X$, vérifie $\hat{K}_t \mid \partial_1 X = K_t \mid \partial_1 X$, mais que,

$$\text{si } \left| \int_0^t k(u)du \right| \text{ n'est pas borné par 1, } \hat{f}_t \text{ ne plonge pas X dans M.}$$

Dans la suite, on fixe $t = t_o$ et on pose $a = \displaystyle\int_0^{t_o} k(u)du$. On note par X_a l'image du plongement lagrangien de X dans $T^*(Y \times [0,1])$ donné par la formule :

$$(y,s) \to (y,0,s,a).$$

Le théorème de la moyenne dit que $X_a \cap \hat{f}_{t_o}(X)$ est non vide. Nous démontrerons le lemme suivant :

LEMME. *1) Il existe une isotopie hamiltonienne ambiante de* $T^*(Y \times [0,1])$, *à support compact, dont le temps* 1 *conjugue les plongements* f_{t_o} *et* $\hat{f}_{t_o}$.

2) Au cours d'une telle isotopie, l'intersection avec X_a *reste non vide. En particulier,* $f_{t_o}(X) \cap X_a$ *est non vide.*

Le 2) du lemme permet d'achever la démonstration de la proposition ; si $|a| > 1$, $f_{t_o}(X)$ contient au moins un point dont la coordonnée σ est de module supérieur à 1. Donc, $f_{t_o}(X)$ n'est pas inclus dans M. □

3.2. - Démonstration du lemme

1) On donne explicitement une isotopie $g_u : X \to T^*(Y \times [0,1])$, $u \in [0,t_o]$. Introduisons d'abord la famille de translations T_u de $T^*(Y \times [0,1])$:

$$(y,\eta,s,\sigma) \to (y,\eta,s,\sigma + \rho_{t_o}(s) - \rho_u(s)).$$

On pose $g_u = T_u \circ f_u$. Pour $u = 0$, $g_u = \hat{f}_{t_o}$ et pour $u = t_o$, $g_u = f_{t_o}$. De plus, il s'agit d'une isotopie hamiltonienne. Calculons l'aire balayée par α lorsque u varie de 0 à u_o. Par la formule de Stokes, c'est la même que celle balayée par α au cours de l'isotopie $u \to T_o \circ f_u$, $u \in [0,u_o]$, suivie de l'isotopie $u \to T_u \circ f_{u_o}$, $u \in [0,u_o]$. On trouve alors que cette aire est nulle. Donc la fonction de Hamilton à la source pour l'isotopie g_u est identiquement nulle au bord de X, et même près du bord. Par extension de fonctions, comme il est indiqué dans l'introduction, on peut construire une isotopie hamiltonienne ambiante, à support compact dans int $T^*(Y \times [0,1])$, induisant l'isotopie g_u.

2) L'astuce suivante m'a été donnée par J.C. Sikorav pour éviter le recours à une version à bord de [LS] . En identifiant $s = 0$ et $s = 1$, on obtient une projection $\pi : T^*(Y \times [0,1]) \to T^*(Y \times S^1)$. L'image $\pi(X_a)$ est le graphe d'une forme fermée ω_a. L'image $\pi\hat{f}_{t_o}(X)$ est le graphe d'une forme fermée cohomologue à ω_a et enfin on a une isotopie hamiltonienne ambiante déformant $\pi\hat{f}_{t_o}(X)$ en $\pi f_{t_o}(X)$. Soit τ la translation par $-\omega_a$ dans $T^*(Y \times S^1)$; ainsi $\tau\pi(X_a)$ est la section nulle et $\tau\pi f_{t_o}(X)$ s'en déduit par isotopie hamiltonienne. D'après [LS], $\tau\pi f_{t_o}(X)$ rencontre la section nulle. Donc, $f_{t_o}(X) \cap X_a$ est non vide. □

3.3. - Autre exemple d'aire balayée bornée

On considère $\mathbb{R}^{2n}$ muni de la métrique euclidienne et de la forme symplectique canonique. On écrit $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^*$. On considère la boule unité B de $\mathbb{R}^{2n}$ et les deux sous-variétés lagrangiennes à bord, D_1 = boule unité de $\mathbb{R}^n$ et D_2 = boule unité de $(\mathbb{R}^n)^*$. On s'intéresse aux isotopies hamiltoniennes f_t de D_1 dans B, rel. ∂D_1, laissant fixe le centre et telles que, pour tout t, $f_t(D_1) \cap D_2 = \{0\}$.

Alors, on déduit facilement de la proposition 3.1 que l'aire (symplectique) balayée par un rayon est bornée. Je pense que dans ce cas la borne est $\frac{\pi}{4}$, valeur évidente pour $n = 1$.

Remerciements. Je remercie Jean-Claude Sikorav pour la simplification importante qu'il a apportée à ce travail.

REFERENCES

[G] M. GROMOV. *«Pseudo-holomorphic curves in symplectic manifolds».* Invent. Math. 82 (1985), 307-347.

[LS] F. LAUDENBACH et J.C. SIKORAV. *«Persistance d'intersection avec la section nulle au cours d'une isotopie hamiltonienne dans un fibré cotangent».* Invent. Math. 82 (1985), 349-357.

[W] A. WEINSTEIN. *«Lectures on symplectic manifolds».* CBMS, Reg. Conf. series in Math. 29, AMS, 1977.

(Manuscrit reçu le 14 octobre 1985)