

JEAN-MARIE DUMONT

ALAIN THOMAS

**Une modification multiplicative des  
nombres  $g$  normaux**

*Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5<sup>e</sup> série*, tome 8, n° 3  
(1986-1987), p. 367-373

[http://www.numdam.org/item?id=AFST\\_1986-1987\\_5\\_8\\_3\\_367\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AFST_1986-1987_5_8_3_367_0)

© Université Paul Sabatier, 1986-1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## Une modification multiplicative des nombres $g$ normaux

JEAN-MARIE DUMONT<sup>(1)</sup> et ALAIN THOMAS<sup>(2)</sup>

**RÉSUMÉ.** — Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'entiers, de limite infinie, telle que  $\alpha =_g 0, a_1 a_2 \cdots a_n \cdots$  soit normal en base  $g$  ( $g$  entier  $\geq 1$ ).

Soit  $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite bornée d'entiers non nuls. Alors, si

$$\alpha^* =_g 0, (C_1 a_1)(C_2 a_2) \cdots (C_n a_n) \cdots,$$

chaque produit  $C_n a_n$  étant écrit en base  $g$ ,  $\alpha^*$  est normal en base  $g$ .

**ABSTRACT.** — Let  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  be a sequence of natural numbers such that  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$  and  $\alpha =_g a_1 a_2 \cdots a_n \cdots$  is normal to the base  $g$  (integer  $\geq 2$ ).

Then, if  $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$  is a bounded sequence of positive natural numbers, and if  $\alpha^* =_g (C_1 a_1)(C_2 a_2) \cdots (C_n a_n) \cdots$ , each product  $C_n a_n$  being written in the base  $g$ , we prove the normality of  $\alpha^*$  to the base  $g$ .

### 1. Introduction

Soit  $g$  un entier  $\geq 2$ . On dit que le réel  $\alpha$  est normal en base  $g$  (ou :  $g$ -normal) si et seulement si la suite  $(\alpha g^n)_{n \in \mathbb{N}}$  est équirépartie modulo 1 [4].

Plusieurs exemples de nombres normaux ont été construits sous la forme :

$$\alpha =_g 0, \bar{a}_1 \bar{a}_2 \cdots \bar{a}_n \cdots \tag{1}$$

où  $a_n \in \mathbb{N}$  et  $\bar{m}$  désigne l'écriture de l'entier  $m$  en base  $g$ .

<sup>(1)</sup> Département de Mathématiques-Informatique Faculté des Sciences de Luminy, 70 route Léon-Lachamp - 13288 Marseille Cédex 9

<sup>(2)</sup> Département de Mathématiques Faculté des Sciences de St-Charles Université de Provence, 3 place Victor Hugo - 13331 Marseille Cédex 3

Ainsi, lorsque  $a_n = n$  ([1]), ou bien, plus généralement, quand la suite  $(a_n)$  vérifie la condition de “densité” suivante :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_0(\epsilon) \text{ tel que : } \forall N, N \geq N_0(\epsilon) \implies \text{card} \{n/a_n \leq N\} \geq N^{1-\epsilon},$$

incluant notamment le cas  $a_n = n^{\text{ième}}$  nombre premier ([2]), ou encore :  $a_n = f(n)$ ,  $f$  polynôme à coefficients entiers ([3]), alors, dans tous les cas, le nombre  $\alpha$  correspondant dans (1) est normal en base  $g$ .

En 1979, B.VOLKMANN ([5]) a prouvé le théorème de “modification de nombres normaux” suivant :

$\overline{\alpha}$  étant comme dans (1) avec  $a_n$  suite croissante non bornée, et  $\alpha^* =_g 0$ ,  $\overline{a_1^* a_2^* \cdots a_n^* \cdots}$  où  $a_n^* = a_n + J_n$  avec  $J_n$  entier,  $\log(J_n) \in o(\log a_n)$ , alors la  $g$ -normalité de  $\alpha$  implique celle de  $\alpha^*$ .

Sa démonstration repose sur une évaluation de la fréquence limite de chaque bloc de chiffres, en base  $g$ , dans  $\alpha^*$ .

Pour parler rapidement : cette fréquence étant asymptotiquement “normale” dans  $\alpha$  et la longueur de l’écriture de  $J_n$  en base  $g$  “petite” devant celle de  $a_n$ , les blocs  $\overline{a_n^*}$  et  $\overline{a_n}$  ne diffèrent que d’une façon asymptotiquement négligeable; d’où le résultat.

Nous proposons ici de démontrer le théorème suivant :

**THÉORÈME .** — Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d’entiers, de limite infinie, telle que  $\alpha =_g 0$ ,  $a_1 a_2 \cdots a_n \cdots$  soit normal en base  $g$  ( $g$  entier  $\geq 2$ ).

Soit  $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite bornée d’entiers non nuls. Alors, si

$$\alpha^* =_g 0, (C_1 a_1)(C_2 a_2) \cdots (C_n a_n) \cdots,$$

chaque produit  $C_n a_n$  étant écrit en base  $g$ ,  $\alpha^*$  est normal en base  $g$ .

Notre démarche, en vue d’obtenir le résultat énoncé, est sensiblement différente. Elle repose sur le critère de Weyl pour l’équirépartition modulo 1 et le lemme suivant :

**LEMME .** — Soit  $g$  un entier au moins égal à 2 et soit  $\alpha$  un nombre normal en base  $g$ . Pour tout entier  $C$  et tous réels  $\epsilon$  et  $\eta$  strictement positifs, il existe une partie  $E$  de  $\mathbb{N}$  et un entier  $N$  qui vérifient les conditions suivantes :

(i) pour tout entier  $n$  de  $E$  et tout entier relatif  $c$  tel que  $1 \leq |c| \leq C$ , on a :

$$\frac{1}{N} \left| \sum_{m=nN}^{(n+1)N-1} e(\alpha c g^m) \right| < \epsilon \text{ où l'on a posé } e(x) = \exp(2i\pi x)$$

Une modification multiplicative des nombres  $g$ -normaux

(ii)  $d(E) > 1 - \eta$ , où  $d(E) = \lim_{k \rightarrow \infty} 1/k \text{ card}(E \cap [0, k])$  désigne la densité la densité (ordinaire) de l'ensemble  $E$ .

Ce lemme exprime qu'il y a "beaucoup" de tranches suffisamment longues d'entiers consécutifs sur lesquelles les suites  $(\alpha c g^n)_{n \in \mathbf{N}}$  pour  $1 \leq |c| \leq C$  possèdent simultanément une "bonne" répartition modulo 1.

Remarquons que  $g$  étant entier et donc les suites  $(\alpha c g^n)$  non uniformément équiréparties ("well-distributed", cf. [4] p.42) l'ensemble des entiers  $n$  vérifiant l'inégalité de (i) n'est jamais un segment infini de  $\mathbf{N}$ .

## 2. Démonstration du lemme

Soit  $c$  un entier relatif non nul, pour tout entier  $n$  nous posons :

$$F_n(c) = \left\{ \alpha' \in [0, 1[ \mid \left| \sum_{0 \leq m < n} e(\alpha' c g^m) \right| < \epsilon n \right\}.$$

Presque tout nombre, au sens de la mesure de Lebesgue  $\lambda$ , étant  $g$ -normal, on a, pour tout  $\epsilon > 0$  et  $c \in \mathbf{Z}^*$  :

$$\lambda \left( \bigcup_{N \in \mathbf{N}} \bigcap_{n \geq N} F_n(c) \right) = 1.$$

Par suite, il existe un entier  $N(c)$  tel que :

$$\lambda \left( \bigcap_{n \geq N(c)} F_n(c) \right) > 1 - \eta/4C.$$

Posons alors  $N = \max\{N(c)/1 \leq |c| \leq C\}$ ,  $F_N = \bigcap_{1 \leq c \leq C} F_N(c)$ .

Pour tout  $c$ , tel que  $1 \leq |c| \leq C$ , on a  $F_N(c) \supset \bigcap_{n \geq N(c)} F_n(c)$ . Donc, en notant  $\bar{A}$  le complémentaire dans  $[0, 1[$  de l'ensemble  $A$ , on trouve :

$$\lambda(\bar{F}_N) \leq \sum_{1 \leq |c| \leq C} \lambda(\bar{F}_N(c)) \leq \sum_{1 \leq |c| \leq C} \frac{\eta}{4C} = \eta/2.$$

De plus, chaque ensemble  $F_N(c)$  étant ouvert, il existe  $F$ , union finie d'intervalles, tel que  $F \subset F_N$  et  $\lambda(F) > 1 - \eta$ .

Maintenant, puisque par hypothèse  $\alpha$  est  $g$ -normal,  $\alpha$  est aussi  $g^N$ -normal, et par suite :

$$d(\{n \in \mathbf{N} / \alpha g^{Nn} \in F(\text{mod } 1)\}) = \lambda(F).$$

Pour démontrer le lemme il suffit de considérer l'entier  $N$  et l'ensemble  $E = \{n \in \mathbf{N} / \alpha g^{Nn} \in F(\text{mod } 1)\}$ . En effet, pour tout entier  $n$  de  $E$  et pour tout  $c$  tel que  $1 \leq |c| \leq C$ , on a, modulo 1,  $\alpha c g^{nN} \in F \subset F_N(c)$  et on trouve

$$\left| \sum_{0 \leq m < N} e(\alpha c g^{Nn} g^m) \right| < \epsilon N.$$

### 3. Démonstration du théorème

Soit donc une suite d'entiers  $(a_j)_{j \in \mathbf{N}}$  avec  $\lim_{j \rightarrow +\infty} a_j = +\infty$ , et  $\|a\|$  désignant la longueur de l'écriture en base  $g$  de l'entier  $a$ , soient, pour tout  $j$  entier,  $j \geq 1$  :

$$s_j = \sum_{k=1}^j \|a_k\| \quad \text{et} \quad \alpha = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{a_j}{g^{s_j}}.$$

On suppose que  $\alpha$  est  $g$ -normal.

Soient encore  $C \in \mathbf{N}^*$ , une suite  $C_n$  d'entiers avec  $1 \leq C_n \leq C$ , et

$$\forall j \geq 1 \quad a_j^* = C_j a_j, \quad s_j^* = \sum_{k=1}^j \|a_k^*\| \quad \text{et} \quad \alpha^* = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{a_j^*}{g^{s_j^*}}.$$

Posons

$$A(M) = \sum_{0 \leq m < M} e(\alpha^* q g^m) \quad (\text{pour } M \in \mathbf{N}^*).$$

Pour démontrer que le nombre  $\alpha^*$  est  $g$ -normal, il suffit, d'après le critère de Weyl, de démontrer que, pour tout entier relatif non nul  $q$ , on a  $\lim_{M \rightarrow +\infty} 1/M |A(M)| = 0$ . Nous fixons donc un entier relatif non nul  $q$  pour faire la démonstration.

Celle-ci consiste dans un premier temps à approcher dans  $A(M)$  la somme de la tranche relative à  $a_j^*$  par celle correspondant dans la somme de Weyl de  $C_j \alpha q$ ; puis à utiliser le lemme qui permet une majoration uniforme de la presque totalité de ces sommes.

Soit pour  $M \in \mathbf{N}^*$ ,  $J(M)$  l'entier tel que :

$$s_{J(M)}^* \leq M < s_{J(M)+1}^*.$$

On a donc, posant  $s_0^* = 0$  et  $J = J(M)$  :

$$\begin{aligned} A(M) &= \sum_{1 \leq j \leq J} \sum_{s_{j-1}^* \leq m < s_j^*} e(\alpha^* q g^m) \\ &+ \sum_{s_J^* \leq m < M} e(\alpha^* q g^m). \end{aligned}$$

**Une modification multiplicative des nombres  $g$ -normaux**

Or, si  $s_{j-1}^* \leq m < s_j^*$  :

$$\alpha^* g^m = \frac{a_j^*}{g^{s_j^* - m}} + \left( \sum_{n \geq j+1} \frac{a_n^*}{g^{s_n^*}} \right) g^m \quad \text{modulo } 1.$$

Le second terme du membre de droite est majoré par  $1/g^{s_j^* - m}$ .

Par suite, utilisant le fait que :

$$\text{Pour tous } x, y \text{ réels } |e(x) - e(y)| \leq 2\pi |x - y|,$$

on a :

$$\sum_{s_{j-1}^* \leq m < s_j^*} e(\alpha^* q g^m) = \sum_{s_{j-1}^* \leq m < s_j^*} e(a_j^* q / g^{s_j^* - m}) + R_j, \quad (2)$$

où

$$|R_j| \leq 2\pi |q| \sum_{s_{j-1}^* \leq m < s_j^*} (1/g^{s_j^* - m}) < \frac{2\pi |q|}{g-1}.$$

D'où

$$A(M) = \sum_{1 \leq j \leq J} \sum_{0 < n \leq s_j^* - s_{j-1}^*} e(a_j^* q / g^n) + \sum_{s_{j+1}^* - M < n \leq s_{j+1}^* - s_j^*} e(a_{j+1}^* q / g^n) + \mathcal{O}(J),$$

en posant pour  $1 \leq j \leq J+1$  :  $n = s_j^* - m$ .

Si, pour chaque  $j$ ,  $1 \leq j \leq J$ , on somme pour  $n \in ]0, \|a_j^*\|$ , on modifiera cette somme d'une quantité dont le module est majoré par  $\|C_j a_j\| - \|a_j\|$ , c'est-à-dire, puisque  $C_j \leq C$ , par  $\log_g C$ .

On procède de même pour la dernière sommation en posant :

$$M' = (s_{J+1} - s_{J+1}^*) + M < s_{J+1}$$

et on obtient :

$$A(M) = \sum_{1 \leq j \leq J} \sum_{0 < n \leq \|a_j\|} e(a_j^* q g^{-n}) + \sum_{s_{j+1} - M' < n \leq \|a_{j+1}\|} e(a_{j+1}^* q g^{-n}) + \mathcal{O}(J) + \mathcal{O}(1),$$

étant entendu que la dernière somme est nulle si :

$$M \leq s_{J+1}^* - \|a_{J+1}\|.$$

Utilisant alors pour chaque  $j$ ,  $1 \leq j \leq J + 1$  une approximation analogue à (2), où maintenant  $\alpha^*$  est à remplacer par  $C_j \alpha$ , et  $s_j^*$  par  $s_j$ , on obtient :

$$\begin{aligned} A(M) &= \sum_{1 \leq j \leq J} \sum_{s_{j-1} \leq m < s_j} e(C_j \alpha q g^m) + \\ &+ \sum_{s_J \leq m < M} e(C_{J+1} \alpha q g^m) + \mathcal{O}(J). \end{aligned}$$

(On peut remplacer  $M'$  par  $M$  car  $M - M'$  est un  $\mathcal{O}(J)$ ). C'est ici qu'intervient le lemme.

$\epsilon > 0$  étant donné, on l'applique pour  $\eta = \epsilon$  et  $|q|C$  au lieu de  $C$ . On découpe chaque intervalle  $[s_{j-1}, s_j]$ , ainsi que  $[s_J, M[$  en tranches successives d'entiers consécutifs, chaque tranche ayant la longueur  $N$ .

Il vient, utilisant le (i) du lemme :

$$\begin{aligned} |A(M)| &< \sum_{j=1}^J \epsilon N \left[ \frac{s_j - s_{j-1}}{N} \right] + \epsilon N \left[ \frac{M - s_J}{N} \right] + 2N(J + 1) \\ &+ N \text{ card} \left\{ n \in \mathbf{N} / n \leq \frac{M}{N} \text{ et } n \notin E \right\} + \mathcal{O}(J). \end{aligned}$$

D'où, utilisant la partie (ii), si  $M$  est assez grand :

$$\begin{aligned} |A(M)| &< \epsilon s_J + \epsilon(M - s_J) + N\epsilon(M/N) + \mathcal{O}(J) \\ &= 2\epsilon M + \mathcal{O}(J). \end{aligned}$$

Or, puisque  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$  et  $C_n \neq 0$ , on a  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|a_n^*\| = +\infty$ , et par suite

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{s_{J(M)}^*}{J(M)} = \lim_{J \rightarrow +\infty} \frac{1}{M} \left( \sum_{k=1}^J \|a_k^*\| \right) = +\infty,$$

donc  $\lim_{M \rightarrow +\infty} (J(M)/M) = 0$ , ce qui permet de conclure.

*Remarque finale* : Le théorème devient faux si l'on suppose seulement que  $\alpha$  est *simplement normal*, c'est-à-dire si la fréquence asymptotique de chaque chiffre de l'écriture de  $\alpha$  en base  $g$  est égale à  $1/g$ .

Par exemple, pour  $g = 2$  et  $a_n = (4^n - 1)/3$ ,  $\alpha = {}_2 0, a_1 a_2 \cdots a_n \cdots$  est simplement normal puisque  $a_n = 10101 \cdots 01$  ( $n$  fois 01); mais, si pour tout

Une modification multiplicative des nombres  $g$ -normaux

$n : C_n = 3$ , le nombre  $\alpha^*$  correspondant n'est pas simplement normal (ici  $\alpha^* = 1$ ).

Références

- [1] CHAMPERNOWNE (D.G.).— The construction of decimals normal in the scale of ten, *J. London Math. Soc.*, t. **8**, 1933, p. 254-260.
- [2] COPELAND (A.H.) and ERDŐS (P.).— Note on normal numbers, *Bull. Amer. Math. Soc.*, t. **52**, 1946, p. 857-860.
- [3] DAVENPORT (H.) and ERDŐS (P.).— Note on normal decimals, *Canad. J. Math.*, t. **4**, 1952, p. 58-63.
- [4] KUIPERS (L.) and NIEDERREITER (H.).— *Uniform distribution of sequences*. New-York Wiley-Interscience 1974.
- [5] VOLKMANN (B.).— On modifying constructed normal numbers, *Ann. Fac. Sc. Toulouse*, t. **1**, 1979, p. 269-285.

(Manuscrit reçu le 1er décembre 1986)