ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

SLIMAN SOUHAIL

Sur les ensembles pluripolaires complets

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5e série, tome 10, nº 1 (1989), p. 27-36

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1989_5_10_1_27_0>

Annales Faculté des Sciences de Toulouse Vol. X, n°1, 1989

Sur les ensembles pluripolaires complets

SLIMAN SOUHAIL[1]

RÉSUMÉ. — Tout ensemble pluripolaire complet de type F_σ dans $\mathbf{C}^n$ est l'ensemble des points infinis d'une fonction de la classe

$$L = \{u \in PSH(\mathbf{C}^n) \ : \ u(z) \leq C_u + \mathrm{Log}\,(1 + |z|), \forall z\}.$$

ABSTRACT. — Every F_σ complete pluripolar set in $\mathbf{C}^n$ is the set of all infinite points of a function belonging to the class

$$L = \{u \in PSH(\mathbf{C}^n) \ : \ u(z) \leq C_u + \mathrm{Log}\,(1 + |z|), \forall z\}.$$

1. Introduction

Les ensembles pluripolaires dans $\mathbf{C}^n$ ont été introduits et étudiés par P. LELONG dans les années 1960. Ils ont un rôle important dans plusieurs problèmes fondamentaux de l'analyse pluricomplexe (cf. $[5]_a$ et l'appendice I de $[5]_b$). Rappelons qu'un ensemble E est dit :

– localement pluripolaire lorsque pour tout $z \in E$, il existe un voisinage ouvert connexe V de z et une fonction u plurisousharmonique sur V tels que $V \cap E \subset u^{-1}\{-\infty\}$.

– globalement pluripolaire (resp^t pluripolaire complet) lorsqu'il existe une fonction u plurisousharmonique sur $\mathbf{C}^n$ telle que $E \subset u^{-1}\{\infty\}$(resp^t $E = u^{-1}\{-\infty\}$).

(1) Laboratoire d'Analyse Complexe et Analyse Fonctionnelle, Université Paul Sabatier, 118, route de Narbonne, 31062 Toulouse cedex et Faculté des Sciences de Marrakech, Maroc.

B. Josefson [4] a montré l'identité des deux premières notions. La troisième notion (ensemble pluripolaire complet) est importante pour les ensembles fermés, en vue du prolongement des courants, fonctions et ensembles analytiques (El Mir [2]).

J. Siciak [6] a remarqué que tout ensemble pluripolaire est inclus dans l'ensemble des points infinis d'une fonction de la classe

$$L = \{u \in PSH(\mathbf{C}^n) \ : \ u(z) \leq C_u + \mathrm{Log}\,(1 + |z|),\ \forall z\}.$$

Dès lors une question naturelle se pose : tout ensemble E pluripolaire complet est-il L-pluripolaire complet, c'est-à-dire $E = u^{-1}\{-\infty\}$ avec $u \in L$? Nous donnons ici une réponse positive.

Théorème .— *Tout ensemble pluripolaire complet de type F_σ dans $\mathbf{C}^n$ est L-pluripolaire complet.*

2. Lemmes d'approximation

Soit E un ensemble pluripolaire complet de type F_σ dans $\mathbf{C}^n$, soit $(E_k)_{k\geq 1}$ une suite croissante de compacts dont la réunion est égale à E.

On note par $\overline{B}(z_0, r)$ la boule fermée de centre z_0 et de rayon r.

Lemme 2.1.— *Soit E un ensemble pluripolaire complet de type F_σ dans $\mathbf{C}^n$, soit $z_0 \in \mathbf{C}^n \backslash E$, alors il existe une suite de fonctions entières $(g_k)_{k\geq 1}$, une suite d'entiers naturels $(\ell_k)_{k\geq 1}$ avec $\ell_k \geq k^n$ telles que :*

(1) $\quad |g_k(z_0)| \geq e^{-\ell_k}$

(2) $\quad |g_k(z)| \leq e^{3\ell_k}$ *pour tout* $z \in \overline{B}(z_0, e^k)$

(3) $\quad |g_k(z)| \leq e^{-k^n \ell_k}$ *pour tout* $z \in E_k \cap \overline{B}(z_0, e^{\frac{k}{2}})$

Démonstration du lemme 2.1. :

Soit $v \in P(\mathbf{C}^n)$ telle que $E = \{z \in \mathbf{C}^n, v(z) = -\infty\}$.

Soit $z_0 \in \mathbf{C}^n \backslash E$, on a : $v(z_0) > -\infty$.

On pose :

$$M_k = \mathrm{Max}\left[\begin{matrix}\sup\limits_{z \in \overline{B}(z_0, e^k)} v(z); & |v(z_0)|\end{matrix}\right] + 1$$

$$v_k(z) = \frac{v(z) - v(z_0)}{M_k},$$

alors pour tout $k \geq 1$ on a :

$$\begin{aligned}
&v_k \in P(\mathbf{C}^n)\\
&v_k(z_0) = 0\\
&E = \{z \in \mathbf{C}^n,\ v_k(z) = -\infty\}.\\
&v_k(z) < 2 \text{ pour tout } z \in \overline{B}(z_0, e^k).
\end{aligned}$$

On considère pour tout $k \geq 1$, le domaine de Hartogs $H_k = \{(z,w) \in \mathbf{C}^{n+1};\ |w|e^{v_k(z)} < 1\}$ qui est un domaine d'holomorphie, et on construit, suivant une idée [1] une fonction holomorphe F_k sur H_k telle que :

(1) $$\limsup_{\substack{w \to 1 \\ |w|<1}} |F_k(z_0, w)| = +\infty$$

Soit $F_k(z,w) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j^k(z) w^j$ le développement de F_k en série de Hartogs, alors pour tout $k \geq 1$, on a :

(2) $$\limsup_{j\to\infty} \frac{1}{j} \operatorname{Log}|f_j^k(z)| \leq v_k(z) \text{ pour tout } z \in \mathbf{C}^n$$

D'après (1) on a :

(3) $$\limsup_{j\to\infty} \frac{1}{j} \operatorname{Log} |f_j^k(z_0)| = v_k(z_0) \text{ pour tout } k \geq 1$$

On pose :

$$\begin{aligned}
W_k &= \{z \in \mathbf{C}^n,\ v_k(z) < 2\}\\
0_k &= \{z \in \mathbf{C}^n,\ v_k(z) < -k^n - 1\},
\end{aligned}$$

alors les compacts $\overline{B}(z_0, e^k)$ et $\overline{B}(z_0, e^{\frac{k}{2}}) \cap E_k$ sont inclus dans respectivement les ouverts W_k et 0_k.

Tenant compte de (2) en appliquant le lemme classique de Hartogs [5] pour tout $k \geq 1$ à la suite de fonctions plurisous-harmoniques $\left(\frac{1}{j} \operatorname{Log} |f_j^k(z)|\right)_{j\geq 1}$ et aux compacts $\overline{B}(z_0, e^k)$, $E_k \cap (\overline{B}(z_0, e^{k/2})$ on obtient :

(4) Pour tout $k \geq 1$, il existe $j_k \geq 1$ tel que $|f_j^k(z)| \leq \exp(-k^n j)$

pour tout $j \geq j_k$, pour tout $z \in E_k \cap \overline{B}(z_0, e^{k/2})$

(5) Pour tout $k \geq 1$, il existe $q_k \geq 1$ tel que $|f_j^k(z)| \leq e^{3j}$ pour tout $j \geq q_k$, pour tout $z \in \overline{B}(z_0, e^k)$.

L'égalité (3) nous donne :

(6) Pour tout $k \geq 1$, il existe une suite strictement croissante $(n_j(k))_{j\geq 1}$ telle que :

$$|f^k_{n_j(k)}(z_0)| > e^{-n_j(k)}$$

Si on pose :

$$m_k = \max\,(j_k, q_k, k^n)$$
$$\ell^k = n_{m_k(k)}$$
$$g_k(z) = f^k_{l_k}(z) \text{ pour tout } z \in \mathbf{C}^n,$$

alors les suites $(\ell_k)_{k\geq 1}, (g_k)_{k\geq 1}$ vérifient les propriétés du lemme 2.1.

Ce qui termine la démonstration du lemme 2.1.

Maintenant, à l'aide de ces fonctions g_k, on construit des polynômes p_k, normalisés et assez petits lorsque les g_k sont petites.

LEMME FONDAMENTAL 2.2.— *Soient $(g_k)_{k\geq 1}$ une suite de fonctions entières sur $\mathbf{C}^n$, $(\ell_k)_{k\geq 1}$ une suite d'entiers vérifiant $\ell_k \geq k^n$ pour tout $k \geq 1$, telles que pour tout $k \geq 1$ on ait :*

(1) $$|g_k(0)| \geq e^{-\ell_k}$$

(2) $$|g_k(z)| \leq e^{3\ell_k} \text{ pour tout } z \in \overline{B}(0, e^k)$$

Alors il existe une suite de polynômes $(P_k)_{k\geq k_0}$ où $k_0^n \geq (2n+2)!$ de degré inférieur ou égal à $t_k = nk^{n-1}\ell_k$ telle que :

(1') $$|P_k(0)|^{1/t_k} > e^{-\frac{5}{nk^{n-1}}}$$

(2') $$|P_k(z)|^{1/t_k} \leq e^{-\frac{k}{3n}} \text{ si } z \in \overline{B}(0, e^{\frac{k}{2}}) \text{ et } |g_k(z)| \leq e^{-k^n \ell_k}$$

(3') $$1 \leq \|P_k\|_{\overline{B}(0,1)} \leq e^{t_k}$$

Démonstration du lemme 2.2.

Soit $g_k(z) = \sum\limits_{|r|\geq 0} a_r^{(k)} z^r$ le développement de Taylor de g_k en 0, d'après les inégalités de Cauchy et l'hypothèse (2) on a :

$$|a_r^{(k)}| \leq e^{3\ell_k - |r|k} \text{ pour tout } r \in \mathbf{N}^n$$

d'après l'hypothèse (1) on a : $|a_0^{(k)}| \geq e^{-\ell_k}$.

Si on pose :

$$\begin{aligned} M_k &= \{r \in \mathbf{N}^n,\, r_i < k^{n-1}\ell_k,\, i = 1, \ldots, n\} \\ G_k(z) &= \sum_{r \in M_k} a_r^{(k)} z^r \\ P_k(z) &= \frac{G_k(z)}{a^{(k)}}, \\ \text{où } a^{(k)} &= \max_{r \in M_k} |a_r^{(k)}| \end{aligned}$$

alors :

$$|P_k(0)| = \frac{|a_0^{(k)}|}{a^{(k)}} \geq e^{-4\ell_k}$$

puisque $e^{-\ell_k} \leq a^{(k)}\ e^{3\ell_k}$

le degré de P_k est inférieur ou égal à $nk^{n-1}\ell_k = t_k$. D'après les inégalités de Cauchy, on a :

$$1 = \frac{\max_{r \in M_k} |a_r^{(k)}|}{a^{(k)}} \leq \max_{|z| \leq 1} |P_k(z)| \leq \sum_{r \in M_k} 1 = \text{card } M_k$$

donc :

$$1 \leq \|P_k\|_{\overline{B}(0,1)} \leq (k^{n-1}\ell_k)^n \leq \exp(nk^{n-1}\ell_k) = e^{t_k}$$

d'où le polynome P_k vérifie (1') et (3') du lemme.

Maintenant si $|g_k(z)| \leq e^{-k^n \ell_k}$ et $|z| \leq e^{\frac{k}{2}}$

$$\begin{aligned} \text{alors } |G_k(z)| &\leq |g_k(z)| + |g_k(z) - G_k(z)| \\ &\leq e^{-k^n\ell_k} + \sum_{r \in \mathbf{N}^n \setminus M_k} e^{3\ell_k - |r|k + |r|\frac{k}{2}} \\ &\leq e^{-k^n\ell_k} + e^{3\ell_k}\left[\left(1 - e^{-\frac{k}{2}}\right)^{-n} - \left(1 - e^{-\frac{k^n\ell_k}{2}}\right)^n \left(1 - e^{-\frac{k}{2}}\right)^{-n}\right] \end{aligned}$$

$$|P_k(z)| \leq e^{\ell_k - k^n\ell_k} + e^{4\ell_k}(1 - e^{-\frac{k}{2}})^{-n}\left[1 - \left(1 - e^{-\frac{k^n\ell_k}{2}}\right)^n\right].$$

Puisque par l'inégalité de BERNOUILLI on a :

$$\left(1 - e^{-\frac{k^n\ell_k}{2}}\right)^n \geq 1 - ne^{-\frac{k^n\ell_k}{2}},$$

on obtient :

$$|P_k(z)| \leq e^{\ell_k - k^n \ell_k} + ne^{-\frac{k^n \ell_k}{2} + 4\ell_k} \left(1 - e^{-\frac{k}{2}}\right)^{-n}.$$

Si $k^n \geq (2n+2)!$ et $\ell_k \geq k^n$ alors : $(1 - e^{-\frac{k}{2}})^{-n} \leq e^n, 2n \leq e^n$

$$\begin{aligned} |P_k(z)| &\leq \frac{1}{2} e^{-\frac{k^n \ell_k}{3}} + \frac{1}{2} e^{4\ell_k - \frac{k^n \ell_k}{2} + 2n} \\ &\leq e^{-\frac{k^n \ell_k}{3}} \end{aligned}$$

Enfin $|P_k(z)| \leq e^{-\frac{k^n \ell_k}{3}} = e^{-\frac{k t_k}{3n}}$ si $|z| \leq e^{\frac{k}{2}}$ et $|g_k(z)| \leq e^{-k^n \ell_k}$ ce qui termine la démonstration du lemme 2.2.

3. Démonstration du théorème

Soit K un compact de $\mathbf{C}^n$: $K \cap E \neq \emptyset$, $(E_k)_{k \geq 1}$ suite croissante de compacts telle que $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, à partir de cette suite on construit une suite croissante de compacts qui dépend de K, dont la réunion est égale à E.

Soit $x_0 \in K$, soit $R > 1$, tels que $K \subset B(x_0, R)$, il existe $k_0 = k(K)$ défend de K, tel que pour tout $k \geq k_0$

$$E_k \cap \overline{B}(x_0, e^{\frac{k}{2}} - R) \neq \emptyset$$

on peut supposer $k_0^n \geq (2n+2)!$ et on pose $F_k = \bigcap_{z \in K} \overline{B}(z, e^{\frac{k}{2}}) \cap E_k$, alors $\bigcup_{k=k_0}^{\infty} F_k = E, F_k \subset F_{k+1}$, car $E_k \cap \overline{B}(x_0, e^{\frac{k}{2}} - R) \subset F_k$.

Lemme 3.1.— *Soit E un ensemble $\mathbf{C}^n$-pluripolaire complet, de type F_σ, K un compact de $\mathbf{C}^n \backslash E$, alors il existe une suite $(v_k)_{k \geq k_0}$ de fonctions dans la classe L, telle que :*

1°) $\quad v_k(z) \geq -\dfrac{5}{nk^{n-1}}$ pour tout $z \in K$

2°) $\quad v_k(z) \leq -\dfrac{k}{3n}$ pour tout $z \in F_k$

3°) $\quad v_k(z) \leq 1 + \max\limits_{x \in K} |x| + \operatorname{Log}(1 + |z|)$ pour tout $z \in C^n$

LEMME 3.2.— *Soit E un ensemble $\mathbf{C}^n$-pluripolaire complet, de type F_σ, K un compact de $\mathbf{C}^n \setminus E$ alors il existe une fonction $V_K \in L$ telle que :*

1°) $$E \subset \{z \in \mathbf{C}^n,\ V_k(z) = -\infty\}$$

2°) $$V_K(z) \geq -(5 + \max_{x \in K} |x|) \text{ pour tout } z \in K$$

3°) $$V_K(z) \leq 1 + \operatorname{Log}(1 + |z|) \text{ pour tout } z \in \mathbf{C}^n$$

Démonstration du lemme 3.1.

D'après les lemmes 2.1., 2.2., pour tout $z \in K$ et pour tout $k \geq k_0$, il existe un polynôme P_k (dépendant de z) de degré inférieur ou égal à $t_k = nk^{n-1}\ell_k$ tel que :

i) $$|P_k(z)|^{1/t_k} > e^{-\frac{5}{nk^{n-1}}}$$

ii) $$|P_k(x)|^{1/t_k} \leq e^{-\frac{k}{3n}} \text{ pour tout } x \in E_k \cap \overline{B}(z, e^{\frac{k}{2}})$$

iii) $$1 \leq \|P_k\|_{\overline{B}(z,1)} \leq e^{t_k}$$

La condition (i) nous donne qu'il existe un voisinage $U_k(z)$ de z tel que :

$$|P_k(x)|^{1/t_k} \geq e^{-\frac{5}{nk^{n-1}}} \text{ pour tout } x \in U_k(z)$$

Or ceci est vrai pour tout $z \in K$, donc $\bigcup_{z \in K} U_k(z) \supset K$; donc il existe une suite finie $z_1, \ldots z_{n_k}$ de points de K telle que

$$\bigcup_{i=1}^{n_k} U_k(z_i) \supset K.$$

il existe aussi une suite finie de polynômes $(P_k^{(i)})_{i=1}^{n_k}$ de degré $\leq t_k^{(i)} = nk^{n-1}\ell_k^{(i)}$, on pose :

$$v_k(z) = \max_{1 \leq i \leq n_k} \frac{1}{t_k^{(i)}} \operatorname{Log} |P_k^{(i)}(z)| \text{ pour tout } z \in \mathbf{C}^n,$$

alors $v_k \in L$; $v_k(z) \geq -\dfrac{5}{nk^{n-1}}$ pour tout $z \in K$. Maintenant, si $z \in F_k$, alors $z \in \cap_{i=1}^{n_k} \overline{B}(z_i, e^{\frac{k}{2}}) \cap E_k$, or : $\dfrac{1}{t_k^{(i)}} \operatorname{Log} |P_k^{(i)}(z)| \leq -\dfrac{k}{3n}$ pour tout $z \in E_k \cap \overline{B}(z_i, e^{\frac{k}{2}})$ pour tout $i = 1, \ldots, n_k$, d'après (ii).

D'après (iii) et l'inégalité de BERNSTEIN-WALSH ([6], page 180) $\frac{1}{t_k^{(i)}} \operatorname{Log} |P_k^{(i)}(z)| \leq \max [1, 1 + \operatorname{Log}|z - z_i|]$ pour tout $z \in \mathbf{C}^n$, pour tout $i = 1, \ldots, n_k$. Donc

$$\begin{aligned}\frac{1}{t_k^{(i)}} \operatorname{Log} |P_k^{(i)}(z)| &\leq 1 + \operatorname{Log} (1 + |z - z_i|) \\ &\leq 1 + |z_i| + \operatorname{Log} (1 + |z|).\end{aligned}$$

et :

$$v_k(z) \leq 1 + \max_{x \in K} |x| + \operatorname{Log} (1 + |z|)$$

pour tout $z \in \mathbf{C}^n$, la démonstration du lemme 3.1. est terminée.

Démonstration du lemme 3.2.

On choisit une suite $(k_s)_{s \geq 1}$, croissante qui vérifie $k_s \geq \max (k_0, 2^s)$, pour tout $s \geq 1$. Alors la fonction V_K est définie par :

$$V_K(z) = \sum_{s=1}^{\infty} 2^{-s}[v_{k_s}(z) - \max_{x \in K} |x|],$$

où $(v_{k_s})_{s \geq 1}$ est donnée par le lemme 3.1. On a : $E = \bigcup_{s=1}^{\infty} F_{k_s}$.

a) $V_K \in P(\mathbf{C}^n)$ car pour tout $R \geq 1$, V_K est psh sur $B(0, R)$ puisque

$$V_K(z) = \sum_{s=1}^{\infty} 2^{-s}[v_{k_s}(z) - \max_{x \in K} |x| - 1 - \operatorname{Log} (1 + R)] + 1 + \operatorname{Log} (1 + R),$$

qui est la limite d'une suite décroissante de fonctions psh sur $B(0, R)$, alors elle est psh sur $B(0, R)$ pour tout $R \geq 1$, dont elle est phs sur $\mathbf{C}^n$.

b) – $V_K(z) \leq 1 + \operatorname{Log} (1 + |z|)$ pour tout $z \in \mathbf{C}^n$

– Si $z \in E$ alors il existe $s_0 \geq 1$ tel que pour tout $s \geq s_0$, $z \in F_{k_s}$

$$V_K(z) \leq \sum_{s=1}^{s_0 - 1} 2^{-s} v_{k_s}(z) - \frac{1}{3n} \sum_{s=s_0}^{\infty} 1 - \max_{x \in K} |x| = -\infty; \text{ donc :}$$

$$E \subset \{z \in \mathbf{C}^n,\ V_K(z) = -\infty\}.$$

– Si $z \in K$, alors pour tout $s \geq 1$, $v_{k_s}(z) \geq \frac{5}{n k_s^{n-1}}$ donc :

$$V_K(z) \geq -\max_{x \in K} |x| - 5 \sum_{s=1}^{\infty} \frac{2^{-s}}{n k_s^{n-1}} \geq -(5 + \max_{x \in K} |x|).$$

Ce qui achève la démonstration du lemme 3.2.

Démonstration du théorème

Puisque E est pluripolaire complet, il est de type G_δ, donc son complémentaire $\mathbf{C}^n \backslash E$ est F_σ, il existe alors une suite croissante de compacts $(K_j)_{j \geq 1}$, telle que $\mathbf{C}^n \backslash E = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$.

D'après le lemme 3.2., pour tout $j \geq 1$, il existe une fonction $V_j = V_{K_j}$ dans la classe L, qui vérifie les trois propriétés de ce dernier, on pose $\rho_j = 5 + \max_{x \in K_j} |x|$

$$V(z) = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} \max \left[\frac{V_j(z)}{\rho_j}, -2^j \right] \quad \text{pour tout } z \in \mathbf{C}^n$$

Alors la fonction V est dans la classe L, on montre qu'elle est plurisousharmonique par la technique déjà utilisée pour la démonstration du lemme 3.2.

– Si $z \in E$, $V(z) = \sum_{j=1}^{\infty} -1 = -\infty$.

– Si $z \in \mathbf{C}^n \backslash E$, il existe j_0 tel que pour tout $j \geq j_0$, $z \in K_j$;

$$V(z) \geq -\sum_{j=1}^{j_0 - 1} 2^{-j} 2^j - \sum_{j=j_0}^{\infty} 2^{-j} \geq -j_0,$$

finalement : $$E = \{z \in \mathbf{C}^n, V(z) = -\infty\}$$

ce qu'il fallait démontrer.

Note. Ce travail est le résultat principal d'une thèse de 3$^{\text{ième}}$cycle soutenue à l'Université Paul Sabatier en mars 1987.

Références

[1] BREMERMANN (H.J.). — On the conjecture of equivalence of the plurisubharmonic functions and the Hartogs functions., *Math. Ann.*, 1956, p. 76-86.

[2] EL MIR (H). — Sur le prolongement des courants positifs fermés., *Acta Math.*, t. **153**, 1984, p. 1-45.

[3] HORMANDER (J.). — *An introduction to complex analysis in several variables, Van Nostrand Princeton N.J.*, 1966.

[4] JOSEFSON (B.). — On the equivalence between locally polar and globally polar sets for plurisubharmonic functions on $\mathbf{C}^n$, *Arkiv för mathematik*, t. **16(1)** 1978, p. 109-115.

[5a] LELONG (P.). — *Fonctionnelles analytiques et fonctions entières* (n variables). Cours d'été 1967, Presses univ. Montréal, 1968.

[5b] LELONG (P.), GRUMAN (L.). — *Entire functions of several complex* variables; Springer 1986.

[6] SICIAK (J.). — Extremal plurisubharmonic functions in $\mathbf{C}^n$, *Ann. Pol. Math.*, t. **39**, 1981, p. 175-211.

[7] VLADIMIROV (V.S.). — *Les fonctions de plusieurs variables complexes et leur application à la théorie quantique des champs*, Dunod Edit. Paris 1967.

(Manuscrit reçu le 22 juin 1987)