DÉSIRÉ RAZAFY ANDRIAMAMPIANINA

Le p-pliage de papier

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5e série, tome 10, nº 3 (1989), p. 401-414

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1989_5_10_3_401_0>

Le p-pliage de papier

DÉSIRÉ RAZAFY ANDRIAMAMPIANINA[(1)]

RÉSUMÉ. — Soit p un entier ≥ 2. Le p-pliage est un procédé mécanique qui engendre des suites infinies sur un alphabet fini A, appelées suites de p-pliage.

Dans cet article, nous généralisons les propriétés déjà connues pour $p = 2$. Nous décrivons aussi la relation entre les suites de p-pliage et d'autres suites arithmétiques.

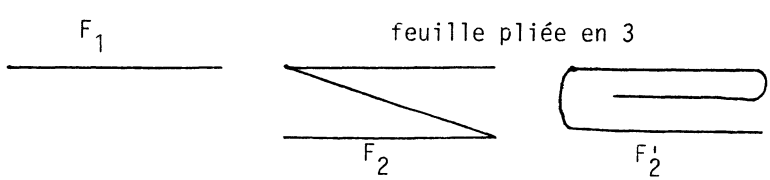
ABSTRACT. — Let p be an integer ≥ 2. The p-paperfolding is a mechanical procedure which generates infinite p-paperfolding sequences on a finite set of symbols A.

In this paper we generalize the properties previously known for $p = 2$. We also describe the connection between the p-paperfolding sequences and other arithmetic sequences.

I. Introduction

Soit p un entier ≥ 2. Le p-pliage de papier est un procédé mécanique qui engendre des suites infinies sur un alphabet fini A; ces suites sont appelées suites de p-pliage.

Commençons par décrire le 3-pliage, le 2-pliage ayant été étudié dans plusieurs papiers, notamment dans [11], [16], [17]. Soit F_1 l'état initial de la feuille de papier. On a deux façons de faire le 3-pliage suivant le dessin :

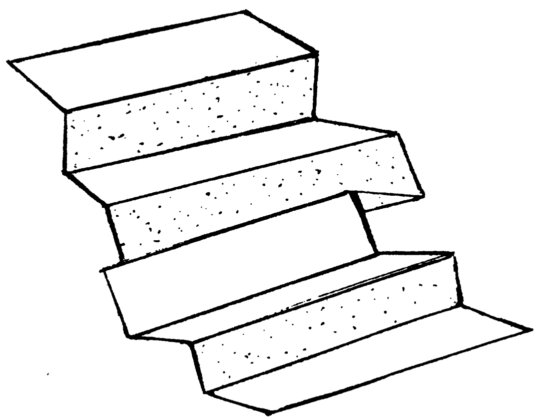


Pour fixer les idées, considérons par exemple la $1^{ère}$ façon. Soit F_2 l'état

(1) Etablissement d'Enseignement Supérieur des Sciences, Service des Mathématiques, B.P. 906 Antananarivo 101, Madagascar.

de la feuille après la première étape; F_2 a pour longueur le tiers de celle de F_1 ; on peut recommencer l'opération avec F_2, et ainsi de suite. Si on déplie la feuille, on observe des plis rentrants et sortants. Si on note 0 un pli rentrant et 1 un pli sortant, voici les observations faites si on déplie après chaque étape.

étapes	*observations*
1	10
2	10110010
3	10110010110110010010110010



feuille dépliée après 2 étapes

Si on suppose la feuille de papier indéfiniment pliable, on obtient alors une suite infinie de 0 et de 1, qui est une suite de 3-pliage.

Faisons maintenant quelques rappels.

Soit A un alphabet fini. On désigne par A^n l'ensemble des mots de longueur n construits sur A pour n entier > 0; par convention $A^0 = \{V\}$ où V désigne le mot vide. On note $A^* = \bigcup\limits_{n \geq 0} A^n$ et $A^{\mathbf{N}}$ l'ensemble des mots de longueur infinie. Soit σ une involution de A différente de l'identité :

$$\begin{aligned} \sigma : A &\to A \\ a &\longmapsto \sigma(a) = \overline{a}. \end{aligned}$$

Si $u = u(1)\, u(2) \dots u(n) \in A^n$, on pose :

$$\begin{aligned} &\overline{u} = \overline{u(1)}\,\overline{u(2)} \dots \overline{u(n)} \text{ et} \\ &u = u(n) u(n-1) \dots u(1) \text{ (transposé de } u\text{).} \end{aligned}$$

Soit $u \in A^*$; on note $|u|$ la longueur de u; le mot u_k, formé par les k premières lettres de $u (k \leq |u|)$ est appelé facteur gauche de u; par convention $u_0 = V$.

De la manière habituelle on définit une distance δ sur A^* en posant $\delta(u,u') = (\max\{k+1 \ ; \ u_k = u'_k\})^{-1}$, pour $u, u' \in A^*$. Le complété de A^* pour la topologie définie par cette distance est $A^* \cup A^{\mathbf{N}}$.

Dans cet article, l'alphabet A sera choisi à 2 ou $(2p-2)$ éléments suivant le contexte. Ainsi :

dans le paragraphe II, on établit l'automaticité d'une suite de p-pliage avec l'alphabet $\{0,1\}$; dans le paragraphe III, on étudie les propriétés analytiques avec l'alphabet $\{-1,1\}$; le paragraphe IV est consacré à l'étude de la multiplicativité et des relations avec d'autres suites, l'alphabet étant $\{1,\ldots,p-1,\ldots,2p-1\}$.

II. Le p-pliage suivant une instruction

Dans ce paragraphe, l'alphabet est $\{0,1\}$ et l'involution définie par : $\overline{0} = 1$, $\overline{1} = 0$. Autrement dit $\overline{x} = 1 - x$.

1.— Définitions générales

DÉFINITION .— *Soit p un entier ≥ 2 et $\varepsilon = \varepsilon(1)\varepsilon(2)\ldots\varepsilon(p-1)$ un élément de A^{p-1}. On définit l'opérateur p_ε sur A^* en posant : $p_\varepsilon(V) = \varepsilon$, et pour tout mot u de A^* tel que $u = u(1)u(2)\ldots u(n), P_\varepsilon(u) = \varepsilon u(1)^t\overline{\varepsilon}u(2)\ldots u(n)\varepsilon'$*

$$\text{où } \varepsilon' = \begin{cases} \varepsilon \text{ si } n \text{ est pair} \\ t_{\overline{\varepsilon}} \text{ si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

L'opérateur P_ε s'appelle le p-pliage suivant l'instruction ε.

Remarque.— Soit P_ε^n la puissance $n^{\text{ième}}$de l'opérateur P_ε. La suite $\{P_\varepsilon^n(V)\}_{n\geq 1}$ converge vers un mot infini noté $\{u(n)\}_{n\geq 1}$.

DÉFINITION .— *La suite $\{u(n)\}_{n\geq 1}$ s'appelle la suite de p-pliage suivant l'instruction ε.*

2.— Le p-pliage et les suites p-automatiques

Pour ce qui concerne les p-automates finis et les p-substitutions, ainsi que la démonstration du théorème qui va suivre, on pourra consulter [1], [8], [9].

THÉORÈME .— *Pour une suite* $\{u(n)\}_{n\geq 1}$, *à valeurs dans* $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ *les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) *Elle est p-automatique (engendrée par un p-automate fini)*

2) *Elle est l'image d'un point fixe d'une p-substitution.*

3) *Les sous-suites de la forme* $n \to u(p^k n + a), k \geq 0, 0 \leq a \leq p^k - 1$ *sont en nombre fini.*

Si p est premier, ces conditions sont équivalentes à

4) *La série formelle* $f(X) = \sum_{n>0} u(n)X^n$ *est algébrique sur le corps* $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}(X)$ *des fractions rationnelles modulo p.*

PROPOSITION .— *La suite de p-pliage* $\{u(n)\}_{n\geq 1}$ *est caractérisée par les relations :*

$$\begin{aligned} &u(2pn + r) = u(r), 1 \leq r \leq p-1, n \geq 0 \\ &u(2pn + p + r) = 1 - u(p - r) \\ &u(pn) = u(n) \end{aligned}$$

Elle est p-automatique.

Preuve.— La caractérisation de la suite est claire d'après les définitions; pour la p-automaticité, on pourra par exemple utiliser la condition (3) du théorème; les détails sont laissés au lecteur.

3.— Equation fonctionnelle.

On va donner l'équation vérifiée par la série formelle $f(X) = \sum_{n>0} u(n)X^n$.
Les relations qui définissent la suite $\{u(n)\}_{n\geq 1}$ permettent d'écrire :

$$\begin{aligned} f(X) &= \sum_{r=1}^{p-1}\left(\sum_{n\geq 0} u(2pn + r)X^{2pn+r} + \sum_{n\geq 0} u(2pn + p + r)X^{pn+p+r}\right) \\ &\quad + \sum_{n>0} u(n)X^{pn} \\ &= \sum_{r=1}^{p-1}\left(u(r)X^r \sum_{n\geq 0}(X^{2p})^n + (1 - u(p-r))X^{p+r}\sum_{n\geq 0}(X^{2p})^n)\right) \\ &\quad + \sum_{n>0} u(n)(X^p)^n \end{aligned}$$

On obtient alors l'équation (E) :

$$(1(X^{2p})f(X^p) - (1 - X^{2p})f(X) + \sum_{r=1}^{p-1}(u(r)X^r + (1 - u(p-r))X^{p+r}) = 0.$$

Remarques.—

(1) L'équation (E) permet de démontrer comme dans le cas $p = 2$ que si α est un nombre algébrique avec $0 < |\alpha| < 1$, alors le nombre $\sum_{n=1}^{\infty} u(n)\alpha^n$ est transcendant; ce résultat subsiste même si $\{u(n)\}_{n\geq 1}$ est une suite de p-pliage du paragraphe III.

(2) Dans le cas où p est premier, l'équation (E) s'écrit

$$(1 - X^{2p})f^p(X) - (1 - X^{2p})f(X) + \sum_{r=1}^{p-1}(u(r)X^r + (1 - u(p-r))X^{p+r}) = 0$$

et dont les solutions sont : $j + f(X), 0 \leq j \leq p - 1$.

III. Propriétés analytiques

L'alphabet est $\{-1, 1\}$ et l'involution définie par : $\overline{1} = -1$, $-\overline{1} = 1$.

1.— Définition et conséquences immédiates

DÉFINITION .— *Soit $\{\varepsilon^{(n)}\}_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de A^{p-1} (p entier ≥ 2).*

Une suite de p-pliage suivant l'instruction $\{\varepsilon^{(n)}\}_{n\geq 1}$ est un mot infini adhérant (au sens de la topologie définie sur $A^* \cup A^{\mathbf{N}}$) à la suite de mots $\{\prod_{j=1}^{n} p_{\varepsilon(j)}(V)\}_{n\geq 1}$, où V désigne la mot vide et

$\prod_{j=1}^{n} p_{\varepsilon(j)} = p_{\varepsilon(n)} \circ p_{\varepsilon(n-1)} \circ \ldots \circ P_{\varepsilon(1)}$, $\circ$ étant la composition des applications; une suite de p-pliage ainsi définie sera encore notée $u = \{u(n)\}_{n\geq 1}$.

Remarques.— Soit T l'opérateur de $\{-1, 1\}^{\mathbf{N}}$ dans lui-même tel que si $u = \{u(n)\}_n \quad \varepsilon\{-1, 1\}^{\mathbf{N}}$ alors $Tu = \{u(pn)_n$.

Si u est une suite de p-pliage alors :

(1) elle est caractérisée par les deux conditions

$$u(pn + r) = u(r)(-u(r) \cdot u(p - r))^n \text{ pour } 1 \leq r \leq p - 1, n \geq 0$$

et Tu est encore une suite de p – pliage.

(2) elle est déterminée par ses $(p-1)$-sous-suites $\{u(p^n r)\}_{n\geq 0}$, $1 \leq r \leq p-1$.

PROPOSITION .— *Une suite de p-pliage n'est pas ultimement périodique.*

Preuve.— Supposons que $\{u(n)\}_n$ soit ultimement périodique; sa période serait de la forme $p^a \cdot (pb + r)$ avec $a, b \in \mathbf{N}$ et r un nombre entier tel que $1 \leq r \leq p-1$. Il existe donc un entier n_0 tel que pour $n \geq n_0$, $u(n + p^a(pb+r)) = u(n)$. En particulier si n est de la forme $n = p^{a+1} \cdot m$:

$$u(p^a \cdot (p(m+b)+r)) = u(p^{a+1} \cdot m) \quad \text{pour} \quad m \geq m_0.$$

Mais la suite $n \to T^a u(n) = u(p^a \cdot n)$ est aussi une suite de p-pliage, donc :

$$u(p^a \cdot r)(-u(p^a \cdot r) \cdot u(p^a \cdot (p-r)))^{m+b} = u(p^{a+1} \cdot m).$$

On distingue deux cas :

(1) si $-u(p^a \cdot r) \cdot u(p^a \cdot (p-r)) = 1$,

la suite $m \to u(p^{a+1} \cdot m)$ est constante, d'où une contradiction (car c'est un pliage).

(2) si $-u(p^a \cdot r) \cdot u(p^a \cdot r) = -1$, alors $u(p^{a+1} \cdot m) = (-1)^{m+b} \cdot u(p^a \cdot r)$.

En considérant successivement p pair, puis p impair, on arrive à la même contradiction, ce qui achève la preuve.

2.— Analyse harmonique des suites de p-pliage

Une suite $u = \{u(n)\}_n$ appartient à l'espace de Marcinkiewicz si la quantité $\|u\| = \overline{\lim}_{N\to\infty} \frac{1}{N}(\sum_{n<N} |u(n)|^2)^{\frac{1}{2}} < +\infty$ (on l'appelle alors la norme de u).

Les coefficients de Fourier de u sont définis par :

$\widehat{u}(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n<N} u(n) \exp(-2i\pi nx)$, $x \in \mathbf{R}/\mathbf{Z}$, pourvu que la limite existe.

Le spectre de u est l'ensemble au plus dénombrable $Sp(u) = \{x \in \mathbf{R}/\mathbf{Z}\ ;\ \widehat{u}(x) \neq 0\}$.

La série de Fourier de u est

$$\sum_{x\in Sp(u)} \widehat{u}(x) \exp(2i\pi nx).$$

La suite u est presque périodique au sens de Besicovitch si

$$\|u\|^2 = \sum_{x\in Sp(u)} |\widehat{u}(x)|^2 \quad \text{(relation de Parseval).}$$

PROPOSITION .— *Si $u = \{u(n)\}_{n\geq 1}$ est une suite de p-pliage, alors :*
(1) le spectre de u est l'ensemble

$$Sp(u) = \{x \in \mathbf{R}/\mathbf{Z}\ ;\ x = \frac{a}{2\cdot p^{\nu+1}},\ a \in \mathbf{Z},\ \nu \geq 0$$

et tel que $(\frac{a}{2}, p) = 1$ si a pair et $(a,p) = 1$ si a impair$\}$

(2) u est presque-périodique au sens de Besicovitch.

Preuve.— : On pose :

$$\begin{aligned}
S_N^u(x) &= \sum_{n\leq N} u(n)\exp(-2i\pi nx)\\
&= \sum_{r=1}^{p-1}\sum_{n\leq N/p} u(pn+r)\exp(-2i\pi(pn+r)x)\\
&+ \sum_{n\leq N/p} u(pn)\exp(-2i\pi pnx) + 0(1)\\
&= \sum_{r=1}^{p-1} u(r) \sum_{n\leq N/p} (-u(r)\cdot u(p-r))^n \exp(-2i\pi(pn+r)x)\\
&+ \sum_{n\leq N/p} Tu(n)\exp(-2i\pi pnx) + 0(1)
\end{aligned}$$

Pour tout $\ell \in \mathbf{N}$, on pose :

$$\begin{aligned}
&I_\ell = \{r; 1 \leq r \leq p-1 \text{ et } u(p^\ell\cdot r)\cdot u(p^\ell\cdot(p-r)) = -1\}\\
\text{et}\quad &I_\ell^c = \{r; 1 \leq r \leq p-1 \text{ et } u(p^\ell\cdot r)\cdot u((p-r)) = 1\}.
\end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned}
S_N^u(x) = &\left(\sum_{r\in I_0} u(r)\exp(-2i\pi rx)\right)\left(\sum_{n\leq N/p} \exp(-2i\pi pnx)\right)\\
&+\left(\sum_{r\in I_0^c} u(r)\exp(-2i\pi rx)\right)\left(\sum_{n\leq N/p} (-1)^n\exp(-2i\pi pnx)\right)\\
&+S_{N/p}^{Tu}(px) + 0(1)
\end{aligned}$$

Soit χ et χ' définies par :

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } px \in \mathbf{Z} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et } \chi'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } px + \frac{1}{2} \in \mathbf{Z} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors :

$$\begin{aligned} S_N^u(x) = & \left(\sum_{r \in I_0} u(r) \exp(-2i\pi r x) \right) \frac{N}{p} \chi(x) \\ & + \left(\sum_{r \in I_0^c} u(r) \exp(-2i\pi r x) \right) \frac{N}{p} \chi'(x) \\ & + S_{N/p}^{Tu}(px) + 0(1) \end{aligned}$$

Après k itérations, on obtient :

$$\begin{aligned} S_N^u(x) = & \sum_{\ell=0}^{k-1} \left(\sum_{r \in I_\ell} u(p^\ell \cdot r) \exp(-2i\pi r p^\ell \cdot x) \frac{N}{p^{\ell+1}} \chi(p^\ell \cdot x) \right. \\ & \left. + \sum_{r \in I_\ell^c} u(p^\ell \cdot r) \exp(-2i\pi r p^\ell \cdot x) \frac{N}{p^{\ell+1}} \chi'(p^\ell \cdot x) \right) \\ & + S_{N/p^k}^{T_u^k}(p^k \cdot x) + 0(k). \end{aligned}$$

On choisit $k = [\log N]$ (partie entière de $\log N$); maintenant si on divise par N et qu'ensuite on fasse tendre N vers l'infini, on obtient :

$$\begin{aligned} \widehat{u}(x) = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} S_N^u(x) = & \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\sum_{r \in I_\ell} u(p^\ell \cdot r) \exp(-2i\pi r p^\ell \cdot x) \frac{\chi(p^\ell \cdot x)}{p^{\ell+1}} \right. \\ & \left. + \sum_{r \in I_\ell^c} u(p^\ell \cdot r) \exp(-2i\pi r p^\ell \cdot x) \frac{\chi'(p^\ell \cdot x)}{p^{\ell+1}} \right) \end{aligned}$$

Or : $\chi(p^\ell \cdot x) = \begin{cases} 1 & \text{si } p^{\ell+1} \cdot x = a \Leftrightarrow x = \dfrac{a}{p^{\ell+1}} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et $\chi'(p^\ell \cdot x) = \begin{cases} 1 & \text{si } p^{\ell+1} \cdot x + \dfrac{1}{2} = a \Leftrightarrow x = \dfrac{2a-1}{2 \cdot p^{\ell+1}} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$$\text{donc} \quad \widehat{u}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{p^{\nu+1}} \displaystyle\sum_{r \in I_\nu} u(p^\nu \cdot r) \exp(-2i\pi r \frac{a}{p}) \\ \text{pour } x = \dfrac{a}{p^{\nu+1}} \text{ et } (a,p) = 1 \\ \dfrac{1}{p^{\nu+1}} \displaystyle\sum_{r \in I_\nu^c} u(p^\nu \cdot r) \exp\left(-2i\pi r \left(\frac{2a-1}{2p}\right)\right) \\ \text{pour } x = \dfrac{2a-1}{2 \cdot p^{\nu+1}}, (2a \underset{\nu=0}{-} 1, p) = 1 \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Ceci achève la preuve de la $1^{\text{ère}}$ partie de la proposition.

Maintenant, d'une part $\|u\|^2 = \lim\limits_{N\to\infty} \dfrac{1}{N} \sum\limits_{n\le N} |u(n)|^2 = 1;$

d'autre part

$$\sum_{x\in Sp(u)} |\widehat{u}(x)|^2 = \sum_{\{x;x=\frac{a}{p^{\nu+1}}\}} |\widehat{u}(x)|^2 + \sum_{\{x;x=\frac{2a-1}{2\cdot p^{\nu+1}}\}} |\widehat{u}(x)|^2$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{p^{2\nu+2}} \left(\sum_{a=0}^{p^{\nu+1}-1} \left(|\sum_{r\in I_\nu} u(p^\nu\cdot r)\cdot \exp(-2i\pi r\frac{a}{p})|^2 \right.\right.$$

$$\left.\left. + |\sum_{r\in I_\nu^c} u(p^\nu\cdot r)\exp\left(-2i\pi r\left(\frac{2a-1}{2p}\right)\right)|^2\right)\right)$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{p^{2\nu+2}} \left(\sum_{r,s\in I_\nu} u(p^\nu\cdot r)\cdot u(p^\nu\cdot s) \sum_{a=0}^{p^{\nu+1}-1} \right.$$

$$\exp(-2i\pi(r-s)\frac{a}{p})$$

$$+ \sum_{r,s\in I_\nu^c} u(p^\nu\cdot r)u(p^\nu\cdot s) \sum_{a=0}^{p^{\nu+1}-1}$$

$$\left.\exp(-2i\pi(r-s)\left(\frac{2a-1}{2p}\right))\right)$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{p^{2\nu+2}} \left(\sum_{r\in I_\nu} (u(p^\nu\cdot r))^2 + \sum_{r\in I_\nu^c} (u(p^\nu\cdot r))^2 \right)$$

$$\cdot p^{\nu+1} = 1,$$

ce qui achève la preuve de la proposition.

PROPOSITION .— *Il existe un réarrangement de la série de Fourier de u qui converge simplement vers u.*

Preuve.— on a :

$$\sum_{x\in Sp(u)} \widehat{u}(x)\exp(2i\pi nx) = \sum_{\{x;x=\frac{a}{p^{\nu+1}}\}} \widehat{u}(x)\exp 2i\pi nx)$$

$$+ \sum_{\{x;x=\frac{(2a-1)}{2\cdot p^{\nu+1}}\}} \widehat{u}(x)\exp(2i\pi nx)$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{p^{\nu+1}} \left(\sum_{a=0}^{p^{\nu+1}-1} \left(\sum_{r \in I_\nu} u(p^\nu \cdot r) \exp(-2i\pi r \frac{a}{p}) \right.\right.$$

$$\exp(2i\pi n \frac{a}{p^{\nu+1}})$$

$$+ \sum_{r \in I_\nu^c} u(p^\nu \cdot r) \exp(-2i\pi r \left(\frac{2a-1}{2p}\right))$$

$$\left.\left.\exp(2i\pi n \left(\frac{2a-1}{2 \cdot p^{\nu+1}}\right))\right)\right)$$

Considérons le réarrangement :

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\sum_{r \in I_\nu} u(p^\nu r) \left(\frac{1}{p^{\nu+1}} \sum_{a=0}^{p^{\nu+1}-1} \exp(-2i\pi \left(\frac{r}{p} - \frac{n}{p^{\nu+1}}\right) a) \right)\right)$$

$$+ \exp(-i\pi \frac{n}{p^{\nu+1}}) \sum_{r \in I_\nu^c} u(p^\nu \cdot r) \exp(i\pi \frac{r}{p}) \left(\sum_{a=0}^{p^{\nu+1}-1} \exp(-2i\pi(\frac{r}{p} - \frac{n}{p^{\nu+1}})) \right) .$$

Or $\displaystyle \frac{1}{p^{\nu+1}} \sum_{a=0}^{p^{\nu+1}-1} \exp(-2i\pi(\frac{r}{p} - \frac{n}{p^{\nu+1}})a) = \begin{cases} 1 & \text{si } \frac{r}{p} - \frac{n}{p^{\nu+1}} \in \mathbf{Z} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Mais $\frac{r}{p} - \frac{n}{p^{\nu+1}} \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow \frac{r}{p} - \frac{n}{p^{\nu+1}} = b \Leftrightarrow r = \frac{n}{p^\nu} + b \cdot p$ et cela correspond à la valeur $\nu = \nu_p(n)$ (le nombre de fois où p divise n), à une seule valeur de r et une seule valeur de b.

Donc si

(1) $$r \in I_{\nu_p}(n)$$

la valeur du réarrangement est

$$u(p^{\nu_p(n)} \cdot r) = u(p^{\nu_p(n)} \cdot \left(\frac{n}{p^{\nu_p(n)}} + b \cdot p\right)) = u(n + b \cdot p^{\nu_p(n)+1}) = u(n),$$

(2) $$\text{si } r \in I^c_{\nu_p(n)}$$

elle est égale à

$$\exp(-i\pi \frac{n}{p^{\nu_p}(n)+1}) \cdot u(p^{\nu_p(n)} \cdot r) \exp(i\pi \frac{r}{p}) = (-1)^b \cdot u(n + b \cdot p^{\nu_p(n)+1}) =$$

$u(n)$,

ce qui achève la preuve.

IV Relations avec certaines suites

Dans ce paragraphe on revient au p-pliage à une seule instruction ε. On considère l'alphabet $A = \{1, 2, \ldots, p-1, p+1, \ldots, 2p-1\}$ considéré comme sous-ensemble du groupe additif $(\frac{\mathbf{Z}}{2p\mathbf{Z}},+)$. L'explication de cette nouvelle introduction est simple : si on plie une feuille de papier en "p", et si on la déplie, on observe exactement $p-1$ plis. On les numérote dans l'ordre 1 2 $\ldots(p-1)$, sans se soucier qu'ils soient rentrants ou sortants. L'instruction est alors d'une manière naturelle le mot $\varepsilon = 1,2\ldots(p-1)$.

On désigne toujours par $u = \{u(n)\}_{n\geq 1}$ la suite de p-pliage. Les expressions suivantes sont alors claires.

$u(2pn+r) = r$ pour $r = 1,2,\ldots,p-1,p+1,\ldots,2p-1$ et $n \geq 0$

$u(pn) = u(n)$ por $n \geq 1$.

1.— Multiplicativité

PROPOSITION .— *Soit $n \geq 1$ et $\nu_p(n)$ le nombre de fois où p divise n; alors*

$$u(n) = \frac{n}{p^{\nu_p(n)}}(\text{mod} 2p) \tag{1}$$

(2) Si p est premier, la suite u est complètement multiplicative :

$$u(m\cdot n) = u(m)\cdot u(n), \text{ pour } m \text{ et } n \text{ entiers } \geq 1.$$

Preuve.— Si on pose $u'(n) = \frac{n}{p^{\nu_p(n)}}$ (mod $2p$), alors :

$$\begin{aligned} u'(2pn+r) &= \frac{2pn+r}{p^{\nu_p(2pn+r)}}(\text{ mod } 2p) \text{ pour } r = 1,\ldots,p-1,p+1,\ldots 2p-1 \\ &= 2pn + r(\text{ mod } 2p) \\ &= r. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et } u'(pn) \quad & \frac{pn}{p^{\nu_p(pn)}} \text{ (mod } 2p) \\ & \frac{n}{p^{\nu_p}(n)} \text{ (mod } 2p) = u'(n) \end{aligned}$$

Les deux suites u et u' vérifient les mêmes relations de récurrence donc elles sont égales.

Pour montrer (2), il suffit de remarquer que si p est premier $\nu_p(m\cdot n) = \nu_p(m) + \nu_p(n)$.

2.— Suites de p-pliage et suite de Kakutani

On pose $\omega_p(n) = \dfrac{n}{p^{\nu_p(n)}} \pmod p$, $r \geq 1$, et soit φ l'application $\{1,2,\ldots,p-1,p+1,\ldots,2p-1\} \to \{1,2,\ldots,p-1\}$ telle que $\varphi(j) = \varphi(2p-j) = j$ pour $1 \leq j \leq p-1$.

PROPOSITION .— *La suite $\{\omega_p(n)\}_{n\geq 1}$ est l'image de la suite de p-pliage $\{u(n)\}_{n\geq 1}$ par l'application φ.*

Preuve.— Il suffit de remarquer que la suite $\{\omega_p(n)\}_{n\geq 1}$ est définie par
$\omega_p(pn+r) = r$ pour $r = 1,\ldots,p-1, n \geq 0$
et $\omega_p(pn) = \omega_p(n)$ pour $n \geq 1$.

Remarque.— Dans [12], Kakutani définit une suite λ en posant $\lambda(n) = \omega_p(n!)$.

Ce qui précède permet d'écrire que $\lambda(n) = \psi(u(n!))$ pour $n \geq 0$.

3.— Suite de p-pliage et transduction

Contentons nous d'énoncer la proposition suivante; une preuve détaillée se trouve dans [2]; en ce qui concerne la notion de transduction on peut aussi consulter [6].

PROPOSITION .— *Soit X un alphabet fini; on suppose que sur X est définie une loi associative notée $\cdot$; soit $x = \{x(n)\}$ une suite sur X. On définit la suite $y = \{y(n)\}$ par :*

$$\begin{aligned}
&y(1) = x(0)\\
&y(2) = x(1)\cdot x(0)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&y(n) = x(n-1)\ldots x(0)
\end{aligned}$$

Si la suite x est q-automatique, la suite y est q-automatique.

Les exemples suivants donnent une idée sur la nature spectrale de la suite y en terme de la suite x.

Exemple.— 1 Dans [10], les auteurs introduisent la suite ξ de la façon suivante : soit p un nombre premier ≥ 3; soit L une fonction logarithme de $((\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^*, x)$ sur $(\mathbf{Z}/(p-1)\mathbf{Z}, +)$; la suite ξ est définie par

$\xi(n) = \exp\left(\dfrac{2i\pi}{p-1} L\omega_p(n!)\right)$ pour tout n; ils montrent que ξ est pseudo-aléatoire à mesure spectrale singulière.

D'autre part, si u est une suite de p-pliage, une application directe de la proposition précédente montre que la suite $n \to u(n!)$ est p-automatique.

La suite ξ est l'image de u par transduction.

Exemple. — 2 [11]

Dans cet exemple on considère le 2-pliage alterné sur l'alphabet $\{0,1\}$; on obtient exactement deux suites de pliage automatiques, l'une d'elles est par exemple :

$$0110001101110010011000100111 0\ldots$$

On pose $S(0) = 0$ et $S(n) = S(n-1) + u(n)$, la loi $+$ étant définie par la table suivante :

+	0	1	2	3
0	3	1	2	3
1	0	2	3	0
2	1	3	0	1
3	2	0	1	2

Les premiers termes de la suite 2-automatique S sont :

$$030103230301210103010323212303\ldots$$

Si on projette par ψ définie par $\psi(0) = \psi(3) = 0$, $\psi(1) = \psi(2) = 1$, on obtient la suite de Rubin-Shapiro sur l'alphabet $\{0,1\}$:

$$000100100001110100010010111000\ldots$$

Cette suite est pseudo-aléatoire et sa mesure spectrale est la mesure de Lebesgue [18].

BIBLIOGRAPHIE

[1] ALLOUCHE (J.P.). — *Automates finis en théorie des nombres*, Expo. Math. **5**, 1987, p. 239-266.

[2] ALLOUCHE (J.P.) and MENDES FRANCE (M.). — Quasicrystal Ising Chanin and Automata Theory, *Journal of Stat. Physics*, vol. **42**, n°**5/6**, 1986.

[3] ALLOUCHE (J.P.) and MENDES FRANCE (M.). — Finite Automata and zero temperature quasicrystal Ising Chain, *Journal de Physique*, Colloque **3**, supplément au n°**7**, tome **47**, Juillet 1986.

[4] BASS (J.).— Suites uniformément denses, moyennes trigonométriques, fonctions pseudo-aléatoires, *Bull. Soc. Math. France*, t. **87**, 1959, p. 1-69.

[5] BASS (J.).— Espaces de Besicovitch, fonctions presque-périodiques, fonctions pseudo-aléatoires, *Bull. Soc. Math. France*, **91**, 1963, p. 39 à 61.

[6] BERSTEL (J.).— *Transductions and context-free languages*, B.G. Teubner Stuttgart, 1979.

[7] BERTRANDIAS (J.P.).— Espaces des fonctions bornées et continues en moyenne asymptotique d'ordre p, *Bull. Soc. Math. France*, Mémoire **5**, 1966, p. 3-106.

[8] CHRISTOL (G.), KAMAE (T.), MENDES FRANCE (M.), RAUZY (G.).— Suites algébriques automates et substitutions, *Bull. Soc. Math. France*, **108**, 1980, p. 401-419.

[9] COBHAM (A.).— Uniform tag sequences, *Mathem. Syst. Theory* **6**, 1972, p. 164-192.

[10] COQUET (J.), KAMAE (T.), MENDES FRANCE (M.).— Sur la mesure spectrale de certaines suites arithmétiques, *Bull. Soc. Math. France*, **105**, 1977, p. 369-384.

[11] DAVIS (C.) and KNUTH (D.).— *Number representations and dragon curves I, II*, J. recreational Math., vol. **3**, 1970, p. 61-81 et 133-149.

[12] DEKKING (F.M.), MENDES FRANCE (M.) and VAN DER POORTEN (A.J.).— Folds! *Math. Intelligencer*, **4, 3**, 1982, p. 130-138, **4, 4**, 1982, p. 173-181 et 190-195.

[13] KAKUTANI (S.).— Ergodic theory of shift transformations, "*Proceeding of the 5th Berkeley symposium on mathematical statistics probability [1965-Berkeley]*", vol. **2**, part. **2**, p. 405-414, Berkeley, University of California Press, 1967.

[14] KAMAE (T.).— *Spectral properties of automaton - generating sequences*, non publié.

[15] LOXTON (J.H.) and VAN DER POORTEN (A.J.).— Arithmetic properties of certain functions in several variables III, *Bull. Austr. Math. Soc.* **16**, 1977, p. 15-47.

[16] MENDES FRANCE (M.).— "Principe de la symétrie perturbée", *Séminaire de Théorie des nombres*, Paris 1979-80, p. 77-98, (Séminaire Delange - Pisot - Poitou).

[17] MENDES FRANCE (M.) and VAN DER POORTEN (A.J.).— Arithmetic and analytic properties of paper-folding sequences (dedicated to Mahler), *Bull. Austr. Math. Soc.* **24**, 1981, p. 123-131.

[18] MENDES FRANCE (M.) et TENENBAUM (G.).— Dimension des courbes planes, papiers pliés et suites de Rudin-Shapiro, *Bull. Soc. Math. France* **109**, 1981, p. 207-217.

[19] QUEFFELEC (M.).— Une nouvelle propriété des suites de Rudin-Shapiro, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble **37**, **2**, 1987, p. 115-138.

(Manuscrit reçu le 19 septembre 1988)

ptihp doc -x=0.5in -y=0.6in -R -m=1200 -ou=prn -s=14;