

ABDELBAKI BOUTABAA

Sur les courbes holomorphes p -adiques

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6^e série, tome 5, n° 1
(1996), p. 29-52

http://www.numdam.org/item?id=AFST_1996_6_5_1_29_0

© Université Paul Sabatier, 1996, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Sur les courbes holomorphes p -adiques^(*)

ABDELBAKI BOUTABAA⁽¹⁾

RÉSUMÉ. — Ce travail consiste à étendre la théorie de Nevanlinna aux courbes holomorphes p -adiques. Les résultats obtenus sont appliqués à l'étude des solutions entières de l'équation fonctionnelle $\sum_{i=1}^n f_i = 1$, ainsi qu'au problème d'unicité des courbes holomorphes dans l'espace projectif p -adique.

ABSTRACT. — The purpose of this work is to extend Nevanlinna Theory to p -adic holomorphic curves. As applications we will study p -adic entire solutions of the functional equation $\sum_{i=1}^n f_i = 1$. We will finally investigate the uniqueness problem of holomorphic curves in the p -adic projective space.

AMS Classification : Primary 12H25; secondary 46S12.

0. Introduction

Dans [1] et [2], on étudie les fonctions méromorphes p -adiques $f : \mathbb{C}_p \rightarrow \mathbb{P}^1$. Une " théorie de Nevanlinna p -adique " est établie pour de telles fonctions et les résultats obtenus sont appliqués à l'étude d'équations différentielles p -adiques.

Le présent travail qui s'inspire largement d'un article de H. Cartan [3], consiste à généraliser la théorie de Nevanlinna aux fonctions méromorphes $f : \mathbb{C}_p \rightarrow \mathbb{P}^n$, $n \geq 1$. Ainsi, on obtient une extension aux courbes holomorphes notamment des théorèmes I.3, I.8 et I.9 de [1]. Nous donnons enfin deux applications de ces résultats :

(*) Reçu le 2 novembre 1993

(1) Université Blaise-Pascal, Laboratoire de Mathématiques Pures, Complexe Scientifique de Cézeaux, F-63177 Aubière Cedex (France); boutadaa@ucfma.univ-bpclermont.fr

- étude des solutions entières de l'équation $\sum_{i=1}^n f_i = 1$;
- problème d'unicité des courbes holomorphes dans l'espace projectif p -adique.

Les notations utilisées, et que nous allons rappeler brièvement, sont celles de [1] et [2]. Ainsi, on note $\mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$ (resp. $\mathcal{M}(\mathbb{C}_p)$) l'espace des fonctions entières (resp. méromorphes) dans tout le corps \mathbb{C}_p , complété de la clôture algébrique de \mathbb{Q}_p .

Pour $\phi \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_p)$, $\phi \neq 0$ et pour $\mu > -\infty$, on note

$$z(\mu, \phi) = \sum_{v(x)=\mu} \max(0, \text{ord}_x \phi) \quad \text{et} \quad p(\mu, \phi) = - \sum_{v(x)=\mu} \min(0, \text{ord}_x \phi),$$

où v est la valuation du corps \mathbb{C}_p . C'est-à-dire que $z(\mu, \phi)$ (resp. $p(\mu, \phi)$) est le nombre de zéros (resp. pôles) de ϕ sur le cercle $v(x) = \mu$, chaque zéro (resp. pôle) étant compté autant de fois que son ordre de multiplicité l'indique.

PROPOSITION 0.1. — *Formule de Jensen.* Pour $\phi \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_p)$ telle que $\phi(0) \neq 0$ et $\phi(0) \neq \infty$ et pour $\lambda > -\infty$, on a

$$v(\phi(0)) = v(\phi, \lambda) + \sum_{\mu \geq \lambda} [z(\mu, \phi) - p(\mu, \phi)](\mu - \lambda), \quad (0.1)$$

où $v(\phi, \lambda)$ est la fonction de valuation de la fonction ϕ .

Pour ϕ et λ comme précédemment, posons

$$m(\lambda, \phi) = \max \left(v \left(\frac{1}{\phi}, \lambda \right), 0 \right) \quad (0.2)$$

$$N(\lambda, \phi) = \sum_{\mu \geq \lambda} p(\mu, \phi)(\mu - \lambda) \quad (0.3)$$

$$T(\lambda, \phi) = m(\lambda, \phi) + N(\lambda, \phi). \quad (0.4)$$

La fonction $(\lambda \mapsto T(\lambda, \phi))$ est appelée *fonction caractéristique* de ϕ .

Avec les notations précédentes, la formule (0.1) nous donne le résultat suivant.

THÉORÈME 0.2. — *Premier théorème fondamental de Nevanlinna. Soient $\phi \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_p)$ et $a \in \mathbb{C}_p$ tels que $\phi(0) \neq 0$, $\phi(0) \neq a$ et $\phi(0) \neq \infty$. On a*

$$T\left(\lambda, \frac{1}{\phi - a}\right) = T(\lambda, \phi) + O(1), \quad \lambda \rightarrow -\infty. \quad (0.5)$$

On montre aussi les résultats suivants.

PROPOSITION 0.3. — *Soit $\phi \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_p)$ telle que $\phi(0) \neq 0$ et $\phi(0) \neq \infty$. On a les équivalences suivantes :*

$$\phi \text{ est une constante} \iff T(\lambda, \phi) = o(1) \quad \lambda = -\infty, \quad (0.6a)$$

$$\phi(x) \in \mathbb{C}_p(x) \iff T(\lambda, \phi) = O(1), \quad \lambda = -\infty. \quad (0.6b)$$

THÉORÈME 0.4. — *Deuxième théorème fondamental de Nevanlinna. Soit $\phi \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_p)$, ϕ non constante. Soient a_1, \dots, a_q des éléments distincts de \mathbb{C}_p et $\delta \in \mathbb{R}$ tels que $v(a_i - a_j) \leq \delta$ pour $1 \leq i \neq j \leq q$. On suppose que $\phi(0) \neq 0$, $\phi(0) \neq \infty$ et $\phi(0) \neq a$ pour tout i . On a :*

$$\begin{aligned} m(\lambda, \phi) + \sum_{i=1}^q m\left(\lambda, \frac{1}{\phi - a_i}\right) + \\ + \sum_{i=1}^q \left(N\left(\lambda, \frac{1}{\phi - a_i}\right) - N_1\left(\lambda, \frac{1}{\phi - a_i}\right) \right) + (N(\lambda, \phi) - N_1(\lambda, \phi)) \leq \\ \leq 2T(\lambda, \phi) + S(\lambda, \phi), \end{aligned} \quad (0.7)$$

où $N_1(\lambda, \phi)$ est le nombre obtenu de $N(\lambda, \phi)$ en comptant chaque pôle une seule fois quel que soit son ordre de multiplicité et $S(\lambda, \phi) = O(1)$ quand $\lambda \rightarrow -\infty$.

Les notations suivantes nous sont nécessaires pour énoncer une conséquence de ce théorème.

Soit $\phi \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_p)$, ϕ non constante telle que $\phi(0) \neq 0$ et $\phi(0) \neq \infty$. On pose

$$\delta(\phi, \infty) = 1 - \liminf_{\lambda \rightarrow -\infty} \frac{N(\lambda, \phi)}{T(\lambda, \phi)}$$

et

$$\delta_1(\phi, \infty) = 1 - \liminf_{\lambda \rightarrow -\infty} \frac{N_1(\lambda, \phi)}{T(\lambda, \phi)}.$$

Pour tout $a \in \mathbb{C}_p$ tel que $\phi(0) \neq a$, on pose :

$$\delta(\phi, a) = 1 - \liminf_{\lambda \rightarrow -\infty} \frac{N(\lambda, 1/(\phi - a))}{T(\lambda, \phi)}$$

et

$$\delta_1(\phi, a) = 1 - \liminf_{\lambda \rightarrow -\infty} \frac{N_1(\lambda, 1/(\phi - a))}{T(\lambda, \phi)}.$$

Il est clair que, pour tout $a \in \mathbb{C}_p \cup \{\infty\}$, on a $0 \leq \delta(\phi, a) \leq \delta_1(\phi, a) \leq 1$.

COROLLAIRE 0.5. — Soit $\phi \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_p)$, ϕ non constante telle que $\phi(0) \neq 0$ et $\phi(0) \neq \infty$. On a

$$\sum_{\phi \in \mathbb{C}_p \cup \{\infty\}} \delta(\phi, a) \leq \sum_{\phi \in \mathbb{C}_p \cup \{\infty\}} \delta_1(\phi, a) \leq 2,$$

la sommation portant sur les a tels que $\phi(0) \neq a$.

Pour la démonstration voir [1, théorème I.8] ou [2, théorèmes 2.9 et 2.10].

1. Fonction T et premier théorème fondamental

Pour tout $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{C}_p^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$; on pose

$$L(x_1, \dots, x_{n+1}) = \{\alpha(x_1, \dots, x_{n+1}) \mid \alpha \in \mathbb{C}_p\}.$$

On note alors :

$$\mathbb{P}^n = \mathbb{P}^n(\mathbb{C}_p) \left\{ L(x_1, \dots, x_{n+1}) \mid (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{C}_p^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\} \right\},$$

et $\pi : \mathbb{C}_p^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\} \rightarrow \mathbb{P}^n$ la fonction définie par :

$$\pi((x_1, \dots, x_{n+1})) = L(x_1, \dots, x_{n+1}).$$

DÉFINITION 1.1. — On dit qu'une application $f : \mathbb{C}_p \rightarrow \mathbb{P}^n$ admet une représentation s'il existe une application $\tilde{f} : \mathbb{C}_p \rightarrow \mathbb{C}_p^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ telle que $f = \pi \circ \tilde{f}$.

Ceci signifie l'existence d'application f_1, \dots, f_{n+1} de \mathbb{C}_p dans \mathbb{C}_p ne s'annulant simultanément en aucun point de \mathbb{C}_p telles que

$$\tilde{f}(x) = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_{n+1} \end{pmatrix} (x) = (f_1(x), \dots, f_{n+1}(x)).$$

PROPOSITION 1.2. — Soient

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_{n+1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_{n+1} \end{pmatrix}$$

deux représentations d'une application $f : \mathbb{C}_p \rightarrow \mathbb{P}^n$. Alors il existe une application $h : \mathbb{C}_p \rightarrow \mathbb{C}_p^*$ telle que $g_i(x) = h(x)f_i(x)$ pour tout $x \in \mathbb{C}_p$ et tout $i = 1, \dots, n+1$.

Démonstration. — Pour un $x \in \mathbb{C}_p$,

$$a(x) = (f_1(x), \dots, f_{n+1}(x)) \quad \text{et} \quad b(x) = (g_1(x), \dots, g_{n+1}(x))$$

sont deux éléments de $\mathbb{C}_p^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ tels que $\pi(a(x)) = \pi(b(x))$. Donc, il existe un unique $\alpha_x \in \mathbb{C}_p^*$ tel que $g_i(x) = \alpha_x f_i(x)$ pour $i = 1, \dots, n+1$. La fonction h est alors définie par $h(x) = \alpha_x$ pour tout $x \in \mathbb{C}_p$.

DÉFINITION 1.3. — Une représentation

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_{n+1} \end{pmatrix}$$

d'une fonction $f : \mathbb{C}_p \rightarrow \mathbb{P}^n$ est dite holomorphe si les fonctions $f_i : \mathbb{C}_p \rightarrow \mathbb{C}_p$ sont holomorphes. Une fonction $f : \mathbb{C}_p \rightarrow \mathbb{P}^n$ est dite holomorphe si elle admet une représentation holomorphe.

COROLLAIRE 1.4. — Soient $f : \mathbb{C}_p \rightarrow \mathbb{P}^n$ une fonction holomorphe et

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_{n+1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_{n+1} \end{pmatrix}$$

deux représentations holomorphes de f . Alors il existe une constante non nulle k telle que $g_i(x) = kf_i(x)$ pour tout $x \in \mathbb{C}_p$ et tout $i = 1, \dots, n+1$.

Démonstration. — La proposition 1.2 assure l'existence d'une application $h : \mathbb{C}_p \rightarrow \mathbb{C}_p^*$ telle que $g_i(x) = h(x)f_i(x)$ et les conditions du corollaire entraînent que h est entière. Or une fonction entière qui n'a pas de zéro n'est autre qu'une constante non nulle.

DÉFINITION 1.5. — Soient $f : \mathbb{C}_p \rightarrow \mathbb{P}^n$ une fonction holomorphe et

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_{n+1} \end{pmatrix}$$

une représentation holomorphe de f . On suppose $f_i(0) \neq 0$ pour tout $i = 1, \dots, n+1$. On note alors pour $\lambda > -\infty$:

$$T(\lambda, f) = \min_{1 \leq i \leq n+1} \{v(f_i(0))\} - \min_{1 \leq i \leq n+1} \{v(f_i, \lambda)\}. \quad (1.1)$$

Remarque 1.6. — Le corollaire 1.4 montre que la fonction T est bien définie : elle ne dépend pas de la représentation

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_{n+1} \end{pmatrix}.$$

DÉFINITION 1.7. — Soient $f : \mathbb{C}_p \rightarrow \mathbb{P}^n$ une fonction holomorphe et

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_{n+1} \end{pmatrix}$$

une représentation holomorphe de f . Si $A \in \text{GL}_{n+1}(\mathbb{C}_p)$, on note Af la fonction holomorphe de \mathbb{C}_p dans \mathbb{P}^n dont une représentation holomorphe est

$$A \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_{n+1} \end{pmatrix}.$$

THÉORÈME 1.8 (généralisation du théorème 0.2). — Soient $f : \mathbb{C}_p \rightarrow \mathbb{P}^n$ une fonction holomorphe et

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_{n+1} \end{pmatrix}$$

une représentation holomorphe de f . On suppose $f_i(0) \neq 0$ pour tout $i = 1, \dots, n+1$. Soit $A \in \text{GL}_{n+1}(\mathbb{C}_p)$. On a

$$T(\lambda, Af) = T(\lambda, f) + O(1), \quad \lambda \rightarrow -\infty. \quad (1.2)$$

Démonstration. — Soient $A = (a_{ij})$ et $A^{-1} = (b_{ij})$. Posons

$$A \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_{n+1} \end{pmatrix},$$

où

$$g_j = \sum_{i=1}^{n+1} a_{ij} f_i \quad \text{et} \quad f_j = \sum_{i=1}^{n+1} b_{ij} g_i.$$

Soit $\delta \leq 0$ tel que

$$\delta \leq \min_{i,j} \{v(a_{ij}), v(b_{ij})\}.$$

On a

$$\begin{aligned} \min_{1 \leq j \leq n+1} \{v(g_j, \lambda)\} &= \min_{1 \leq j \leq n+1} \left\{ v \left(\sum_{i=1}^{n+1} a_{ij} f_i, \lambda \right) \right\} \geq \\ &\geq \delta + \min_{1 \leq j \leq n+1} \{v(f_j, \lambda)\}. \end{aligned}$$

De même, on a

$$\min_{1 \leq j \leq n+1} \{v(f_j, \lambda)\} \geq \delta + \min_{1 \leq j \leq n+1} \{v(g_j, \lambda)\}.$$

D'où

$$\delta \leq \min_{1 \leq j \leq n+1} \{v(g_j, \lambda)\} - \min_{1 \leq j \leq n+1} \{v(f_j, \lambda)\} \leq -\delta \quad \text{pour } \lambda > -\infty.$$

Donc enfin $|T(\lambda, Af) - T(\lambda, f)| \leq -2\delta$.

Exemple 1.9. — Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_p)$ telle que $f(0) \neq 0$ et ∞ . On a $f = f_1/f_2$ où f_1 et f_2 sont deux fonctions de $\mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$ n'ayant aucun zéro commun et telles que $f_1(0) \neq 0$ et $f_2(0) \neq 0$.

1) La formule (0.1) appliquée à $1/f_2$ donne

$$N\left(\lambda, \frac{1}{f_2}\right) = \sum_{\mu \geq \lambda} p\left(\mu, \frac{1}{f_2}\right) (\mu - \lambda) = v(f_2(0)) - v(f_2, \lambda).$$

D'où

$$N(\lambda, f) = N\left(\lambda, \frac{1}{f_2}\right) = v(f_2(0)) - v(f_2, \lambda).$$

On a aussi

$$m(\lambda, f) = \max\left(v\left(\frac{1}{f}, \lambda\right), 0\right) = -\min(v(f, \lambda), 0)$$

et par suite

$$\begin{aligned} m(\lambda, f) &= -\min(v(f_1, \lambda) - v(f_2, \lambda), 0) \\ &= -\min(v(f_1, \lambda), v(f_2, \lambda)) + v(f_2, \lambda). \end{aligned}$$

D'où $T(\lambda, f) = m(\lambda, f) + N(\lambda, f) = v(f_2(0)) - \min(v(f_1, \lambda), v(f_2, \lambda))$ et donc

$$T(\lambda, f) = \min(v(f_1(0)), v(f_2(0))) - \min(v(f_1, \lambda), v(f_2, \lambda)) + K, \quad (1.3)$$

où $K = v(f_2(0)) - \min(v(f_1(0)), v(f_2(0)))$ est une constante.

D'autre part, f peut être regardée comme une fonction holomorphe $\mathbb{C}_p \rightarrow \mathbb{P}^n$ dont une représentation holomorphe est

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

et on a

$$T(\lambda, f) = \min(v(f_1(0)), v(f_2(0))) - \min(v(f_1, \lambda), v(f_2, \lambda)). \quad (1.4)$$

Des relations (1.3) et (1.4) on a

$$T(\lambda, f) = T(\lambda, f) + K. \quad (1.5)$$

Donc la fonction \mathcal{T} généralise bien la fonction T .

2) Soit $a \in \mathbb{C}_p$ tel que $f(0) \neq a$. Donc

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -a \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}_p)$$

et le théorème 1.8 ci-dessus donne $T(\lambda, Af) = T(\lambda, f) + O(1)$. Or

$$Af = \begin{pmatrix} f_2 \\ f_1 - af_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{1}{f-a} = \frac{f_2}{f_1 - af_2}.$$

Ceci avec la relation (1.5) permet de retrouver le théorème 0.2.

PROPOSITION 1.10. — Soient $f : \mathbb{C}_p \rightarrow \mathbb{P}^n$ une fonction holomorphe et

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_{n+1} \end{pmatrix}$$

une représentation holomorphe de f telle que $f_i(0) \neq 0$ pour tout $i = 1, \dots, n+1$. On a les équivalences suivantes (prop. 0.3) :

$$f \text{ est une constante} \Leftrightarrow T(\lambda, f) = o(1), \quad \lambda \rightarrow -\infty \quad (1.6)$$

$$f_i(x) \in \mathbb{C}_p[x] \text{ pour tout } i \Leftrightarrow T(\lambda, f) = O(1), \quad \lambda \rightarrow -\infty. \quad (1.7)$$

COROLLAIRE 1.11. — Soit $\phi \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_p)$ telle que $\phi(0) \neq 0$ et $\phi(0) \neq \infty$. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{C}_p$ tels que $ad - bc \neq 0$. soit $\psi = (a\phi + b)/(c\phi + d)$. On suppose que $\psi(0) \neq 0$ et $\psi(0) \neq \infty$. Alors on a

$$T(\lambda, \psi) = T(\lambda, \phi) + O(1), \quad \lambda \rightarrow -\infty. \quad (1.8)$$

Démonstration. — On pose

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

on écrit $\phi = f_1/f_2$ et on applique le théorème 1.8 à

$$A \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}.$$

PROPOSITION 1.12. — Soient $f : \mathbb{C}_p \rightarrow \mathbb{P}^n$ une fonction holomorphe et

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_{n+1} \end{pmatrix}$$

une représentation holomorphe de f telle que $f_i(0) \neq 0$ pour tout $i = 1, \dots, n+1$. Soient

$$F = \sum_{i=1}^{n+1} a_i f_i \quad \text{et} \quad G = \sum_{i=1}^{n+1} b_i f_i$$

deux combinaisons linéaires des f_i à coefficients dans \mathbb{C}_p telles que $F(0) \neq 0$ et $G(0) \neq 0$. On a

$$N\left(\lambda, \frac{1}{F}\right) \leq T(\lambda, f) - \min_{1 \leq i \leq n+1} \{v(f_i(0))\} + v(F(0)) + K_1 \quad (1.9)$$

avec $K_1 = -\min_{1 \leq i \leq n+1} \{v(a_i)\}$,

$$T\left(\lambda, \frac{F}{G}\right) \leq T(\lambda, f) + K_2 \quad (1.10)$$

où K_2 est une constante qui dépend de F et G et non pas de λ .

Démonstration. — La formule (0.1) donne

$$\begin{aligned} N\left(\lambda, \frac{1}{F}\right) &= v\left(\frac{1}{F}, \lambda\right) + v(F(0)) \\ &\leq -\min_{1 \leq i \leq n+1} \{v(a_i)\} - \min_{1 \leq i \leq n+1} \{v(f_i, \lambda)\} + v(F(0)); \end{aligned}$$

d'où

$$N\left(\lambda, \frac{1}{F}\right) \leq K_1 + T(\lambda, f) - \min_{1 \leq i \leq n+1} \{v(f_i(0))\} + v(F(0)).$$

On a ainsi démontré la première relation. Pour démontrer la seconde on a :

$$T\left(\lambda, \frac{F}{G}\right) = m\left(\lambda, \frac{F}{G}\right) + N\left(\lambda, \frac{1}{G}\right);$$

d'où

$$T\left(\lambda, \frac{F}{G}\right) = \max\{v(G, \lambda) - v(F, \lambda), 0\} + N\left(\lambda, \frac{1}{G}\right).$$

Donc

$$T\left(\lambda, \frac{F}{G}\right) = -\min\{v(F, \lambda) - v(G, \lambda)\} + v(G, \lambda) + N\left(\lambda, \frac{1}{G}\right).$$

Or par la formule (0.1), on a $v(G, \lambda) + N(\lambda, 1/G) = v(G(0))$, d'où

$$T\left(\lambda, \frac{F}{G}\right) = -\min\{v(F, \lambda) - v(G, \lambda)\} + v(G, \lambda) + v(G(0)).$$

Donc

$$T\left(\lambda, \frac{F}{G}\right) \leq -\min_{1 \leq i, j \leq n+1} \{v(a_i), v(b_j)\} - \min_{1 \leq i \leq n+1} \{v(f_i, \lambda)\} + v(G(0)),$$

d'où $T(\lambda, F/G) \leq T(\lambda, f) + K_2$, avec

$$K_2 = -\min_{1 \leq i \leq n+1} \{v(f_i(0))\} - \min_{1 \leq i, j \leq n+1} \{v(a_i), v(b_j)\} + v(G(0)).$$

Remarque 1.13. — $T(\lambda, f_i/f_j) \leq T(\lambda, f) + K$ pour $i, j \in \{1, \dots, n+1\}$.

2. Deuxième théorème fondamental

En vue d'étendre le théorème 0.4 aux courbes holomorphes, nous allons démontrer les résultats préliminaires qui suivent.

LEMME 2.1. — Soient $f_1, \dots, f_m \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$ linéairement indépendantes et n'ayant aucun zéro commun. Soit un entier $q > m$. On considère q combinaisons linéaires de f_1, \dots, f_m :

$$F_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} f_i \quad \text{pour } j = 1, \dots, q,$$

telles que toutes m fonctions parmi les F_j soient linéairement indépendantes. Soit $x \in \mathbb{C}_p$ tel que

$$v(F_1(x)) \leq v(F_2(x)) \leq \dots \leq v(F_q(x)).$$

Alors pour tout $i \leq m$ et tout $j \leq q - m + 1$, on a

$$v(f_i(x)) \geq v(F_j(x)) - K, \tag{2.1}$$

où $K \in \mathbb{R}$ ne dépend que des a_{ij} et non pas de x .

Démonstration. — Considérons les $m - 1$ fonctions $F_{q-m+2}, F_{q-m+3}, \dots, F_q$. Pour tout $j \leq q - m + 1$, les f_i ($i \leq m$) sont des combinaisons linéaires de $F_{q-m+2}, F_{q-m+3}, F_j, \dots, F_q$. Comme les coefficients qui interviennent dépendent seulement des a_{ij} , on a

$$v(f_i(x)) \geq \min \{v(F_j(x)), v(F_{q-m+2}(x)), \dots, v(F_q(x))\} - K$$

d'où $v(f_i(x)) \geq v(F_j(x)) - K$.

COROLLAIRE 2.2. — *Pour tout $x \in \mathbb{C}_p$, il y a au moins $q - m + 1$ fonctions F_j telles que $F_j(x) \neq 0$.*

Démonstration. — Soit $x \in \mathbb{C}_p$. Si, pour l'un des $j \leq q - m + 1$, on avait $F_j(x) = 0$, on aurait d'après le lemme 2.1 :

$$v(f_i(x)) = +\infty \quad \text{pour tout } i = 1, \dots, m.$$

Ce qui signifie que les f_i ont un zéro commun contrairement à l'hypothèse.

COROLLAIRE 2.3. — *Avec les notations et hypothèses du lemme 2.1, on considère la fonction holomorphe $f : \mathbb{C}_p \rightarrow \mathbb{P}^{m-1}$ dont une représentation holomorphe est*

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}.$$

On suppose que $f_i(0) \neq 0$ pour tout $i = 1, \dots, m$. Alors on a

$$(q - m)\mathcal{T}(\lambda, f) \leq -\min\{v(F_{j_1} \dots F_{j_{q-m}}, \lambda)\} + O(1), \quad \lambda \rightarrow -\infty \quad (2.2)$$

le minimum étant pris sur les $(q - m)$ -uplets d'entiers distincts appartenant à $\{1, \dots, q\}$.

Démonstration. — Les conditions du lemme 2.1 impliquent qu'aucune fonction parmi les f_i ou les F_j n'est identiquement nulle. Soit $\lambda > -\infty$. Pour tout x tel que $v(x) \geq \lambda$ et tout $i \leq m$, on a d'après le lemme 2.1 :

$$(q - m)v(f_i(x)) \geq \min \{v(F_{j_1} \dots F_{j_{q-m}}(x))\} - (q - m)K,$$

le minimum portant sur les $(q - m)$ -uplets d'entiers distincts appartenant à $\{1, \dots, q\}$. D'où

$$(q - m) \inf_{v(x) \geq \lambda} \{v(f_i(x))\} \geq \inf_{v(x) \geq \lambda} \{\min\{v(F_{j_1} \dots F_{j_{q-m}}(x))\} - (q - m)K\}.$$

Donc

$$(q - m) \inf_{v(x) \geq \lambda} \{v(f_i(x))\} \geq \min \inf_{v(x) \geq \lambda} \{v(F_{j_1} \dots F_{j_{q-m}}(x))\} - (q - m)K.$$

Par suite, on a pour tout i

$$(q - m)v(f_i, \lambda) \geq \min \{v(F_{j_1} \dots F_{j_{q-m}}, \lambda)\} - (q - m)K ;$$

d'où

$$(q - m) \min_{1 \leq i \leq m} \{v(f_i, \lambda)\} \geq \min \{v(F_{j_1} \dots F_{j_{q-m}}, \lambda)\} - (q - m)K ;$$

et enfin

$$(q - m)T(\lambda, f) \leq - \min \{v(F_{j_1} \dots F_{j_{q-m}}, \lambda)\} + (q - m) \left\{ K + \min_{1 \leq i \leq m} \{v(f_i(0))\} \right\}.$$

Afin de justifier les notations et résultats qui suivent, nous faisons un commentaire.

Commentaire 2.4. — De la formule (0.7) on déduit que

$$(q - 2)T(\lambda, \phi) \leq \sum_{i=1}^q N_1 \left(\lambda, \frac{1}{\phi - a_i} \right) + S(\lambda, \phi). \quad (2.3)$$

Or si l'on pose $\phi = \phi_1/\phi_2$ avec $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$ sans zéros communs et telles que $\phi_1(0) \neq 0$ et $\phi_2(0) \neq 0$, la formule ci-dessus s'écrit

$$(q - 2)T(\lambda, \phi) \leq \sum_{i=1}^q N_1 \left(\lambda, \frac{1}{\phi_1 - a_i \phi_2} \right) + S(\lambda, \phi). \quad (2.4)$$

Ainsi, on voit que la somme $\sum_{i=1}^q N_1(\lambda, 1/(\phi_1 - a_i \phi_2))$ est liée aux q combinaisons linéaires $\phi_1 - a_i \phi_2$ des deux fonctions entières ϕ_1 et ϕ_2 .

Ceci nous conduit à faire les notations suivantes.

Notations 2.5. — Si F est une fonction entière non nulle, $m \geq 1$ et $\lambda > -\infty$, on note $\rho_m(\lambda, F)$ le nombre de zéros de F sur le cercle $v(x) = \lambda$, chaque zéro étant compté autant de fois que son ordre de multiplicité si cet ordre est inférieur ou égal à m et m fois dans le cas contraire. On pose alors

$$N_m\left(\lambda, \frac{1}{F}\right) = \sum_{\mu \geq \lambda} \rho_m\left(\lambda, \frac{1}{F}\right) [\mu - \lambda]. \quad (2.5)$$

Soit $f : \mathbb{C}_p \rightarrow \mathbb{P}^n$ une fonction holomorphe et

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_{n+1} \end{pmatrix}$$

une représentation holomorphe de f telle que $f_i(0) \neq 0$ pour tout $i = 1, \dots, n + 1$. Soit F une combinaison linéaire de f_1, \dots, f_{n+1} telle que $F(0) \neq 0$. Pour tout $m \geq 1$, on pose

$$\delta(F) = 1 - \liminf_{\lambda \rightarrow -\infty} \frac{N(\lambda, 1/F)}{T(\lambda, f)} \quad \text{et} \quad \delta_m(F) = 1 - \liminf_{\lambda \rightarrow -\infty} \frac{N_m(\lambda, 1/F)}{T(\lambda, f)}. \quad (2.6)$$

Il est clair qu'on a

$$0 \leq \delta(F) \leq \delta_1(F) \leq \delta_2(F) \leq \dots \leq 1. \quad (2.7)$$

Ces notations généralisent celles des théorème 0.4 et corollaire 0.5.

THÉORÈME 2.6 (généralisation du théorème 0.4). — *Soient $f : \mathbb{C}_p \rightarrow \mathbb{P}^n$ une fonction holomorphe et*

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_{n+1} \end{pmatrix}$$

une représentation holomorphe de f telle que $f_i(0) \neq 0$ pour tout $i = 1, \dots, n + 1$. On suppose que le wronskien $\mathcal{W}(f_1, \dots, f_{n+1})$ des fonctions f_1, \dots, f_{n+1} est non-identiquement nul. Soient $q > n + 1$ et F_1, \dots, F_q combinaisons linéaires des fonctions entières f_1, \dots, f_{n+1} . On suppose que toutes $n + 1$ fonctions parmi les F_i sont linéairement indépendantes et que $F_i(0) \neq 0$ pour tout $i = 1, \dots, n + 1$. On a alors :

$$(q - n - 1)T(\lambda, f) \leq \sum_{i=1}^q N_n\left(\lambda, \frac{1}{F_i}\right) + O(1), \quad \lambda \rightarrow -\infty. \quad (2.8)$$

Remarque 2.7. — On voit que la relation (2.4) est la cas particulier de la relation (2.8) où $n = 1$.

Pour démontrer le théorème 2.6 on a besoin des lemmes suivants.

LEMME 2.8. — Pour toute $\phi \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_p)$ tout $j \geq 0$ et tout $\lambda < 0$, on a

$$m\left(\lambda, \frac{\phi^{(j)}}{\phi}\right) = 0. \quad (2.9)$$

Pour la démonstration voir [1].

LEMME 2.9. — Soient F une fonction entière et a un zéro de F d'ordre ℓ . Alors pour tout $j \geq 0$, a est un pôle de $F^{(j)}/F$ d'ordre $\leq \min(\ell, j)$.

Démonstration. — Posons $F(x) = (x - a)^\ell G(x)$, avec $G(a) \neq 0$. Par la formule de Leibniz, il vient pour $j \geq 0$

$$F^{(j)}(x) = \sum_{0 \leq i \leq \min(\ell, j)} \binom{i}{j} \frac{\ell!}{(\ell - i)!} (x - a)^{\ell - i} G^{(j-i)}(x).$$

On a donc

$$\frac{F^{(j)}(x)}{F(x)} = \sum_{0 \leq i \leq \min(\ell, j)} \binom{i}{j} \frac{\ell!}{(\ell - i)!} (x - a)^{-i} G^{(j-i)}(x).$$

Par suite a est un pôle de $F^{(j)}(x)/F(x)$ d'ordre $\leq \min(\ell, j)$.

Démonstration du théorème 2.6. — Si $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$ sont $n + 1$ entiers distincts de $\{1, \dots, q\}$, on note $\beta_1, \dots, \beta_{q-n-1}$ les autres $q - n - 1$ entiers de $\{1, \dots, q\}$. On a par hypothèse

$$\mathcal{W}(f_1, \dots, f_{n+1}) = c(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}) \mathcal{W}(F_{\alpha_1}, \dots, F_{\alpha_{n+1}}) \neq 0$$

où $c(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1})$ est une constante; d'où

$$\frac{F_1 \dots F_q}{\mathcal{W}(f_1, \dots, f_{n+1})} = \frac{F_1 \dots F_q}{c(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}) \mathcal{W}(F_{\alpha_1}, \dots, F_{\alpha_{n+1}})},$$

par suite, on a

$$\frac{F_1 \dots F_q}{\mathcal{W}(f_1, \dots, f_{n+1})} = \frac{\mathcal{W}(F_{\beta_1}, \dots, F_{\beta_{q-n-1}})}{D(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1})}, \quad (2.10)$$

où

$$D(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}) = c(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}) \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ F'_{\alpha_1}/F_{\alpha_1} & \dots & F'_{\alpha_{n+1}}/F_{\alpha_{n+1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{\alpha_1}^{(n)}/F_{\alpha_1} & \dots & F_{\alpha_{n+1}}^{(n)}/F_{\alpha_{n+1}} \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

Donc le second membre de l'égalité (2.10) est une fonction méromorphe $H(x)$ de \mathbb{C}_p dans \mathbb{P}^1 qui ne dépend pas de $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$. D'où

$$\min\{v(F_{\beta_1}, \dots, F_{\beta_{q-n-1}}, \lambda)\} = v(H, \lambda) + \min\{v(D(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}))\}, \quad (2.12)$$

le minimum étant pris sur les $(q - n - 1)$ -uplets $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1})$ d'éléments distincts de $\{1, \dots, q\}$.

Nous allons minorer $v(H, \lambda)$. Comme aucune des fonctions F_1, \dots, F_q ne s'annule en zéro, la relation (2.11) montre que

$$H(0) \neq 0 \quad \text{et} \quad D(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1})(0) \neq \infty.$$

Si $H(x)$ admet un pôle d'ordre k en zéro, alors $D(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1})(x)$ admet un zéro de même ordre k en zéro. Donc la fonction

$$G(x) = x^k H(x) = x^k \frac{\mathcal{W}(F_{\beta_1}, \dots, F_{\beta_{q-n-1}})}{D(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1})}$$

n'a ni zéro ni pôle à l'origine et la formule de Jensen (0.1) nous donne

$$v(G(0)) = v(G, \lambda) + \sum_{\mu \geq \lambda} [z(\mu, G) - p(\mu, G)](\mu - \lambda),$$

d'où

$$\begin{aligned} v(G(0)) &\leq v(G, \lambda) + \sum_{\mu \geq \lambda} z(\mu, G)(\mu - \lambda) \leq \\ &\leq k\lambda + v(H, \lambda) + N\left(\lambda, \frac{1}{x^k H}\right). \end{aligned}$$

D'où enfin

$$v(H, \lambda) \geq -N\left(\lambda, \frac{1}{x^k H}\right) + O(1), \quad \lambda \rightarrow \infty. \quad (2.13)$$

D'autre part, si $\alpha \in \mathbb{C}_p$ est un zéro de $H(x)$ d'ordre $\ell(a)$, le corollaire 2.2 permet de choisir $\beta_1(a), \dots, \beta_{q-n-1}(a)$ tels que $F_{\beta_1}(a) \neq 0, \dots, F_{\beta_{q-n-1}}(a) \neq 0$. Donc a est un pôle d'ordre $\ell(a)$ du $D(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1})$ correspondant. Or on a

$$D(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}) = c(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}) \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n+1} \frac{F_{\alpha_i}^{(\sigma(i)-1)}}{F_{\alpha_i}}, \quad (2.14)$$

où σ parcourt le groupe symétrique \mathcal{S}_{n+1} .

Pour tout $j = 1, \dots, q$, soit $\ell_j(a)$ l'ordre de a en tant que pôle de F_j , ($\ell_j = 0$ si a n'est pas un pôle de F_j). Du lemme 2.9 et de la relation (2.14) il vient que a est un pôle de $D(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1})$ d'ordre inférieur ou égal à $\max\{\sum_{i=1}^{n+1} \min\{(\sigma(i) - 1), \ell_{\alpha_i}\}\}$. Or on a

$$\max\left\{\sum_{i=1}^{n+1} \min\{(\sigma(i) - 1), \ell_{\alpha_i}\}\right\} \leq \sum_{i=1}^{n+1} \min\{n, \ell_{\alpha_i}\} \leq \sum_{j=1}^q \min\{n, \ell_j\},$$

d'où

$$\ell(a) \leq \sum_{j=1}^q \min\{n, \ell_j(a)\}. \quad (2.15)$$

Maintenant

$$N\left(\lambda, \frac{1}{x^k H}\right) = \sum_{\substack{v(a) \geq \lambda \\ H(a)=0}} \sum_{j=1}^q \min\{n, \ell_j(a)\} [v(a) - \lambda].$$

D'où, d'après (2.15) :

$$N\left(\lambda, \frac{1}{x^k H}\right) \leq \sum_{j=1}^q \sum_{\substack{v(a) \geq \lambda \\ H(a)=0}} \min\{n, \ell_j(a)\} [v(a) - \lambda]$$

et donc (§ 2.5) :

$$N\left(\lambda, \frac{1}{x^k H}\right) \leq \sum_{j=1}^q N_n\left(\lambda, \frac{1}{F_j}\right).$$

D'où, d'après (2.13) :

$$v(H, \lambda) \geq -\sum_{j=1}^q N_n\left(\lambda, \frac{1}{F_j}\right) + O(1), \quad \lambda \rightarrow -\infty. \quad (2.16)$$

La relation (2.12) nous donne

$$\begin{aligned} & \min \left\{ v((F_{\beta_1}, \dots, F_{\beta_{q-n-1}}), \lambda) \right\} \geq \\ & \geq - \sum_{j=1}^q N_n \left(\lambda, \frac{1}{F_j} \right) + \min \{ v(D(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}), \lambda) \} + O(1), \quad \lambda \rightarrow -\infty. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Or du lemme 2.8 et de (2.14), il vient

$$\begin{aligned} & v(D(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}), \lambda) = \\ & = v(c(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1})) + v \left(\sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n+1} \frac{F_{\alpha_i}^{(\sigma(i)-1)}}{F_{\alpha_i}}, \lambda \right) \geq \\ & \geq v(c(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1})) + \min_{\sigma} \left\{ v \left(\prod_{i=1}^{n+1} \frac{F_{\alpha_i}^{(\sigma(i)-1)}}{F_{\alpha_i}}, \lambda \right) \right\}, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} & v(D(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}), \lambda) \geq \\ & \geq v(c(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1})) + \min_{\sigma} \left\{ \sum_{i=1}^{n+1} v \left(\frac{F_{\alpha_i}^{(\sigma(i)-1)}}{F_{\alpha_i}}, \lambda \right) \right\} \\ & \geq v(c(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1})). \end{aligned}$$

En reportant dans (2.17), on obtient :

$$\min \left\{ v(F_{\beta_1}, \dots, F_{\beta_{q-n-1}}), \lambda \right\} \geq - \sum_{j=1}^q N_n \left(\lambda, \frac{1}{F_j} \right) + O(1), \quad \lambda \rightarrow -\infty. \quad (2.18)$$

Or la relation (2.2) écrite pour $m = n + 1$ donne

$$(q - n - 1)T(\lambda, f) \leq - \min \left\{ v(F_{\beta_1}, \dots, F_{\beta_{q-n-1}}), \lambda \right\} + O(1), \quad \lambda \rightarrow -\infty. \quad (2.19)$$

D'où par (2.18) et (2.19) :

$$(q - n - 1)T(\lambda, f) \leq \sum_{j=1}^q N_n \left(\lambda, \frac{1}{F_j} \right) + O(1), \quad \lambda \rightarrow -\infty. \quad (2.20)$$

COROLLAIRE 2.10 ((généralisation du corollaire 0.5)). — *Sous les mêmes conditions que celles du théorème 2.6, on a*

$$\sum_{j=1}^q \delta_n(F_j) \leq n + 1. \quad (2.21)$$

3. Applications

3.1 Équation fonctionnelle

Soient $n \geq 1$ et f_1, \dots, f_{n+1} des fonctions p -adiques entières. Pour tout $i = 1, \dots, n + 1$, soit

$$m_i = \begin{cases} \inf \left\{ \text{ord}_x \frac{f_i}{x} \in \mathbb{C}_p \right\} & \text{si } f_i \text{ admet des zéros} \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Donc tout zéro de f_i est d'ordre de multiplicité $\geq m_i$.

PROPOSITION 3.1. — *On suppose qu'aucune des f_i n'est constante, $f_i(0) \neq 0$ et que les f_i sont linéairement indépendantes et vérifient*

$$f_1 + \dots + f_{n+1} = 1. \quad (3.1)$$

Alors on a

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{m_i} \geq \frac{1}{n}. \quad (3.2)$$

Démonstration. — D'après la relation (3.1) les f_i ne s'annulent simultanément en aucun point; donc

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_{n+1} \end{pmatrix}$$

est une courbe holomorphe de \mathbb{C}_p dans \mathbb{P}^n . Considérons les combinaisons linéaires suivantes des f_i

$$\begin{aligned} f_1 &= f_1 \\ f_2 &= f_2 \\ &\vdots \\ f_{n+1} &= f_{n+1} \\ 1 &= f_1 + \dots + f_{n+1}. \end{aligned}$$

Toutes les conditions sont réunies pour appliquer le corollaire 2.10. D'où

$$\delta_n(1) + \sum_{i=1}^{n+1} \delta_n(f_i) \leq n + 1. \quad (3.3)$$

Or on a $\delta_n(1) = 1$ et

$$N_n \left(\lambda, \frac{1}{f_i} \right) = nN_1 \left(\lambda, \frac{1}{f_i} \right) \leq \frac{n}{m_i} N \left(\lambda, \frac{1}{f_i} \right).$$

D'après la formule de Jensen on a

$$N \left(\lambda, \frac{1}{f_i} \right) = -v(f_i, \lambda) + O(1) \leq T(\lambda, f),$$

d'où

$$\delta_n(f_i) \geq 1 - \frac{n}{m_i}.$$

On termine en reportant dans (3.3).

On remarque que la conclusion de cette proposition reste vraie si les f_i sont supposées non polynomiales et si au second membre de (3.1) on a un polynôme non nul.

3.2 Unicité projective

Soient $f : \mathbb{C}_p \rightarrow \mathbb{P}^n$ une fonction holomorphe et

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_{n+1} \end{pmatrix}$$

une représentation holomorphe de f telle que $f_i(0) \neq 0$ pour tout $i = 1, \dots, n + 1$. Si un hyperplan H , défini par $a_1 z_1 + \dots + a_{n+1} z_{n+1} = 0$, ne contient pas $f(\mathbb{C}_p)$, on définit la fonction entière $F_H^f : \mathbb{C}_p \rightarrow \mathbb{C}_p$ par

$$F_H^f(x) = a_1 f_1(x) + \dots + a_{n+1} f_{n+1}(x).$$

On définit alors une fonction $\nu(f, H)$ de \mathbb{C}_p dans \mathbb{N} par

$$\nu(f, H)(x) = \text{ord}_x(F_H^f).$$

DÉFINITION 3.2. — On dit que la courbe holomorphe f rencontre l'hyperplan H si $\nu(f, H) \neq 0$.

DÉFINITION 3.3. — Une famille H_1, \dots, H_q ($q > n+1$) d'hyperplans est dite en position générale si à chaque fois que $f : \mathbb{C}_p \rightarrow \mathbb{P}^n$ est une courbe holomorphe non constante, toutes $n+1$ fonctions parmi les $F_{H_1}^f, \dots, F_{H_q}^f$ sont linéairement indépendantes.

THÉORÈME 3.4. — On considère $n+1$ courbes holomorphes non constantes

$$f^i = \begin{pmatrix} f_1^i \\ \vdots \\ f_{n+1}^i \end{pmatrix} \quad \text{pour } i = 1, \dots, n+1.$$

Soient H_1, \dots, H_{2n+3} des hyperplans en position générale. On suppose que $\nu(f^i, H_k) \equiv \nu(f^j, H_k)$ pour $1 \leq i, j \leq n+1$ et $1 \leq k \leq 2n+3$. Alors, on a

$$\det(f^1, \dots, f^{n+1}) := \begin{vmatrix} f_1^1 & \dots & f_1^{n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n+1}^1 & \dots & f_{n+1}^{n+1} \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Démonstration. — Posons $F_k^i = F_{H_k}^{f^i}$ pour tout i et tout k . La formule (2.8) appliquée avec $q = 2n+3$ donne pour tout i :

$$(n+2)T(\lambda, f^i) \leq \sum_{k=1}^{2n+3} N_n \left(\lambda, \frac{1}{F_k^i} \right) + O(1), \quad \lambda \rightarrow -\infty. \quad (3.4)$$

Pour k fixe soit F_k une fonction entière ayant pour zéros tous les zéros communs aux F_k^i , $i = 1, \dots, n+1$, et telle que pour tout $a \in \mathbb{C}_p$:

$$\text{ord}_a(F_k) = \min_{1 \leq i \leq n+1} \nu(f^i, H_k)(a).$$

Donc, tout zéro de F_k est d'ordre de multiplicité le minimum des ordres qu'il a en tant que zéro des F_k^i . On a

$$N_n \left(\lambda, \frac{1}{F_k^i} \right) \leq N_n \left(\lambda, \frac{1}{F_k} \right) + \left\{ N \left(\lambda, \frac{1}{F_k^i} \right) - N \left(\lambda, \frac{1}{F_k} \right) \right\}. \quad (3.5)$$

En effet si pour $\phi \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_p)$, on note $\ell_a = \max(0, \text{ord}_a(\phi))$, on a

$$N(\lambda, \phi) = \sum_{v(x) \geq \lambda} \ell_a \left(\frac{1}{\phi} \right) [v(x) - \lambda]$$

et

$$N_n(\lambda, \phi) = \sum_{v(x) \geq \lambda} \min \left(n, \ell_a \left(\frac{1}{\phi} \right) \right) [v(x) - \lambda].$$

Or pour $a \in \mathbb{C}_p$ on a

$$\min(n, \ell_a(F_k^i)) \leq \min(n, \ell_a(F_k)) + \ell_a(F_k^i) - \ell_a(F_k).$$

D'où la relation (3.5) en multipliant par $v(x) - \lambda$ et en sommant sur les x tels que $v(x) \geq \lambda$. De (3.4) et (3.5) on a

$$\begin{aligned} (n+2)T(\lambda, f^i) &\leq \sum_{k=1}^{2n+3} N_n \left(\lambda, \frac{1}{F_k} \right) + \\ &+ \sum_{k=1}^{2n+3} \left\{ N \left(\lambda, \frac{1}{F_k^i} \right) - N \left(\lambda, \frac{1}{F_k} \right) \right\} + O(1). \end{aligned}$$

Ceci nous donne

$$\begin{aligned} (n+2)T(\lambda, f^i) &\leq (n+1) \sum_{k=1}^{2n+3} N_n \left(\lambda, \frac{1}{F_k} \right) + \\ &+ \sum_{k=1}^{2n+3} \sum_{i=1}^{n+1} \left\{ N \left(\lambda, \frac{1}{F_k^i} \right) - N \left(\lambda, \frac{1}{F_k} \right) \right\} + O(1). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Posons $F(x) = \det(f^1, \dots, f^{n+1})$ et supposons $F(x) \not\equiv 0$. Alors tout zéro de F_k est un zéro commun à toutes les F_k^i et est donc un zéro de $F(x)$ au moins du même ordre que relativement à F_k . D'où

$$\sum_{k=1}^{2n+3} N_n \left(\lambda, \frac{1}{F_k} \right) \leq N \left(\lambda, \frac{1}{F} \right). \tag{3.7}$$

Or d'après le premier théorème fondamental, on a

$$N \left(\lambda, \frac{1}{F} \right) \leq T \left(\lambda, \frac{1}{F} \right) + O(1).$$

Comme F est entière, on a pour λ assez proche de $-\infty$:

$$N\left(\lambda, \frac{1}{F}\right) \leq v\left(\frac{1}{F}, \lambda\right) + O(1). \quad (3.8)$$

Or on a

$$F(x) = \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n+1} f_{\sigma(i)}^i,$$

d'où

$$\begin{aligned} v\left(\frac{1}{F}, \lambda\right) &\leq -\min_{\sigma} \left\{ v\left(\prod_{i=1}^{n+1} f_{\sigma(i)}^i, \lambda\right) \right\} = -\min_{\sigma} \left\{ \prod_{i=1}^{n+1} v(f_{\sigma(i)}^i, \lambda) \right\} \\ &\leq \sum_{i=1}^{n+1} -\min_{\sigma} \left\{ v(f_{\sigma(i)}^i, \lambda) \right\} \leq \sum_{i=1}^{n+1} T(\lambda, f^i) + O(1). \end{aligned}$$

Il vient donc

$$N\left(\lambda, \frac{1}{F}\right) \leq \sum_{i=1}^{n+1} T(\lambda, f^i) + O(1). \quad (3.9)$$

Des relations (3.6)-(3.9) on a :

$$\begin{aligned} (n+2)T(\lambda, f^i) &\leq (n+1) \sum_{k=1}^{2n+3} T(\lambda, f^i) + \\ &+ \sum_{k=1}^{2n+3} \sum_{i=1}^{n+1} \left\{ N\left(\lambda, \frac{1}{F_k^i}\right) - N\left(\lambda, \frac{1}{F_k}\right) \right\} + O(1), \end{aligned} \quad (3.10)$$

d'où

$$\sum_{i=1}^{n+1} T(\lambda, f^i) \leq \sum_{k=1}^{2n+3} \sum_{i=1}^{n+1} \left\{ N\left(\lambda, \frac{1}{F_k^i}\right) - N\left(\lambda, \frac{1}{F_k}\right) \right\} + O(1). \quad (3.11)$$

Or les identités $\nu(f^i, H_k) \equiv \nu(f^j, h_k)$ se traduisent par la nullité du second membre de l'inégalité (3.11), d'où :

$$\sum_{i=1}^{n+1} T(\lambda, f^i) \leq O(1).$$

Ce qui signifie que les f^i sont des constantes contrairement à l'hypothèse.

