

MARCEL BRILLOUIN

Questions d'hydrodynamique

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 1^{re} série, tome 1, n° 3 (1887), p. 41-56

http://www.numdam.org/item?id=AFST_1887_1_1_3_41_0

© Université Paul Sabatier, 1887, tous droits réservés.

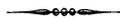
L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CHAPITRE II.

ÉCOULEMENT DES LIQUIDES. — JETS. — MOUVEMENT D'UN SOLIDE OU D'UN TOURBILLON DANS UN LIQUIDE.



26. Quand on veut appliquer les équations fournies par la théorie générale à la solution d'un problème réel particulier, ce ne sont pas seulement des difficultés analytiques que l'on rencontre. Les simplifications que l'on a introduites dans la théorie, en supposant le fluide dénué de frottement, rendent impossible de satisfaire à une partie des conditions naturelles aux parois, et la solution incomplète qui en résulte n'est applicable qu'aux mouvements lents; elle conduirait, lorsque les mouvements sont rapides, à des pressions négatives ou tensions énormes dans le liquide partout où il y a une variation rapide de direction de la vitesse et particulièrement le long des parois dont la courbure est très grande. Helmholtz a montré, dans une Note de 1868, comment l'absence supposée de tout frottement dans le liquide rend possibles certains mouvements discontinus, systématiquement laissés de côté jusqu'alors comme impossibles dans un liquide naturel, mais qui sont précisément un état limite des mouvements réels, état dans lequel ne se rencontrent plus les tensions énormes incompatibles avec l'état fluide.

Occupons-nous seulement des cas où la pression est une fonction de la densité, et où les forces extérieures X, Y, Z sur l'unité de masse sont les dérivées prises en signe contraire, $-\frac{\partial V}{\partial x}, -\frac{\partial V}{\partial y}, -\frac{\partial V}{\partial z}$, d'un potentiel V . Quand dans un fluide parfait le mouvement prend naissance à partir du repos, les rotations élémentaires, nulles au début, restent constamment nulles et il existe un potentiel des vitesses φ . Les équations relatives à l'intérieur du fluide sont alors

$$p = f(\rho),$$

$$\int \frac{dp}{\rho} + V + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] = -\frac{\partial \varphi}{\partial t} + F(t),$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \rho \Delta_2 \varphi = 0.$$

$F(t)$ est une fonction du temps seul, indépendante de x, y, z , qui, dans la plupart des problèmes, se réduit à une constante. L'élimination de p, ρ entre ces équations conduirait à une équation en φ compliquée à cause de la fonction f . Quand la fonction f se réduit à une puissance de ρ , ce qui comprend les deux cas prin-

cipaux relatifs aux gaz parfaits, on trouve facilement

$$p = A \rho^m,$$

$$\frac{m}{m-1} A \rho^{m-1} = F(t) - \frac{\partial \varphi}{\partial t} - V - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right],$$

$$\left\{ F(t) - \frac{\partial \varphi}{\partial t} - V - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] \right\} (m-1) \Delta_2 \varphi$$

$$+ \frac{D}{Dt} \left\{ F(t) - \frac{\partial \varphi}{\partial t} - V - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] \right\} = 0,$$

en introduisant la notation $\frac{D}{Dt}$ pour abrégier l'écriture (n° 5).

La dernière équation contient toutes les dérivées secondes de φ en x, y, z, t ; elle n'est d'ailleurs pas linéaire, mais contient des produits de deux dérivées premières de φ par une dérivée seconde. On sait comment on réduit la difficulté du problème, dans le cas des petites oscillations sur place, en négligeant dans l'équation en φ tous les termes d'ordre supérieur au premier, et dans le cas des mouvements continus en négligeant la compressibilité.

Dans ce dernier cas, les équations prennent la forme simple

$$(1) \quad \frac{p}{\rho} = F(t) - \frac{\partial \varphi}{\partial t} - V - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right],$$

$$(2) \quad \Delta_2 \varphi = 0,$$

et il faut les intégrer en tenant compte des conditions à la surface limite du liquide.

27. Lorsqu'il n'y a pas de surface libre et que le liquide emplit entièrement un vase, limitant un espace simple (n° 4), la vitesse normale à la paroi est nulle partout.

Si le liquide entre par certaines ouvertures et sort par d'autres, avec des vitesses normales connues, on sait que la valeur de φ est entièrement déterminée à une constante près; c'est une propriété connue des solutions de l'équation (2). On ne peut donc satisfaire à aucune autre condition relative aux vitesses: les vitesses ont des valeurs déterminées partout. On a ensuite la pression en un point quelconque par la première équation, si l'on connaît la fonction $F(t)$ ou, ce qui revient au même, la loi de variation de la pression avec le temps en un point particulier.

La pression peut varier dans des limites très étendues; ordinairement, elle se trouve déterminée, dans le voisinage d'un des orifices, par des circonstances extérieures indépendantes du débit. Tant que le débit est assez faible, la pression fournie par la formule (1) est partout positive; elle est d'autant moindre que le

débit est plus grand, et quand le débit dépasse une certaine valeur, la pression fournie par la formule (1) serait négative, d'abord en certains points particuliers de la paroi où la vitesse est maximum, puis dans des régions de plus en plus étendues autour de ces points. C'est là un résultat inadmissible; s'il y avait de pareilles régions, rien ne retiendrait le liquide contre la paroi, le mouvement changerait peu à peu de caractère, une surface libre apparaîtrait autour de chaque point de pression nulle, d'autant plus étendue que le débit serait plus grand.

La solution analytique ne correspond plus à la réalité.

28. Précisons sur un exemple bien connu de mouvement permanent à deux variables : dans ce cas il est commode d'employer, en même temps que le potentiel des vitesses Φ , une fonction Ψ qui caractérise les lignes de courant, orthogonales aux lignes de niveau. La différence des valeurs de Ψ en deux points mesure la quantité de liquide qui traverse, pendant l'unité de temps, une ligne quelconque tracée entre ces deux points.

On satisfait à l'équation (2), en prenant pour Φ et Ψ la partie réelle et le coefficient de $\sqrt{-1}$ dans une fonction arbitraire de $x + y\sqrt{-1}$. Inversement on peut regarder x et y comme fonctions des deux coordonnées curvilignes Φ et Ψ .

EXEMPLE I (fig. 12). — *Ouverture en mince paroi.*

$$x + y\sqrt{-1} = A \frac{e^{a(\Phi + \Psi\sqrt{-1})} - e^{-a(\Phi + \Psi\sqrt{-1})}}{2}$$

donne

$$\begin{cases} x = A \frac{e^{a\Phi} - e^{-a\Phi}}{2} \cos a\Psi, \\ y = A \frac{e^{a\Phi} + e^{-a\Phi}}{2} \sin a\Psi. \end{cases}$$

Les lignes de niveau Φ sont les ellipses homofocales

$$\frac{4x^2}{A^2(e^{a\Phi} - e^{-a\Phi})^2} + \frac{4y^2}{A^2(e^{a\Phi} + e^{-a\Phi})^2} = 1.$$

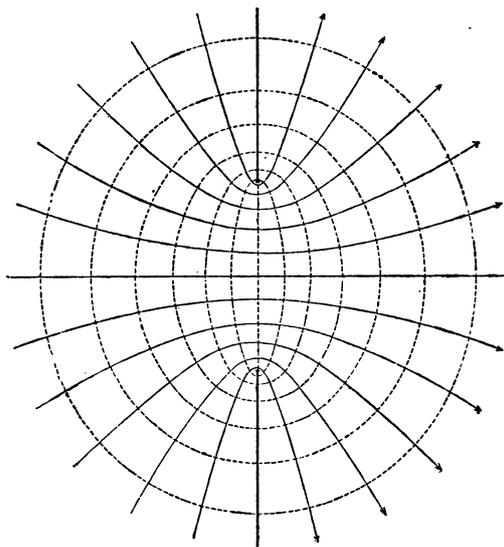
Les lignes de flux Ψ sont les hyperboles homofocales

$$\frac{x^2}{A^2 \cos^2 a\Psi} - \frac{y^2}{A^2 \sin^2 a\Psi} = -1,$$

et une quelconque de ces lignes peut être regardée comme une paroi fixe. En particulier, les portions de l'axe des y pour lesquelles on a $y^2 > A^2$ sont : l'une, la ligne de flux $\Psi = -\frac{\pi}{2a}$, l'autre la ligne de flux $\Psi = +\frac{\pi}{2a}$.

Le liquide s'écoule ainsi du côté gauche au côté droit du plan $x = 0$ à travers l'ouverture $x = 0$, $y^2 < A^2$. La vitesse du liquide en un point P situé à une distance très grande est dirigée suivant le rayon vecteur qui joint le point P à

Fig. 12.



l'origine des coordonnées, milieu de l'ouverture; elle est inversement proportionnelle à la longueur de ce rayon vecteur et indépendante de l'azimut. Le débit total pendant l'unité de temps est $\frac{\pi}{\alpha}$. La vitesse en un point Φ , Ψ quelconque est

$$A \alpha \sqrt{\frac{2}{(e^{a\Phi} + e^{-a\Phi})^2 \cos^2 a\Psi + (e^{a\Phi} - e^{-a\Phi})^2 \sin^2 a\Psi}}.$$

En particulier, aux bords de l'ouverture, $x = 0$, $y^2 = A^2$, ou $\Phi = 0$, $\Psi = \pm \frac{\pi}{2}$, la vitesse devient infinie, ce qui est évidemment inadmissible. Quant à la pression, si aucune force extérieure n'agit sur la masse, elle est donnée par

$$p = p_0 - \frac{\rho}{A^2 \alpha^2} \frac{1}{(e^{a\Phi} + e^{-a\Phi})^2 \cos^2 a\Psi + (e^{a\Phi} - e^{-a\Phi})^2 \sin^2 a\Psi},$$

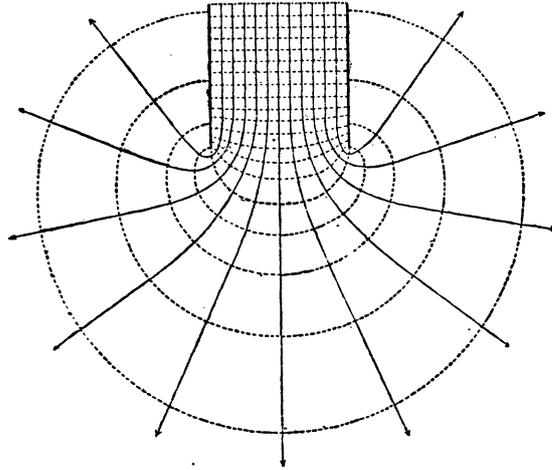
en appelant p_0 la pression uniforme à une très grande distance de l'ouverture ($\Phi = \pm \infty$). La pression serait négative dans deux régions qui entourent les bords de l'ouverture, et même dans toute une région étendue comprenant toute l'ouverture, pour un grand débit; ce qui est évidemment absurde.

EXEMPLE II (fig. 13). — Un autre exemple fort intéressant, dû à Helmholtz,

correspond à l'écoulement par un tube vertical ouvert par le bas dans un très grand vase. Le liquide descend dans le tube, arrive à l'ouverture, en contourne les bords et remonte en s'épanouissant tout autour du tube.

Loin de l'ouverture, la vitesse dans le vase est rayonnante et sensiblement en

Fig. 13.



raison inverse de la distance au milieu de l'ouverture du tube, comme dans l'exemple précédent. Dans le tube et loin de l'ouverture, la vitesse est verticale uniforme de haut en bas. Ce mouvement est donné par

$$x + y\sqrt{-1} = -A\sqrt{-1} [\alpha(\Phi + \Psi\sqrt{-1}) + e^{\alpha(\Phi + \Psi\sqrt{-1})}]$$

ou

$$\begin{cases} x = A\alpha\Psi + Ae^{\alpha\Phi}\sin\alpha\Psi, \\ y = -A\alpha\Phi - Ae^{\alpha\Phi}\cos\alpha\Psi. \end{cases}$$

Les parois du tube sont données par $\Psi = \pm \frac{\pi}{\alpha}$:

$$x = \pm A\pi, \quad y \geq +A.$$

Ici encore, la vitesse devient infinie au bord du tube, et suivant la valeur de p_0 , qui correspond aux points où la vitesse est nulle, la région où la pression devient négative s'étend plus ou moins autour des bords de l'orifice.

29. La même difficulté se rencontre toutes les fois que les parois présentent des angles vifs, quelque lent que soit le débit, et pour des parois arrondies dès que le débit dépasse une certaine limite. Elle est inévitable tant qu'on suppose Φ continu et fini dans tout l'intérieur du liquide, puisque la forme des parois

et la distribution des vitesses normales dans les ouvertures déterminent entièrement la valeur de Φ .

L'hypothèse arbitraire, comme l'a remarqué Helmholtz (1868), c'est celle de la continuité de Φ et de ses dérivées dans un fluide sans frottement. Dans les fluides naturels nous devons supposer que les vitesses varient d'une manière continue d'un point à l'autre, parce qu'une différence finie de vitesse entre deux couches en contact ferait naître un frottement infini; mais, dans un liquide absolument dénué de frottement, rien ne s'oppose à cette discontinuité. Cela est si vrai qu'on est obligé de subir cette discontinuité à la surface de séparation de deux liquides différents; avec les fonctions arbitraires que les équations des fluides sans frottement laissent disponibles, on ne peut satisfaire qu'à deux conditions à la surface de séparation :

1° Contact permanent des deux fluides, sans production de vide entre les deux, assuré par l'égalité des vitesses normales à la surface de séparation, évaluées de part et d'autre ;

2° Équilibre de cette surface géométrique, dénuée de masse, mobile ou en repos, assuré par l'égalité des pressions de part et d'autre (n° 5).

Quant aux vitesses tangentielles, elles se trouvent complètement déterminées par la solution qui satisfait aux deux autres conditions, et elles ne sont en général ni égales, ni même parallèles dans les deux fluides; il en est de même des dérivées de la pression dans le sens normal à la surface de séparation.

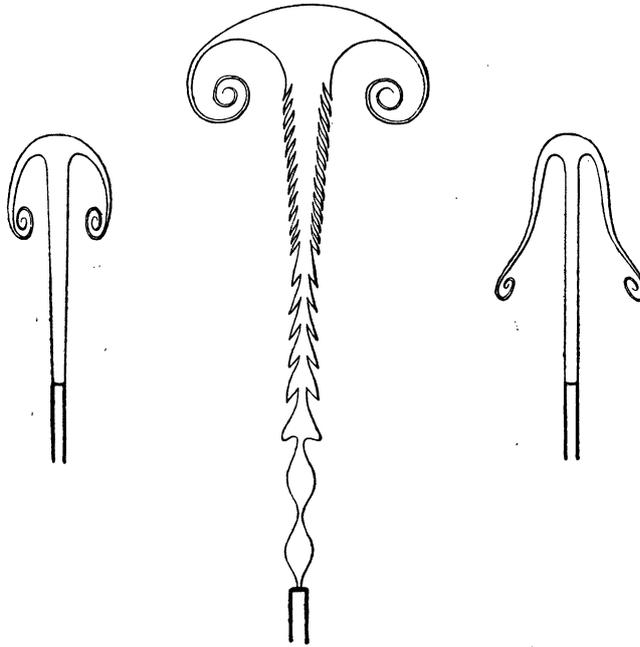
Dans l'intérieur d'un fluide sans frottement les conditions de continuité physique de la matière et de continuité mécanique des forces intérieures sont entièrement satisfaites si la pression est partout continue et positive, et si, à travers les surfaces de discontinuité des vitesses, la vitesse normale reste continue.

30. *Expériences.* — Avant de pousser plus loin la discussion, remarquons que des mouvements de ce genre se produisent constamment sous nos yeux; le courant d'air qui s'échappe d'un soufflet ne s'épanouit pas immédiatement en tous sens : il forme à la sortie du tube un jet un peu conique à l'intérieur duquel le mouvement de l'air est concentré; ce jet est séparé de l'air extérieur en repos, non pas par une surface de discontinuité géométrique, mais par une couche peu épaisse de tourbillons, et s'étend sur une longueur de quelques décimètres; il est facile de mettre en évidence l'existence du jet en le produisant régulièrement avec une soufflerie dont l'air est chargé de fumées de chlorhydrate d'ammoniaque. Le jet régulier, au sortir du tube, se trouble à quelque distance, prend un aspect floconneux et finit par se mêler à l'air.

De même, un courant continu d'eau teintée, qui coule par un tube de verre immergé dans un grand réservoir plein d'eau en repos, forme à la sortie un jet cylindrique; le frottement interne de l'eau, bien plus considérable que celui de

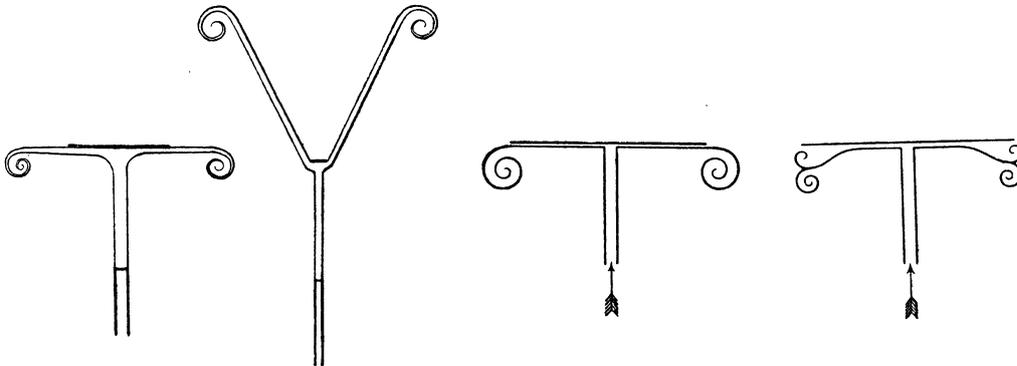
l'air, trouble le mouvement de la colonne liquide à quelques décimètres de l'ori-

Fig. 14.



fice du tube, et lui donne l'apparence d'une sorte de champignon dont les bords grandissent constamment en s'enroulant; la hauteur de la partie cylindrique est

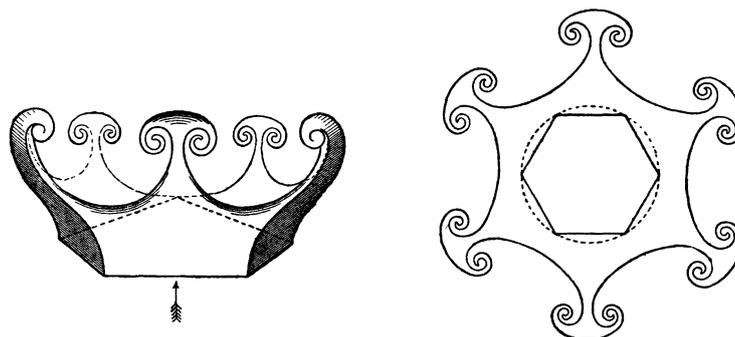
Fig. 15.



d'autant plus grande que la pression d'écoulement est plus forte; le jet prend une forme curieusement dentelée, quand le débit subit de petites variations périodiques; M. Oberbeck a observé les formes de ces surfaces d'écoulement (*fig. 14*), et M. Kötschau a examiné en outre les formes complexes que prend le jet à la

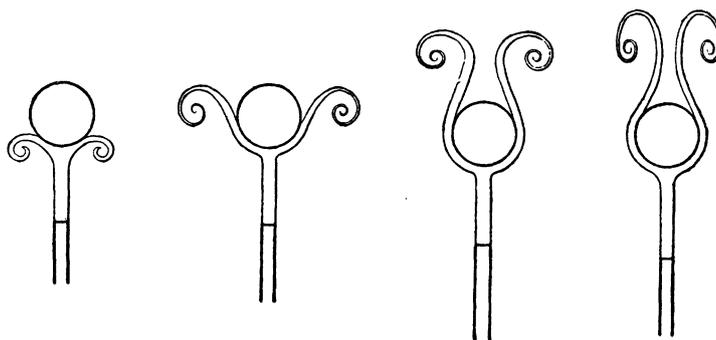
rencontre d'un obstacle : il n'enveloppe pas toujours l'obstacle ; il en suit la surface sur une certaine étendue, puis s'en sépare en formant une sorte de coupe à bords nettement limités, et qui s'enroulent à la façon des anneaux-tourbillons

Fig. 16.



naissants, dès que le frottement est trop grand. Les *fig. 15* et *16* montrent quelques-unes des formes relatives à un plan mince à bords vifs. Pour le plan mince, pas trop large, le jet s'en détache tangentiellment à la face inférieure, dès qu'il a atteint le bord ; le rayon de courbure de la surface de discontinuité dans cette région est d'autant plus grand que la vitesse est plus grande. Pour le corps rond,

Fig. 17.



le jet le contourne entièrement lorsque la vitesse est petite ; il commence à se détacher du sommet, et forme une sorte de calice autour de la boule, avec une très petite ouverture, lorsque la vitesse devient plus grande ; il se sépare d'autant plus de la boule que la vitesse est plus grande, en même temps que l'ouverture grandit, et finit par former une large coupe étalée qui ne touche la boule que sur la très petite calotte directement atteinte par le jet. C'est du moins ce qui se produirait dans un liquide sans frottement. Dans un liquide naturel, lorsque la vitesse du jet est faible, les frottements détruisent le jet avant qu'il ait entière-

ment contourné l'obstacle; il y a une certaine vitesse finie, pour laquelle l'étendue de la surface de contact du jet avec la paroi est maximum, et c'est seulement pour des vitesses plus grandes que le sens des variations est le même que dans un fluide parfait. La *fig. 17*, empruntée au Mémoire de M. Oberbeck, montre les phases successives de l'état variable depuis le début de l'écoulement jusqu'à l'état permanent, pour un débit constant.

Il ne s'agit, bien entendu, que des mouvements qui se produisent à l'intérieur d'un fluide homogène, et non des jets d'un fluide dans un fluide différent, jets d'eau, jets de gaz, jets d'air chaud dans l'air ordinaire dont la forme et le mouvement ont souvent pour cause principale la pesanteur.

31. Ainsi, en laissant provisoirement de côté divers phénomènes accessoires, l'expérience montre que dans un fluide naturel des portions contiguës peuvent être animées de mouvements très différents; que cet état se produit toujours quand la vitesse d'écoulement dépasse une certaine limite, d'autant plus faible que les parois présentent des bords plus aigus; que la forme de la surface de séparation dépend de la vitesse. Dans des circonstances analogues, c'est une surface de discontinuité des vitesses qui est l'état limite correspondant pour un fluide parfait.

Cette surface équivaut à une couche infiniment mince de tourbillons (n° 6); donc elle sépare deux portions du fluide entièrement distinctes et qui ne peuvent se mélanger. Comme couche de tourbillons, elle est fermée, ou indéfinie, ou limitée à une paroi; mais de toute façon elle sépare deux régions de l'espace. Une masse fluide ne peut la traverser, car la rotation élémentaire de cette masse nulle au début deviendrait infinie au passage à travers la surface de discontinuité, ce qui est impossible dans un fluide parfait où la rotation élémentaire d'une masse est invariable.

Tant que dure l'écoulement, la surface de discontinuité se meut avec le fluide et s'accroît par conséquent de nouveaux éléments, là où se produit le jet; elle naît au point où le jet se sépare de la paroi, et c'est là que se produit la discontinuité des forces motrices qui provoque la formation de la surface de discontinuité.

Quand le débit est assez grand pour que, dans le mouvement continu, la valeur de la pression en certains points devienne négative, le mouvement change de caractère; deux cas principaux peuvent se présenter, qu'il est facile de discerner lorsqu'il s'agit des liquides.

Premier cas. — Le liquide remplit entièrement le vase dans lequel il se meut; alors, pour que la pression reste partout positive, ses dérivées deviennent nécessairement discontinues le long de la surface de pression nulle; il en est de

même de la vitesse, et une nouvelle forme d'écoulement en résulte, avec une surface de discontinuité au sein du liquide (1).

Deuxième cas. — Le liquide n'emplit pas entièrement le vase; alors de nouvelles surfaces libres peuvent naître aux points où la pression devient nulle, et modifient complètement le régime d'écoulement (2).

32. Helmholtz ne s'est pas borné à faire ces remarques générales, il a en même temps (1868) fourni le premier exemple de leur application. L'année suivante (1869), Kirchhoff a réussi à en former un assez grand nombre, dont les conditions à grande distance sont à peu près celles d'un courant uniforme et indéfini; il en a perfectionné notablement le mode d'exposition dans son *Traité de Physique mathématique* (Chap. XXI, XXII; 1877); sous cette dernière forme, la plupart de ces exemples ont été reproduits dans le *Traité du mouvement des fluides de H. Lamb* (1879), p. 98-109. Enfin M. Planck a indiqué dans les *Annales de Poggendorff* (1884) un autre moyen d'arriver aux mêmes résultats. Tous ces travaux sont relatifs aux mouvements permanents plans; les lignes de niveau et les lignes de flux sont définies par deux fonctions Φ , Ψ , qui sont la partie réelle et le coefficient de $\sqrt{-1}$ d'une fonction quelconque de la variable complexe $x + y\sqrt{-1}$. D'ailleurs, dans presque tous ces exemples, les conditions à grande distance diffèrent notablement de celles que la réalité impose, dans les circonstances analogues. Ainsi, quand le liquide sort du tube plat formé par les deux plans limités de l'Exemple II, Helmholtz adopte pour surfaces de discontinuité le prolongement de ces plans; le liquide formera un jet rectiligne indéfini; les conditions à grande distance dans le vase extérieur au tube

(1) Dans une Communication récente à la Société Royale de Londres (févr. 1887), Sir W. Thomson a examiné cette question sous un point de vue nouveau : une boule se meut dans un liquide indéfini, en repos à grande distance; quand sa vitesse de translation dépasse une certaine limite, ce n'est pas une surface de discontinuité partant de la surface de la boule qui se formera : ces surfaces sont instables (n° 40). C'est une surface libre, qui bientôt se détachera de la surface du corps et formera un tourbillon sans noyau, *a coreless vortex*, flottant au sein du liquide, dans le voisinage de la boule. En d'autres termes, tout le liquide sera encore animé d'un mouvement doué de potentiel, mais avec une constante cyclique autour du tourbillon vide. Sir W. Thomson a eu pour but d'éviter l'introduction de la surface de discontinuité, dont la production, dit-il, est « impossible soit dans les fluides parfaits, soit dans les fluides réels, par une action naturelle quelconque » (p. 83-84). Il me paraît que les difficultés sont de même ordre pour la surface libre avec mouvement cyclique, et pour la surface de discontinuité. D'ailleurs, dans un vase très grand *entièrement plein de liquide incompressible*, la conception du tourbillon sans noyau liquide est impossible; la seule chose possible, c'est la production du mouvement cyclique autour d'un noyau liquide, dont les vitesses intérieures ont un potentiel simple, et la surface de séparation du noyau et du liquide extérieur est une surface de discontinuité. Ainsi réduite, la nouvelle conception de Sir W. Thomson conserverait encore tout son intérêt si le mouvement permanent correspondant était stable.

(2) La trompe à eau de Bunsen, l'injecteur Giffard utilisent cette propriété.

n'ont plus aucun rapport avec celles de l'Exemple II, on n'a conservé que les conditions intérieures au tube.

Si le mouvement a lieu en sens inverse, du vase dans le tube, la solution particulière que propose Helmholtz (*fig. 18*),

$$x + yi = A \left[a(\Phi + \Psi i) + e^{a(\Phi + \Psi i)} + \sqrt{2} e^{a(\Phi + \Psi i)} - e^{2a(\Phi + \Psi i)} \right. \\ \left. - 2 \log \left(-\frac{e^{\sqrt{\Phi + i\Psi}}}{\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{\varepsilon^2 \sqrt{\Phi + i\Psi}}{2} + 1} \right) \right],$$

conserve les conditions de l'Exemple II à grande distance hors du tube, mais non

Fig. 18.

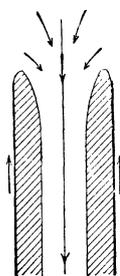
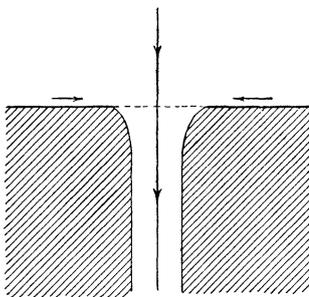


Fig. 19.

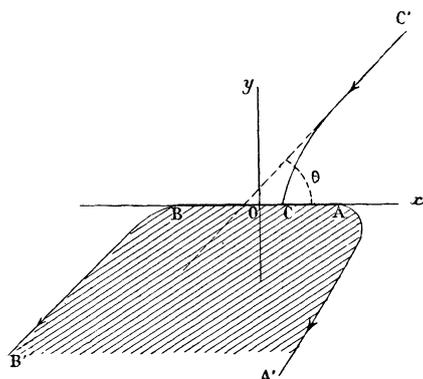


dans le tube : la moitié seulement de celui-ci est occupée par le liquide en mouvement ($x^2 < \frac{\Lambda^2 \pi^2}{4}$), et il reste deux bandes ($\frac{\Lambda^2 \pi^2}{4} < x^2 < \Lambda^2 \pi^2$), indéfinies du côté des y positifs, c'est-à-dire à l'intérieur du tube, où le liquide est entièrement en repos.

Les mêmes critiques s'appliquent à tous les exemples de Kirchhoff, quelque intéressants qu'ils soient. La forme de la surface de discontinuité qu'ils donnent est indépendante de la vitesse; les conditions à grande distance n'ont aucun rapport avec la réalité. Les exemples les plus curieux de Kirchhoff sont relatifs à l'effet de lames minces exposées sous un angle quelconque à l'action d'un courant uniforme indéfini : les surfaces de discontinuité qu'il obtient vont, en s'écartant indéfiniment, en arrière de l'obstacle (*fig. 20*), qui est suivi d'une masse indéfinie de liquide en repos; à très grande distance, l'influence de l'obstacle, bien loin d'avoir disparu, est devenue extrêmement grande. Prenons pour direction générale du courant celle des y décroissants : pour y positif très grand, le courant est sensiblement uniforme, la vitesse constante en grandeur et en direction. Pour y négatif et très grand au delà de l'obstacle, et pour toutes les valeurs de x inférieures en valeur absolue à une certaine grandeur qui croît indéfiniment avec y , la vitesse du courant est nulle : c'est seulement pour les valeurs de x plus

grandes que cette limite que la vitesse du courant devient sensiblement uniforme en grandeur et en direction. De même, le jet cylindrique formé à travers une

Fig. 20.



ouverture en mince paroi (*fig. 19*) correspond à des conditions à grande distance, très différentes de celles de l'exemple I.

33. Il me paraît maintenant nécessaire de préciser l'énoncé du problème général tel que je le comprends et de faire ressortir quelques caractères de la solution que les exemples particuliers d'Helmholtz et de Kirchhoff ne mettent pas en évidence.

On donne la forme et la position des solides immergés dans un liquide indéfini; on donne en outre les vitesses normales du liquide en tous les points d'une surface géométrique Σ qui entoure tous les corps solides: ce seront par exemple les vitesses à une très grande distance; enfin on connaît les constantes cycliques relatives à l'espace multiple limité par les solides et la surface Σ ; on demande de trouver le mouvement du liquide qui donne des pressions partout positives.

Examinons le cas des mouvements permanents *plans* d'un liquide qui n'est soumis à l'action d'aucune force extérieure et prenons pour fonction inconnue non pas le potentiel des vitesses, mais le courant ψ qui lui est orthogonal; les vitesses sont $\frac{\partial \psi}{\partial y}$, $-\frac{\partial \psi}{\partial x}$, et lorsqu'il y a un potentiel des vitesses, ψ satisfait à l'équation

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0.$$

ψ est constant le long de chaque paroi, et est déterminé à une constante près sur la surface limite par la valeur de la vitesse normale. Supposons enfin que toutes les constantes cycliques sont nulles.

Dans ces conditions, il y a une solution déterminée unique ψ , qui satisfait à

toutes les conditions aux parois et est continue, ainsi que ses dérivées premières, dans tout l'intérieur de la surface Σ . Cette solution devient $I\psi_1$ lorsque les vitesses normales à la surface Σ sont partout multipliées par la constante I que j'appellerai le débit. En même temps, $I\psi_1$ prend sur les parois des corps A, B, \dots les valeurs constantes Ia_1, Ib_1, \dots . Pour achever de déterminer le problème, il faut ajouter une condition relative à la pression en un point particulier. Par la construction même de l'appareil dans lequel se fait l'écoulement du liquide et les conditions dans lesquelles on l'emploie, on peut généralement trouver un point où la pression a une valeur indépendante de I , ou, plus généralement, en est une fonction connue; je m'occuperai d'abord du cas où la valeur de p_0 qui en résulte est indépendante de I : on a alors

$$p = p_0 - \frac{\rho}{2} \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 \right].$$

La solution $I\psi_1$ ne convient plus quand la plus grande vitesse devient égale ou supérieure à $\sqrt{\frac{2p_0}{\rho}}$. Une surface de discontinuité S , à déterminer, apparaît alors le long de la paroi A , par exemple. La solution complète est $I\psi_1 + \psi_2$, ψ_2 étant une fonction continue dont la dérivée normale à la surface S est discontinue. Il est facile de déterminer les conditions limites auxquelles la fonction ψ_2 est astreinte. Elle est constante sur chacune des parois, et aussi sur toute la surface limite Σ , puisque la condition relative à la vitesse normale à Σ est satisfaite par $I\psi_1$. Quant aux conditions relatives à la surface de discontinuité S , à cause de l'état permanent, la vitesse du liquide normale à cette surface est nulle; l'espace compris entre A et S est limité par une surface de forme permanente en tous les points de laquelle la vitesse normale est nulle: il est tout entier en repos; dans tout cet espace et jusqu'à la surface S , on a donc

$$(1) \quad I\psi_1 + \psi_2 = Ia_1 + a_2.$$

La conservation de la pression à travers la surface S exige alors que, en dehors de la surface S , la vitesse soit constante le long de cette surface; il faut que la pression dans le liquide en repos ne soit pas négative, ce qui donne

$$I \frac{\partial \psi_1}{\partial n} + \frac{\partial \psi_2}{\partial n} \geq \sqrt{\frac{2p_0}{\rho}},$$

et, si l'on arrive au débit I par un accroissement progressif et sans diminution, il paraît probable que la condition véritable est

$$(2) \quad I \frac{\partial \psi_1}{\partial n} + \frac{\partial \psi_2}{\partial n} = \sqrt{\frac{2p_0}{\rho}}.$$

En résumé, ψ_2 est continu, ainsi que ses dérivées, et satisfait à l'équation

$$\Delta_2 \psi_2 = 0,$$

dans tout l'espace compris à l'intérieur d'une surface dont une partie (parois fixes, surface Σ) est déterminée, et dont le reste (surface de discontinuité) a une forme inconnue. Examinons d'abord le cas particulier où tous les corps A, B, ... s'étendent jusqu'à l'infini. Leur surface est alors la continuation de la surface Σ , et l'on peut prendre zéro pour la valeur commune de ψ_2 sur toute la partie connue de la surface limite; sur la partie inconnue, ψ_2 et $\frac{\partial \psi_2}{\partial n}$ ont des valeurs déterminées par la position de cette partie inconnue :

$$(1) \quad \psi_2 = I(\alpha_1 - \psi_1)$$

$$(2) \quad \frac{\partial \psi_2}{\partial n} = \sqrt{\frac{2p_0}{\rho}} - I \frac{\partial \psi_1}{\partial n}.$$

Ces conditions déterminent probablement sans ambiguïté à la fois ψ_2 et la forme de la surface de discontinuité.

Ces équations révèlent une très importante propriété du mouvement discontinu : *La forme de la surface de discontinuité varie, en général, avec le débit I, ainsi que la distribution du courant définie par ψ_2 .*

En effet, si la surface de discontinuité était invariable, la condition (1) déterminerait complètement, dans tout l'espace, la valeur de ψ_2 qui contiendrait I en facteur, et cela est incompatible avec la seconde condition (2), à cause du terme $\sqrt{\frac{2p_0}{\rho}}$ indépendant de I. Il en serait de même quelle que soit la loi de variation de p_0 en fonction de I, sauf dans le cas particulier où p_0 serait proportionnel à I^2 .

Dans tous les problèmes usuels où p_0 reste peu différente de la pression atmosphérique, quel que soit le débit, la surface de discontinuité dépend du débit.

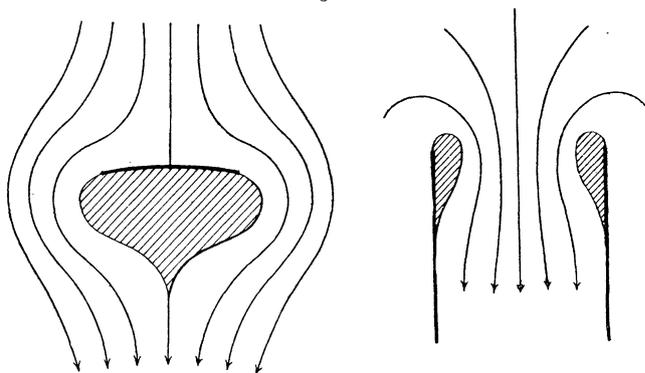
Cette propriété subsiste évidemment dans le cas général où les corps A, B, ... sont isolés au milieu du fluide.

34. Il est facile d'établir quelques propriétés générales de la surface de discontinuité et de la fonction complémentaire ψ_2 .

1° Pour que la surface de discontinuité puisse s'étendre jusqu'à la surface limite Σ , il faut que le débit I ait une valeur I_1 , telle que la vitesse $\sqrt{\frac{2p_0}{\rho}}$ soit atteinte en certains points, ou dans certaines régions de Σ . Quand le débit est inférieur à I_1 la surface de discontinuité se termine soit par la rencontre d'une paroi, soit par la réunion de deux nappes provenant de la subdivision de la même ligne de courant (*fig. 21*). La ligne de courant se continue au delà du point de réunion, mais avec

une vitesse décroissante. Ce point de rencontre où la vitesse a une valeur finie et une direction déterminée est nécessairement un point de rebroussement de la courbe qui limite la région où le liquide est en repos. Il en résulte que cette courbe aura le plus souvent un ou deux points d'inflexion; c'est ce qui arriverait

Fig. 21.



dans tous les exemples de Kirchhoff et d'Helmholtz, si l'on voulait conserver les conditions à grande distance du mouvement à vitesse continue ⁽¹⁾.

2° Examinons le cas où le potentiel des vitesses φ_1 du mouvement continu et celui du mouvement total $\varphi = I\varphi_1 + \varphi_2$ ont chacun une valeur unique partout où le liquide est en mouvement (n° 33); le potentiel φ_2 jouit de la même propriété.

La *circulation* suivant une ligne fermée quelconque qui ne coupe pas la surface de discontinuité est donc nulle (n° 2), et l'on a

$$(1) \quad \int \frac{\partial \psi_2}{\partial n} ds = 0;$$

ds est un élément d'arc d'une pareille ligne, et $\frac{\partial \psi_2}{\partial n}$ la dérivée de ψ_2 dans une direction normale à l'arc.

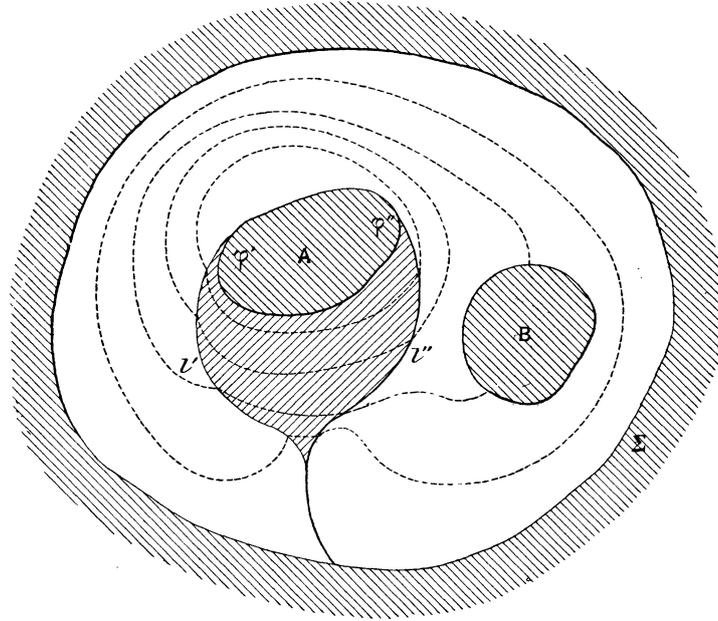
Supposons qu'il n'y ait qu'une surface de discontinuité émanant du corps A. ψ_2 atteint sa plus grande ou sa plus petite valeur sur le corps A, et sur la surface limite Σ .

Considérons une quelconque des lignes de courant ψ_2 qui entourent une seule région où ψ_2 est maximum ou minimum, sans couper la surface de discontinuité. Le signe de $\frac{\partial \psi_2}{\partial n}$ est constant sur toute l'étendue de cette ligne, et, pour que l'inté-

(1) J'examinerai prochainement dans ces *Annales* les difficultés d'intégration qui proviennent de cette circonstance.

grale (1) soit nulle, il faut que tous ses éléments soient nuls. ψ_2 est alors constant jusqu'à la surface de discontinuité; a_2 est la plus grande ou la plus petite valeur de ψ_2 . De même, au delà de la ligne de courant qui est tangente à la ligne de discontinuité, ψ_2 est constant jusqu'à la surface limite Σ . La disposition correspondante des lignes ψ_2 est représentée dans la *fig. 22* : une portion de ligne se détache de

Fig. 22.



la ligne Σ et vient se raccorder à la ligne de discontinuité en son point de rebroussement.

3^o La vitesse est discontinue sur la ligne S. Appelons θ_e, θ_i les angles de la normale à S avec les normales aux nappes extérieure et intérieure d'une ligne ψ_2 ; on trouve facilement les relations suivantes :

$$\left(\frac{\partial\psi_2}{\partial n}\right)_e \sin\theta_e = \left(\frac{\partial\psi_2}{\partial n}\right)_i \sin\theta_i, \quad \left(\frac{\partial\psi_2}{\partial n}\right)_e \cos\theta_e - \left(\frac{\partial\psi_2}{\partial n}\right)_i \cos\theta_i = \sqrt{\frac{2\rho_0}{\rho}}.$$

Envisageons le cas où deux nappes de la ligne S se raccordent : soient φ'_2, φ''_2 les valeurs du potentiel des vitesses aux points où S se détache de A, et K la période du potentiel à la surface du corps A; enfin soient l, l' les longueurs des deux nappes de S comptées depuis leur origine jusqu'au point de rebroussement.

La circulation est nulle sur un circuit qui entoure la ligne S et le corps A extérieurement; il en est de même pour un circuit intérieur à la région en repos, ce