ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

G. KOENIGS

Contributions à la théorie du cercle dans l'espace

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 1re série, tome 2 (1888), p. F1-F19

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1888_1_2__F1_0>

CONTRIBUTIONS

A LA

THÉORIE DU CERCLE DANS L'ESPACE;

PAR M. G. KOENIGS,

Maître de Conférences à l'École Normale.

Représentons par S_1, S_2, ..., S_5 les puissances d'un même point P de l'espace par rapport à cinq sphères orthogonales deux à deux, et de rayons R_1, R_2, ..., R_5; posons

$$\rho x_1 = \frac{S_1}{R_1}, \qquad \rho x_2 = \frac{S_2}{R_2}, \qquad \ldots, \qquad \rho x_5 = \frac{S_5}{R_5},$$

où ρ est un facteur quelconque. Les quantités x_i sont les coordonnées pentasphériques du point P; il existe entre elles la relation identique

$$(1) \qquad \sum x_i^2 = 0.$$

Toute sphère est représentée par une équation linéaire

$$(2) \qquad \sum a_i x_i = 0,$$

et tout cercle sera défini comme l'intersection de deux sphères,

$$(3) \qquad \sum a_i x_i = 0, \qquad \sum b_i x_i = 0.$$

Posons alors

$$(4) \qquad p_{ik} = a_i b_k - a_k b_i,$$

en sorte qu'on ait

$$(5) \qquad p_{ii} = 0, \qquad p_{ki} = -p_{ik};$$

les quantités p_{ik}, au nombre de dix seulement, si l'on tient compte des équations (5), seront les coordonnées du cercle (3). Ces quantités interviennent dans l'équation de chacune des sphères passant par le cercle et orthogonale à chacune des cinq sphères coordonnées. Par exemple, la sphère passant par le cercle (3) et orthogonale à la sphère S_i a pour équation

$$p_{i1}x_1 + p_{i2}x_2 + \ldots + p_{i5}x_5 = 0.$$

Ces dix quantités p_{ik} ne sont pas indépendantes. Il doit exister entre elles trois relations distinctes, car un cercle ne dépend dans l'espace que de six paramètres. Néanmoins nous allons être conduit à un plus grand nombre de relations non strictement identiques, comme on va le voir.

Soient α, β, γ, δ, ε les cinq premiers nombres écrits dans l'ordre de permutation naturelle 1, 2, 3, 4, 5 *à partir* de l'un d'eux, que nous appelons α, et posons alors, d'une façon générale avec cette convention,

$$\Omega_\alpha = p_{\beta\gamma}p_{\delta\varepsilon} + p_{\beta\delta}p_{\varepsilon\gamma} + p_{\beta\varepsilon}p_{\gamma\delta}.$$

Il y a cinq quantités Ω_α, car α peut être 1, 2, 3, 4 ou 5.

On trouve sans peine que les quantités p_{ik} vérifient, en vertu de leur définition, les relations

$$(6) \qquad \Omega_1 = 0, \qquad \Omega_2 = 0, \qquad \Omega_3 = 0, \qquad \Omega_4 = 0, \qquad \Omega_5 = 0,$$

et que réciproquement si des quantités p_{ik} $\left(\text{où } \begin{matrix} i \\ k \end{matrix} \right\} = 1, 2, 3, 4 \text{ ou } 5\Big)$ vérifient à la fois les relations (5) et (6), ces quantités sont les coordonnées d'un cercle dans l'espace. On prouve pour cette réciproque que les cinq sphères

$$p_{i1}x_1 + p_{i1}x_2 + \ldots + p_{i5}x_5 = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4 \text{ ou } 5)$$

se coupent suivant un même cercle en vertu des relations (5) et (6).

Restent maintenant les équations (6), qui sont au nombre de cinq et, en apparence du moins, ne laissent aux quantités homogènes p_{ik} qu'une quadruple indétermination. En réalité, ces relations (6) ne sont pas toutes distinctes.

Employons le langage des espaces à plusieurs dimensions. Dix quantités p_{ik} [vérifiant les relations (5)] sont les coordonnées homogènes ponctuelles dans un espace linéaire E à neuf dimensions, et l'équation $\Omega_\iota = 0$ représente dans l'espace E un espace *quadratique* à huit dimensions. Or on constate par un calcul facile que, dix quantités quelconques p_{ik} étant données, qui vérifient les équations (5), on a les identités

$$p_{i1}\Omega_1 + p_{i2}\Omega_2 + p_{i3}\Omega_3 + \ldots + p_{i5}\Omega_5 = 0, \tag{7}$$

au nombre de cinq; et, en s'appuyant sur ces identités, on prouve alors que les cinq espaces quadratiques à huit dimensions Ω_1, Ω_2, ..., Ω_5 ont en commun un espace à *six* dimensions qui est du *cinquième* degré.

A chaque point de cet espace E_6^5, du cinquième degré à six dimensions, répond un cercle de l'espace ordinaire, et inversement. Donc :

La géométrie du cercle dans l'espace ordinaire coïncide avec celle du point dans un espace quintique à six dimensions contenu dans un espace linéaire à neuf dimensions.

L'existence de cet espace E_6^5 commun aux espaces quadratiques Ω_1, Ω_2, ..., Ω_5 explique comment les équations (6) laissent au cercle sa sextuple indétermination, bien que deux d'entre elles ne soient pas *strictement* une conséquence des trois autres.

Je passe rapidement sur ces faits faciles à établir, et qui ne sont pas nouveaux, puisqu'ils ont servi à M. Stéphanos dans ses deux Notes à l'Académie des Sciences sur les systèmes de cercles [1].

Rencontre de deux cercles.

Le but de ces notes rapides est de montrer l'utilité des cinq formes quadratiques $\Omega_i(p)$, que nous avons ci-dessus définies : on y verra plus d'une analogie avec la théorie des systèmes de droites.

Soient deux cercles (p) et (p'); s'ils ont un point commun, P, les coordonnées pentasphériques de ce point doivent vérifier les équations

$$\left\{\begin{array}{ll} \sum\limits_{\omega} p_{i\omega}\, x_\omega = 0, & \sum\limits_{\omega} p_{k\omega}\, x_\omega = 0, \\ \sum\limits_{\omega} p'_{m\omega}\, x_\omega = 0, & \sum\limits_{\omega} p'_{n\omega}\, x_\omega = 0, \end{array}\right. \tag{8}$$

où i, k, m, n sont quatre indices quelconques parmi les cinq premiers. La résolution de ces quatre équations (8) se fait de la façon la plus simple, comme il suit.

---

(1) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences.*

Posons

$$\Omega_i(p,p') = \Omega_i(p',p) = \frac{1}{2}\sum_{\omega\rho} \frac{\partial\Omega_i}{\partial p_{\omega,\rho}} p'_{\omega,\rho};$$

les équations (8) donnent alors

$$(9) \qquad \frac{x_1}{\Omega_1(p,p')} = \frac{x_2}{\Omega_2(p,p')} = \ldots = \frac{x_5}{\Omega_5(p,p')};$$

et comme $x_1, x_2, \ldots, x_5$ doivent vérifier l'équation (1), on a la condition de rencontre

$$(10) \qquad \sum_{\omega} [\Omega_\omega(p,p')]^2 = 0.$$

Si, au contraire, la rencontre des deux cercles a lieu en deux points, on peut faire passer une sphère par les deux cercles, et les quatre équations (8) doivent se réduire à trois distinctes; on en conclut que tous les dénominateurs des équations (9) sont nuls, et l'on a alors la condition

$$(11) \qquad \Omega_1(p,p') = 0, \quad \Omega_2(p,p') = 0, \quad \ldots, \quad \Omega_5(p,p') = 0.$$

Mais on constate encore ici, facilement, que ces cinq équations n'en comportent que *deux* distinctes.

Rencontre de cercles infiniment voisins.

Si l'on veut, en particulier, que deux cercles infiniment voisins (p) et $(p+dp)$ se rencontrent, on trouve, si la rencontre a lieu en deux points,

$$(11)' \quad \Omega_1(dp) = 0, \quad \Omega_2(dp) = 0, \quad \Omega_3(dp) = 0, \quad \Omega_4(dp) = 0, \quad \Omega_5(dp) = 0;$$

et, si la rencontre n'a lieu qu'en un seul point, on a seulement

$$(10)' \qquad \sum_i [\Omega_i(dp)]^2 = 0.$$

C'est donc l'évanouissement d'une forme biquadratique des différentielles des coordonnées qui exprime la rencontre en un point unique; on en peut conclure tout de suite que les congruences de cercles n'ont généralement que quatre surfaces focales.

On voit par les formules (6), (10), (11), (10)', (11)' l'analogie avec la théorie classique des systèmes de droites.

Une autre forme quadratique.

Il est, outre les cinq formes quadratiques Ω_i, une sixième forme qui, elle aussi, intervient utilement dans cette théorie.

Pour donner un exemple des calculs et des réductions que l'on rencontre dans cette question, cherchons le rayon d'un cercle donné (p).

Je rappelle que le rayon ρ d'une sphère $\sum a_i x_i = 0$ est donné par la formule

$$\rho^2 = \frac{\sum a_i^2}{\left(\sum \frac{a_i}{R_i}\right)^2};$$

cela étant, comme toute sphère passant par le cercle (p) est représentée par l'équation $\sum (\lambda p_{\alpha i} + \mu p_{\beta i}) x_i = 0$, où α, β sont deux des indices 1, 2, 3, 4, 5 et λ, μ deux paramètres, le rayon de cette sphère aura pour carré

$$\rho^2 = \frac{\sum (\lambda p_{\alpha i} + \mu p_{\beta i})^2}{\left[\lambda \sum \frac{p_{\alpha i}}{R_i} + \mu \sum \frac{p_{\beta i}}{R_i}\right]^2}.$$

Cherchons le minimum de ρ^2 lorsque la sphère, et par suite $\lambda : \mu$, varie, ce minimum est le rayon du cercle (p).

Sa détermination n'offre aucune difficulté; on trouve

$$\rho^2 = \frac{-\left(\sum_i p_{\alpha i} p_{\beta i}\right)^2 + \left(\sum_i p_{\alpha i}^2\right)\left(\sum_i p_{\beta i}^2\right)}{\sum_i p_{\alpha i}^2 \left(\sum_i \frac{p_{\beta i}}{R_i}\right)^2 + \sum_i p_{\beta i}^2 \left(\sum_i \frac{p_{\alpha i}}{R_i}\right)^2 - 2 \sum \frac{p_{\alpha i}}{R_i} \sum \frac{p_{\beta i}}{R_i} \sum p_{\alpha i} p_{\beta i}}.$$

Cette expression se transforme facilement comme il suit.

On a d'abord

$$\left(\sum_i p_{\alpha i}^2\right)\left(\sum_i p_{\beta i}^2\right) - \left(\sum_i p_{\alpha i} p_{\beta i}\right)^2 = \sum_{ij} (p_{\alpha i} p_{\beta j} - p_{\alpha j} p_{\beta i})^2.$$

Mais on a aussi, en vertu de (6),

$$p_{\alpha i} p_{\beta j} - p_{\alpha j} p_{\beta i} = p_{\alpha\beta} p_{ij};$$

il vient donc

$$\left(\sum_i p_{\alpha i}^2\right)\left(\sum_i p_{\beta i}^2\right)-\left(\sum_i p_{\alpha i}p_{\beta i}\right)^2=p_{\alpha\beta}^2\sum_{ij}p_{ij}^2;$$

on a ensuite

$$\begin{aligned}\sum_i p_{\alpha i}^2\left(\sum_i \frac{p_{\beta i}}{R_i}\right)^2+\sum_i p_{\beta i}^2\left(\sum_i \frac{p_{\alpha i}}{R_i}\right)^2-2\sum\frac{p_{\alpha i}}{R_i}\sum\frac{p_{\beta i}}{R_i}\sum p_{\alpha i}p_{\beta i}\\ =\sum_{ij}\frac{1}{R_i^2}(p_{\alpha j}^2p_{\beta i}^2+p_{\beta j}^2p_{\alpha i}^2-2p_{\alpha i}p_{\beta i}p_{\alpha j}p_{\beta j})\\ +\sum_{ijk}\frac{2}{R_iR_k}(p_{\alpha i}^2p_{\beta i}p_{\beta k}+p_{\beta j}^2p_{\alpha i}p_{\alpha k}-p_{\alpha i}p_{\beta k}p_{\alpha j}p_{\beta j}-p_{\beta i}p_{\alpha k}p_{\alpha j}p_{\beta j}).\end{aligned}$$

Or on a

$$\begin{aligned}p_{\alpha j}^2p_{\beta i}^2+p_{\beta j}^2p_{\alpha i}^2-2p_{\alpha i}p_{\beta i}p_{\alpha j}p_{\beta j}=(p_{\alpha j}p_{\beta i}-p_{\alpha i}p_{\beta j})^2=p_{\alpha\beta}^2p_{ij}^2,\\ p_{\alpha j}^2p_{\beta i}p_{\beta k}+p_{\beta j}^2p_{\alpha i}p_{\alpha k}-p_{\alpha i}p_{\beta k}p_{\alpha j}p_{\beta j}-p_{\beta i}p_{\alpha k}p_{\alpha j}p_{\beta j}\\ =(p_{\alpha j}p_{\beta i}-p_{\alpha i}p_{\beta j})(p_{\alpha j}p_{\beta k}-p_{\alpha k}p_{\beta j})=p_{\alpha\beta}^2p_{ij}p_{kj};\end{aligned}$$

le dénominateur de ρ^2 s'écrit donc

$$p_{\alpha\beta}^2\sum_{ij}\frac{p_{ij}^2}{R_i^2}+p_{\alpha\beta}^2\sum_{ijk}\frac{2p_{ij}p_{kj}}{R_iR_k}=p_{\alpha\beta}^2\sum_j\left(\sum_i\frac{p_{ij}}{R_i}\right)^2;$$

on a donc finalement

$$\rho^2=\frac{\displaystyle\sum_{ij}p_{ij}^2}{\displaystyle\sum_j\left(\sum_i\frac{p_{ij}}{R_i}\right)^2}. \tag{12}$$

Le numérateur de cette fraction est la somme des carrés des coordonnées du cercle (p); je représenterai par $\Xi(p)$ cette forme quadratique

$$\Xi(p)=\sum_{ij}p_{ij}^2. \tag{13}$$

Cette forme $\Xi(p)$ joue un rôle important dans la théorie des cercles dans l'espace. Lorsqu'elle est nulle, le rayon du cercle (p) est nul. Nous allons montrer que sa forme polaire intervient aussi très utilement; je représenterai par $\Xi(p, p')$ cette forme polaire, en sorte que l'on aura

$$\Xi(p, p') = \frac{1}{2}\sum_{ij} \frac{\partial \Xi(p)}{\partial p_{ij}} p'_{ij} = \sum_{ij} p_{ij} p'_{ij}. \tag{14}$$

Cercles en involution.

Considérons deux cercles (p), (p'). Si par l'un d'eux on peut mener une sphère orthogonale à l'autre, réciproquement, on peut, par celui-ci, mener une sphère orthogonale au premier, et nous dirons alors que les deux cercles sont *en involution*.

Prouvons d'abord la réciprocité que nous venons d'avancer.

Rappelons que les *foyers* d'un cercle sont les sommets des deux cônes isotropes passant par ce cercle. Si un cercle est orthogonal à une sphère, il a sur elle ses foyers, et, réciproquement, si les foyers d'un cercle sont sur une sphère, celle-ci est orthogonale au cercle. En effet, pour qu'un cercle soit orthogonal à une sphère, il faut et il suffit que deux sphères quelconques, passant par ce cercle, soient orthogonales à la sphère; si l'on prend, en particulier, pour les deux sphères les cônes isotropes qui passent par ce cercle, on voit que la double condition d'orthogonalité consistera précisément en ce que les sommets de ces cônes soient sur la sphère. Ajoutons que, lorsqu'un cercle est tracé sur une sphère, le rapport des distances d'un point quelconque de la sphère aux deux foyers est constant, et, réciproquement, le lieu des points, dont le rapport des distances à deux points fixes est constant, est une sphère qui contient le cercle dont ces deux points sont les foyers.

Ceci posé, si par le cercle (p') on peut mener une sphère S orthogonale au cercle (p), cette sphère S doit passer par les foyers P, Q du cercle (p), et, en appelant P′, Q′ les foyers du cercle (p'), puisque les points P, Q sont sur une même sphère passant par (p'), on a

$$\frac{PQ'}{PP'} = \frac{QQ'}{PP'}. \tag{15}$$

Cette égalité peut s'écrire aussi

$$\frac{PQ'}{QQ'} = \frac{PP'}{QP'},$$

et elle exprime alors que les points P′, Q′ sont sur une même sphère passant par le cercle (p) qui a P, Q pour foyers; il en résulte qu'il existe une sphère passant par le cercle (p), et orthogonale au cercle (p'). La réciproque est ainsi établie.

Remarquons ici que les points P, P′, Q, Q′ forment un quadrilatère dont le produit de deux côtés opposés est égal au produit des deux autres.

Cherchons maintenant à exprimer que deux cercles (p), (p') sont en involution.

Si, par le cercle (p'), on peut mener une sphère S orthogonale au cercle (p), toutes les sphères passant par (p) sont orthogonales à S, et, réciproquement, si deux sphères passant par (p) sont orthogonales à une sphère S passant par (p'), toutes les sphères passant par (p) seront orthogonales à S, et les cercles (p), (p') seront en involution.

Prenons donc la sphère

$$\sum_i (\lambda p'_{\alpha i} + \mu p'_{\beta i}) x_i = 0,$$

menée par le cercle (p') et qui, par hypothèse, est orthogonale à toutes les sphères menées par le cercle (p), on aura, en exprimant l'orthogonalité avec les sphères

$$\sum p_{\rho i} x_i = 0, \qquad \sum_i p_{\sigma i} x_i = 0,$$

les conditions (¹)

$$\lambda \sum_i p'_{\alpha i} p_{\rho i} + \mu \sum_i p'_{\beta i} p_{\rho i} = 0,$$

$$\lambda \sum_i p'_{\alpha i} p_{\sigma i} + \mu \sum_i p'_{\beta i} p_{\sigma i} = 0;$$

d'où, en éliminant λ, μ,

$$\sum_i p'_{\alpha i} p_{\rho i} \sum_i p'_{\beta i} p_{\sigma i} - \sum_i p'_{\beta i} p_{\rho i} \sum_i p'_{\alpha i} p_{\sigma i} = 0.$$

(¹) On sait, en effet, que l'orthogonalité des sphères

$$\sum a_i x_i = 0, \qquad \sum b_i x_i = 0$$

s'exprime par l'équation

$$\sum a_i b_i = 0.$$

Cette équation peut prendre une forme beaucoup plus symétrique, d'où sont éliminés les indices α, β, ρ, σ; elle peut s'écrire, en effet,

$$\sum_{ij} (p'_{\alpha i} p'_{\beta j} - p'_{\alpha j} p'_{\beta i})(p_{\rho i} p_{\sigma j} - p_{\sigma i} p_{\rho j}) = 0,$$

c'est-à-dire,

$$p_{\alpha\beta} p_{\rho\sigma} \sum_{ij} p_{ij} p'_{ij} = 0,$$

en vertu des équations (6).

On voit donc que *l'équation*

$$\Xi(p, p') = 0 \tag{16}$$

exprime l'involution [1] *des deux cercles* (p) *et* (p').

La symétrie de cette équation met de nouveau en évidence la réciprocité que nous avons directement démontrée [2].

---

[1] Il y a encore une autre espèce d'involution de deux cercles que l'on pourrait appeler *bi-involution;* elle a lieu quand un cercle (p) passe par les foyers d'un autre (p'); la relation est réciproque, et toute sphère menée par l'un des cercles est orthogonale à toute sphère menée par l'autre, et, par suite, est orthogonale à ce cercle lui-même. Dans ce cas, l'équation d'orthogonalité

$$p_{\alpha 1} p'_{\beta 1} + p_{\alpha 2} p'_{\beta 2} + \ldots + p_{\alpha 5} p'_{\beta 5} = 0$$

a lieu pour toutes les valeurs des indices α et β. Quatre seulement de ces conditions sont distinctes.

[2] Il existe un élément intéressant, que l'on pourrait appeler l'angle de deux cercles dans l'espace. Soient un cercle c et un cercle c'; soient Φ, Φ_0; Φ', Φ'_0 leurs foyers respectifs. Les sphères passant par c' tracent sur la droite $\Phi\Phi_0$ une involution; soient Δ, Δ_0 les points doubles de cette involution; et considérons le rapport anharmonique

$$\rho = (\Delta\Delta_0 \Phi\Phi_0).$$

Ce que nous proposons d'appeler l'angle des cercles c et c', c'est la quantité

$$V = \frac{1}{2i} \log \rho;$$

on a la formule

$$\cos V = \frac{\sum p_{ik} p'_{ik}}{\sqrt{\sum p_{ik}^2} \sqrt{\sum p'^2_{ik}}} = \frac{\Xi(p, p')}{\sqrt{\Xi(p)\,\Xi(p')}}.$$

On voit que dans l'expression de $\cos V$ les cercles c et c' figurent symétriquement : quand V est droit, les cercles sont en involution.

Des systèmes de cercles et, en particulier, des systèmes linéaires.

Une équation homogène, entre les coordonnées d'un cercle, représente une série cinq fois indéterminée de cercles : deux représentent une série quatre fois indéterminée, trois représentent un *complexe* de cercles ou cercles trois fois indéterminés, quatre équations représentent une *congruence* de cercle (double indétermination), cinq représentent une surface cerclée, et enfin six déterminent complètement un ou plusieurs cercles.

Si toutes les équations sont linéaires, on a des systèmes linéaires de cercles, que nous représenterons par les symboles Λ_5, Λ_4, Λ_3, Λ_2, Λ_1, Λ_0, l'indice indiquant l'indétermination du système.

Le système Λ_0, ainsi que le système Λ_2, a été l'objet de fort intéressantes recherches de M. Stéphanos aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, recherches que nous avons déjà citées. Disons, d'ailleurs ici, une fois pour toutes, que nous ne connaissons nul autre travail sur cette question pleine d'intérêt des cercles dans l'espace ([1]).

D'après ce que nous avons dit au début sur l'espace E_6^5, commun aux hyperquadriques Ω_i, on voit que les six équations linéaires qui définissent Λ_0 auront en commun avec les équations

$$\Omega_1 = 0, \qquad \Omega_2 = 0, \qquad \Omega_3 = 0, \qquad \Omega_4 = 0, \qquad \Omega_5 = 0$$

un nombre de solutions égal au degré de l'espace commun à ces hyperquadriques, c'est-à-dire égal à cinq.

Le système Λ_0 est donc un ensemble de cinq cercles, c'est le *pentacycle* de M. Stéphanos.

Montrons comment la notion de *pentacycle* est liée à celle de *congruence linéaire* par le moyen de celle d'*involution de deux cercles*.

Si l'on considère les quatre équations linéaires entre les p_{ik} qui définissent une congruence, savoir

$$(17) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\sum a_{ik} p_{ik} = 0, \\ &\sum b_{ik} p_{ik} = 0, \\ &\sum c_{ik} p_{ik} = 0, \\ &\sum f_{ik} p_{ik} = 0, \end{aligned} \right.$$

([1]) J'ai communiqué les principaux faits, réunis dans ce résumé, à la Société mathématique de France en avril 1887.

on peut remplacer l'une quelconque de ces équations par la combinaison linéaire

$$\sum (\lambda a_{ik} + \mu b_{ik} + \nu c_{ik} + \rho f_{ik}) p_{ik} = 0.$$

Or posons

$$\lambda a_{ik} + \mu b_{ik} + \nu c_{ik} + \rho f_{ik} = \sigma p'_{ik},$$

ce qui assujettit simplement les quantités p'_{ik} à six équations linéaires; si l'on veut, en outre, que les p'_{ik} soient les coordonnées d'un cercle, le problème sera déterminé, et l'on aura cinq solutions ou cinq cercles $(p^{(1)})$, $(p^{(2)})$, $(p^{(3)})$, $(p^{(4)})$, $(p^{(5)})$ formant un *pentacycle*. Aux équations linéaires primitives on peut donc substituer quatre quelconques des cinq équations

$$\Xi(p^{(\omega)}, p) = \sum_{ik} p_{ik}^{(\omega)} p_{ik} = 0,$$

qui exprime que les cercles de la congruence sont en involution avec le cercle $(p^{(\omega)})$.

Les cercles d'une congruence linéaire sont donc en involution avec cinq cercles formant un pentacycle.

Notons encore que, si l'on considère quatre cercles, les cercles en involution avec eux forment une congruence linéaire et sont en involution avec un cinquième. Ce cinquième cercle forme avec les quatre premiers un pentacycle, en sorte qu'un pentacycle est déterminé par quatre de ses cercles.

Je n'insiste pas ici sur ces résultats, présentés, sous une forme un peu différente, par M. Stéphanos et fort élégamment développés par lui. Je présenterai seulement quelques remarques sur les systèmes Λ_5, qui me paraissent devoir être l'origine de voies nouvelles.

Considérons l'équation

$$\sum_{ik} a_{ik} p_{ik} = 0, \tag{18}$$

qui représente un système Λ_5; je vais chercher la distribution des cercles de ce système sur la sphère S

$$\sum_i l_i x_i = 0;$$

soit donc une autre sphère Σ,

$$\sum_i \lambda_i x_i = 0$$

qui coupe la première suivant le cercle (p)

$$p_{ik} = l_i\lambda_k - l_k\lambda_i;$$

ce cercle faisant partie du système Λ_5, nous devons avoir

$$\sum_{ik} a_{ik}(l_i\lambda_k - l_k\lambda_i) = 0$$

ou encore, en convenant que $a_{ik} = -a_{ki}$, $a_{ii} = 0$,

$$\sum_i \lambda_i \sum_k a_{ik} l_k = 0. \tag{19}$$

Considérons alors la sphère S′,

$$\sum_i l'_i x_i = 0,$$

où l'on prend

$$l'_i = \sum_k a_{ik} l_k, \tag{20}$$

l'équation

$$\sum_i \left(\lambda_i \sum_k a_{ik} l_k\right) = \sum_i l'_i \lambda_i$$

exprime que les sphères S′ et Σ sont orthogonales. On a, d'ailleurs, évidemment

$$\sum l'_i l_i = 0, \tag{21}$$

en sorte que S′ est aussi orthogonale à S; le cercle (p), intersection de S et de Σ, est donc orthogonal à S′. D'où ce théorème :

Tous les cercles d'un système Λ_5 *qui sont tracés sur une sphère* S *quelconque sont orthogonaux à une seconde sphère* S′, que nous appellerons la *conjuguée de* S.

Nous avons déjà remarqué qu'une sphère et sa conjuguée sont orthogonales d'après l'équation (21). Mais la correspondance entre S et S′ n'est pas réciproque; en effet, *toutes les sphères conjuguées des sphères de l'espace sont orthogonales à une sphère fixe* K, que nous appellerons la *sphère centrale*.

Pour établir cette proposition, remarquons, en effet, que les cinq équations

$$\sum_k a_{ik} l_k = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5) \tag{22}$$

sont compatibles, car leur déterminant est symétrique gauche d'ordre impair. Soient K_1, K_2, K_3, K_4, K_5 les solutions de ces équations compatibles. On voit d'après (19) que tous les cercles tracés sur la sphère (K), $\sum K_i x_i = 0$, font partie du système A_5. Le cercle (K, S), intersection des sphères (K) et (S), fait donc partie du système A_5; il est ainsi orthogonal à la sphère (S′), et, par conséquent, la sphère (K) qui le contient est orthogonale à (S′).

C. Q. F. D.

Toutes les sphères qui coupent la sphère centrale suivant un même cercle ont même conjuguée.

En effet, les équations (20) donnent la même valeur pour les l'_i si l'on y remplace les l_k par $l_k + \rho K_k$, c'est-à-dire si l'on y remplace la sphère S par une sphère quelconque passant par le cercle X, intersection des sphères K et S. On peut donc énoncer le théorème suivant :

Tous les cercles du système A_5 *qui coupent deux fois un cercle quelconque* X *de la sphère centrale sont orthogonaux à une même sphère* S′.

Appelons X′ le cercle (S′, K); la correspondance entre les sphères S, S′ se réduit, on le voit, à la correspondance entre les cercles X, X′, traces de ces sphères sur la sphère centrale.

D'abord les cercles X, X′ sont orthogonaux entre eux, comme on le voit sans peine, puisque X est orthogonal à la sphère S′, qui est orthogonale à la sphère K.

Mais cela ne suffit pas pour pouvoir construire le cercle X′ lorsque le cercle X est donné, il est nécessaire de recourir à l'étude des formules (20). Nous serons ainsi conduits tout d'abord à définir les *invariants* d'un système A_5, dans lesquels on verra encore intervenir les formes quadratiques déjà considérées.

Cherchons les sphères qui coïncident avec leurs conjuguées.

On peut prévoir que, s'il existe de telles sphères, leur rayon est nul; car, si une sphère est orthogonale à elle-même, son rayon est nul, et c'est ici le cas, puisqu'une sphère et sa conjuguée sont orthogonales; en second lieu, les centres de ces sphères de rayon nul doivent être sur la sphère centrale, puisqu'elles leur sont orthogonales.

Mais les formules (20) nous donneront des résultats plus complets. Exprimons, conformément à l'hypothèse, que l'on a

$$\frac{l'_1}{l_1} = \frac{l'_2}{l_2} = \frac{l'_3}{l_3} = \frac{l'_4}{l_4} = \frac{l'_5}{l_5} = -s,$$

où s est un paramètre à déterminer. Les formules (20) nous donneront

$$\begin{aligned}
s\ l_1 + a_{12} l_2 + a_{13} l_3 + a_{14} l_4 + a_{15} l_5 &= 0,\\
a_{21} l_1 + \ s\ l_2 + a_{23} l_3 + a_{24} l_4 + a_{25} l_5 &= 0,\\
a_{31} l_1 + a_{32} l_2 + \ s\ l_3 + a_{34} l_4 + a_{35} l_5 &= 0,\\
a_{41} l_1 + a_{42} l_2 + a_{43} l_3 + \ s\ l_4 + a_{45} l_5 &= 0,\\
a_{51} l_1 + a_{52} l_2 + a_{53} l_3 + a_{54} l_4 + \ s\ l_5 &= 0;
\end{aligned}$$

on tire de là l'équation en s

$$f(s) = \begin{vmatrix} s & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & s & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & s \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation change simplement de signe si l'on y change le signe de s; on a, en effet,

$$f(-s) = \begin{vmatrix} -s & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & -s & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & -s \end{vmatrix}$$

ou, comme $a_{ik} = -a_{ki}$, on peut écrire

$$f(-s) = (-1)^5 \begin{vmatrix} s & a_{21} & a_{31} & a_{41} & a_{51} \\ a_{12} & s & a_{32} & a_{42} & a_{52} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{15} & a_{25} & a_{35} & a_{45} & s \end{vmatrix};$$

le déterminant est $f(s)$ où les lignes sont devenues les colonnes : on a donc

$$f(-s) = (-1)^5 f(s) = -f(s).$$

L'équation du cinquième degré $f(s) = 0$ ne contient donc que des termes impairs et peut s'écrire

$$f(s) = s(s^4 + I s^2 + J) = 0.$$

La solution $s = 0$ fournit la sphère centrale elle-même; mais nous voyons qu'il y aura encore quatre autres sphères, celles-ci de rayon nul, qui vérifieront l'énoncé, et qui seront données par l'équation

$$s^4 + I s^2 + J = 0.$$

Les quantités I et J ont pour expression

$$I = \sum_{ij} a_{ij}^2,$$
$$J = \sum_{i} (a_{mn} a_{pq} + a_{mp} a_{qn} + a_{mq} a_{np})^2;$$

dans cette dernière formule, les indices i, m, n, p, q sont les cinq premiers indices, pris dans l'ordre de permutation 1, 2, 3, 4, 5 à partir de l'un d'eux i.

Représentons par $\xi(a)$ la forme adjointe de la forme $\Xi(p)$, et par $\omega_1(a)$, $\omega_2(a)$, $\omega_3(a)$, $\omega_4(a)$, $\omega_5(a)$ les formes adjointes de $\Omega_1(p)$, $\Omega_2(p)$, ..., $\Omega_5(p)$; on voit que l'on a

$$I = \xi(a),$$
$$J = \sum_{i} [\omega_i(a)]^2.$$

Ces quantités I et J sont les *invariants* du système Λ_5.

On conçoit que ces invariants ont une importance capitale, car on en pourra déduire aussi les invariants des systèmes linéaires inférieurs Λ_4, Λ_3, Λ_2, Λ_1, Λ_0, qui seront des *combinants* déduits de ces invariants.

Reprenons maintenant l'équation

$$s^4 + I s^2 + J = 0,$$

et désignons par σ, $-\sigma$, σ', $-\sigma'$ les racines de cette équation. A chacune répond une sphère, ce qui donne les quatre sphères Σ, Σ_0, Σ', Σ'_0 dont nous désignerons les centres par c, c_0, c', c'_0.

Prenons deux de ces sphères, correspondant à deux racines quelconques s, s' de l'équation en s, nous aurons, en désignant par g_i et g'_i les coordonnées de ces sphères,

$$-s g_i = \sum_k a_{ik} g_k,$$

$$-s' g'_k = \sum_i a_{ki} g'_i.$$

On tire de la première de ces équations

$$-s \sum_i g_i g'_i = \sum_i g'_i \sum_k a_{ik} g_k = \sum_{ki} a_{ik} g_k g'_i,$$

et de la seconde

$$-s' \sum_k g_k g'_k = \sum_k g_k \sum_i a_{ki} g'_i = \sum_{ik} a_{ki} g_k g'_i :$$

mais, comme

$$\sum_i g_i g'_i = \sum_k g_k g'_k,$$

on peut écrire, en ajoutant,

$$(s + s') \sum_i g_i g'_i = \sum_{ik} (a_{ik} + a_{ki}) g_k g'_i = 0,$$

car $a_{ik} = - a_{ki}$.

Supposons que s et s' soient égaux et de signe contraire, alors cette équation a lieu d'elle-même; mais, dans le cas contraire, on a

$$\sum_i g_i g'_i = 0.$$

De là ce théorème : *La sphère Σ et la sphère Σ_0 sont toutes deux orthogonales aux sphères Σ' et Σ'_0.*

Mais, comme les rayons des sphères Σ et Σ' sont nuls, il faut, pour qu'elles soient orthogonales, que leurs centres soient sur une même ligne isotrope.

On voit ainsi que les droites cc', cc'_0, c_0c', $c_0c'_0$ sont quatre droites isotropes, et comme les points c, c_0, c', c'_0 sont sur la sphère centrale, on en conclut que les côtés du quadrilatère $cc'c_0c'_0c$ sont quatre génératrices rectilignes de la sphère centrale; autrement dit, les droites cc_0, $c'c'_0$ sont deux droites conjuguées par rapport à la sphère centrale.

Utilisons ces résultats dans l'étude de la correspondance entre les cercles X et X' déjà définis.

Prenons pour sphères de référence S_1 et S_2 deux sphères orthogonales passant en c et c_0 et orthogonales à la sphère K; pour sphères S_3 et S_4, deux sphères orthogonales entre elles et à K, et passant par c' et c'_0; enfin, prenons pour S_5 la sphère K.

Ce système de cinq sphères sera quintuplement orthogonal, et la correspondance entre les sphères $S(l_1, l_2, \ldots, l_5)$ et $S'(l'_1, l'_2, \ldots, l'_5)$ est, eu égard au choix des coordonnées, établie par les formules

$$(23)\qquad \left\{\begin{aligned} \rho l'_1 &= l_2, \\ \rho l'_2 &= -l_1, \\ \rho l'_3 &= a l_4, \\ \rho l'_4 &= -a l_3, \\ l'_5 &= 0, \end{aligned}\right.$$

où ρ est un paramètre de proportionnalité, et a une constante. On peut regarder l_1, l_2, l_3, l_4 comme les coordonnées tétracirculaires *sur la sphère* K du cercle X, et l'_1, l'_2, l'_3, l'_4 comme les coordonnées du cercle X'. Les quatre premières formules ci-dessus établissent donc la correspondance entre ces cercles.

D'après ces formules, l'équation du cercle X étant

$$l_1 x_1 + l_2 x_2 + l_3 x_3 + l_4 x_4 = 0,$$

celle du cercle X' sera,

$$(24)\qquad l_2 x_1 - l_1 x_2 + a(l_4 x_3 - l_3 x_4) = 0.$$

Le cercle Γ mené par les points c et c_0 orthogonalement au cercle X a pour équation

$$l_2 x_1 - l_1 x_2 = 0;$$

le cercle Γ' mené, de même, par les points c' et c'_0, orthogonalement au cercle X, a pour équation

$$l_4 x_3 - l_3 x_4 = 0;$$

l'équation (24) prouve tout d'abord que le cercle X' passe par l'intersection des cercles Γ et Γ'.

Notons ici que, puisque Γ et Γ' sont, par construction, orthogonaux au cercle X, le cercle X' se trouve naturellement être orthogonal à X. Il faut donc trouver une troisième propriété du cercle X', qui permette d'achever sa construction. Dans cette propriété doit forcément intervenir l'invariant absolu a, qui, d'après nos notations, est lié aux invariants I et J par l'équation

$$\left(\frac{1+a^2}{a}\right)^2 = \frac{\mathrm{I}^2}{\mathrm{J}}.$$

Rappelons que le cosinus de l'angle (au sens ordinaire) de deux cercles (l), (m) tracés sur K est donné par la formule

$$\cos(\widehat{l, m}) = \frac{l_1 m_1 + l_2 m_2 + l_3 m_3 + l_4 m_4}{\sqrt{l_1^2+l_2^2+l_3^2+l_4^2}\sqrt{m_1^2+m_2^2+m_3^2+m_4^2}};$$

cela étant, j'appelle V′ l'angle du cercle X′ avec le cercle Γ, qui a pour cosinus

$$\cos \mathrm{V}' = \frac{l_2^2 + l_1^2}{\sqrt{l_1^2+l_2^2}\sqrt{(l_1^2+l_2^2)+a^2(l_3^2+l_4^2)}} = \sqrt{\frac{l_1^2+l_2^2}{l_1^2+l_2^2+a^2(l_3^2+l_4^2)}}.$$

L'angle de X′ avec Γ′ est égal à $\frac{\pi}{2} - \mathrm{V}'$, puisque Γ et Γ′ sont orthogonaux (attendu que leurs plans passent par les droites cc_0 et $c'c'_0$ qui sont conjuguées); on a ainsi

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{V}'\right) = \sin \mathrm{V}' = a\sqrt{\frac{l_3^2+l_4^2}{l_1^2+l_2^2+a^2(l_3^2+l_4^2)}},$$

ce que l'on peut encore écrire

$$\tag{25} \operatorname{tang} \mathrm{V}' = a\sqrt{\frac{l_3^2+l_4^2}{l_1^2+l_2^2}}.$$

Or considérons le cercle Γ_0 qui coupe orthogonalement le cercle Γ en c et c_0; il a pour équation

$$l_1 x_1 + l_2 x_2 = 0;$$

de même, le cercle Γ'_0 qui coupe orthogonalement le cercle Γ_0 en c' et c'_0, a pour équation

$$l_3 x_3 + l_4 x_4 = 0;$$

ces deux cercles se coupent orthogonalement, et le cercle X passe par leur intersection. Soit V l'angle que X fait avec Γ_0, l'angle avec Γ'_0 sera $\frac{\pi}{2} - \mathrm{V}$, et l'on aura

$$\cos \mathrm{V} = \sqrt{\frac{l_1^2+l_2^2}{l_1^2+l_2^2+l_3^2+l_4^2}},$$

$$\sin \mathrm{V} = \sqrt{\frac{l_3^2+l_4^2}{l_1^2+l_2^2+l_3^2+l_4^2}},$$

d'où

$$\operatorname{tang} V = \sqrt{\frac{l_3^2 + l_4^2}{l_1^2 + l_2^2}};$$

la formule (25) devient donc

$$\operatorname{tang} V' = a \operatorname{tang} V. \tag{26}$$

En résumé, le cercle X étant donné, on mènera par c et c_0 un cercle Γ orthogonal à X, et par c' et c'_0 un cercle Γ' orthogonal aussi à X : on construira ensuite les cercles Γ_0 et Γ'_0 qui coupent respectivement à angle droit le cercle Γ en c et c_0, et le cercle Γ' en c' et c'_0 ; ces cercles Γ_0, Γ'_0 sont orthogonaux et se coupent en deux points situés sur le cercle X; soient V, $\frac{\pi}{2} - V$ les angles sous lesquels le cercle X coupe ces cercles. Pour construire le cercle X', on mènera, par les points communs aux cercles Γ et Γ', un cercle qui coupera le premier sous l'angle V', et le second sous l'angle $\frac{\pi}{2} - V'$, où V' est donné par la formule

$$\operatorname{tang} V' = a \operatorname{tang} V.$$

Je n'insisterai pas davantage ici sur ces questions pleines d'intérêt, mais qui demanderaient, on le voit, à être traitées avec détail.

Je voulais surtout signaler ces formes quadratiques Ω et Ξ, qui interviennent si naturellement dans cette théorie.