

HERMITE

**Sur les racines de la fonction sphérique de seconde espèce.
Extrait d'une lettre adressée à M. Lerch**

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 1^{re} série, tome 4, n° 2 (1890), p. I1-I10

http://www.numdam.org/item?id=AFST_1890_1_4_2_I1_0

© Université Paul Sabatier, 1890, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LES RACINES
DE LA
FONCTION SPHÉRIQUE DE SECONDE ESPÈCE.

EXTRAIT D'UNE LETTRE ADRESSÉE A M. LERCH

PAR M. HERMITE.



Soit $X_n = F(x)$ le polynôme de Legendre du degré n , et $R(x)$ la partie entière du produit

$$F(x) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \dots \right),$$

je poserai, sous la condition que le module de la variable soit supérieur à l'unité,

$$Q^n(x) = \frac{1}{2} F(x) \log \frac{x+1}{x-1} - R(x),$$

et, dans le cas contraire,

$$Q^n(x) = \frac{1}{2} F(x) \log \frac{1+x}{1-x} - R(x).$$

Ces expressions vérifient l'équation différentielle

$$(x^2-1) \frac{d^2y}{dx^2} + 2x \frac{dy}{dx} = n(n+1)y,$$

et représentent dans tout le plan, sauf sur la circonférence de rayon égal à l'unité et dont le centre est à l'origine, ce que Heine nomme la *fonction sphérique de seconde espèce*. L'Ouvrage classique de l'illustre géomètre en expose les propriétés fondamentales qui sont d'une grande importance, mais il n'aborde pas l'étude de l'équation $Q^n(x) = 0$, la recherche de ses racines réelles ou imaginaires. J'ai essayé de traiter la question en employant le théorème de Cauchy dont je rappelle l'énoncé.

Soit $f(z) = 0$ une équation ayant pour premier membre une fonction holomorphe quelconque ; si l'on pose

$$f(x + iy) = P + iQ,$$

l'excès du nombre de fois que le rapport $\frac{Q}{P}$ passe du positif au négatif, sur le nombre de fois qu'il passe du négatif au positif en devenant infini, lorsque la variable $z = x + iy$ décrit dans le sens direct un contour fermé, est égal au double du nombre des racines contenues à l'intérieur de ce contour.

La fonction $Q^n(x)$ que nous avons à considérer n'est pas holomorphe, mais elle le devient par un changement de variable, et lorsqu'il s'agit de la première de ses deux expressions, à savoir

$$Q^n(x) = \frac{1}{2} F(x) \log \frac{x+1}{x-1} - R(x);$$

je ferai

$$\frac{x+1}{x-1} = c^z,$$

d'où

$$x = \frac{e^z + 1}{e^z - 1}.$$

En posant alors, pour abréger,

$$\Phi(e^z) = \frac{1}{2} (e^z - 1)^n F\left(\frac{e^z + 1}{e^z - 1}\right), \quad \Pi(e^z) = (e^z - 1)^n R\left(\frac{e^z + 1}{e^z - 1}\right),$$

j'aurai deux fonctions entières du degré n en e^z , et par conséquent, sous la forme voulue, l'équation

$$z\Phi(e^z) - \Pi(e^z) = 0,$$

Une première remarque permettra de chercher seulement les racines qui sont dans le demi-plan au-dessus de l'axe des abscisses. Soit, en effet,

$$f(z) = z\Phi(e^z) - \Pi(e^z),$$

les égalités

$$F(-x) = (-1)^n F(x), \quad R(-x) = (-1)^{n-1} R(x)$$

donnent immédiatement

$$f(-z) = -\frac{f(z)}{e^{nz}},$$

et l'on voit que les racines étant deux à deux égales et de signes contraires sont placées symétriquement par rapport à l'origine. Ce point établi, je ferai usage, pour mon objet, de contours qui seront des rectangles ayant leurs côtés parallèles aux axes coordonnés. Les côtés parallèles à l'axe des abscisses seront représentés par les équations

$$z = ki\pi + t, \quad z = (k+1)i\pi + t,$$

où k est entier, en faisant croître t de $-a$ à $+a$; les autres seront

$$z = ki\pi + a + it, \quad z = ki\pi - a + it,$$

t variant alors de zéro à π .

J'ai maintenant à obtenir, dans ces divers cas, le premier membre de l'équation sous la forme $P + iQ$, puis à calculer pour chacun d'eux ce que Cauchy nomme l'indice de $\frac{Q}{P}$. Supposons d'abord que k soit pair, on aura

$$f(ki\pi + t) = (ki\pi + t)\Phi(e^t) - \Pi(e^t)$$

et, par conséquent,

$$P = t\Phi(e^t) - \Pi(e^t), \quad Q = k\pi\Phi(e^t),$$

en observant que les coefficients des fonctions $\Phi(e^t)$ et $\Pi(e^t)$ sont réels. Pour obtenir ensuite l'indice de $\frac{Q}{P}$ entre les limites $t = -a, t = +a$, j'aurai recours à la relation

$$\text{Ind } \frac{Q}{P} + \text{Ind } \frac{P}{Q} = \varepsilon,$$

où ε se déterminera par la règle de Cauchy. Je remarque à cet effet que, si nous attribuons à t une valeur considérable, l'expression

$$\frac{P}{Q} = \frac{1}{k\pi} \left[t - \frac{\Pi(e^t)}{\Phi(e^t)} \right]$$

se réduit sensiblement à $\frac{t}{k\pi}$, le second terme étant fini, puisque l'exponentielle entre au même degré dans le numérateur et le dénominateur de la fraction. En supposant la quantité a très grande, nous aurons donc aux limites pour $t = -a, t = +a$, les signes $-$ et $+$, par conséquent $\varepsilon = -1$.

Ce résultat obtenu, écrivons successivement

$$\operatorname{Ind} \frac{P}{Q} = \operatorname{Ind} \left[t - \frac{\Pi(e^t)}{\Phi(e^t)} \right] = \operatorname{Ind} \left[- \frac{\Pi(e^t)}{\Phi(e^t)} \right] = - \operatorname{Ind} \frac{\Pi(e^t)}{\Phi(e^t)},$$

puis revenons à la variable

$$x = \frac{e^t + 1}{e^t - 1},$$

ce qui donne

$$\frac{\Pi(e^t)}{\Phi(e^t)} = \frac{{}_2R(x)}{F(x)}.$$

On remarquera que la quantité x reste toujours en dehors des limites -1 et $+1$, de sorte que $F(x)$ ne peut s'annuler, ni la fraction devenir infinie. L'indice est donc nul et il en résulte qu'entre les limites considérées $t = -a$, $t = +a$, on a

$$\operatorname{Ind} \frac{Q}{P} = -1.$$

Passons maintenant au cas où l'entier k est impair, et soit alors

$$f(ki\pi + t) = P_1 + iQ_1,$$

en posant

$$P_1 = t\Phi(-e^t) - \Pi(-e^t), \quad Q_1 = k\pi\Phi(-e^t).$$

On trouvera, comme tout à l'heure, $\varepsilon = -1$ et il faudra obtenir l'indice de l'expression

$$\frac{\Pi(-e^t)}{\Phi(-e^t)}$$

que la substitution suivante

$$\xi = \frac{e^t - 1}{e^t + 1}$$

ramène à $\frac{{}_2R(\xi)}{F(\xi)}$. Mais cette variable ξ parcourt maintenant l'intervalle compris entre -1 et $+1$, lorsque t croît de $-\infty$ à $+\infty$: il y a donc n passages par l'infini qui correspondent aux diverses racines a, b, \dots, l du polynôme de Legendre. Cela étant, l'égalité

$$\frac{R(\xi)}{F(\xi)} = \frac{1}{(1-a^2)F'^2(a)(\xi-a)} + \frac{1}{(1-b^2)F'^2(b)(\xi-b)} + \dots + \frac{1}{(1-l^2)F'^2(l)(\xi-l)}$$

fait voir que ces passages ont lieu du négatif au positif; on a donc

$$\text{Ind} \frac{\Pi(-e^t)}{\Phi(-e^t)} = -n,$$

et nous en concluons cette seconde relation

$$\text{Ind} \frac{Q_1}{P_1} = -n - 1.$$

Les côtés du rectangle qui nous restent à considérer conduisent aux expressions

$$f(ki\pi + a + it) = (ki\pi + a + it) \Phi[(-1)^k e^{a+it}] - \Pi[(-1)^k e^{-it}],$$

et

$$f(ki\pi - a + it) = (ki\pi - a + it) \Phi[(-1)^k e^{-a+it}] - \Pi[(-1)^k e^{-a+it}],$$

qui prennent pour de grandes valeurs de la constante a une forme extrêmement simple.

Soit d'abord, en développant suivant les puissances descendantes de l'exponentielle,

$$\Phi(e^t) = ae^{nt} + \dots;$$

la première se réduit au seul terme

$$aa(-1)^{nk} e^{na} (\cos nt + i \sin nt),$$

et le rapport $\frac{Q}{P}$ à la quantité $\frac{\sin nt}{\cos nt}$ qui devient infinie n fois en passant du positif au négatif lorsque t croît de zéro à π . Pour obtenir la seconde, on emploiera les développements de $\Pi(e^t)$ et de $\Phi(e^t)$ suivant les puissances ascendantes de e^t . En négligeant l'exponentielle e^{-a+it} , la partie réelle P est une constante, de sorte que l'indice relatif au quatrième côté du rectangle est nul.

Les résultats que nous venons d'établir donnent immédiatement l'indice relatif au contour total du rectangle; en observant que l'indice du côté parallèle à la base doit être changé de signe afin d'avoir égard au sens dans lequel il est parcouru, on obtient les conclusions suivantes :

1° Lorsque l'entier k auquel correspond la base est un nombre pair $2l$, la somme des indices $-1, n, n+1$ est égale à $2n$; l'équation $Q^n(x) = 0$

a donc n racines comprises entre les deux parallèles $y = 2l\pi, y = (2l+1)\pi$.

2° Mais si la base correspond à un entier impair $k = 2l + 1$, les indices étant $-n, -1, n, 1$, leur somme est nulle, et il n'existe aucune racine entre les droites $y = (2l+1)\pi$ et $y = (2l+2)\pi$.

L'analyse précédente doit être légèrement modifiée lorsqu'il s'agit de la portion du plan limitée par l'axe des abscisses et la droite $y = \pi$; le long de l'axe, en effet, la fonction $f(x)$ est réelle et n'a pas la forme $P + iQ$. Nous considérerons une parallèle infiniment voisine représentée par l'équation $z = t + i\delta$, en supposant que δ soit infiniment petit et positif. Ayant ainsi

$$f(z) = f(t) + i\delta f'(t),$$

l'indice de $\frac{Q}{P}$ sera celui de la quantité $\frac{f'(t)}{f(t)}$, qui est égal à $-\mu$, si l'on désigne par μ le nombre des racines réelles de l'équation $f(t) = 0$. L'indice du contour du rectangle est donc

$$-\mu + n + n + 1$$

et sera connu lorsque nous aurons obtenu le nombre μ . J'emploierai dans ce but cette expression de $Q^n(x)$, la première qui se soit offerte, à savoir

$$Q^n(x) = \frac{1}{2} F(x) \int_x^\infty \frac{dx}{(x^2-1) F^2(x)}.$$

Elle montre que cette fonction reste toujours de même signe et positive, lorsque la variable est en valeur absolue supérieure à l'unité. On voit aussi que $Q^n(x)$ s'évanouit pour x infini, le développement de l'intégrale suivant les puissances descendantes de la variable commençant par un terme en $\frac{1}{x^{n+1}}$. Par conséquent, à l'égard de t qui est lié à x par la relation

$$x = \frac{e^t + 1}{e^t - 1},$$

on n'a que la racine $t = 0$ avec l'ordre de multiplicité $n + 1$. Mais l'indice de $\frac{f'(t)}{f(t)}$ représente le nombre des racines réelles qui sont distinctes, sans avoir égard à l'ordre de multiplicité; le nombre μ est donc égal à l'unité, et il est établi que la portion du plan que nous venons de considérer contient n racines comme toutes celles qui sont comprises entre les droites $y = 2l\pi, y = (2l+1)\pi$.

Une dernière remarque nous reste à faire.

L'équation qui vient de nous occuper a ses racines imaginaires conjuguées puisqu'elle est à coefficients réels, et ces racines sont deux à deux égales et de signes contraires. Elles se trouvent donc en nombre pair et représentées par les quantités $g + ih$, $-g + ih$, dans la région où nous venons de démontrer que leur nombre est n , à moins que l'on n'ait $g = 0$. De là résulte, lorsque n est impair, l'existence d'un nombre impair de racines telles que $z = ih$, où la quantité h est comprise entre les limites $2l\pi$ et $(2l + 1)\pi$. C'est ce qu'il s'agit de reconnaître.

J'observe, dans ce but, qu'en posant $z = i\zeta$ dans l'expression

$$x = \frac{e^z + 1}{e^z - 1},$$

on en tire

$$x = \frac{1}{i} \cot \frac{\zeta}{2}.$$

La transformée en ζ de l'équation $f(z) = 0$ est donc

$$\frac{i\zeta}{2} F\left(\frac{1}{i} \cot \frac{\zeta}{2}\right) - R\left(\frac{1}{i} \cot \frac{\zeta}{2}\right) = 0,$$

et, si l'on écrit pour un moment

$$\frac{1}{2} F(x) = \alpha x^n + \beta x^{n-2} + \dots + \omega x, \quad R(x) = \alpha x^{n-1} + b x^{n-3} + \dots + p,$$

on l'obtient ainsi sous forme entière

$$i\zeta \left[\alpha \left(\frac{1}{i} \cos \frac{\zeta}{2}\right)^n + \beta \sin^2 \frac{\zeta}{2} \left(\frac{1}{i} \cos \frac{\zeta}{2}\right)^{n-2} + \dots \right] - \sin \frac{\zeta}{2} \left[\alpha \left(\frac{1}{i} \cos \frac{\zeta}{2}\right)^{n-1} + b \sin^2 \frac{\zeta}{2} \left(\frac{1}{i} \cos \frac{\zeta}{2}\right)^{n-3} + \dots + p \sin^{n-1} \frac{\zeta}{2} \right] = 0.$$

Faisons maintenant dans le premier membre les substitutions $\zeta = 2l\pi$, $\zeta = (2l + 1)\pi$; en se servant de la condition que n est impair, les résultats seront

$$2l\pi\alpha(-1)^{\frac{n-1}{2} + ln}, \quad -p(-1)^{ln},$$

et il faut établir qu'ils sont de signes contraires. Remarquant, à cet effet, que p est la valeur de $R(x)$ pour $x = 0$, on est amené à recourir à l'expres-

sion de M. Christoffel

$$R(x) = \frac{2n-1}{1 \cdot n} X_{n-1} + \frac{2n-5}{3(n-1)} X_{n-3} + \frac{2n-9}{5(n-2)} X_{n-5} + \dots$$

Mais cette formule ne conduit pas au but, les polynômes d'indices pairs X_0, X_2, X_4, \dots présentant la succession des signes $+, -, +, \dots$, lorsqu'on suppose $x = 0$. Nous emploierons un autre résultat de l'illustre géomètre; je ferai usage de l'équation suivante

$$R_n X_\nu - X_n R_\nu = \sum \frac{X_s X_{n-\nu-s-1}}{\nu + s + 1}, \quad (s = 0, 1, 2, \dots, n - \nu - 1)$$

dans le cas particulier de $\nu = 0$. Elle donne cette expression

$$R(x) = \frac{X_0 X_{n-1}}{1} + \frac{X_1 X_{n-2}}{2} + \dots + \frac{X_{n-1} X_0}{n},$$

dont tous les termes ont pour $x = 0$ le signe de $(-1)^{\frac{n-1}{2}}$; le coefficient α étant positif, il est prouvé que les substitutions $\xi = 2l\pi, \zeta = (2l+1)\pi$ conduisent, comme nous voulions l'établir, à des résultats de signes contraires.

La fonction sphérique de seconde espèce définie à l'intérieur de la circonférence de rayon égal à l'unité, dont le centre est à l'origine, par la formule

$$Q^n(x) = \frac{1}{2} F(x) \log \frac{1+x}{1-x} - R(x),$$

se traite de la même manière et par le même procédé.

Ainsi, en posant $\frac{1+x}{1-x} = e^z$, nous obtenons une fonction holomorphe de z

$$f(z) = z\Phi(e^z) - \Pi(e^z),$$

où l'on a

$$\Phi(e^z) = \frac{1}{2} (e^z + 1)^n F\left(\frac{e^z - 1}{e^z + 1}\right), \quad \Pi(e^z) = (e^z + 1)^n R\left(\frac{e^z - 1}{e^z + 1}\right).$$

Soit ensuite,

$$z = ki\pi + t, \quad z = ki\pi + a + it,$$

et faisons successivement $f(z) = P + iQ$. On trouvera en premier lieu,

suisant que k est pair ou impair, $\text{Ind } \frac{\mathbf{Q}}{\mathbf{P}} = -n - 1$, ou $\text{Ind } \frac{\mathbf{Q}}{\mathbf{P}} = -1$; puis, suisant que la constante α supposée très grande est positive ou négative, $\text{Ind } \frac{\mathbf{Q}}{\mathbf{P}} = n$ ou bien $\text{Ind } \frac{\mathbf{Q}}{\mathbf{P}} = 0$. A l'égard du nombre μ des racines réelles, je dois à M. Stieltjes la remarque qu'il résulte d'un théorème général de Sturm sur les solutions d'une équation différentielle linéaire du second ordre, que l'on a $\mu = n + 1$, deux racines consécutives comprenant toujours une racine de $X_n = 0$. C'est ce qui résulte aussi de l'expression déjà employée

$$\frac{\mathbf{R}(x)}{\mathbf{F}(x)} = \frac{\mathbf{A}}{x-a} + \frac{\mathbf{B}}{x-b} + \dots + \frac{\mathbf{L}}{x-l}$$

où les numérateurs des fractions simples sont tous positifs.

Supposons que l'on ait $a < b < c < \dots < l$, et écrivons le premier membre sous la forme

$$\frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x} - \sum \frac{\mathbf{A}}{x-a}.$$

On voit que la dérivée

$$\frac{1}{1-x^2} + \sum \frac{\mathbf{A}}{(x-a)^2}$$

étant continue et positive, lorsque la variable croît de a à b par exemple, l'équation ne peut avoir qu'une seule et unique racine dans cet intervalle; il en est de même entre les limites -1 et a d'une part, l et 1 de l'autre. Et comme, en faisant dans l'expression considérée les substitutions $x = a + \delta$, $x = b - \delta$, où δ est infiniment petit et positif, on obtient des résultats de signes contraires, $\frac{\mathbf{A}}{\delta}$ et $-\frac{\mathbf{B}}{\delta}$; qu'il en est de même si l'on suppose $x = -1 + \delta$, $x = a - \delta$, et enfin $x = l + \delta$, $x = 1 - \delta$, on a ainsi démontré l'existence de $n + 1$ racines, placées chacune entre deux termes consécutifs de la suite

$$-1, a, b, c, \dots, l, +1.$$

Ce point établi, et après avoir remarqué la relation

$$f(-z) = \frac{f(z)}{e^{nz}},$$

il suffira d'énoncer les conclusions suivantes.

I. 10 HERMITE. — SUR LES RACINES DE LA FONCTION SPHÉRIQUE DE SECONDE ESPÈCE.

L'équation $f(z) = 0$ admet n racines qui sont comprises dans l'intervalle des parallèles $y = (2l - 1)\pi$, $y = 2l\pi$, et il n'y en a aucune entre les droites $y = 2l\pi$, $y = (2l + 1)\pi$, pour $l = 1, 2, \dots$

Il n'y a de même aucune racine dans la région comprise entre une parallèle à l'axe des abscisses, à une distance infiniment petite au-dessus de cet axe, et la droite $y = \pi$.

Enfin, et dans le cas de n impair, il existe, représentées par la forme $\xi = ih$, un nombre impair de racines où h est renfermé entre les limites $(2l - 1)$ et $2l\pi$.

