Annales de la faculté des sciences de Toulouse

W. De Tannenberg

Sur les équations aux dérivées partielles du premier ordre à deux variables indépendantes, qui admettent un groupe continu de transformations

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 1re série, tome 5, nº 1 (1891), p. B1-B40
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1891_1_5_1_B1_0>

SUR LES ÉQUATIONS

AUX

DÉRIVÉES PARTIELLES DU PREMIER ORDRE

A DEUX VARIABLES INDÉPENDANTES,

QUI ADMETTENT UN GROUPE CONTINU DE TRANSFORMATIONS,

PAR M. W. DE TANNENBERG,

Professeur au Lycée de Lyon.

PRÉFACE.

Je me propose, dans ce travail, de déterminer les équations aux dérivées partielles

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \tag{1}$$

qui admettent un groupe continu de transformations (ponctuelles). On sait que M. Sophus Lie a résolu le problème analogue pour les équations différentielles ordinaires et montré comment ces équations en nombre infini dérivent par une transformation ponctuelle d'un nombre limité d'entre elles, qu'il a appelées *formes canoniques*. La méthode suivie par M. Sophus Lie pourrait servir également pour la solution du problème proposé; mais il faudrait, pour cela, déterminer les équations invariantes qui correspondent à chacun des nombreux groupes ponctuels de l'espace à trois dimensions; or la recherche de ces groupes constitue un problème difficile, dont la solution n'a pas encore été publiée [1]. On peut éviter cette détermination en utilisant une remarque déjà ancienne de M. Sophus Lie. L'illustre géomètre a montré, en effet, qu'il existe une correspondance remarquable entre les

[1] Dans la préface de l'ouvrage de MM. Lie et Engel sur la théorie des groupes, M. Lie annonce que le calcul de tous les groupes ponctuels de l'espace à trois dimensions sera développé dans le troisième volume.

équations (1) et les équations ordinaires du troisième ordre

$$H(x, y, y', y'', y''') = 0, \tag{2}$$

qui admettent un groupe de transformations de contact. Cette correspondance permet de déduire très simplement les équations cherchées (1) des équations déjà connues (2) dans le cas où ces équations admettent un groupe à plus de trois paramètres. Le travail actuel n'est autre chose que le développement de cette idée.

Dans la première Partie, j'indique avec plus de précision le principe fondamental, qui est l'origine de ce Mémoire, et je détermine, d'après M. Sophus Lie, les formes canoniques des équations différentielles du troisième ordre qui admettent un groupe de transformations de contact à plus de trois paramètres. Ces formes sont au nombre de sept distinctes.

La seconde Partie, la seule qui contienne des résultats complètement nouveaux, comprend la détermination des équations aux dérivées partielles qui font l'objet de cette étude. Après avoir choisi les équations canoniques qui m'ont semblé les plus avantageuses, je me suis appliqué à les interpréter géométriquement. La simplicité des résultats que j'ai ainsi obtenus me donne lieu d'espérer que le calcul m'a bien guidé dans mon choix. En examinant toutes les formes canoniques trouvées, on aperçoit que :

Toute équation aux dérivées partielles du premier ordre à deux variables indépendantes, admettant un groupe ponctuel à plus de trois paramètres, dérive, par une transformation ponctuelle (en général non homographique), d'une équation pour laquelle les tangentes aux courbes intégrales appartiennent à un complexe.

Pour ne pas rompre l'unité de ce travail, je n'ai pas indiqué les équations aux dérivées partielles qui admettent un groupe ponctuel à moins de quatre paramètres. Il n'y a pas lieu en effet de les déduire des équations différentielles du troisième ordre qui leur correspondent, car il est beaucoup plus simple de les obtenir en appliquant la méthode générale dont j'ai parlé, et qui est fondée sur la détermination des groupes ponctuels à un, deux et trois paramètres. Ces équations se séparent d'ailleurs nettement des autres, tant au point de vue analytique qu'au point de vue géométrique.

L'étude des caractéristiques des équations canoniques m'a conduit à parler des courbes gauches qui admettent une transformation homographique infinitésimale. Le dernier Chapitre est consacré à la détermination de ces courbes.

Enfin je montre dans une Note comment quelques équations très connues peuvent être ramenées à une de mes formes canoniques. Je me réserve d'ailleurs, dans une publication prochaine, d'indiquer les moyens de reconnaître si une équation aux dérivées partielles admet un groupe de transformations et les intégrations à effectuer pour la ramener dans ce cas à sa forme canonique.

Je tiens à remercier, en terminant, mon illustre maître, M. Sophus Lie, qui m'a initié avec tant de bienveillance à sa théorie des groupes de transformations et a bien voulu me laisser ce sujet d'étude.

PREMIÈRE PARTIE.

CHAPITRE I.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

1. On appelle *élément* d'une ligne C

$$(C) \qquad x = f(t), \qquad y = g(t), \qquad z = h(t),$$

l'ensemble formé par un point de cette ligne et la tangente en ce point. Les six quantités x, y, z, dx, dy, dz, qui déterminent complètement la position de l'élément correspondant au point (x, y, z), sont dites les *coordonnées* de cet élément. L'ensemble (m, d) d'un point m et d'une droite d passant par ce point constitue évidemment un élément commun à une infinité de lignes : nous l'appellerons pour cette raison un *élément de ligne* ou *élément linéaire* [1].

Plusieurs éléments de ligne sont dits *unis* suivant une courbe si chacun d'eux est un élément de cette courbe.

Si l'on effectue une transformation ponctuelle

$$(1) \qquad x' = X(x, y, z), \qquad y' = Y(x, y, z), \qquad z' = Z(x, y, z),$$

on voit immédiatement que les courbes qui admettent un élément commun (m, d) se changent en courbes ayant aussi un élément commun (m', d'); cet élément est dit le *correspondant* ou le *transformé* de l'élément (m, d) par rapport à la transformation (1). Si x, y, z, dx, dy, dz sont les coordonnées de (m, d), celles de (m', d') sont données par les équations (1) et les

[1] Les notions fondamentales d'élément linéaire et d'élément de surface sont dues, comme on sait, à M. Sophus Lie.

suivantes

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} dx' &= \frac{\partial X}{\partial x}dx + \frac{\partial X}{\partial y}dy + \frac{\partial X}{\partial z}dz, \\ dy' &= \frac{\partial Y}{\partial x}dx + \frac{\partial Y}{\partial y}dy + \frac{\partial Y}{\partial z}dz, \\ dz' &= \frac{\partial Z}{\partial x}dx + \frac{\partial Z}{\partial y}dy + \frac{\partial Z}{\partial z}dz. \end{aligned}\right.$$

A des éléments de ligne unis suivant une courbe C correspondent évidemment des éléments de ligne unis suivant la courbe C′ transformée de la courbe C.

Supposons, en particulier, que les équations (1) définissent un groupe G à r paramètres et à trois variables x, y, z; dans ce cas, les équations (1) et (2), considérées comme définissant des transformations à six variables indépendantes x, y, z, dx, dy, dz, déterminent aussi un groupe à r paramètres. Ce groupe est dit un groupe *prolongé* [1] de G; il indique la loi suivant laquelle les transformations de G échangent entre eux les éléments linéaires de l'espace. En outre, si le groupe G est engendré par les r transformations infinitésimales

$$X_i f = \xi_i(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta_i(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial y} + \zeta_i(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial z}, \qquad i = 1, 2, \ldots, r,$$

le groupe prolongé est engendré par

$$X_i f + X'_i f, \qquad f = f(x, y, z, dx, dy, dz),$$

où

$$X'_i f = \lambda_i \frac{\partial f}{\partial\, dx} + \mu_i \frac{\partial f}{\partial\, dy} + \nu_i \frac{\partial f}{\partial\, dz}$$

et

$$\lambda_i = \frac{\partial \xi_i}{\partial x}dx + \frac{\partial \xi_i}{\partial y}dy + \frac{\partial \xi_i}{\partial z}dz,$$

$$\mu_i = \frac{\partial \eta_i}{\partial x}dx + \frac{\partial \eta_i}{\partial y}dy + \frac{\partial \eta_i}{\partial z}dz,$$

$$\nu_i = \frac{\partial \zeta_i}{\partial x}dx + \frac{\partial \zeta_i}{\partial y}dy + \frac{\partial \zeta_i}{\partial z}dz.$$

2. On appelle *élément* d'une surface S l'ensemble (m, P) formé par un point m de cette surface et le plan P tangent en ce point. Un élément linéaire d'une courbe tracée sur la surface S sera appelé un *élément linéaire* de

(1) Sophus Lie, *Theorie der Transformationsgruppen*, t. I, p. 524.

la surface. On peut dire alors que l'élément (m, P) est l'ensemble des éléments linéaires de S issus du point m.

Les coordonnées x, y, z et les coefficients de direction l, m, n de la normale au plan P sont les six coordonnées de l'élément (m, P).

L'ensemble formé par un point quelconque et un plan quelconque passant par ce point est évidemment un élément commun à une infinité de surfaces; pour cette raison, nous l'appellerons un *élément de surface*.

Plusieurs éléments de surface sont dits *unis* suivant la surface S, si chacun d'eux est un élément de cette surface.

Supposons qu'on effectue une transformation ponctuelle quelconque

$$x' = \mathrm{X}(x, y, z), \qquad y' = \mathrm{Y}(x, y, z), \qquad z' = \mathrm{Z}(x, y, z), \tag{1}$$

l'élément (m', P') qui est constitué par les transformés des éléments linéaires de l'élément (m, P) est dit l'élément *correspondant* ou *transformé* de (m, P) par rapport à la transformation (1). Si (x, y, z, l, m, n) sont les coordonnées de l'élément (m, P), celles de l'élément (m', P') sont données par l'identité

$$l\,dx + m\,dy + n\,dz = l'\,dx' + m'\,dy' + n'\,dz', \tag{2}$$

équivalente au système

$$\left\{\begin{aligned} l &= l'\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial x} + m'\frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial x} + n'\frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial x},\\ m &= l'\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial y} + m'\frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial y} + n'\frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial y},\\ n &= l'\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial z} + m'\frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial z} + n'\frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial z},\end{aligned}\right. \tag{3}$$

et l'on voit que :

Si plusieurs surfaces ont un élément commun (m, P), leurs transformées ont également un élément commun, à savoir l'élément (m', P'). Des éléments de surface unis suivant une surface S se transforment en éléments de surface unis suivant la surface S′ transformée de S.

Supposons maintenant que les équations (1) définissent un groupe G à r paramètres et à trois variables x, y, z; dans ce cas, les équations (1) et (3), considérées comme définissant des transformations à six variables indépendantes x, y, z, l, m, n, déterminent aussi un groupe à r paramètres. Ce groupe est dit aussi un *groupe prolongé* du groupe G; il indique la loi suivant laquelle les transformations de G échangent entre eux les éléments de surface de l'espace.

On démontre facilement que, si le groupe G est engendré par les r transformations infinitésimales

$$X_i f = \xi_i(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta_i(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial y} + \zeta_i(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial z}, \qquad i = 1, 2, \ldots, r,$$

le groupe prolongé est engendré par

$$X_i f + X'_i f, \qquad f = f(x, y, z, l, m, n),$$

où

$$X'_i f = \lambda_i \frac{\partial f}{\partial l} + \mu_i \frac{\partial f}{\partial m} + \nu_i \frac{\partial f}{\partial n}$$

et

$$\lambda_i = -\left(l\frac{\partial \xi_i}{\partial x} + m\frac{\partial \eta_i}{\partial x} + n\frac{\partial \zeta_i}{\partial x}\right),$$

$$\mu_i = -\left(l\frac{\partial \xi_i}{\partial y} + m\frac{\partial \eta_i}{\partial y} + n\frac{\partial \zeta_i}{\partial y}\right),$$

$$\nu_i = -\left(l\frac{\partial \xi_i}{\partial z} + m\frac{\partial \eta_i}{\partial z} + n\frac{\partial \zeta_i}{\partial z}\right).$$

Au lieu de prendre pour coordonnées d'un élément de surface les six quantités (x, y, z, l, m, n), on peut choisir le système équivalent $(x, y, z, -p, -q, 1)$. Dans ce cas, les transformations finies du groupe prolongé de G sont données par les relations

$$x' = X(x, y, z), \qquad y' = Y(x, y, z), \qquad z' = Z(x, y, z),$$
$$\rho(dz - p\,dx - q\,dy) = dz' - p'\,dx' - q'\,dy',$$

et les transformations infinitésimales sont

$$X_i f + \pi_i \frac{\partial f}{\partial p} + \chi_i \frac{\partial f}{\partial q}, \quad f = f(x, y, z, p, q)$$

où

$$\pi_i = \frac{d\zeta_i}{dx} - p\frac{d\xi_i}{dx} - q\frac{d\eta_i}{dx}, \qquad \frac{d}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} + p\frac{\partial}{\partial z},$$

$$\chi_i = \frac{d\zeta_i}{dy} - p\frac{d\xi_i}{dy} - q\frac{d\eta_i}{dy}, \qquad \frac{d}{dy} = \frac{\partial}{dy} + q\frac{\partial}{\partial z}.$$

3. Considérons les éléments de ligne en nombre doublement infini qui sont unis en un point quelconque s de l'espace. Une infinité simple (et continue) de ces éléments constitue ce que l'on appelle un *cône élémentaire*.

Appliquons à ces derniers une transformation ponctuelle quelconque

$$(1) \qquad x' = X(x, y, z), \qquad y' = Y(x, y, z), \qquad z' = Z(x, y, z).$$

La famille des éléments linéaires transformés détermine un second cône élémentaire qui est dit le *transformé* ou le *correspondant* du premier relativement aux équations (1). Désignons le premier cône par C, le second par C′. L'élément de surface défini par les deux éléments linéaires (s, sa) et (s, sb) du cône C a pour transformé l'élément de surface déterminé par les deux éléments linéaires $(s', s'a')$ et $(s', s'b')$ du cône C′. De là on conclut immédiatement que l'élément de surface (s, P) formé par le point (s) et le plan tangent au cône C suivant (sa) a pour transformé l'élément (s', P'), formé par le point s' et le plan tangent au cône C′ suivant $s'a'$.

On peut donc dire que :

Le cône élémentaire C′ *est l'enveloppe des éléments de surface* (s', P') *correspondant aux éléments de surface* (s, P) *du cône* C. *Les génératrices de contact de deux éléments de surface correspondants appartiennent à deux éléments linéaires correspondants.*

Une relation entre x, y, z, dx, dy, dz (homogène en dx, dy, dz)

$$(1) \qquad \Phi(x, y, z, dx, dy, dz) = 0,$$

fait évidemment correspondre à chaque point de l'espace un cône élémentaire C. L'équation (1) sera appelée l'*équation du système des cônes élémentaires* C. L'équation aux dérivées partielles

$$(2) \qquad F(x, y, z, p, q) = 0$$

fait aussi correspondre à chaque point (x, y, z) de l'espace un cône élémentaire déterminé T, à savoir celui qui est enveloppé par les éléments de surface, dont les coordonnées $(x, y, z, -p, -q, 1)$ satisfont à l'équation (2).

L'équation du système des cônes élémentaires T est l'équation

$$(1) \qquad \Phi(x, y, z, dx, dy, dz) = 0,$$

obtenue en éliminant p et q entre l'équation (2) et les suivantes

$$\frac{dx}{\frac{\partial F}{dp}} = \frac{dy}{\frac{\partial F}{\partial q}} = \frac{dz}{p\frac{\partial F}{\partial p} + q\frac{\partial F}{\partial q}}.$$

Les équations (1) et (2) sont liées de telle manière que la connaissance de l'une entraîne évidemment celle de l'autre. Nous dirons que l'équation (1) est l'équation aux différentielles totales *associée* à l'équation (2).

Dans la suite, nous supposerons presque toujours une équation aux dérivées partielles, du premier ordre et à trois variables, définie par son équation associée. Nous verrons en effet que, pour la solution du problème proposé, la considération des formes (1) est plus avantageuse que celle des formes (2).

CHAPITRE II.

SUR LES CARACTÉRISTIQUES D'UNE ÉQUATION AUX DÉRIVÉES PARTIELLES (NON LINÉAIRE)

$$F(x, y, z, p, q) = 0. \tag{1}$$

CORRESPONDANCE ENTRE CES ÉQUATIONS ET LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES DU TROISIÈME ORDRE A DEUX VARIABLES.

1. On sait que les caractéristiques d'une équation aux dérivées partielles

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \quad [1]$$

constituent une famille de courbes à trois paramètres. La réciproque de cette proposition n'est pas vraie : une famille de courbes à trois paramètres a, b, c, représentée par les équations

$$f(x, y, z, a, b, c) = 0, \qquad g(x, y, z, a, b, c) = 0, \tag{1}$$

ne coïncide pas, en général, avec l'ensemble des caractéristiques d'une équation aux dérivées partielles. Toutefois les équations (1) définissent des courbes intégrales d'une équation aux dérivées partielles bien déterminée, à savoir, l'équation associée à l'équation

$$\Phi(x, y, z, dx, dy, dz) = 0,$$

[1] Comme l'indique le titre, nous ne considérerons dans ce Chapitre que les équations aux dérivées partielles non linéaires.

obtenue en éliminant a, b, c entre les équations (1) et les suivantes

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 0,$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy + \frac{\partial g}{\partial z} dz = 0.$$

Dans un Mémoire célèbre [1], M. Sophus Lie a donné les conditions nécessaires et suffisantes pour que les équations (1) représentent les caractéristiques d'une équation aux dérivées partielles. Je vais rappeler ici ce résultat :

THÉORÈME. — *Pour que le système de courbes représenté par les équations* (1) *soit l'ensemble des caractéristiques d'une équation aux dérivées partielles, il faut et il suffit qu'en éliminant* x, y, z *entre les équations* (1) *et les suivantes*

$$(2) \qquad \frac{\partial f}{\partial a} da + \frac{\partial f}{\partial b} db + \frac{\partial f}{\partial c} dc = 0, \qquad \frac{\partial g}{\partial a} da + \frac{\partial g}{\partial b} db + \frac{\partial g}{\partial c} dc = 0,$$

on obtienne une équation linéaire en da, db, dc, *et non intégrable, à savoir :*

$$(3) \qquad \mathrm{A}(a, b, c)\, da + \mathrm{B}(a, b, c)\, db + \mathrm{C}(a, b, c)\, dc = 0.$$

D'abord la condition est nécessaire. En effet, supposons que les équations (1) représentent les caractéristiques de l'équation

$$\mathrm{F}(x, y, z, p, q) = 0.$$

Le système (1), considéré comme un système d'équations à six variables x, y, z, a, b, c, est alors équivalent à un système de la forme

$$(4) \qquad \mathrm{V}(x, y, z, a', b') = 0, \qquad \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial a'} + c' \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial b'} = 0,$$

où a', b', c' désignent des fonctions de a, b, c.

Or, si l'on différentie les équations (4), en considérant x, y, z comme constants, et si l'on élimine x, y, z entre les équations obtenues et les équations (4), on obtient l'équation

$$db' - c'\, da' = 0,$$

qui est bien linéaire en da, db, dc (et non intégrable).

---

[1] *Mathematische Annalen*, t. V.

Démontrons maintenant que la condition est suffisante. Supposons que l'équation (3) soit une conséquence des équations (1) et (2); je dis que les équations (1) représentent les caractéristiques d'une certaine équation aux dérivées partielles.

En effet, on sait qu'en remplaçant a, b, c par des fonctions convenablement choisies de a, b, c, on peut ramener l'équation de Pfaff (3) à la forme canonique

$$db - c\,da = 0. \tag{5}$$

Supposons que l'on ait fait cette réduction et mis en outre les équations (1) sous la forme

$$V(x, y, z, a, b) = 0, \tag{6}$$

$$c - U(x, y, z, a, b) = 0. \tag{7}$$

Cela posé, l'équation (5) est une conséquence des équations (6), (7) et des suivantes

$$\frac{\partial V}{\partial a}\,da + \frac{\partial V}{\partial b}\,db = 0, \tag{8}$$

$$dc - \frac{\partial U}{\partial a}\,da - \frac{\partial U}{\partial b}\,db = 0. \tag{9}$$

Or, l'équation (5) ne contient pas dc; donc, pour toutes les valeurs de x, y, z, a, b, c, satisfaisant aux équations (6) et (7), on a l'identité en da et db,

$$db - c\,da = \lambda\left(\frac{\partial V}{\partial a}\,da + \frac{\partial V}{\partial b}\,db\right),$$

c'est-à-dire

$$\lambda\frac{\partial V}{\partial a} = -c, \qquad \lambda\frac{\partial V}{\partial b} = 1, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\partial V}{\partial b} \neq 0.$$

On voit donc que, pour toutes les valeurs de x, y, z, a, b, c satisfaisant aux équations (6) et (7), on a

$$\frac{\partial V}{\partial a} + c\frac{\partial V}{\partial b} = 0,$$

Si donc on considère les deux systèmes d'équations à six variables x, y,

$z, a, b, c,$

$$\left\{\begin{aligned} &\mathrm{V}(x, y, z, a, b) = 0, \\ &c - \mathrm{U}(x, y, z, a, b) = 0, \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{V}(x, y, z, a, b) = 0, \\ &\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial a} + c\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial b} = 0. \end{aligned}\right.$$

On peut affirmer que toute solution du premier système est une solution du second. Les secondes équations des deux systèmes étant linéaires en (c), la réciproque est évidente. Il résulte de là que les deux systèmes sont équivalents et le théorème est démontré.

2. La démonstration précédente met en évidence le fait suivant :

Si les équations

$$(1) \qquad f(x, y, z, a, b, c) = 0, \qquad g(x, y, z, a, b, c) = 0$$

représentent les caractéristiques d'une équation aux dérivées partielles et si les paramètres a, b, c ont été choisis de manière que l'équation

$$db - c\, da = 0$$

soit une conséquence des équations

$$f = 0, \qquad g = 0, \qquad \delta f = 0, \qquad \delta g = 0,$$

où

$$\delta = \frac{\partial}{\partial a} da + \frac{\partial}{\partial b} db + \frac{\partial}{\partial c} dc,$$

on peut mettre le système (1) sous la forme

$$(2) \qquad \mathrm{V}(x, y, z, a, b) = 0, \qquad \mathrm{V}' = \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial a} + c\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial b} = 0;$$

il suffit pour cela de résoudre l'une des équations (1) par rapport à c et de porter la valeur trouvée dans l'autre.

Nous dirons que le système (2) est, pour les caractéristiques, un système d'équations *normal*. Il est clair, d'ailleurs, qu'il existe une infinité de systèmes normaux correspondant à la même famille de caractéristiques.

Voyons maintenant comment on peut passer d'un système normal à un autre.

Soit

$$(3) \qquad \mathrm{W}(x, y, z, a', b') = 0, \qquad \mathrm{W}' = \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial a'} + c'\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial b'} = 0$$

un système normal quelconque. Les équations (2) et (3) représentant la même famille de courbes, a', b', c' sont des fonctions déterminées de a, b, c. Considérons alors les équations (2) et (3) comme des équations à six variables x, y, z, a, b, c; comme les systèmes (2) et (3) sont équivalents, l'équation

$$db' - c'\,da' = 0,$$

qui est une conséquence des équations

$$\mathrm{W} = 0, \qquad \mathrm{W}' = 0, \qquad \delta\mathrm{W} = 0, \qquad \delta\mathrm{W}' = 0,$$

est aussi une conséquence de

$$\mathrm{V} = 0, \qquad \mathrm{V}' = 0, \qquad \delta\mathrm{V} = 0, \qquad \delta\mathrm{V}' = 0,$$

et, par suite,

$$db' - c'\,db' = \rho(db - c\,da). \tag{4}$$

De là la règle suivante pour déduire toutes les formes normales d'une forme normale déterminée (2).

On effectue sur les quantités a, b, c la transformation de contact la plus générale définie par l'identité (4); le système (2) devient alors

$$\varphi(x, y, z, a', b', c') = 0, \qquad \psi(x, y, z, a', b', c') = 0; \tag{5}$$

on résout ensuite l'une des équations (5) par rapport à c' et l'on porte la valeur trouvée dans l'autre; le système (5) prend alors la forme suivante

$$\mathrm{U}(x, y, z, a', b') = 0, \qquad \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial a'} + c'\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial b'} = 0,$$

qui est la forme normale la plus générale.

3. Je vais maintenant rappeler la correspondance établie, par M. S. Lie, entre les équations aux dérivées partielles non linéaires $\mathrm{F}(x, y, z, p, q) = 0$, et les équations différentielles ordinaires du troisième ordre à deux variables [1].

---

(1) Consulter à ce sujet *Archives de Christiania*, t. X, année 1884, p. 125-128.

Supposons les caractéristiques de l'équation

$$F(x, y, z, p, q) = 0, \tag{1}$$

définies par les équations

$$V(x, y, z, a, b) = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial a} + c\frac{\partial V}{\partial b} = 0. \tag{2}$$

L'équation

$$db - c\,da = 0$$

est une conséquence des équations

$$V = 0, \qquad V' = 0, \qquad \delta V = 0, \qquad \delta V' = 0, \qquad \text{où} \qquad \delta = \frac{\partial}{\partial a}da + \frac{\partial}{\partial b}db + \frac{\partial}{\partial c}dc;$$

donc, si l'on donne à x, y, z des valeurs déterminées et si l'on considère (a, b, c) comme les coordonnées d'un élément linéaire du plan, on peut dire que les équations (2) définissent un système d'éléments linéaires unis suivant une courbe C. A tous les systèmes de valeurs de x, y, z correspond une famille de courbes C à trois paramètres x, y et z. L'équation différentielle du troisième ordre

$$H\left(a, b, \frac{db}{da}, \frac{d^2 b}{da^2}, \frac{d^3 b}{da^3}\right) = 0, \tag{3}$$

dont les courbes intégrales constituent la famille des courbes C, est dite l'équation différentielle du troisième ordre correspondant à la forme normale (2). A chacune des formes normales que peut affecter le système des équations des caractéristiques correspond ainsi une équation telle que (3). Les équations qui viennent d'être définies forment une catégorie remarquable d'équations différentielles du troisième ordre liées à l'équation (1). Il résulte, en effet, de ce qui a été dit au sujet du passage d'une forme normale à une autre, qu'on peut obtenir toutes ces équations différentielles en appliquant à l'une d'entre elles toutes les transformations de contact du plan. Supposons alors que, parmi ces équations, on en choisisse une d'après une loi déterminée; cette équation suffit pour faire connaître toutes les autres et peut, par conséquent, être prise pour représenter toute la famille.

Inversement, considérons une équation de troisième ordre quelconque

$$H\left(a, b, \frac{db}{da}, \frac{d^2 b}{da^2}, \frac{d^3 b}{da^3}\right) = 0. \tag{1}$$

Supposons que les courbes intégrales soient représentées par l'équation à trois paramètres x, y, z,

$$V(x, y, z, a, b) = 0.$$

L'ensemble des éléments linéaires (a, b, c) des courbes intégrales est défini par les équations

$$V(x, y, z, a, b) = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial V}{\partial a} + c\,\frac{\partial V}{\partial b} = 0. \tag{3}$$

Si l'on considère a, b, c comme des paramètres et x, y, z comme les coordonnées d'un point de l'espace, on peut dire que les équations (2) et (3) définissent la famille des caractéristiques d'une équation aux dérivées partielles déterminée

$$F(x, y, z, p, q) = 0. \tag{4}$$

Cette équation est dite l'équation aux dérivées partielles correspondante à l'équation $V = 0$. A chaque équation représentant les courbes intégrales de (1) correspond ainsi une équation aux dérivées partielles déterminée. Toutes ces équations aux dérivées partielles constituent un ensemble que j'appellerai (E). Or, pour obtenir toutes les formes distinctes que peut prendre l'équation du système des courbes intégrales, il suffit évidemment d'appliquer toutes les transformations ponctuelles

$$x' = X(x, y, z), \qquad y' = Y(x, y, z), \qquad z' = Z(x, y, z)$$

aux paramètres x, y, z de l'équation (2); donc on obtient toutes les équations de l'ensemble (E) en appliquant à l'une quelconque d'entre elles toutes les transformations ponctuelles de l'espace.

Supposons que, parmi les équations de l'ensemble (E), on en choisisse une d'après une loi déterminée; cette équation pourra être prise pour représenter toute la famille E.

Nous voyons donc qu'à une équation aux dérivées partielles

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \tag{1}$$

correspond une certaine famille d'équations différentielles du troisième ordre

$$(2)\qquad \mathrm{H}\left(a, b, \frac{db}{da}, \frac{d^2 b}{da^2}, \frac{d^3 b}{da^3}\right) = 0,$$

et qu'inversement, à chaque équation différentielle de la forme (2) correspond une famille d'équations de la forme (1). Chacune de ces familles est complètement déterminée, quand on connaît un de ses membres.

Considérons l'équation aux dérivées partielles qui correspond à l'intégrale générale

$$\mathrm{V}(x, y, z, a, b) = 0$$

de l'équation

$$\mathrm{H} = 0.$$

Cette équation aux dérivées partielles a pour associée une équation

$$\Phi(x, y, z, dx, dy, dz) = 0,$$

que l'on peut former de la manière suivante. Il suffit d'éliminer a, b, c entre les équations

$$\mathrm{V}(x, y, z, a, b) = 0, \qquad \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial a} + c\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial b} = 0$$

et les suivantes

$$d\mathrm{V} = 0, \qquad d\left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial a}\right) + c\, d\left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial b}\right) = 0,$$

où

$$d = \frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy + \frac{\partial}{\partial z}dz;$$

ceci revient à éliminer a et b entre les trois équations

$$\mathrm{V} = 0, \qquad d\mathrm{V} = 0$$

et

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial a} & \dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial b} \\ \dfrac{\partial}{\partial a}(d\mathrm{V}) & \dfrac{\partial}{\partial b}(d\mathrm{V}) \end{vmatrix} = 0;$$

on peut donc dire que l'équation $\Phi = 0$ exprime la condition nécessaire et suffisante pour que la courbe intégrale

$$\mathrm{V}(x, y, z, a, b) = 0$$

soit tangente à la courbe infiniment voisine

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}\,dx + \frac{\partial V}{\partial y}\,dy + \frac{\partial V}{\partial z}\,dz = 0.$$

En particulier, supposons V de la forme

$$V = b - U(x, y, z, a) = 0;$$

dans ce cas l'équation $\Phi = 0$ exprime la condition pour que l'équation à une inconnue (a)

$$\frac{\partial U}{\partial x}\,dx + \frac{\partial U}{\partial y}\,dy + \frac{\partial U}{\partial z}\,dz = 0$$

ait une racine double.

Exemple. — Considérons l'équation différentielle

$$\frac{d^3 b}{da^3} = 0, \tag{1}$$

et prenons l'intégrale générale sous la forme

$$b = x + ay + a^2 z; \tag{2}$$

pour obtenir l'équation $\Phi = 0$, correspondante à l'équation (2), il suffit d'écrire que l'équation du deuxième degré

$$dx + a\,dy + a^2\,dz = 0$$

a une racine double, ce qui donne

$$dy^2 - 4\,dx\,dz = 0. \tag{3}$$

Cette équation peut prendre la forme

$$dy^2 + (dx - dz)^2 - (dx + dz)^2 = 0,$$

qui dérive, par une transformation ponctuelle évidente, de la forme

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0. \tag{4}$$

On peut donc dire que la famille des équations aux dérivées partielles qui correspond à l'équation (1), est *représentée* (*voir* p. 15) par l'équation

$$1 + p^2 + q^2 = 0$$

associée à l'équation (4).

4. Je terminerai ce Chapitre par une remarque relative aux caractéristiques d'une équation aux dérivées partielles. Pour la commodité du langage, j'adopterai la définition suivante :

Soit T le cône élémentaire que l'équation

$$(1) \qquad F(x, y, z, p, q) = 0$$

fait correspondre à un point quelconque m de l'espace et soit S une surface intégrale passant par m. Le plan tangent en m à la surface S touche le cône T suivant une certaine génératrice μ; je dirai que l'élément linéaire (m, μ) est un élément *linéaire caractéristique* de la surface S.

Cette notion nous permet d'énoncer d'une façon concise une propriété bien connue des courbes caractéristiques de l'équation (1) :

Une courbe caractéristique, tracée sur une surface intégrale S, est une courbe dont chaque élément est un élément linéaire caractéristique de la surface S.

Supposons maintenant qu'on effectue une transformation ponctuelle quelconque

$$x' = X(x, y, z), \qquad y' = Y(x, y, z), \qquad z' = Z(x, y, z) :$$

l'équation (1) se change en une autre

$$(2) \qquad F'(x', y', z', p', q') = 0,$$

le point m en un point m', la surface S en une surface intégrale S′ de l'équation (2).

Cela posé, il résulte immédiatement d'une remarque, faite au Chapitre précédent, que :

1° Le cône élémentaire T a pour transformée le cône élémentaire T′ que l'équation (2) fait correspondre au point m';

2° Les éléments linéaires caractéristiques de la surface S ont pour transformés les éléments linéaires caractéristiques de la surface S′.

De là on déduit le théorème suivant :

Lorsqu'on applique à tous les points de l'espace une transformation *ponctuelle quelconque*

$$x' = \mathrm{X}(x, y, z), \qquad y' = \mathrm{Y}(x, y, z), \qquad z' = \mathrm{Z}(x, y, z),$$

les caractéristiques de l'équation aux dérivées partielles

$$\mathrm{F}(x, y, z, p, q) = 0$$

deviennent les caractéristiques de l'équation aux dérivées partielles transformée

$$\mathrm{F}'(x', y', z', p', q') = 0.$$

CHAPITRE III.

GÉNÉRALITÉS SUR LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES QUI ADMETTENT UN GROUPE CONTINU DE TRANSFORMATIONS ([1]).

1. Avant d'aborder l'étude de ces équations, je rappellerai quelques propositions fondamentales dues à M. Sophus Lie.

On dit qu'une multiplicité M de points $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ admet une transformation ponctuelle

$$(1) \qquad x'_i = \varphi_i(x_1, \ldots, x_n), \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

si la multiplicité transformée M′ est identique à la multiplicité M.

Pour que la multiplicité représentée par les équations

$$(2) \qquad \mathrm{F}_k(x_1, \ldots, x_n) = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, n - m$$

admette toutes les transformations du groupe G *engendré par les r*

([1]) Les résultats indiqués dans les deux premiers paragraphes sont extraits de l'Ouvrage de M. Sophus Lie sur la théorie des groupes (*Transformationsgruppen*, t. I, p. 459 et suiv.). Les notions importantes exposées dans les paragraphes suivants sont également dues à M. Sophus Lie, mais se trouvent disséminées dans les nombreux Mémoires de l'illustre géomètre (*Arch. Norv.*).

transformations infinitésimales

$$X_i f = \sum_{j=1}^{n} \xi_{ij}(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_j}, \qquad i = 1, 2, \ldots, r,$$

il faut et il suffit que chacune des équations

$$X_i F_k = 0$$

soit une conséquence des équations (2); *en d'autres termes, il faut et il suffit que la multiplicité* (2) *admette chacune des transformations infinitésimales du groupe* G.

2. Considérons maintenant une famille de multiplicités dépendant de p paramètres *essentiels* $a_1, \ldots, a_p$

$$(1) \qquad F_k(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_p) = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, n - m.$$

La condition pour que ces paramètres soient essentiels peut être exprimée par le théorème suivant :

Pour que les paramètres $a_1, a_2, \ldots, a_p$ *de la famille de multiplicités, représentée par les équations* (1), *soient des paramètres essentiels, il faut et il suffit que la multiplicité de points* $(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_p)$ *représentée par les équations* (1) *n'admette pas de transformation infinitésimale de la forme*

$$A f = \sum_{i=1}^{p} A_i(a_1, \ldots, a_p) \frac{\partial f}{\partial a_i}.$$

La famille de multiplicités considérée admet la transformation ponctuelle

$$(2) \qquad x'_i = \varphi_i(x_1, \ldots, x_n), \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

si le système d'équations (1) se change par cette transformation en un nouveau système représentant la même famille de multiplicités.

Supposons cette condition réalisée; alors on peut démontrer qu'à la transformation (2) correspond dans l'espace à $n+p$ dimensions une transformation ponctuelle

$$(2) \qquad x'_i = \varphi_i(x_1, \ldots, x_n),$$

$$(3) \qquad a'_h = \psi_h(a_1, \ldots, a_p)$$

qui laisse invariante la multiplicité de points $(x_1, \dots, x_n;\ a_1, \dots, a_p)$ représentée par les équations (1).

La position de chacune des multiplicités de la famille (1), étant déterminée par les paramètres $a_1, \dots, a_p$, on peut dire que les équations (3) indiquent la loi suivant laquelle la transformation (2) échange entre elles les multiplicités de la famille. Ces équations (3) définissent une transformation des paramètres $a_1, a_2, \dots, a_p$, que nous appellerons la transformation *conjuguée* de la transformation (2).

En particulier, supposons que la famille de multiplicités, représentée par les équations (1), admette toutes les transformations d'un groupe G. Dans ce cas, les transformations conjuguées de celles du groupe G forment également un groupe. On conclut de là que :

Pour que la famille de multiplicités représentée par les équations (1) *admette un groupe de transformations, il faut et il suffit que la multiplicité de points* $(x_1, \dots, x_n;\ a_1, \dots, a_p)$ *définie par les mêmes équations admette un groupe de transformations de la forme*

$$x'_i = \varphi_i(x_1, \dots, x_n), \qquad a'_h = \psi_h(a_1, \dots, a_p), \qquad i = 1, 2, \dots, n, \quad h = 1, 2, \dots, p,$$

c'est-à-dire un groupe engendré par des transformations infinitésimales de la forme

$$Xf = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{h=1}^{p} \alpha_h(a_1, \dots, a_p) \frac{\partial f}{\partial a_h}.$$

3. Cela posé, on dit que l'équation aux dérivées partielles

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \tag{1}$$

admet la transformation ponctuelle

$$x' = X(x, y, z), \qquad y' = Y(x, y, z), \qquad z' = Z(x, y, z) \tag{2}$$

ou que la transformation (2) laisse invariante l'équation (1), si cette dernière, considérée comme une équation à cinq variables indépendantes (x, y, z, p, q) admet la transformation prolongée de (2)

$$\left\{\begin{array}{lll} x' = X(x, y, z), & y' = Y(x, y, z), & z' = Z(x, y, z), \\ p' = P(x, y, z, p, q), & q' = Q(x, y, z, p, q), & \end{array}\right. \tag{3}$$

où p' et q' sont des fonctions de x, y, z, p, q définies par l'identité

$$dz' - p'\,dx' - q'\,dy' = \rho(dz - p\,dx - q\,dy).$$

En d'autres termes, l'équation (1) admet la transformation (2) si celle-ci, appliquée aux points de l'espace, a pour effet d'échanger entre eux les cônes élémentaires correspondant à l'équation (1) (Chap. I).

Il résulte d'un théorème démontré au Chapitre II que, si la transformation (2) laisse invariante l'équation (1), elle échange entre elles les caractéristiques de l'équation. Réciproquement, si la transformation (2) échange entre elles les caractéristiques de l'équation (1), elle laisse invariant l'ensemble des cônes élémentaires correspondant à l'équation (1) et, par suite, laisse invariante l'équation (1). On peut donc dire que :

Si l'équation (1) *admet une transformation ponctuelle, l'ensemble des caractéristiques admet aussi cette transformation et réciproquement.*

4. Pour reconnaître si l'équation (1) admet un groupe de transformations, il suffit de chercher s'il existe un groupe de transformations à cinq variables x, y, z, p, q et de la forme (3) qui laisse invariante la multiplicité de points (x, y, z, p, q) définie par l'équation (1).

A cet effet, on cherche à déterminer la transformation infinitésimale prolongée

$$A(f) = \xi(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial y} + \zeta(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial z} + \varpi\frac{\partial f}{\partial p} + \chi\frac{\partial f}{\partial q} \quad (^1),$$

de manière que l'équation

$$A(F) = 0$$

soit une conséquence de l'équation (1).

Il résulte de ce que nous venons de dire au sujet des cônes élémentaires correspondant à l'équation (1), que l'on peut aussi employer la méthode suivante :

On forme l'équation

$$(1') \qquad \Phi(x, y, z, dx, dy, dz) = 0,$$

(1) *Voir* les valeurs de ϖ et χ, p. 6.

associée (*voir* p. 7) à l'équation (1) et l'on cherche les transformations ponctuelles prolongées

$$\begin{aligned}
x' &= \mathrm{X}(x, y, z), & dx' &= \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial x} dx + \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial y} dy + \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial z} dz,\\
y' &= \mathrm{Y}(x, y, z), & dy' &= \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial x} dx + \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial y} dy + \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial z} dz,\\
z' &= \mathrm{Z}(x, y, z), & dz' &= \frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial x} dx + \frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial y} dy + \frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial z} dz,
\end{aligned}$$

qui laissent invariante la multiplicité de points (x, y, z, dx, dy, dz) définie par l'équation (1').

A cet effet, on détermine les transformations infinitésimales de la forme

$$\mathrm{A}f = \xi(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial y} + \zeta(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial z} + \lambda\frac{\partial f}{\partial\, dx} + \mu\frac{\partial f}{\partial\, dy} + \nu\frac{\partial f}{\partial\, dz},$$

telles que l'équation

$$\mathrm{A}\Phi = 0,$$

considérée comme une équation à six variables indépendantes x, y, z, dx, dy, dz, soit une conséquence de l'équation (1').

Exemple. — Proposons-nous de chercher le groupe de l'équation aux dérivées partielles associée à l'équation aux différentielles totales

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^n = \frac{dz}{dx}, \tag{1}$$

où n est un nombre différent de

$$-1, \quad 0, \quad \tfrac{1}{2}, \quad 1, \quad 2.$$

Désignons par

$$\mathrm{X}f + \xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y} + \zeta\frac{\partial f}{\partial z} + \lambda\frac{\partial f}{\partial\, dx} + \mu\frac{\partial f}{\partial\, dy} + \nu\frac{\partial f}{\partial\, dz}$$

une transformation infinitésimale laissant invariante l'équation (1). Les équations qui déterminent ξ, η, ζ s'obtiennent en écrivant que l'équation

$$\frac{\nu}{dz} + \frac{\lambda(n-1)}{dx} = \frac{n\mu}{dy},$$

c'est-à-dire

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{\dfrac{\partial\zeta}{\partial x}dx+\dfrac{\partial\zeta}{\partial y}dy+\dfrac{\partial\zeta}{\partial z}dz}{dz}+(n-1)\dfrac{\dfrac{\partial\xi}{\partial x}dx+\dfrac{\partial\xi}{\partial y}dy+\dfrac{\partial\xi}{\partial z}dz}{dx} \\ \qquad = n\dfrac{\dfrac{\partial\eta}{\partial x}dx+\dfrac{\partial\eta}{\partial y}dy+\dfrac{\partial\eta}{\partial z}dz}{dy} \end{cases}$$

est une conséquence de l'équation (1).

Posons

$$\frac{dy}{dx}=\alpha;$$

la condition pour que l'équation (2) soit une conséquence de l'équation (1) est alors exprimée par l'identité en x, y, z, α,

$$\frac{1}{\alpha^n}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}+\alpha\frac{\partial\zeta}{\partial y}+\alpha^n\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)+(n-1)\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}+\alpha\frac{\partial\xi}{\partial y}+\alpha^n\frac{\partial\xi}{\partial z}\right)$$
$$=\frac{n}{\alpha}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}+\alpha\frac{\partial\eta}{\partial y}+\alpha^n\frac{\partial\eta}{\partial z}\right),$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial\zeta}{\partial x}\alpha^{-n}+\frac{\partial\zeta}{\partial y}\alpha^{1-n}+\left[\frac{\partial\zeta}{\partial z}+(n-1)\frac{\partial\xi}{\partial x}-n\frac{\partial\eta}{\partial y}\right]+(n-1)\frac{\partial\xi}{\partial y}\alpha+(n-1)\frac{\partial\xi}{\partial z}\alpha^n$$
$$=n\frac{\partial\eta}{\partial x}\alpha^{-1}+\frac{\partial\eta}{\partial z}\alpha^{n-1}.$$

Il résulte des hypothèses faites sur n que deux quelconques des exposants de α sont distincts; l'identité précédente exige donc que

$$\frac{\partial\xi}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial\xi}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial\eta}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial\eta}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial\zeta}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial\zeta}{\partial y}=0,$$
$$\frac{\partial\zeta}{\partial z}+(n-1)\frac{\partial\xi}{\partial x}-n\frac{\partial\eta}{\partial y}=0.$$

De là on déduit

$$\xi=ax+c_1,\qquad \eta=a'y+c_2,\qquad \zeta=a''z+c_3$$

avec

$$a''-n(a'-a)-a=0.$$

Si donc on pose

$$a'-a=b,$$

on trouve

$$\xi = ax + c_1, \qquad \eta = (a+b)y + c_2, \qquad \zeta = (a+nb)z + c_3.$$

L'équation proposée admet donc le groupe G défini par les cinq transformations infinitésimales

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z}, \quad x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z}, \quad y\frac{\partial f}{\partial y} + nz\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Les transformations finies du groupe G sont données évidemment par les formules

$$x' = ax + c_1, \qquad y' = aby + c_2, \qquad z' = ab^n z + c_3.$$

L'application de la même méthode montre que, si n est égal à l'un des nombres $(-1, \frac{1}{2}, 2)$, l'équation considérée admet un groupe à dix paramètres et, si n est égal à 1 ou 0, l'équation admet un groupe infini. Plus loin nous trouverons ces derniers résultats plus rapidement.

5. Passons maintenant à la recherche des équations aux dérivées partielles qui admettent un groupe fini de transformations.

Remarquons d'abord qu'une équation linéaire

$$Pp + Qq = R,$$

admet forcément un groupe infini. En effet, cette équation admet dans tous les cas le groupe infini engendré par les transformations infinitésimales

$$\rho(x, y, z)\left(P\frac{\partial f}{\partial x} + Q\frac{\partial f}{\partial y} + R\frac{\partial f}{\partial z}\right),$$

où ρ désigne une fonction arbitraire. Les équations aux dérivées partielles que nous cherchons sont donc certainement des équations non linéaires.

Soit

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \tag{1}$$

une équation aux dérivées partielles, non linéaire, admettant la transformation ponctuelle

$$x' = X(x, y, z), \qquad y' = Y(x, y, z), \qquad z' = Z(x, y, z), \tag{2}$$

et soient

$$(3) \qquad V(x, y, z, a, b) = 0, \qquad V' = \frac{\partial V}{\partial a} + c\frac{\partial V}{\partial b} = 0$$

les équations des caractéristiques.

On a vu (Chap. II) que l'ensemble des caractéristiques admet aussi la transformation (2) : donc la multiplicité de points (x, y, z, a, b, c) définie par les équations (3) admet une transformation ponctuelle de la forme

$$(2) \qquad x' = X(x, y, z), \qquad y' = Y(x, y, z), \qquad z' = Z(x, y, z),$$
$$(4) \qquad a' = A(a, b, c), \qquad b' = B(a, b, c), \qquad c' = C(a, b, c).$$

En d'autres termes, le lieu des points (x', y', z', a', b', c') défini par les équations (2), (4) et (3) est identique à la multiplicité définie par les équations (3). Donc le système

$$(5) \qquad V(x', y', z', a', b') = 0, \qquad V'(x', y', z', a', b', c') = 0,$$

où (x', y', z', a', b', c') sont définies par les équations (2) et (4), est équivalent au système (3). Il résulte de là que le système (5), considéré comme un système d'équations entre les six variables

$$x, y, z, a', b', c',$$

est, pour les caractéristiques, un système d'équations normal (*voir* p. 13). Donc les fonctions a', b', c' de a, b, c satisfont à l'identité

$$db' - c'\,da' = \rho(db - c\,da).$$

Nous parvenons ainsi à ce résultat :

Si le système de courbes représenté par les équations

$$V(x, y, z, a, b) = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial a} + c\frac{\partial V}{\partial b} = 0,$$

admet une transformation ponctuelle

$$(2) \qquad x' = X(x, y, z), \qquad y' = Y(x, y, z), \qquad z' = Z(x, y, z),$$

la transformation conjuguée

$$(4) \qquad a' = A(a, b, c), \qquad b' = B(a, b, c), \qquad c' = C(a, b, c),$$

considérée comme échangeant les éléments linéaires (a, b, c) *d'un plan, est une transformation de contact.*

Cela posé, considérons dans les équations (3) x, y, z comme des paramètres, et a, b, c comme les coordonnées d'un point de l'espace. Ces équations définissent alors une famille de courbes T qui admet la transformation (4).

A chaque point (a, b, c) faisons maintenant correspondre dans le plan des (a, b) l'élément linéaire (a, b, c); aux points d'une courbe T correspondent les éléments linéaires unis suivant la courbe (t), projection de T sur le plan des points $(a, b, 0)$. On peut donc dire que :

La famille des courbes (t) admet la transformation de contact (4).

Or les courbes (t) sont précisément les courbes intégrales de l'équation

$$H\left(a, b, \frac{db}{da}, \frac{d^2 b}{da^2}, \frac{d^3 b}{da^3}\right) = 0, \tag{6}$$

que nous avons fait correspondre au système (3). Donc l'équation différentielle (6) admet une transformation de contact. Réciproquement, si l'équation (6) admet une transformation de contact, la famille des caractéristiques et, par suite, l'équation (1) admet une transformation ponctuelle. Pour démontrer cette réciproque, il suffit de reprendre les raisonnements précédents en sens inverse. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Si l'équation aux dérivées partielles*

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \tag{1}$$

admet une transformation ponctuelle, chacune des équations différentielles

$$H\left(a, b, \frac{db}{da}, \frac{d^2 b}{da^2}, \frac{d^3 b}{da^3}\right) = 0 \tag{2}$$

qui lui correspondent admet une transformation de contact. Réciproquement, si une équation de la forme (2) *admet une transformation de contact, chacune des équations* (1) *qui lui correspondent admet une transformation ponctuelle.*

Plus généralement :

Si une équation aux dérivées partielles

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \tag{1}$$

admet un groupe à r paramètres essentiels, chacune des équations

$$H\left(a, b, \frac{db}{da}, \frac{d^2 b}{da^2}, \frac{d^3 b}{da^3}\right) = 0$$

qui lui correspondent admet un groupe de transformations de contact également à r paramètres essentiels, et réciproquement.

En effet, soient

$$(3) \qquad V(x, y, z, a, b) = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial a} + c\frac{\partial V}{\partial b} = 0$$

les équations des caractéristiques de l'équation (1). Supposons que le système (3) admette toutes les transformations d'un groupe G et désignons par Γ le groupe en a, b, c, conjugué du groupe G. Je dis que ces deux groupes ont le même nombre de paramètres essentiels ou, ce qui revient au même, que le nombre de transformations infinitésimales indépendantes est le même dans chacun des groupes. La démonstration est fondée sur la remarque suivante :

Soient Xf et Af

$$Xf = \xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y} + \zeta\frac{\partial f}{\partial z}, \qquad Af = \alpha\frac{\partial f}{\partial a} + \beta\frac{\partial f}{\partial b} + \gamma\frac{\partial f}{\partial c}$$

deux transformations infinitésimales conjuguées; ou bien ces deux transformations sont nulles identiquement, c'est-à-dire

$$\xi = \eta = \zeta = \alpha = \beta = \gamma = 0,$$

ou bien aucune des deux transformations n'est nulle identiquement.

En effet, le système (3) admet par hypothèse la transformation infinitésimale

$$Xf + Af;$$

cette dernière ne peut se réduire à Af, car alors les paramètres a, b, c ne seraient pas essentiels (*voir* p. 20). Elle ne peut non plus se réduire à Xf, car alors la transformation infinitésimale Xf laisserait invariante chacune des caractéristiques de l'équation (1); par suite, les caractéristiques seraient toutes des courbes intégrales de

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta} = \frac{dz}{\zeta}$$

et ne dépendraient donc que de deux paramètres arbitraires, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Cela posé, en s'appuyant sur la remarque précédente et en observant en outre que les deux transformations infinitésimales

$$e_1 X_1 f + e_2 X_2 f + \ldots + e_r X_r f, \quad e_1 A_1 f + e_2 A_2 f + \ldots + e_r A_r f \qquad [1]$$

sont conjuguées, on voit immédiatement :

1° Que si r transformations infinitésimales de l'un des groupes sont indépendantes, les r transformations conjuguées sont aussi indépendantes;

2° Que si r transformations infinitésimales de l'un des groupes ne sont pas indépendantes, les r transformations infinitésimales conjuguées ne sont pas non plus indépendantes.

Le théorème proposé est donc démontré.

Nous voyons donc que la recherche des équations aux dérivées partielles

$$(1) \qquad F(x, y, z, p, q) = 0,$$

qui admettent un groupe fini de transformations (ponctuelles) peut être ramené à la recherche des équations différentielles du troisième ordre

$$(2) \qquad H\left(a, b, \frac{db}{da}, \frac{d^2 b}{da^2}, \frac{d^3 b}{da^3}\right) = 0,$$

qui admettent un groupe fini de transformations de contact. Ayant déterminé ces dernières, on en déduit les premières au moyen de la règle déjà donnée (p. 16). Ce problème une fois résolu, on connaîtra toutes les équations de la forme (1) qui admettent un groupe de transformations. En effet, M. Sophus Lie a démontré qu'une équation, telle que (2), ne peut admettre un groupe infini de transformations de contact; donc, une équation de la forme (1) (non linéaire) ne peut admettre un groupe infini de transformations ponctuelles. D'autre part, comme je l'ai déjà indiqué dans la préface, nous nous bornerons à déterminer les équations qui admettent un groupe à plus de trois paramètres.

---

[1] Les symboles $X_i f$ et $A_i f$ désignent deux transformées conjuguées; les coefficients $e_1, e_2, \ldots, e_r$ sont des constantes.

CHAPITRE IV.

RECHERCHE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU TROISIÈME ORDRE $H(x, y, y', y'', y''') = 0$ QUI ADMETTENT UN GROUPE DE TRANSFORMATIONS DE CONTACT.

1. Le groupe des transformations de contact qu'admet une équation différentielle du troisième ordre

$$H(x, y, y', y'', y''') = 0$$

étant forcément fini, il suffit, pour résoudre le problème actuel, de considérer successivement tous les groupes finis de transformations de contact du plan et de chercher les équations différentielles du troisième ordre, que chacun d'eux laisse invariantes. A la vérité, ces groupes sont en nombre infini, mais on sait qu'ils dérivent tous, par une transformation de contact, d'un petit nombre d'entre eux, appelés *groupes canoniques*. Tout revient donc à déterminer les équations du troisième ordre, invariantes qui correspondent aux groupes canoniques. En appliquant à ces équations toutes les transformations de contact du plan, on obtient toutes les équations cherchées.

Les groupes canoniques se partagent, comme on sait [1], en deux catégories : la première comprend les groupes dits *irréductibles,* la seconde se compose de tous les groupes ponctuels *prolongés*.

Les groupes irréductibles sont au nombre de trois; le premier a dix paramètres, le second sept et le troisième six. Désignons-les respectivement par G_{10}, G_7, G_6. Les fonctions caractéristiques des transformations infinitésimales de G_{10} sont les suivantes :

$$W_1 = 1,\quad W_2 = x,\quad W_3 = y',\quad W_4 = x^2,\quad W_5 = xy',\quad W_6 = y'^2,\quad W_7 = y - \tfrac{1}{2}xy',$$
$$W_8 = x(y - \tfrac{1}{2}xy'),\qquad W_9 = y'(y - \tfrac{1}{2}xy'),\qquad W_{10} = (y - \tfrac{1}{2}xy')^2.$$

En prenant seulement les six premières fonctions, on obtient celles qui appartiennent à G_6; enfin, les sept premières sont celles de G_7.

Passons aux groupes ponctuels prolongés.

---

(1) *Transformationsgruppen*, t. I, Chap. XXIII.

Je commencerai par rappeler le principe qui a guidé M. Sophus Lie dans le choix de leurs formes canoniques.

D'abord, on sait qu'un groupe à une variable x ne peut contenir qu'un, deux ou trois paramètres.

Dans le premier cas, il est semblable au groupe

$$x' = x + a,$$

engendré par la transformation infinitésimale

$$X_1 f = \frac{df}{dx};$$

dans le second cas, il est semblable au groupe

$$x' = ax + b,$$

défini par les transformations infinitésimales

$$X_1 f = \frac{df}{dx}, \qquad X_2 f = x\frac{df}{dx};$$

enfin, dans le troisième cas, il est semblable au groupe

$$x' = \frac{ax + b}{x + c},$$

dont les transformations infinitésimales sont

$$X_1 f = \frac{df}{dx}, \qquad X_2 f = x\frac{df}{dx}, \qquad X_3 f = x^2\frac{df}{dx}.$$

M. Sophus Lie partage les groupes ponctuels du plan en deux classes : la première comprend tous les groupes qui ne laissent invariante aucune famille de courbes à un paramètre

$$(1) \qquad \varphi(x, y) = a,$$

la seconde comprend tous les autres groupes.

La seconde classe se subdivise elle-même en plusieurs catégories. Considérons en effet un groupe G laissant invariante la famille de courbes (1). Le groupe à une variable a, que nous avons appelé le groupe conjugué de G, et qui indique la loi suivant laquelle les transformations de G échangent les courbes de la famille, peut contenir 0, 1, 2, 3 paramètres (dans le premier cas, il se réduit à la transformation identique). De là quatre catégories de groupes de seconde classe.

Groupes ponctuels de la première classe. — Ces groupes sont tous semblables à trois groupes homographiques G_1, G_2 et G_3.

G_1.	G_2.	G_3.
$x' = ax + by + c,$	$x' = ax + by + c,$	$x' = \dfrac{ax + by + c}{1 + px + qy},$
$y' = a'x + b'x + c',$	$y' = a'x + b'y + c'.$	$y' = \dfrac{a'x + b'y + c'}{1 + px + qy}.$
$ab' - ba' = 1.$		

Le groupe à cinq paramètres G_1 est engendré par les transformations infinitésimales

$$X_1 f = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad X_2 f = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad X_3 f = x\frac{\partial f}{\partial y}, \quad X_4 f = x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y}, \quad X_5 f = y\frac{\partial f}{\partial x}.$$

Le groupe à six paramètres G_2 est engendré par

$$X_1 f = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad X_2 f = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad X_3 f = x\frac{\partial f}{\partial x}, \quad X_4 f = x\frac{\partial f}{\partial y}, \quad X_5 f = y\frac{\partial f}{\partial x}, \quad X_6 f = y\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Enfin, le groupe à huit paramètres G_3 est engendré par six transformations infinitésimales du groupe G_2 et les deux suivantes

$$X_7 f = x\left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}\right), \qquad X_8 f = y\left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Les groupes G_1, G_2, G_3 sont les groupes canoniques de la première classe.

Groupes ponctuels de la seconde classe. — Par un changement de variables convenable, on peut toujours transformer un groupe ponctuel de la seconde classe en un groupe semblable G laissant invariante la famille des droites parallèles à l'axe des y

$$x = a; \tag{1}$$

les transformations infinitésimales du groupe prennent alors la forme

$$X_k f = \xi_k(x)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta_k(x, y)\frac{\partial f}{\partial y},$$

et il est aisé de voir que les transformations infinitésimales réduites

$$X'_k f = \xi(x)\frac{\partial f}{\partial x}$$

définissent elles-mêmes un groupe, qui est précisément le groupe conjugué de G. D'après ce que l'on a vu sur les groupes à une variable, on peut, par un changement de variable de la forme

$$x' = \varphi(x), \qquad y' = y,$$

transformer le groupe G en un groupe semblable engendré par des transformations infinitésimales de la forme

$$X_k f = (a + bx + cx^2)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta_k(x, y)\frac{\partial f}{\partial y}.$$

On est donc conduit à prendre pour formes canoniques des groupes de la seconde classe les formes suivantes :

Première catégorie.

$$X_k f = \eta_k(x, y)\frac{\partial f}{\partial y},$$

$$k = 1, 2, \ldots, r.$$

Deuxième catégorie.

$$X_1 f = \frac{\partial f}{\partial x} + \theta(x, y)\frac{\partial f}{\partial y},$$

$$X_k f = \eta_k(x, y)\frac{\partial f}{\partial y},$$

$$k = 2, 3, \ldots, r.$$

Troisième catégorie.

$$X_1 f = \frac{\partial f}{\partial x} + \theta_1(x, y)\frac{\partial f}{\partial y},$$

$$X_2 f = x\frac{\partial f}{\partial x} + \theta_2(x, y)\frac{\partial f}{\partial y},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$X_k f = \eta_k(x, y)\frac{\partial f}{\partial y},$$

$$k = 3, 4, \ldots, r.$$

Quatrième catégorie.

$$X_1 f = \frac{\partial f}{\partial x} + \theta_1(x, y)\frac{\partial f}{\partial y},$$

$$X_2 f = x\frac{\partial f}{\partial x} + \theta_2(x, y)\frac{\partial f}{\partial y},$$

$$X_3 f = x^2\frac{\partial f}{\partial x} + \theta_3(x, y)\frac{\partial f}{\partial y},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$X_k f = \eta_k(x, y)\frac{\partial f}{\partial y},$$

$$k = 4, 5, \ldots, r.$$

En calculant les fonctions $\theta(x, y)$ et $\eta(x, y)$ de manière à vérifier les identités

$$(X_i X_k) = \lambda_1 X_1 + \ldots + \lambda_r X_r, \qquad i, k = 1, 2, \ldots, r,$$

M. Sophus Lie est parvenu à donner aux formes canoniques des groupes de la seconde classe les formes simples qui suivent.

Tableau des groupes ponctuels de la seconde classe.

Première catégorie.

1. $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

2. $\dfrac{\partial f}{\partial y},\quad y\dfrac{\partial f}{\partial y},\quad y^2\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

3. $\dfrac{\partial f}{\partial y},\quad x\dfrac{\partial f}{\partial y},\quad \varphi_i(x)\dfrac{\partial f}{\partial y}$ (1).

$i=1, 2, \ldots, r$.

4. $\dfrac{\partial f}{\partial y},\quad x\dfrac{\partial f}{\partial y},\quad \varphi_i(x)\dfrac{\partial f}{\partial y},\quad y\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

$i=1, 2, \ldots, r$.

Deuxième catégorie.

5. $\dfrac{\partial f}{\partial x},\quad \mathrm{P}_i(x)\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

$i=1, 2, \ldots, r$.

6. $\dfrac{\partial f}{\partial x},\quad y\dfrac{\partial f}{\partial y},\quad \mathrm{P}_i(x)\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

$i=1, 2, \ldots, r$.

7. $\dfrac{\partial f}{\partial x},\quad \dfrac{\partial f}{\partial y},\quad y\dfrac{\partial f}{\partial y},\quad y^2\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Les fonctions $\mathrm{P}_i(x)$ constituent un système d'intégrales de l'équation différentielle à coefficients constants

$$a_0\frac{d^r y}{dx^r}+a_1\frac{d^{r-1}y}{dx^{r-1}}+\ldots+a_{r-1}\frac{dy}{dx}+a_r y=0.$$

Troisième catégorie.

8. $\dfrac{\partial f}{\partial x},\quad x\dfrac{\partial f}{\partial x}$.

9. $\dfrac{\partial f}{\partial x},\quad x\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

10. $\dfrac{\partial f}{\partial x},\quad x\dfrac{\partial f}{\partial x},\quad \dfrac{\partial f}{\partial y},\quad y\dfrac{\partial f}{\partial y},\quad y^2\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

11. $\dfrac{\partial f}{\partial x},\quad x\dfrac{\partial f}{\partial x}+my\dfrac{\partial f}{\partial y},\quad \dfrac{\partial f}{\partial y},\quad x\dfrac{\partial f}{\partial y},\quad x^2\dfrac{\partial f}{\partial y},\quad \ldots,\quad x^r\dfrac{\partial f}{\partial y}$ (2).

12. $\dfrac{\partial f}{\partial x},\quad x\dfrac{\partial f}{\partial x}+(x^r+ry)\dfrac{\partial f}{\partial y},\quad \dfrac{\partial f}{\partial y},\quad x\dfrac{\partial f}{\partial y},\quad x^2\dfrac{\partial f}{\partial y},\quad \ldots,\quad x^{r-1}\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

13. $\dfrac{\partial f}{\partial x},\quad x\dfrac{\partial f}{\partial x},\quad \dfrac{\partial f}{\partial y},\quad y\dfrac{\partial f}{\partial y},\quad x\dfrac{\partial f}{\partial y},\quad x^2\dfrac{\partial f}{\partial y},\quad \ldots,\quad x^r\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

---

(1) φ_i désigne une fonction arbitraire de x.

(2) m désigne une constante arbitraire.

Quatrième catégorie.

14. $$\frac{\partial f}{\partial x},\quad x\frac{\partial f}{\partial x},\quad x^2\frac{\partial f}{\partial x}.$$

15. $$\frac{\partial f}{\partial x},\quad x\frac{\partial f}{\partial x},\quad x^2\frac{\partial f}{\partial x},\quad \frac{\partial f}{\partial y},\quad y\frac{\partial f}{\partial y},\quad y^2\frac{\partial f}{\partial y}.$$

16. $$\frac{\partial f}{\partial x},\quad x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y},\quad x^2\frac{\partial f}{\partial x}+2xy\frac{\partial f}{\partial y}.$$

17. $$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y},\quad x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y},\quad x^2\frac{\partial f}{\partial x}+y^2\frac{\partial f}{\partial y}.$$

18. $$\frac{\partial f}{\partial x},\quad x\frac{\partial f}{\partial x},\quad x^2\frac{\partial f}{\partial x}+xy\frac{\partial f}{\partial y},\quad y\frac{\partial f}{\partial y}.$$

19. $$\frac{\partial f}{\partial x},\quad 2x\frac{\partial f}{\partial x}+ry\frac{\partial f}{\partial y},\quad x^2\frac{\partial f}{\partial x}+rxy\frac{\partial f}{\partial y},\quad \frac{\partial f}{\partial y},\quad x\frac{\partial f}{\partial y},\quad x^2\frac{\partial f}{\partial y},\quad \ldots,\quad x^r\frac{\partial f}{\partial y}.$$

20. $$\frac{\partial f}{\partial x},\quad x\frac{\partial f}{\partial x},\quad x^2\frac{\partial f}{\partial x}+rxy\frac{\partial f}{\partial y},\quad y\frac{\partial f}{\partial y},\quad \frac{\partial f}{\partial y},\quad x\frac{\partial f}{\partial y},\quad \ldots,\quad x^r\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Cherchons maintenant les équations différentielles du troisième ordre qui admettent un groupe de transformations ponctuelles. Les seuls groupes à considérer sont ceux de la seconde classe, car les autres ne laissent invariante aucune équation différentielle du troisième ordre.

En appliquant la méthode générale donnée par M. Sophus Lie (¹), on trouve facilement que les seuls groupes contenant plus de *cinq* paramètres, qui laissent une équation du troisième ordre invariante, sont les suivants

$$\frac{\partial f}{\partial x},\quad x\frac{\partial f}{\partial x},\quad \frac{\partial f}{\partial y},\quad y\frac{\partial f}{\partial y},\quad x\frac{\partial f}{\partial y},\quad x^2\frac{\partial f}{\partial y},$$

$$\frac{\partial f}{\partial x},\quad x\frac{\partial f}{\partial x},\quad x^2\frac{\partial f}{\partial x},\quad \frac{\partial f}{\partial y},\quad y\frac{\partial f}{\partial y},\quad y^2\frac{\partial f}{\partial y},$$

$$\frac{\partial f}{\partial x},\quad x\frac{\partial f}{\partial x},\quad x^2\frac{\partial f}{\partial x}+2xy\frac{\partial f}{\partial y},\quad y\frac{\partial f}{\partial y},\quad \frac{\partial f}{\partial y},\quad x\frac{\partial f}{\partial y},\quad x^2\frac{\partial f}{\partial y},$$

$$\frac{\partial f}{\partial x},\quad x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y},\quad x^2\frac{\partial f}{\partial x}+2xy\frac{\partial f}{\partial y},\quad \frac{\partial f}{\partial y},\quad x\frac{\partial f}{\partial y},\quad x^2\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Chacun des trois premiers groupes ne laisse invariante qu'une seule équation du troisième ordre, à savoir l'équation

$$y''' = 0. \tag{(1)}$$

(¹) Sophus Lie, *Mathematische Annalen*, t. XXXII, p. 213.

Le quatrième groupe laisse invariante l'équation

$$((1')) \qquad 2y'y''' - 3y''^2 = 0,$$

dont les courbes intégrales ont pour équations

$$xy + ax + bx + c = 0.$$

Nous verrons plus loin que, en appliquant à ces hyperboles une transformation de contact convenable, on peut les transformer en paraboles, à savoir les paraboles représentées par

$$y = a' + b'x + c'x^2 \qquad (^1).$$

Nous pourrons alors énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Toute équation différentielle du troisième ordre*

$$\mathrm{H}(x, y, y', y'', y''') = 0$$

qui admet un groupe de transformations de contact, à plus de cinq paramètres, dérive, par une transformation de contact, de l'équation

$$y''' = 0.$$

Reste à déterminer les équations du troisième ordre qui admettent un groupe à moins de six paramètres.

Équations qui admettent un groupe ponctuel contenant cinq paramètres.

1. Les groupes à cinq paramètres appartenant à la première catégorie ne laissent invariante aucune équation différentielle du troisième ordre.

2. Considérons donc les groupes à cinq paramètres appartenant à la seconde catégorie. A la première forme canonique ne correspond aucune équation du troisième ordre invariante. Il n'en est pas de même de la forme

$$(\mathrm{G}) \qquad \frac{\partial f}{\partial x}, \quad y\frac{\partial f}{\partial y}, \quad \mathrm{P}_1(x)\frac{\partial f}{\partial y}, \quad \mathrm{P}_2(x)\frac{\partial f}{\partial y}, \quad \mathrm{P}_3(x)\frac{\partial f}{\partial y},$$

où P_1, P_2, P_3 constituent un système d'intégrales de l'équation

$$a_0 y''' + a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = 0.$$

Premier cas. — L'équation caractéristique a trois racines simples (α, β, γ).

---

(1) SOPHUS LIE, *Transformationsgruppen*, t. II, p. 441.

Le groupe G prend alors la forme

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad y\frac{\partial f}{\partial y}, \quad e^{\alpha x}\frac{\partial f}{\partial y}, \quad e^{\beta x}\frac{\partial f}{\partial y}, \quad e^{\gamma x}\frac{\partial f}{\partial y};$$

effectuant le changement de variables défini par

$$x' = e^{(\beta-\alpha)x}, \qquad y' = ye^{-\alpha x},$$

on trouve que le groupe G est semblable au suivant

$$x\frac{\partial f}{\partial x}, \quad y\frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad x\frac{\partial f}{\partial y}, \quad x^n\frac{\partial f}{\partial y},$$

qui peut alors être pris comme groupe canonique.

Ce groupe laisse invariante une équation du troisième ordre, et une seule, à savoir l'équation

$$xy''' - (n-2)y'' = 0, \tag{(2)}$$

qui a pour courbes intégrales les courbes représentées par

$$y = a + bx + cx^n.$$

Deuxième cas. — L'équation caractéristique a une racine double.

Le groupe devient

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad y\frac{\partial f}{\partial y}, \quad e^{\alpha x}\frac{\partial f}{\partial y}, \quad xe^{\alpha x}\frac{\partial f}{\partial y}, \quad e^{\beta x}\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Comme dans le cas précédent, on trouve facilement que ce groupe est semblable au suivant

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad y\frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad x\frac{\partial f}{\partial y}, \quad e^{x}\frac{\partial f}{\partial y},$$

que nous prendrons comme groupe canonique. L'équation du troisième ordre invariante est ici

$$y''' - y'' = 0; \tag{(3)}$$

les courbes intégrales sont représentées par

$$y = a + bx + ce^x.$$

Troisième cas. — L'équation caractéristique a une racine triple.

Le groupe devient

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad y\frac{\partial f}{\partial y}, \quad e^{\alpha x}\frac{\partial f}{\partial y}, \quad x e^{\alpha x}\frac{\partial f}{\partial y}, \quad x^2 e^{\alpha x}\frac{\partial f}{\partial y};$$

il est, dans tous les cas, semblable au suivant

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad y\frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad x\frac{\partial f}{\partial y}, \quad x^2\frac{\partial f}{\partial y}$$

qui ne laisse invariante que l'équation

$$y'''' = 0.$$

3. Examinons maintenant les groupes à cinq paramètres appartenant à la troisième catégorie.

Le groupe

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad x\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad y\frac{\partial f}{\partial y}, \quad y^2\frac{\partial f}{\partial y}$$

laisse invariante une équation du troisième ordre, et une seule, à savoir l'équation déjà trouvée

$$((1')) \qquad 2y'y''' - 3y''^2 = 0.$$

Les groupes

$$\frac{\partial f}{\partial y}, \quad x\frac{\partial f}{\partial y}, \quad x^2\frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}, \quad x\frac{\partial f}{\partial x} + my\frac{\partial f}{\partial y},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}, \quad x\frac{\partial f}{\partial y}, \quad y\frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}, \quad x\frac{\partial f}{\partial x}$$

ne fournissent pas non plus d'équation du troisième ordre nouvelle, car ils ne laissent invariante que l'équation

$$((1)) \qquad y''' = 0.$$

Quant au groupe

$$\frac{\partial f}{\partial y}, \quad x\frac{\partial f}{\partial y}, \quad x^2\frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}, \quad x\frac{\partial f}{\partial x} + (3y + x^3)\frac{\partial f}{\partial y},$$

il ne laisse pas d'équation du troisième ordre invariante.

4. Reste à examiner les groupes à cinq paramètres de la quatrième catégorie.

Le groupe

$$\frac{\partial f}{\partial x},\quad 2x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y},\quad x^2\frac{\partial f}{\partial x}+xy\frac{\partial f}{\partial y},\quad \frac{\partial f}{\partial y},\quad x\frac{\partial f}{\partial y}$$

ne laisse pas d'équation du troisième ordre invariante.

Le groupe

$$\frac{\partial f}{\partial x},\quad x\frac{\partial f}{\partial x},\quad x^2\frac{\partial f}{\partial x},\quad y\frac{\partial f}{\partial y},\quad \frac{\partial f}{\partial y}$$

est semblable au groupe

$$\frac{\partial f}{\partial x},\quad x\frac{\partial f}{\partial x},\quad \frac{\partial f}{\partial y},\quad y\frac{\partial f}{\partial y},\quad y^2\frac{\partial f}{\partial y}$$

qui a déjà été étudié.

En résumé, les équations invariantes

$$\mathrm{H}(x, y, y', y'', y''') = 0,$$

qui correspondent aux groupes canoniques à cinq paramètres, sont, d'une part, les équations déjà trouvées ((1)) et ((1')), d'autre part, les deux équations

$$((2))\qquad xy''' - (n-2)y'' = 0,$$

$$((3))\qquad y''' - y'' = 0.$$

Nous verrons plus tard que ces équations ne peuvent admettre un groupe de transformations de contact à plus de cinq paramètres ([1]).

Remarquons, d'ailleurs, que l'équation ((2)) est l'équation différentielle des courbes

$$y = a + bx + cx^n;$$

l'équation ((3)) est l'équation différentielle des suivantes

$$y = a + bx + ce^x.$$

Équations qui admettent un groupe ponctuel de quatre paramètres.

1. Considérons d'abord les groupes à quatre paramètres de la première catégorie.

([1]) Pourvu que $n \neq -1, 0, \frac{1}{2}, 1, 2$.

Le groupe

$$\frac{\partial f}{\partial y}, \quad x\frac{\partial f}{\partial y}, \quad \varphi(x)\frac{\partial f}{\partial y}, \quad \psi(x)\frac{\partial f}{\partial y}$$

ne laisse invariante aucune équation différentielle du troisième ordre.

Le groupe

$$\frac{\partial f}{\partial y}, \quad x\frac{\partial f}{\partial y}, \quad \varphi(x)\frac{\partial f}{\partial y}, \quad y\frac{\partial f}{\partial y}$$

laisse invariante une équation du troisième ordre, et une seule, à savoir

$$\text{((4))} \qquad \frac{y'''}{y''} = \frac{\varphi'''(x)}{\varphi''(x)},$$

qui a pour courbes intégrales les courbes représentées par

$$y = a + bx + c\varphi(x).$$

2. Passons aux groupes de la deuxième catégorie. Le premier de ces groupes est le suivant

$$\text{(G)} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}, \quad P_1(x)\frac{\partial f}{\partial y}, \quad P_2(x)\frac{\partial f}{\partial y}, \quad P_3(x)\frac{\partial f}{\partial y},$$

où P_1, P_2, P_3 constituent un système d'intégrales de l'équation

$$a_0 y''' + a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = 0.$$

Comme précédemment, on trouve aisément que ce groupe est semblable à

$$\text{(G}_1\text{)} \qquad \frac{\partial f}{\partial x} + my\frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad x\frac{\partial f}{\partial y}, \quad x^n\frac{\partial f}{\partial y},$$

si l'équation caractéristique a trois racines simples; à

$$\text{(G}_2\text{)} \qquad \frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad x\frac{\partial f}{\partial y}, \quad e^x\frac{\partial f}{\partial y},$$

si l'équation caractéristique a une racine double; ou enfin, à

$$\text{(G}_3\text{)} \qquad \frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad x\frac{\partial f}{\partial y}, \quad x^2\frac{\partial f}{\partial y},$$