ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

W. DE TANNENBERG

# Sur les équations aux dérivées partielles du premier ordre

*Annales de la faculté des sciences de Toulouse 1re série*, tome 5, nº 2 (1891), p. B41-B150
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1891_1_5_2_B41_0>

ou

$$(G'_3) \qquad \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad x\frac{\partial f}{\partial y}, \quad x^2\frac{\partial f}{\partial y},$$

si l'équation caractéristique a une racine triple.

($a$) Le groupe $G_1$ laisse invariante une équation du troisième ordre de la forme

$$(1) \qquad xy''' - (n-2)y'' = \varphi(x),$$

dont les courbes intégrales sont représentées par

$$(2) \qquad y = ax^n + bx + c + \psi(x),$$

$\psi(x)$ étant une intégrale particulière de l'équation (1).

Si, dans l'équation (2), on remplace $y$ par $y + \psi(x)$, elle devient

$$y = a + bx + cx^n,$$

qui représente les courbes intégrales de l'équation

$$((2)) \qquad xy''' - (n-2)y'' = 0.$$

L'équation différentielle considérée dérive donc, par une transformation ponctuelle, de l'équation canonique ((2)).

($b$) Le groupe $G_2$ laisse invariante l'équation

$$(1) \qquad y''' - y'' = k,$$

qui dérive aussi de l'équation canonique

$$((3)) \qquad y''' - y'' = 0,$$

par une transformation ponctuelle; il suffit, en effet, de remplacer dans (1) $y$ par $y + \varphi(x)$, $\varphi(x)$ étant une intégrale de l'équation (1), pour obtenir l'équation canonique ((3)).

($c$) Enfin le groupe $G_3$ laisse invariante toute équation de la forme

$$y''' = ke^x, \qquad k = \text{const.}$$

et le groupe $G'_3$ les équations de la forme

$$y''' = k;$$

chacune de ces équations dérive évidemment de l'équation canonique ((1))

par une transformation ponctuelle de la forme

$$x' = x, \qquad y' = y + \varphi(x).$$

Le groupe G ne fournit donc, dans aucun cas, de forme canonique nouvelle.

($d$) Il en est de même du groupe

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad y\frac{\partial f}{\partial y}, \quad y^2\frac{\partial f}{\partial y};$$

en effet, ce groupe laisse invariantes les équations du troisième ordre comprises dans la formule

$$\frac{3y''^2 - 2y'y'''}{y'^2} = m^2.$$

Si l'on effectue le changement de variables suivant

$$x_1 = e^{mx},$$

l'équation précédente prend la forme ((1')),

$$3y''^2 - 2y'y''' = 0.$$

($e$) Reste à examiner le groupe

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad y\frac{\partial f}{\partial y}, \quad P_1(x)\frac{\partial f}{\partial y}, \quad P_2(x)\frac{\partial f}{\partial y}$$

où $P_1(x)$ et $P_2(x)$ sont les intégrales de

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0.$$

Supposons d'abord que les racines de l'équation caractéristique soient distinctes. Le groupe est alors semblable au suivant

$$x\frac{\partial f}{\partial x}, \quad y\frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad x\frac{\partial f}{\partial y},$$

qui ne laisse invariantes que les équations canoniques

((2)) $$xy''' - (n-2)y'' = 0,$$

Supposons maintenant que l'équation caractéristique ait ses racines égales. Le groupe est alors semblable à celui-là

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad y\frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad x\frac{\partial f}{\partial y};$$

les équations invariantes qui lui correspondent sont données par la formule

$$y''' - ky'' = 0;$$

chacune de ces équations dérive par une transformation ponctuelle $(x_1 = kx)$ de l'équation canonique

$$((3)) \qquad y''' - y'' = 0.$$

Le groupe considéré G ne fournit donc pas de forme canonique nouvelle.

3. Les groupes à quatre paramètres de la troisième catégorie sont au nombre de trois.

$(a)$ Considérons d'abord le premier

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad x\frac{\partial f}{\partial x} + my\frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad x\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Si $m = 2$, le groupe ne laisse invariante que l'équation canonique déjà obtenue

$$y''' = 0.$$

Si $m \neq 2$, il y a une infinité d'équations invariantes, à savoir celles qui sont données par la formule

$$(1) \qquad y''' = ky''^p, \qquad p = \frac{m-3}{m-2},$$

où $k$ désigne une constante.

Il est aisé de voir que, pour une valeur donnée de $m$, ces équations dérivent toutes (sauf l'équation $y''' = 0$ qui correspond à $k = 0$) de l'une d'entre elles,

$$(2) \qquad y''' = hy''^p, \qquad h \neq 0$$

par une transformation ponctuelle. En effet, il suffit, pour passer de l'équation (1) à l'équation (2), de remplacer $y$ par $\lambda y$, $\lambda$ étant déterminé par

$$\lambda = \left(\frac{h}{k}\right)^{\frac{1}{p-1}} = \left(\frac{h}{k}\right)^{m-2}.$$

Dans la suite nous prendrons

$$h = m - 2.$$

Remarquons, dès maintenant, que l'équation (2) dérive, dans le cas où

$$m = 3,$$

de l'équation canonique

$$y''' = 0,$$

par une transformation ponctuelle (*voir* page 41).

(*b*) Le second groupe à examiner est le suivant

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad x\frac{\partial f}{\partial y}, \quad x\frac{\partial f}{\partial x} + \left(\frac{x^2}{2} + 2y\right)\frac{\partial f}{\partial y};$$

à ce groupe correspond une infinité d'équations du troisième ordre invariantes, à savoir les équations de la forme

$$y''' e^{y''} = k, \tag{1}$$

où $k$ désigne une constante quelconque. Chacune de ces équations dérive, par une transformation ponctuelle, de l'équation

$$y''' e^{y''} = 1;$$

il suffit, pour le voir, de remplacer dans l'équation (1) $y$ par $y + \frac{1}{2}x^2 \mathrm{L}k$.

(*c*) Le dernier groupe à quatre paramètres de la troisième catégorie est

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad x\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad y\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Ce groupe laisse invariantes les équations du troisième ordre, qui ont la forme

$$y' y''' = m y''^2,$$

$m$ désignant une constante.

4. Enfin le seul groupe à quatre paramètres de la dernière catégorie est le suivant

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad x\frac{\partial f}{\partial x}, \quad x^2\frac{\partial f}{\partial x}+xy\frac{\partial f}{\partial y}, \quad y\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Ce groupe laisse invariantes les équations différentielles du troisième ordre qui ont la forme

$$yy''' + 3y'y'' = ky^{\frac{1}{2}}y''^{\frac{3}{2}},$$

où $k$ désigne une constante quelconque.

En résumé, nous venons de trouver que les équations du troisième ordre suivantes

$$y'''\varphi''(x) - y''\varphi'''(x) = 0,$$
$$y''' = ky''^p,$$
$$y'''e^{y''} = 1,$$
$$y'y''' = my''^2,$$
$$yy''' + 3y'y'' = ky^{\frac{1}{2}}y''^{\frac{3}{2}}$$

et celles qui en dérivent par une transformation de contact admettent un groupe ponctuel à quatre paramètres.

Nous verrons dans la suite que la quatrième équation et celles qui en dérivent admettent un groupe de transformations de contact à *cinq* paramètres.

De même la deuxième équation admet un groupe à plus de quatre paramètres si

$$p = 0, \qquad p = 1, \qquad p = 2 \qquad \text{ou} \qquad p = 3.$$

Nous pourrons alors dire que les formes canoniques des équations du troisième ordre, qui admettent un groupe à *quatre* paramètres, sans admettre un groupe d'ordre plus élevé, sont

((4)) $$y'''\varphi''(x) - y''\varphi'''(x) = 0,$$

((5)) $$y''' = ky''^p, \qquad p \neq 0, 1, 2, 3, \quad k \neq 0,$$

((6)) $$y'''e^{y''} = 1,$$

((7)) $$yy''' + 3y'y'' = ky^{\frac{1}{2}}y''^{\frac{3}{2}}, \qquad k \neq 0.$$

# SECONDE PARTIE.

## CHAPITRE I.

### ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES QUI ADMETTENT UN GROUPE A DIX PARAMÈTRES.

La correspondance établie par M. Sophus Lie entre les équations aux dérivées partielles

$$F(x, y, z, p, q) = 0, \tag{1}$$

qui admettent un groupe de transformations ponctuelles, et les équations différentielles ordinaires

$$H(x, y, y', y'', y''') = 0, \tag{2}$$

qui admettent un groupe de transformations de contact, nous a permis de ramener le problème proposé à la recherche des équations aux dérivées partielles qui correspondent aux équations canoniques (2), déterminées dans la première Partie de ce travail. Comme je l'ai déjà énoncé, je supposerai une équation aux dérivées partielles définie par son équation associée. Grâce à l'introduction dans le calcul de cette équation aux différentielles totales, il deviendra souvent facile d'apercevoir que deux équations aux dérivées partielles sont semblables et de trouver les changements de variables qui permettent de transformer l'une dans l'autre.

1. *Équations aux dérivées partielles qui correspondent à l'équation canonique*

$$y''' = 0. \tag{(1)}$$

Nous avons déjà vu que ces équations sont les équations aux dérivées partielles qui dérivent, par une transformation ponctuelle, de l'équation

$$1 + p^2 + q^2 = 0,$$

dont l'équation associée est

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0. \tag{I}$$

Le groupe de cette équation est précisément le groupe des transformations conformes ([1]).

2. *Équations aux dérivées partielles qui correspondent à l'équation canonique*

$$2y'y''' - 3y''^2 = 0. \tag{1'}$$

Cette équation étant l'équation différentielle des hyperboles, dont les asymptotes sont parallèles aux axes de coordonnées, dérive par une transformation ponctuelle de l'équation

$$(1 + y'^2)y''' - 3yy''^2 = 0, \tag{2}$$

qui a pour intégrales tous les cercles du plan

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + c^2 = 0. \tag{3}$$

Tout revient donc à chercher les équations aux dérivées partielles qui correspondent à l'équation (2).

En exprimant que la droite (*voir* p. 16)

$$(x - a)\,da + (y - b)\,db - c\,dc = 0$$

est tangente au cercle (3), on trouve

$$da^2 + db^2 + dc^2 = 0.$$

La famille des équations aux dérivées partielles qui correspondent à l'équation (1') est donc la même que celle qui correspond à l'équation canonique

$$y''' = 0,$$

et nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Toute équation aux dérivées partielles*

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

---

([1]) *Transformationsgruppen*, IIe Volume, page 459.

*qui admet un groupe de transformations à plus de cinq paramètres dérive, par une transformation ponctuelle, de l'équation*

$$(1) \qquad 1 + p^2 + q^2 = 0,$$

*et admet, par conséquent, un groupe de transformations à dix paramètres.*

Corollaire. — *Toute équation différentielle*

$$\mathrm{H}(x, y, y', y'', y''') = 0,$$

*qui admet un groupe de transformations de contact à plus de cinq paramètres admet également un groupe de transformations à dix paramètres et dérive de l'équation*

$$y''' = 0,$$

*par une transformation de contact.*

3. *Transformations de contact par lesquelles les coniques, ayant deux points communs, se changent en coniques tangentes à une droite donnée en un point donné.* — Proposons-nous de déterminer une transformation de contact permettant de passer de l'équation

$$(1 + y'^2)y''' - 3yy''^2 = 0$$

à l'équation

$$y''' = 0,$$

ou, ce qui revient au même, de la famille des cercles

$$(1) \qquad (x - a')^2 + (y - b')^2 + c'^2 = 0$$

à la famille de paraboles

$$(2) \qquad y = a + bx + cx^2.$$

Appliquons d'abord, à l'équation (1), la transformation *particulière*

$$a' = i(a + c), \qquad b' = b, \qquad c' = a - c,$$

qui transforme l'équation correspondante à (1),

$$da'^2 + db'^2 + dc'^2 = 0,$$

dans la suivante

$$db^2 - 4\,da\,dc = 0,$$

qui correspond à l'équation (2). La famille des cercles est alors représentée par

$$[x - i(a+c)]^2 + (y-b)^2 + (a-c)^2 = 0;$$

il ne reste plus qu'à résoudre le problème suivant, qui est complètement déterminé :

*Déterminer la transformation de contact*

$$x' = \mathrm{X}(x, y, z), \qquad y' = \mathrm{Y}(x, y, z), \qquad z' = \mathrm{Z}(x, y, z)$$

*qui fait correspondre, à la famille des éléments linéaires représentée par*

$$(3) \qquad \left\{ \begin{array}{l} [x' - i(a+c)]^2 + (y'-b)^2 + (a-c)^2 = 0, \\ x' - i(a+c) \quad + z'(y'-b) = 0, \end{array} \right.$$

*la famille suivante*

$$(4) \qquad y = a + bx + cx^2, \qquad z = b + 2cx.$$

Pour résoudre ce problème, remarquons que le système (3) peut prendre la forme suivante

$$(3') \qquad \left\{ \begin{array}{l} 2ia + ub = x' + uy', \\ 2ic + vb = x' + vy', \end{array} \right. \qquad \left. \begin{array}{l} u \\ v \end{array} \right\} = z' \pm \sqrt{z'^2 + 1},$$

obtenue en résolvant le système (3) par rapport à $a$ et $c$.

De même, le système (4) peut prendre la forme

$$(4') \qquad \left\{ \begin{array}{l} 2a \; + bx = 2y - zx, \\ 2cx + \; b \; = z. \end{array} \right.$$

Les systèmes (3') et (4') doivent évidemment représenter la même multiplicité de points $(x, y, z, a, b, c)$; donc on doit avoir

$$\frac{x' + uy'}{2y - zx} = \frac{u}{x} = i, \qquad \frac{x' + vy'}{z} = v = \frac{i}{x};$$

ces quatre équations se réduisent aux trois suivantes

$$x' + uy' = i(2y - zx),$$
$$x' + vy' = vz,$$
$$u = ix,$$

qui, résolues par rapport à $x$, $y$, $z$, donnent

$$x = -iu,$$
$$iy = u(y' - z'x') \qquad \text{avec} \qquad u^2 - 2uz' - 1 = 0,$$
$$z = y' - ux'.$$

Il est aisé de voir que ces équations définissent une transformation de contact. C'est la transformation cherchée. Désignons-la par T. La transformation de contact la plus générale, par laquelle la famille de paraboles

$$y = a + bx + cx^2$$

devient la famille des cercles du plan, est représentée par le symbole ST, où S désigne la transformation de contact la plus générale, qui laisse invariante l'équation $y''' = 0$ (*Transformationsgruppen*, t. II, p. 439).

Cela posé, considérons l'ensemble H des coniques ayant deux points communs A et B, et l'ensemble K des coniques tangentes à une droite D en un point C. Pour faire correspondre la famille H à la famille K, par une transformation de contact, il suffit d'appliquer à la famille K la transformation de contact (USTV), où U et V sont définies ainsi : U désigne une transformation homographique faisant correspondre à K la famille des paraboles déjà considérée; V désigne une transformation homographique faisant correspondre la famille H à la famille des cercles du plan.

# CHAPITRE II.

## ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES QUI ADMETTENT UN GROUPE A CINQ PARAMÈTRES.

1. Cherchons d'abord les équations aux dérivées partielles qui correspondent à la forme canonique

$$((2)) \qquad xy''' - (n-2)y'' = 0, \qquad n \neq 0,\ 1,\ \tfrac{1}{2},\ 2,\ -1.$$

Les courbes intégrales de cette équation peuvent être représentées par l'équation

$$y = a\left(1 - \frac{1}{n}\right) - bx + c\frac{x^n}{n}.$$

Comme précédemment, écrivons que l'équation en $x$

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)da - x\,db + \frac{x^n}{n}dc = 0$$

a une racine double; il suffit, pour cela, d'éliminer $x$ entre l'équation précédente et la suivante (*voir* p. 17)

$$db - x^{n-1}\,dc = 0;$$

on trouve ainsi

$$\frac{dc}{da} = \left(\frac{db}{da}\right)^n.$$

Les équations aux dérivées partielles cherchées sont donc toutes semblables à celle dont la forme associée est

$$\text{(II)} \qquad \frac{dz}{dx} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^n.$$

*Groupe de l'équation* (II). — Par son origine même, la famille de courbes

$$\varphi(x, y, a, b, c) = y - a\left(1 - \frac{1}{n}\right) + bx - c\frac{x^n}{n} = 0$$

admet le groupe G défini par les transformations infinitésimales

$$\text{(G)} \quad X_1 f = x\frac{\partial f}{\partial x}, \quad X_2 f = y\frac{\partial f}{\partial y}, \quad X_3 f = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad X_4 f = x\frac{\partial f}{\partial y}, \quad X_5 f = x^n\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Proposons-nous de déterminer le groupe conjugué (p. 21) du groupe précédent. Nous devons, pour cela, déterminer les transformations infinitésimales de la forme

$$X'_i f = X_i f + A_i(a, b, c)\frac{\partial f}{\partial a} + B_i(a, b, c)\frac{\partial f}{\partial b} + C_i(a, b, c)\frac{\partial f}{\partial c},$$

qu'admet la multiplicité de points $(x, y, a, b, c)$ définie par l'équation

$$\varphi(x, y, a, b, c) = 0.$$

Les équations qui déterminent $A_i$, $B_i$, $C_i$ s'obtiennent en écrivant que l'équation

$$X'_i\varphi = 0$$

est vérifiée en chaque point de la multiplicité considérée.

*Calcul de* $A_1$, $B_1$, $C_1$. — En faisant $i = 1$, on trouve

$$X'_1(\varphi) = -A_1\left(1 - \frac{1}{n}\right) + bx + B_1 x - cx^n - C_1\frac{x^n}{n} = 0.$$

Cette relation étant indépendante de $y$ doit avoir lieu quelles que soient les valeurs de $x$, $a$, $b$, $c$; par suite,

$$A_1 = 0, \qquad B_1 = -b, \qquad C_1 = -cn.$$

Ainsi

$$X'_1 f = x\frac{\partial f}{\partial x} - b\frac{\partial f}{\partial b} - cn\frac{\partial f}{\partial c}.$$

*Calcul de* $A_2$, $B_2$, $C_2$.

$$X'_2(\varphi) = y - \left(1 - \frac{1}{n}\right)A_2 + B_2 x - C_2\frac{x^n}{n};$$

donc on doit avoir identiquement

$$a\left(1 - \frac{1}{n}\right) - bx + c\frac{x^n}{n} - \left(1 - \frac{1}{n}\right)A_2 + xB_2 - \frac{x^n}{n}C_2 = 0,$$

c'est-à-dire

$$A_2 = a, \qquad B_2 = b, \qquad C_2 = c$$

et, par suite,

$$X'_2 f = y\frac{\partial f}{\partial y} + a\frac{\partial f}{\partial a} + b\frac{\partial f}{\partial b} + c\frac{\partial f}{\partial c}.$$

*Calcul de* $A_3$, $B_3$, $C_3$.

$$X'_3\varphi = 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)A_3 + xB_3 - C_3\frac{x^n}{n} = 0.$$

Cette relation doit être une identité en $x$, $a$, $b$, $c$; donc

$$B_3 = 0, \qquad C_3 = 0, \qquad A_3 = \frac{n}{n-1}$$

et

$$X'_3 f = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{n}{n-1}\frac{\partial f}{\partial a}.$$

*Calcul de* $A_4$, $B_4$, $C_4$.

$$X'_4\varphi = x - \left(1 - \frac{1}{n}\right)A_4 + xB_4 - C_4\frac{x^n}{n} = 0,$$

d'où

$$A_4 = 0, \qquad C_4 = 0, \qquad B_4 = -1,$$

$$X'_4 f = x\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial b}.$$

*Calcul de* $A_5$, $B_5$, $C_5$.

$$X'_5\varphi = x^n - \left(1 - \frac{1}{n}\right)A_5 + xB_5 - \frac{x^n}{n}C_5 = 0,$$

d'où

$$A_5 = 0, \qquad B_5 = 0, \qquad C_5 = n,$$

$$X'_5 f = x^n\frac{\partial f}{\partial y} + n\frac{\partial f}{\partial c}.$$

Il résulte du calcul précédent que l'équation

$$\text{(II)} \qquad \frac{dz}{dx} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^n, \qquad n \neq -1, 0, \tfrac{1}{2}, 1, 2$$

admet le groupe à cinq paramètres défini par les transformations infinitésimales

$$(\Gamma) \qquad \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z}, \quad x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z}, \quad y\frac{\partial f}{\partial y} + nz\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Nous avons déjà vu (Ire Partie, p. 23) que l'équation (II) n'admet pas d'autres transformations infinitésimales que les précédentes; donc $\Gamma$ *est bien le groupe de l'équation* (II).

De là nous pouvons conclure (Ire Partie, p. 39) un résultat déjà annoncé et relatif à l'équation différentielle des courbes

$$y = a + bx + cx^n, \qquad n \neq -1,\ 0,\ \tfrac{1}{2},\ 1,\ 2,$$

à savoir

$$((2)) \qquad xy'''' - (n-2)y'' = 0.$$

Cette équation n'admet pas un groupe de transformations de contact à plus de cinq paramètres.

*Caractéristiques de l'équation canonique* (II). — Si l'on se reporte à la formule qui donne les courbes intégrales de l'équation différentielle du troisième ordre qui correspond à l'équation (II), on voit que les caractéristiques de cette dernière sont représentées par les équations

$$\beta = \left(1 - \frac{1}{n}\right)x - \alpha y + \frac{\alpha^n}{n} z,$$
$$\gamma = \alpha^{n-1} z - y,$$

ou bien, en changeant la signification des lettres $\alpha$, $\beta$, $\gamma$,

$$(\mathrm{C}) \qquad \begin{cases} y - \alpha^{n-1} z = \gamma, \\ x - \alpha^n z \phantom{^{-1}} = \beta. \end{cases}$$

D'autre part, les transformations finies du groupe $\Gamma$ sont données par les formules

$$(\Gamma) \qquad \begin{cases} x' = ax + c_1, \\ y' = aby + c_2, \\ z' = ab^n z + c_3. \end{cases}$$

De là, on déduit immédiatement que les droites C s'obtiennent en appliquant toutes les transformations de $\Gamma$ à la caractéristique particulière

$$x = y = z.$$

*Cas particulier où* $n = -1,\ 0,\ \frac{1}{2},\ 1,\ 2$.

Si $n = 0$ ou $n = 1$, l'équation (II) devient linéaire et, par suite, admet un groupe infini. Si $n$ est égal à l'un des nombres $-1$, $\frac{1}{2}$, $2$, l'équation (II) devient, par une transformation ponctuelle évidente, identique à

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0$$

et, par suite, admet un groupe à dix paramètres.

2. Passons à la détermination des équations aux dérivées partielles qui correspondent à l'équation canonique

$$y''' - y'' = 0. \tag{(3)}$$

Les courbes intégrales de cette équation peuvent être représentées par

$$y = ce^x - ax - a - b.$$

Différentions, en considérant $x$ et $y$ comme constants, nous obtenons

$$e^x\, dc - x\, da - da - db = 0.$$

La condition pour que cette équation en $x$ ait une racine double est

$$\frac{dc}{da} = e^{\frac{db}{da}}.$$

Les équations aux dérivées partielles cherchées sont donc toutes semblables à celle qui a pour associée l'équation

$$\frac{dz}{dx} = e^{\frac{dy}{dx}}. \tag{III}$$

*Groupe de l'équation* (III).

Considérons la famille des courbes intégrales

$$y = ce^x - ax - a - b,$$

qui admet le groupe G, défini par

$$X_1 f = \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad X_2 f = y\frac{\partial f}{\partial y}, \qquad X_3 f = \frac{\partial f}{\partial y}, \qquad X_4 f = x\frac{\partial f}{\partial y}, \qquad X_5 f = e^x\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Cherchons le groupe conjugué de G. Comme dans le cas précédent, nous devons chercher les transformations infinitésimales de la forme

$$X'_i f = X_i f + A_i(a, b, c)\frac{\partial f}{\partial a} + B_i(a, b, c)\frac{\partial f}{\partial b} + C_i(a, b, c)\frac{\partial f}{\partial c},$$

qu'admet la multiplicité de points $(x, y, a, b, c)$, définie par

$$\varphi = y - ce^x + ax + a + b = 0.$$

*Calcul de* $A_1$, $B_1$, $C_1$.

$$X_1\varphi = -ce^x + a - e^x C_1 + xA_1 + A_1 + B_1.$$

Cette expression devant être nulle, quelles que soient $x$, $a$, $b$, $c$,

$$A_1 = 0, \qquad B_1 = -a, \qquad C_1 = -c,$$
$$X'_1 f = \frac{\partial f}{\partial x} - a\frac{\partial f}{\partial b} - c\frac{\partial f}{\partial c}.$$

*Calcul de* $A_2$, $B_2$, $C_2$.

$$X_2\varphi = y - e^x C_2 + xA_2 + A_2 + B_2.$$

Cette expression devant être nulle en chaque point $(x, y, a, b, c)$ de la multiplicité $\varphi = 0$, on doit avoir identiquement

$$e^x(C_2 - c) + (A_2 - a)x + A_2 - a + B_2 - b = 0,$$

c'est-à-dire

$$A_2 = a, \qquad B_2 = b, \qquad C_2 = c$$

et

$$X'_2 f = y\frac{\partial f}{\partial y} + a\frac{\partial f}{\partial a} + b\frac{\partial f}{\partial b} + c\frac{\partial f}{\partial c}.$$

*Calcul de* $A_3$, $B_3$, $C_3$.

L'identité

$$X_3\varphi = 1 - e^x C_3 + xA_3 + A_3 + B_3 = 0$$

donne

$$A_3 = 0, \qquad B_3 = -1, \qquad C_3 = 0,$$
$$X'_3 f = \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial b}.$$

*Calcul de* $A_4$, $B_4$, $C_4$.

L'identité

$$X_4\varphi = x - e^x C_4 + xA_4 + A_4 + B_4 = 0$$

donne

$$A_4 = -1, \qquad B_4 = 1, \qquad C_4 = 0,$$
$$X'_4 f = x\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial b}.$$

*Calcul de* $A_5$, $B_5$, $C_5$.

L'identité

$$X_5\varphi = e^x - e^x C_5 + xA_5 + A_5 + B_5 = 0$$

donne

$$A_5 = 0, \qquad B_5 = 0, \qquad C_5 = 1,$$

$$X'_5 f = e^x \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial c}.$$

Il résulte du calcul précédent que l'équation

$$\text{(III)} \qquad \frac{dz}{dx} = e^{\frac{dy}{dx}}$$

admet le groupe défini par les cinq transformations infinitésimales suivantes :

$$(\Gamma) \qquad \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z}, \quad x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z}, \quad x\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Reste à examiner si l'équation (1) n'admet pas un groupe d'ordre plus élevé. Pour cela, désignons par

$$Xf = \xi(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial y} + \zeta(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial z}$$

une transformation infinitésimale laissant invariable l'équation (III) ou l'équation équivalente

$$\mathcal{L}\, dz - \mathcal{L}\, dx = \frac{dy}{dx}.$$

Les équations qui déterminent $\xi$, $\eta$, $\zeta$ s'obtiennent en écrivant que l'équation

$$\frac{\frac{\partial\zeta}{\partial x}dx + \frac{\partial\zeta}{\partial y}dy + \frac{\partial\zeta}{\partial z}dz}{dz} - \frac{\frac{\partial\xi}{\partial x}dx + \frac{\partial\xi}{\partial y}dy + \frac{\partial\xi}{\partial z}dz}{dx}$$

$$= \frac{\frac{\partial\eta}{\partial x}dx + \frac{\partial\eta}{\partial y}dy + \frac{\partial\eta}{\partial z}dz}{dx} - \frac{dy}{dx}\,\frac{\frac{\partial\xi}{\partial x}dx + \frac{\partial\xi}{\partial y}dy + \frac{\partial\xi}{\partial z}dz}{dx}$$

est une conséquence de (III). Posons

$$\frac{dy}{dx} = \alpha.$$

Les équations cherchées s'obtiendront en écrivant que la relation

$$\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \alpha\frac{\partial\zeta}{\partial y} + e^\alpha\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)e^{-\alpha} = \left(\frac{\partial\xi}{\partial x} + \alpha\frac{\partial\xi}{\partial y} + e^\alpha\frac{\partial\xi}{\partial z}\right)(1-\alpha) + \frac{\partial\eta}{\partial x} + \alpha\frac{\partial\eta}{\partial y} + e^\alpha\frac{\partial\eta}{\partial z}$$

est une identité en $x, y, z, \alpha$, ce qui donne

$$\frac{\partial\zeta}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial\zeta}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial\zeta}{\partial z} = \frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial x}, \quad \frac{\partial\xi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial\xi}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial\eta}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial\xi}{\partial x} = \frac{\partial\eta}{\partial y}.$$

En différentiant ces équations, on voit immédiatement que toutes les dérivées du deuxième ordre sont nulles; d'ailleurs, le nombre des fonctions $\xi$, $\eta$, $\zeta$ et de leurs dérivées du premier ordre est douze, le nombre des relations entre les dérivées du premier ordre est sept; donc le nombre des paramètres qui entrent dans $\xi$, $\eta$, $\zeta$ est égal à cinq. On trouve facilement

$$\xi = ax + c_1, \qquad \eta = ay + bx + c_2, \qquad \zeta = (a+b)z + c_3.$$

Ce résultat montre que les transformations qu'admet l'équation (1) sont toutes des transformations du groupe $\Gamma$. On peut donc dire que :

$\Gamma$ *est le groupe de l'équation* (III).

De là nous pouvons conclure également que l'équation différentielle des courbes

$$y = a + bx + ce^x,$$

à savoir

((3)) $$y''' = y'',$$

n'admet pas un groupe de transformations de contact à plus de cinq paramètres.

*Caractéristiques de l'équation canonique* (III). — Si l'on se reporte à la formule qui donne les courbes intégrales de l'équation

$$y''' = y'',$$

on voit que les caractéristiques de l'équation (III) sont les droites représentées par les équations

$$\beta = e^\alpha z - \alpha x - x - y,$$
$$\gamma = ze^\alpha - x,$$

ou bien, en changeant la signification des lettres $\alpha$, $\beta$, $\gamma$,

(C) $$\begin{cases} y + \alpha x = \beta, \\ e^\alpha z - x = \gamma. \end{cases}$$

D'autre part, les transformations finies du groupe $\Gamma$ sont données par les équations

$$(\Gamma) \qquad \begin{cases} x' = ax + c_1, \\ y' = abx + ay + c_2, \\ z' = ae^b z + c_3. \end{cases}$$

De là on déduit immédiatement que les droites C peuvent être obtenues en appliquant toutes les transformations de $\Gamma$ à la caractéristique particulière

$$y = 0, \qquad z = x.$$

*Résumé.*

Il existe deux classes d'équations aux dérivées partielles admettant un groupe de transformations à cinq paramètres, sans admettre un groupe d'ordre plus élevé.

Les équations de la première classe sont semblables à l'équation associée à la suivante

$$(\mathrm{II}) \qquad \frac{dz}{dx} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^n, \qquad n \neq -1, 0, \tfrac{1}{2}, 1, 2.$$

Les transformations infinitésimales du groupe de cette équation sont déterminées par les cinq

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z}, \quad x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z}, \quad y\frac{\partial f}{\partial y} + nz\frac{\partial f}{\partial z};$$

les transformations finies sont données par

$$x' = a_1 x + a_3, \qquad y' = a_1 a_2 y + a_4, \qquad z' = a_1 a_2^n z + a_5.$$

Les équations aux dérivées partielles de la deuxième classe sont semblables à l'équation qui a pour associée la suivante :

$$(\mathrm{III}) \qquad \frac{dz}{dx} = e^{\frac{dy}{dx}}.$$

Les transformations infinitésimales du groupe de l'équation (III) sont les combinaisons linéaires des cinq suivantes :

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z}, \quad x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z}, \quad x\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z};$$

les transformations finies sont

$$x' = a_1 x + a_3, \qquad y' = a_1 a_2 x + a_1 y + a_4, \qquad z = a_1 e^{a_2} z + a_5.$$

Toute équation aux dérivées partielles admettant un groupe ponctuel à cinq paramètres (sans admettre un groupe d'ordre plus élevé) dérive, par une transformation ponctuelle, de l'une des deux précédentes.

# CHAPITRE III.

## ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES QUI CORRESPONDENT A L'ÉQUATION $y'y''' = my''^2$.

1. Considérons d'abord le cas où $m$ est différent des nombres 1 et 2.

Les courbes intégrales de l'équation sont alors représentées par

$$(y+b)^{m-1} = c(x+a)^{m-2}. \tag{1}$$

L'équation aux différentielles totales correspondante s'obtient en exprimant que la courbe représentée par l'équation (1) est tangente à la courbe infiniment voisine

$$\frac{(m-1)\,db}{y+b} = \frac{dc}{c} + \frac{(m-2)\,da}{x+a}; \tag{2}$$

il suffit pour cela d'éliminer $x$ et $y$ entre les équations (1), (2) et la suivante (*voir* p. 16)

$$\frac{db}{y+b} = \frac{da}{x+a};$$

on obtient ainsi

$$\frac{dc}{da} = \left(\frac{db}{da}\right)^{m-1}. \tag{4}$$

L'équation proposée ne fournit donc pas d'équation canonique nouvelle, car on a vu que l'équation (4) admet au moins un groupe à cinq paramètres.

*Remarque.* — Si $m$ est différent de 0, 1, $\frac{3}{2}$, 2, 3, l'équation (4) n'admet qu'un groupe à cinq paramètres (*voir* p. 59); donc :

Le groupe des transformations de contact qui laissent invariante l'équation

(5) $$y'y'''' = my''^2$$

est un groupe à cinq paramètres pour toute valeur de $m$ différente de

$$0, 1, \tfrac{3}{2}, 2, 3.$$

Si $m$ est égal à $0, \frac{3}{2}, 3$, l'équation (4) admet un groupe à dix paramètres : il en est donc de même de l'équation (5).

Enfin, si $m = 1$ ou $m = 2$, on ne peut plus comparer les groupes des équations (4) et (5), car ces équations ne se correspondent pas. Nous allons trouver que, dans ce cas, l'équation (5) admet un groupe à cinq paramètres.

2. Considérons d'abord le cas où $m = 1$.

L'équation différentielle considérée devient

(1) $$y'y''' = y''^2$$

et a pour intégrale générale

(2) $$\beta(y + b) = e^{\alpha(x+a)};$$

$a$ et $b$ désignent deux paramètres arbitraires, $\alpha$ et $\beta$ sont deux paramètres liés par la relation

(3) $$\varphi(\alpha, \beta) = 0$$

pour le moment indéterminé.

Comme précédemment, nous devons exprimer que la courbe représentée par l'équation (2) est tangente à la courbe infiniment voisine

(4) $$\frac{d\beta}{\beta} + \frac{db}{y + b} = (x + a)\,d\alpha + \alpha\,da :$$

il suffit, pour cela, d'éliminer $x$ et $y$ entre les équations (2), (3) et la suivante

(5) $$\frac{d\beta}{\beta} - \frac{d\alpha}{\alpha} = (x + a)\,d\alpha + \alpha\,da :$$

Choisissons maintenant la fonction indéterminée $\varphi$, de manière que

$$\alpha = \beta = \frac{1}{c};$$

nous avons alors à éliminer $x$ et $y$ entre les équations suivantes

$$y + b = ce^{\frac{x+a}{c}}, \qquad \frac{da}{x+a} = \frac{db}{y+b} = \frac{dc}{c},$$

ce qui donne

$$\frac{db}{dc} = e^{\frac{da}{dc}}.$$

Cette équation est aussi une de celles que nous avons déjà trouvées : elle admet un groupe à cinq paramètres.

3. Soit $m = 2$.

L'équation différentielle devient

$$(1) \qquad y'y''' = 2y''^2$$

et a pour intégrale générale

$$(2) \qquad \beta(y+b) = \mathcal{L}(x+a)\alpha, \qquad \varphi(\alpha, \beta) = 0.$$

Exprimons que la courbe représentée par l'équation (1) est tangente à la courbe infiniment voisine

$$(3) \qquad (y+b)\,d\beta + \beta\,db = \frac{da}{x+a} + \frac{d\alpha}{\alpha};$$

nous sommes alors conduits à éliminer $x$ et $y$ entre les équations (2), (3) et la suivante

$$(4) \qquad (y+b)\,d\beta + \beta\,db = \frac{d\alpha}{\alpha} - \frac{d\beta}{\beta}.$$

Prenons encore

$$\alpha = \beta = \frac{1}{c}.$$

Le système des équations (2), (3), (4) est alors équivalent au suivant

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{da}{x+a} = \frac{db}{y+b} = \frac{dc}{c}, \\ &\frac{y+b}{c} = \mathcal{L}\frac{x+a}{c}, \end{aligned}\right.$$

et le résultat de l'élimination de $x$ et $y$ est évidemment

$$\frac{da}{dc} = e^{\frac{db}{dc}}.$$

Nous retombons encore une fois sur une équation déjà obtenue.

Le calcul précédent montre que l'équation du troisième ordre

$$y'y''' = my''^2 \tag{1}$$

admet, dans tous les cas, plus de quatre transformations infinitésimales.

Nous allons maintenant déterminer les transformations de contact qui permettent de ramener la forme (1) à l'une des formes canoniques.

*Réduction de l'équation* (1) *à sa forme canonique.*

*Premier cas.* — Soit $m = 1$.

Les éléments linéaires des courbes intégrales sont, comme on a vu, déterminés par les deux équations

$$y + b = ce^{\frac{x+a}{c}}, \qquad y' = e^{\frac{x+a}{c}}$$

ou bien

$$\left\{\begin{aligned} cy' - b &= y, \\ c\,\mathcal{L}y' - a &= x. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

D'après une remarque fondamentale faite au début de ce travail, ces équations représentent, quand on y considère $x$, $y$, $y'$ comme constants et $a$, $b$, $c$ comme variables, les caractéristiques de l'équation associée à

$$\frac{db}{dc} = e^{\frac{da}{dc}}. \tag{3}$$

Effectuons sur $a$, $b$, $c$ une permutation circulaire; cette transformation *particulière* ramène l'équation (3) à la forme canonique

$$\frac{dc}{da} = e^{\frac{db}{da}}, \tag{4}$$

et le système (2) devient

$$\left\{\begin{aligned} ay' - c &= y, \\ a\,\mathcal{L}y' - b &= x. \end{aligned}\right. \tag{2'}$$

D'autre part, on a vu que les mêmes caractéristiques peuvent être représentées par les deux équations

$$\begin{aligned} y_1 &= ce^{x_1} - ax_1 - a - b, \\ y'_1 &= ce^{x_1} - a \end{aligned}$$

ou

$$(5)\qquad \begin{cases} ax_1 + b = y'_1 - y_1, \\ ce^{x_1} - a = y'_1, \end{cases}$$

qui définissent les éléments linéaires $(x_1, y_1, y'_1)$ des courbes intégrales de l'équation canonique

$$((3))\qquad y'''_1 - y''_1 = 0.$$

Pour déterminer une transformation particulière qui ramène la forme (1) à la forme canonique ((3)), il suffit de trouver les fonctions

$$x_1 = f(x, y, y'), \qquad y_1 = g(x, y, y'), \qquad y'_1 = h(x, y, y'),$$

de manière que les systèmes (2′) et (5) définissent la même multiplicité de points $(x, y, y', a, b, c)$. On trouve immédiatement, en remarquant que les équations (2′) et (5) sont linéaires en $a$, $b$, $c$,

$$(6)\qquad x_1 = -\mathcal{L}y', \qquad y'_1 - y_1 = -x, \qquad y'_1 = -\frac{y}{y'}.$$

Il est aisé de vérifier d'ailleurs que les équations (6) définissent une transformation de contact.

*Deuxième cas.* — $m = 2$.

On trouve de même que, pour ramener l'équation

$$y'y''' = 2y''^2$$

à la forme canonique ((3)), il suffit d'effectuer la transformation de contact définie par les équations

$$x_1 = \mathcal{L}y', \qquad y_1 - y'_1 = y, \qquad y'_1 = -xy'.$$

*Troisième cas.* — La même méthode montre encore que, si $m$ est différent des nombres 1 et 2, il suffit d'effectuer, dans l'équation

$$y'y''' = my''^2$$

la transformation de contact

$$x_1 = \frac{\mu}{y'}, \qquad y_1 = \mu\frac{y - xy'}{y'}, \qquad y'_1 = y, \qquad \mu = \frac{m-2}{m-1}$$

pour ramener cette équation à la forme canonique

$$x_1 y_1''' - (m-3) y_1'' = 0.$$

# CHAPITRE IV.

## CLASSIFICATION DES GROUPES HOMOGRAPHIQUES A UN PARAMÈTRE DU PLAN. COURBES PLANES ADMETTANT UN GROUPE HOMOGRAPHIQUE. SIGNIFICATION GÉOMÉTRIQUE DES ÉQUATIONS CANONIQUES

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0, \qquad \frac{dz}{dx} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^n, \qquad \frac{dz}{dx} = e^{\frac{dy}{dx}}.$$

Les courbes planes qui admettent un groupe homographique jouent un rôle important dans l'interprétation géométrique des résultats précédents. Ces courbes ont été déterminées par MM. Sophus Lie et Klein et appelées par eux *courbes* V (*Math. Annalen,* t. IV). La recherche de ces courbes est fondée sur la classification suivante des groupes homographiques à un paramètre du plan.

1. *Classification des groupes homographiques à un paramètre et à une variable x.* — Un quelconque de ces groupes est engendré par une transformation infinitésimale de la forme

$$Xf = (a + 2bx + cx^2)\frac{df}{dx}.$$

Ce groupe laisse invariants deux points *distincts* ou deux points *confondus* suivant que

$$b^2 - ac \neq 0 \qquad \text{ou} \qquad b^2 - ac = 0.$$

Par un changement de variables homographiques, on peut ramener $Xf$, dans le premier cas, à la forme

$$(1) \qquad X_1 f = x\frac{df}{dx} \qquad \text{(points invariants } x = 0,\ x = \infty)$$

et, dans le second cas, à la forme

$$(2) \qquad X_2 f = \frac{df}{dx} \qquad \text{(points invariants } x^2 = \infty).$$

Si l'on se borne à considérer les changements de variables homographiques, on peut dire que les formes (1) et (2) ne sont pas *semblables,* car la substitution qui change $X_2 f$ en $X_1 f$ est définie par l'équation transcendante

$$x' = C e^x.$$

En résumé, les groupes homographiques considérés se partagent en deux classes : ceux de la première sont semblables au groupe $G_1$ défini par $X_1 f$, ceux de la seconde au groupe $G_2$ défini par $X_2 f$.

Les transformations finies de $G_1$ et $G_2$ sont

$$(G_1) \qquad x' = a x,$$

$$(G_2) \qquad x' = x + a.$$

2. *Classification des groupes homographiques à un paramètre et deux variables $x$ et $y$.* — Un quelconque G de ces groupes est engendré par une transformation infinitésimale de la forme

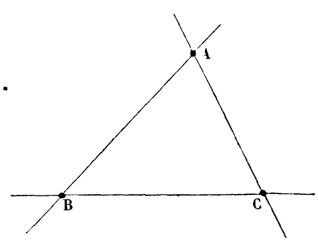
$$Xf = (a_0 + a_1 x + a_2 y)\frac{\partial f}{\partial x} + (b_0 + b_1 x + b_2 y)\frac{\partial f}{\partial y} + (c_1 x + c_2 y)\left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Ce groupe G laisse invariants des points et des droites du plan; l'étude de ces éléments invariants va nous fournir une méthode de classification toute naturelle (¹).

Les seuls cas qui peuvent se présenter sont les suivants :

I. Le groupe G laisse invariants A, B, C et trois droites formant les côtés du triangle ABC (*fig.* 1).

Fig. 1.




Le groupe G est alors *semblable homographiquement* au groupe $G_1$

(¹) *Transformationsgruppen* (p. 580-585).

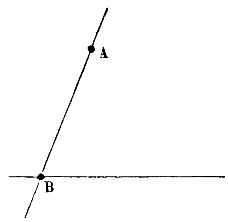
qui laisse invariant le triangle formé par la droite de l'infini, l'axe des $x$ et l'axe des $y$.

Transformation infinitésimale de $G_1$. $x\dfrac{\partial f}{\partial x}+my\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\quad m\neq 0, 1$.

Transformations finies de $G_1$....... $x'=ax, \quad y'=a^m y$.

II. Le groupe G laisse invariants un point simple A et un point double B

Fig. 2.




(*fig.* 2). Les droites invariantes sont : une droite double confondue avec AB et une droite simple passant par B.

Le groupe G est alors semblable homographiquement au groupe $G_2$ qui laisse invariants :

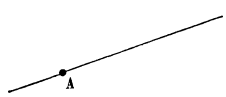
Le point simple $(z=0, x=0)$, La droite simple $y=0$;
Le point double $(z=0, y=0)$, La droite double $z=0$.

Transformation infinitésimale de $G_2$.... $\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Transformations finies de $G_2$.......... $x'=x+a, \quad y'=e^a y$.

III. Le groupe G laisse invariants un point triple A et une droite triple passant par A(*fig.* 3).

Fig. 3.




G est alors semblable homographiquement au groupe $G_3$ qui laisse invariants le point triple $(x=0, \; z=0)$ et la droite triple $z=0$.

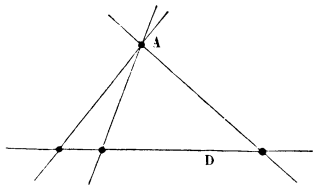
Transformation infinitésimale de $G_3$. $\dfrac{\partial f}{\partial x}+x\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Transformations finies de $G_3$....... $x'=x+a, \quad y'=y+ax$.

IV. Le groupe G laisse invariants une infinité de points et de droites, à savoir : chaque point d'une certaine droite D et chaque droite d'un faisceau A (de sorte que le point A est invariant). Ce cas se subdivise en deux autres :

1° Le point A est extérieur à la droite D (*fig.* 4); le groupe G est alors

Fig. 4.



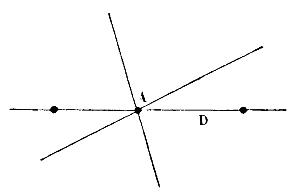

semblable homographiquement au groupe $G_4$ qui laisse invariants chaque point de l'axe des $y$ et chaque droite parallèle à l'axe des $x$.

Transformation infinitésimale de $G_4$...... $x\dfrac{\partial f}{\partial x}$.

Transformations finies de $G_4$............. $x' = ax, \qquad y' = y$.

2° Le point A est situé sur la droite D (*fig.* 5).

Fig. 5.




Le groupe G est alors homographiquement semblable au groupe $G_5$ qui laisse invariant chaque point de la droite de l'infini et chaque droite parallèle à l'axe des $x$.

Transformation infinitésimale de $G_5$... $\dfrac{\partial f}{\partial x}$.

Transformations finies de $G_5$......... $x' = x + a, \qquad y' = y$.

En résumé, les groupes homographiques $G_1$, $G_2$, $G_3$, $G_4$, $G_5$, d'où dérivent tous les autres, sont définis par les transformations infinitésimales suivantes

(I) $$X_1 f = x\frac{df}{\partial x} + my\frac{\partial f}{\partial y},$$

(II) $$X_2 f = \frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y},$$

(III) $$X_3 f = \frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y},$$

(IV) $$\begin{cases} X_4 f = x\dfrac{\partial f}{\partial x}, \\ X_5 f = \dfrac{\partial f}{\partial x}. \end{cases}$$

3. *Courbes planes admettant une transformation homographique infinitésimale.* — Je dirai dans la suite que la courbe C′, représentée par

(1) $$\varphi'(x, y) = 0,$$

est une dérivée homographique de la courbe C, représentée par

(2) $$\varphi(x, y) = 0,$$

si l'équation (1) est la transformée de l'équation (2) par une substitution homographique.

Cela posé, considérons une transformation homographique infinitésimale $Xf$ et cherchons les courbes qui admettent cette transformation (et par suite le groupe G engendré par $Xf$).

*Premier cas.* — $Xf$ est semblable homographiquement à

$$X_1 f = x\frac{\partial f}{\partial x} + my\frac{\partial f}{\partial y}, \qquad m \neq 0, 1,$$

En d'autres termes, $Xf$ est une transformation infinitésimale de la première classe.

Les courbes qui admettent la transformation infinitésimale $X_1 f$ sont les courbes intégrales de l'équation

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{my},$$

c'est-à-dire les courbes représentées par l'équation

$$y = A x^m.$$

On peut donc dire que :

*Toute courbe admettant une transformation infinitésimale de la première classe est une dérivée homographique d'une courbe*

$$y = x^m.$$

*Deuxième cas.* — $Xf$ est une transformation infinitésimale de la deuxième classe, c'est-à-dire est semblable homographiquement à

$$X_2 f = \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Toute courbe admettant cette transformation infinitésimale $X_2 f$ est une courbe intégrale de l'équation

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{y};$$

c'est-à-dire une courbe ayant une équation de la forme

$$y = A e^x.$$

Donc :

*Toute courbe admettant une transformation infinitésimale de la deuxième classe est une dérivée homographique de la courbe*

$$y = e^x.$$

*Troisième cas.* — $Xf$ est une transformation infinitésimale de la troisième classe, c'est-à-dire est semblable homographiquement à

$$X_3 f = \frac{\partial f}{\partial x} + x \frac{\partial f}{\partial y}.$$

On en conclut, par un raisonnement analogue aux précédents, que :

*Toute courbe admettant une transformation infinitésimale de la troisième classe est une dérivée homographique de*

$$2y - x^2 = 0,$$

*c'est-à-dire une courbe quelconque du second degré (non décomposable).*

*Quatrième cas.* — $Xf$ est une transformation infinitésimale de la quatrième classe, c'est-à-dire est semblable homographiquement à

$$X_4 f = x\frac{\partial f}{\partial x}, \qquad X_5 f = \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Comme précédemment, on trouve que :

*Toute ligne admettant une transformation infinitésimale de la quatrième classe est une ligne droite.*

4. On voit donc que les courbes admettant une transformation infinitésimale homographique sont les dérivées homographiques des courbes représentées par les équations

$$(1) \qquad y = x^m,$$

$$(2) \qquad y = e^x,$$

Cherchons maintenant à classer ces courbes d'après le nombre des transformations infinitésimales qu'elles admettent.

Cherchons d'abord les transformations homographiques infinitésimales de

$$(1) \qquad y = x^m.$$

Je suppose $m$ différent des nombres

$$-1, 0, \tfrac{1}{2}, 1, 2.$$

Soit $Xf$

$$Xf = \xi(x, y)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial f}{\partial y},$$

$$\xi = a_0 + a_1 x + a_2 y + c_1 x^2 + c_2 xy,$$

$$\eta = b_0 + b_1 x + b_2 y + c_1 xy + c_2 y^2$$

une transformation infinitésimale satisfaisant à la question; les équations qui déterminent $\xi$ et $\eta$ s'obtiennent en écrivant que

$$(2) \qquad \eta = m x^{m-1}\xi$$

est une conséquence de l'équation (1).

Si dans l'équation (2) on remplace $y$ par $x^m$, ce qui donne

$$b_0 + b_1 x + b_2 x^m + x^m(c_1 x + c_2 x^m) = m x^{m-1}[a_0 + a_1 x + a_2 x^m + x(c_1 x + c_2 x^m)],$$

on doit obtenir une identité; de là on conclut, eu égard aux hypothèses faites sur $m$,

$$\xi = x, \qquad \eta = my.$$

Supposons, maintenant, que $m$ soit égal à l'un des nombres

$$-1, \ \tfrac{1}{2}, \ 2,$$

la courbe (1) est alors une conique, c'est-à-dire une dérivée homographique

$$x^2 - 2y = 0. \tag{3}$$

Un calcul analogue au précédent montre que cette conique admet trois transformations homographiques infinitésimales, à savoir

$$\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y}, \quad x\frac{\partial f}{\partial x} + 2y\frac{\partial f}{\partial y}, \quad x\left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}\right) - y\frac{\partial f}{\partial x}.$$

Enfin, si $m$ est égal à 0 ou à 1, la courbe (1) représente une ligne droite, c'est-à-dire une dérivée homographique de la droite

$$x = 0,$$

qui admet évidemment six transformations homographiques infinitésimales, à savoir

$$\frac{\partial f}{\partial y}, \quad x\frac{\partial f}{\partial x}, \quad x\frac{\partial f}{\partial y}, \quad y\frac{\partial f}{\partial y}, \quad x\left(x\frac{\partial f}{\partial y} + y\frac{\partial f}{\partial y}\right), \quad y\left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

On trouve, aussi facilement, que la courbe

$$y = e^x$$

n'admet qu'une transformation infinitésimale homographique, à savoir

$$\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{dy}.$$

Il résulte de là que toute courbe plane, admettant une transformation homographique infinitésimale, appartient à l'une des trois classes suivantes :

*Première classe.* — Cette classe comprend les courbes qui admettent une transformation infinitésimale homographique et une seule.

Ces courbes sont les dérivées homographiques de

$$y = x^m, \qquad m \neq 0, 1 \qquad \text{et} \qquad m \neq -1, \tfrac{1}{2}, 2$$

et de

$$y = e^x.$$

*Deuxième classe.* — Les courbes de la deuxième classe admettent trois transformations infinitésimales et trois seulement. Ce sont les courbes du deuxième degré non décomposables.

*Troisième classe.* — Enfin la troisième classe comprend les courbes admettant six transformations homographiques infinitésimales. Ces courbes sont les droites du plan.

5. Cela posé, désignons par le symbole (J) tout complexe déterminé par les droites qui rencontrent une courbe V (plane). Cette courbe sera appelée la *directrice du complexe*.

Cherchons à former l'équation générale des complexes (J). A cet effet, considérons d'abord deux complexes (J) particuliers, à savoir les complexes J' et J'' qui ont respectivement pour directrices

$$z = 0, \qquad y = x^m,$$
$$z = 0, \qquad y = e^x.$$

Il est clair que tout complexe J est la transformée homographique de l'un de ces deux complexes.

Le complexe J' a pour équation

$$(\mathrm{J}') \qquad \frac{y\,dz - z\,dy}{dz} = \left(\frac{x\,dz - z\,dx}{dz}\right)^m, \qquad (1)$$

en entendant par là qu'il est formé par les tangentes aux courbes intégrales de l'équation (1).

De même, le complexe J'' a pour équation

$$(\mathrm{J}'') \qquad \frac{y\,dz - z\,dy}{dz} = e^{\frac{x\,dz - z\,dx}{dz}}.$$

Appliquons à ces deux complexes la transformation homographique

$$x' = -\frac{1}{z}, \qquad y' = -\frac{x}{z}, \qquad z' = -\frac{y}{z},$$

qui transporte la directrice à l'infini, et nous trouvons pour complexes transformés les deux suivants

$$\frac{dz}{dx} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^n, \qquad \frac{dz}{dx} = e^{\frac{dy}{dx}}.$$

Pour obtenir l'équation d'un complexe (J) quelconque, il suffit de faire dans les équations précédentes la transformation homographique la plus générale. Remarquons d'ailleurs que ceux de ces complexes qui sont du deuxième degré peuvent être considérés comme des transformés homographiques du complexe des droites, rencontrant le cercle imaginaire de l'infini

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0.$$

Les développements qui précèdent nous conduisent aux résultats suivants :

*Toute équation aux dérivées partielles, admettant un groupe de transformations à plus de quatre paramètres (c'est-à-dire un groupe à cinq ou dix paramètres), est une transformée ponctuelle d'une équation aux dérivées partielles, pour laquelle les tangentes aux courbes intégrales déterminent un complexe* J. *Ce complexe* J *a pour directrice une courbe du deuxième degré (non décomposable) ou une courbe* V *quelconque, suivant que le groupe est à dix paramètres ou seulement à cinq.*

## CHAPITRE V.

### ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES QUI ADMETTENT UN GROUPE A QUATRE PARAMÈTRES. ÉQUATIONS QUI CORRESPONDENT A L'ÉQUATION CANONIQUE ((4)).

Je commence par déterminer les équations aux dérivées partielles qui correspondent à l'équation différentielle des courbes

(1) $$y = a + bx + c\varphi(x),$$

à savoir l'équation

((4)) $$y'''\varphi''(x) - y''\varphi'''(x) = 0.$$

Le groupe de cette équation est, comme on sait, défini par les transformations infinitésimales

$$\frac{\partial f}{\partial y}, \; y\frac{\partial f}{\partial y}, \; x\frac{\partial f}{\partial y}, \; \varphi(x)\frac{\partial f}{\partial y}$$

ou par les transformations finies

$$x' = x, \qquad y' = \alpha + \beta x + \gamma\varphi(x) + \lambda y.$$

Le groupe conjugué G est donc évidemment le groupe à quatre paramètres $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$

$$a' = \alpha + \lambda a, \qquad b' = \beta + \lambda b, \qquad c' = \gamma + \lambda c.$$

Cela posé, si l'on élimine $x$ entre les deux équations

$$da + x\,db + \varphi(x)\,dc = 0,$$
$$db + \varphi'(x)\,dc = 0,$$

on trouve une équation de la forme

$$\frac{dc}{da} = \Phi\left(\frac{db}{da}\right). \tag{2}$$

Réciproquement, quelle que soit la fonction $\Phi$, on peut toujours déterminer $\varphi(x)$ de manière que les équations ((4)) et (2) se correspondent. Il suffit, pour le démontrer, de faire voir qu'une certaine intégrale complète de (2)

$$V(x, y, a, b, c) = 0$$

représente précisément l'intégrale générale d'une équation de la forme ((4)). Soit, à cet effet,

$$\frac{\partial c}{\partial a} = \varphi\left(\frac{\partial c}{\partial b}\right) \tag{3}$$

l'équation aux dérivées partielles associée à l'équation (2). Appliquons la règle donnée par Lagrange pour trouver une intégrale complète, c'est-à-dire posons

$$\frac{\partial c}{\partial b} = x, \qquad \frac{\partial c}{\partial a} = \varphi(x),$$

$x$ désignant une constante arbitraire, et intégrons

$$dc - x\,db - \varphi(x)\,da = 0,$$

ce qui donne

$$c - bx - a\varphi(x) - y = \mathrm{V}(x, y, a, b, c) = 0.$$

Or cette équation représente bien, si l'on y considère $a$, $b$, $c$ comme constantes, l'intégrale générale de l'équation

$$y''' \varphi''(x) - y'' \varphi'''(x) = 0.$$

De ce qui précède résulte que :

*Les équations aux dérivées partielles qui correspondent à l'équation canonique* ((4)) *sont semblables à celle qui a pour associée*

$$\text{(IV)} \qquad \frac{dz}{dx} = \Phi\left(\frac{dy}{dx}\right),$$

$\Phi$ *désignant une fonction arbitraire.*

L'équation (IV) admet le groupe défini par les quatre transformations infinitésimales

$$\text{(G)} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}, \ \frac{\partial f}{\partial y}, \ \frac{\partial f}{\partial z}, \quad x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z}$$

ou par les transformations finies

$$x' = a_4 x + a_1, \qquad y' = a_4 y + a_2, \qquad z' = a_4 z + a_3.$$

Reste à examiner si l'équation (IV) n'admet pas un groupe d'ordre plus élevé. Pour cela, cherchons les transformations infinitésimales

$$\mathrm{X}f = \xi(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial y} + \zeta(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial z},$$

qui laissent invariante l'équation (IV). Posons

$$\frac{dy}{dx} = \alpha, \qquad \frac{dz}{dx} = \beta.$$

Alors

$$\mathrm{X}(\alpha) = \frac{\partial \eta}{\partial x} + \alpha\left(\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial x}\right) + \beta\frac{\partial \eta}{\partial z} - \alpha^2\frac{\partial \xi}{\partial y} - \alpha\beta\frac{\partial \xi}{\partial z},$$

$$\mathrm{X}(\beta) = \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \alpha\frac{\partial \zeta}{\partial y} + \beta\left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} - \frac{\partial \xi}{\partial x}\right) - \alpha\beta\frac{\partial \xi}{\partial y} - \beta^2\frac{\partial \xi}{\partial z};$$

$\xi$, $\eta$, $\zeta$ sont données par les équations qui expriment que

$$(3) \qquad \mathrm{X}(\beta) - \Phi'(\alpha)\,\mathrm{X}(\alpha) = 0$$

est une conséquence de

$$(4) \qquad \beta = \Phi(\alpha).$$

Un calcul facile montre que la condition nécessaire et suffisante pour que l'on ait

$$X(\alpha) = 0, \qquad X(\beta) = 0,$$

quelles que soient $\alpha$ et $\beta$, est que $Xf$ soit une transformation infinitésimale du groupe G. Cela posé, supposons que $Xf$ désigne une transformation infinitésimale n'appartenant pas au groupe G, et représentons par A et B

$$A = a_0 + a_1\alpha + a_2\beta + \alpha(c_1\alpha + c_2\beta), \qquad B = b_0 + b_1\alpha + b_2\beta + \beta(c_1\alpha + c_2\beta)$$

ce que deviennent $X(\alpha)$ et $X(\beta)$ quand on y remplace $x, y, z$ par des constantes choisies de manière que les coefficients $a, b, c$ ne soient pas tous nuls. Il faut évidemment que l'équation

$$B - A\Phi'(\alpha) = 0$$

soit aussi une conséquence de l'équation (4).

En d'autres termes, si l'on considère $\alpha$, $\beta$ comme les coordonnées d'un point d'un plan, il faut que la courbe représentée par

$$\beta = \Phi(\alpha)$$

soit une courbe V. Dans ce cas l'équation (IV) est semblable à une des équations déjà trouvées, qui admettent un groupe à cinq paramètres.

Si la fonction $\Phi$ est quelconque, comme nous le supposons, l'équation (IV) admet le groupe G et n'admet pas un groupe d'ordre plus élevé. On peut donc dire que G est le groupe de l'équation (IV).

Ceci nous conduit à cet autre résultat.

L'équation différentielle des courbes

$$y = a + bx + c\varphi(x),$$

à savoir

$$(4) \qquad y''''\varphi'' - y''\varphi'''' = 0$$

admet un groupe de transformations de contact à quatre paramètres, et n'admet pas de groupe d'ordre plus élevé.

Les équations aux dérivées partielles, qui correspondent à l'équation ((4)), sont susceptibles d'une interprétation géométrique analogue à celle que nous avons déjà donnée pour les équations qui admettent un groupe de transformations à plus de quatre paramètres.

Désignons par le symbole (I) tout complexe déterminé par les droites qui rencontrent une courbe plane quelconque C. Il est clair que tout complexe (I) est une transformée homographique d'un complexe de même nature pour lequel la directrice est dans le plan de l'infini, c'est-à-dire d'un complexe ayant une équation de la forme

$$\frac{dz}{dx} = \Phi\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

Donc :

*Les équations aux dérivées partielles qui correspondent à l'équation* ((4)) *dérivent, par une transformation ponctuelle, d'une équation aux dérivées partielles pour laquelle les tangentes aux courbes intégrales déterminent un complexe* (I).

# CHAPITRE VI.

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES QUI ADMETTENT UN GROUPE A QUATRE PARAMÈTRES (SUITE). ÉQUATIONS QUI CORRESPONDENT AUX ÉQUATIONS CANONIQUES

$$((5)) \qquad y''' = ky''^p \qquad \text{et} \qquad ((6)) \qquad y''' e^{y''} = 1.$$

1. Nous avons vu déjà (p. 36) que les équations ((5)), qui correspondent à la même valeur de $p$, dérivent toutes (sauf $y''' = 0$) de l'une d'entre elles

$$(1) \qquad y''' = hy''^p, \qquad h \neq 0,$$

par une transformation ponctuelle. Il suffit donc de chercher les équations aux dérivées partielles qui correspondent à l'équation particulière (1). Dans la suite nous poserons

$$p = \frac{m-3}{m-2}, \qquad m-2 \neq 0,$$

et nous prendrons

$$h = m - 2.$$

Pour écrire l'intégrale générale de l'équation ((5)) nous sommes obligés de distinguer plusieurs cas.

*Premier cas.* — $m$ est différent de o et de 1 (et bien entendu aussi de 2). Alors l'équation (1) est l'équation différentielle des courbes

$$y = \frac{(x+a)^m}{m(m-1)} - b(x+a) + c. \tag{2}$$

L'équation aux différentielles totales qui correspond à cette équation résulte de l'élimination de $x$ entre

$$\frac{(x+a)^{m-1}}{m-1}\cdot da - (x+a)\,db + dc - b\,da = 0,$$

$$(x+a)^{m-2}.da - db = 0,$$

et par suite a la forme suivante

$$\frac{dc - b\,da}{da} = \frac{1}{n}\left(\frac{db}{da}\right)^n, \qquad \text{où} \qquad n = \frac{m-1}{m-2} = 2 - p \text{ (1)}.$$

Remplaçons $a$, $b$, $c$ respectivement par

$$\frac{2a}{n}, \quad \frac{2b}{n}, \quad \frac{2(c+ab}{n^2};$$

l'équation des courbes intégrales devient

$$y = \frac{1}{m(m-1)}\left(x + \frac{2a}{n}\right)^m - \frac{2bx}{n} + \frac{2(c-ab)}{n^2},$$

et l'équation aux différentielles totales

$$\frac{dc + a\,db - b\,da}{da} = \left(\frac{db}{da}\right)^n, \qquad n = 2 - p.$$

*Deuxième cas.* — $m = 0$.

L'équation (1) devient

$$-\tfrac{1}{2}y'''y''^{-\frac{3}{2}} = 1.$$

Les courbes intégrales peuvent être représentées par l'équation

$$y = c - b(x+a) - \mathcal{L}(x+a).$$

L'équation aux différentielles totales correspondantes à cette forme s'ob-

---

(1) On voit que $n$ est différent de 1 et de o.

tient en éliminant $x$ entre

$$dc - (x+a)\,db - \frac{da}{x+a} = 0$$

et

$$db = \frac{da}{(x+a)^2},$$

ce qui donne

$$\frac{dc - b\,da}{da} = 2\left(\frac{db}{da}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Remplaçons $a$, $b$, $c$ respectivement par

$$8a, \quad 2b, \quad 8c - 8ab.$$

L'équation des courbes intégrales devient

$$y = 8(c - ab) - 2bx - \mathcal{L}(x + 8a),$$

et l'équation aux différentielles totales

$$\frac{dc + a\,db - b\,da}{da} = \left(\frac{db}{da}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

*Troisième cas.* — Soit $m = 1$.

L'équation (1) devient

$$y''' + y''^2 = 0,$$

les courbes intégrales peuvent alors être représentées par

$$y = (x+a)[\mathcal{L}(x+a) - 1] - c(x+a) + b.$$

L'équation aux différentielles totales correspondant à cette forme s'obtient en éliminant $x$ entre

$$\mathcal{L}(x+a).da - (x+a)\,dc + db - c\,da = 0,$$

$$\frac{da}{x+a} = dc,$$

ce qui donne

$$da\,\mathcal{L}\frac{da}{dc} + db - da - c\,da = 0; \tag{3}$$

je dis que cette équation dérive de l'équation connue

$$\frac{dc}{da} = e^{\frac{db}{da}},$$

par une transformation ponctuelle. En effet, remplaçons dans (3) $b$ par $a+b$. Nous obtenons

$$\mathfrak{L}\frac{da}{dc}+\frac{db}{da}-c=0$$

ou bien

$$\frac{e^c\,dc}{da}=e^{\frac{db}{da}};$$

il suffit maintenant de remplacer $c$ par $\mathfrak{L}c$ pour obtenir la forme désirée.

En résumé, les équations aux dérivées partielles qui correspondent à l'équation ((5)) sont, d'une part, les équations aux dérivées partielles correspondant à l'équation ((3)), d'autre part les équations semblables à celles qui a pour associée

$$\text{(V)}\qquad \frac{dz+x\,dy-y\,dx}{dx}=\left(\frac{dy}{dx}\right)^n,\qquad \begin{matrix} n\neq 1,\ 0 \\ n=2-p \end{matrix}.$$

Un calcul absolument analogue à celui qui a été fait plus haut (p. 55) montre que cette équation admet le groupe

$$\text{(G)}\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x}-y\dfrac{\partial f}{\partial z},\quad \dfrac{\partial f}{\partial z},\quad \dfrac{\partial f}{\partial y}+x\dfrac{\partial f}{\partial z}, \\ n\left(x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}+2z\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)-\left(x\dfrac{\partial f}{\partial x}+z\dfrac{\partial f}{\partial z}\right), \end{array}\right.$$

ou bien

$$x'=b^{n-1}(x+a_1),\qquad y'=b^n(y+a_2),\qquad z'=b^{2n-1}(z+a_2x-a_1y+a_3).$$

Reste à examiner si G est bien le groupe de l'équation (V).

*A priori* on peut voir que, pour

$$n=2,$$

l'équation (V) admet un groupe à dix paramètres, car alors elle correspond à l'équation

$$y''''=1.$$

Il en est de même si

$$n=-1.$$

En effet, pour cette valeur de $n$ l'équation (V) prend la forme

$$\frac{dz+x\,dy-y\,dx}{dy}=\left(\frac{dx}{dy}\right)^2.$$

Changeons $x$ en $-y$ et $y$ en $x$, l'équation devient

$$\frac{dz + x\,dy - y\,dx}{dx} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2,$$

or celle-ci admet, comme nous venons de le voir, un groupe à dix paramètres (¹).

Nous allons démontrer que si l'on a

$$n \neq -1, 0, 1, 2,$$

l'équation (V) n'admet pas d'autres transformations infinitésimales que celles du groupe G. Il nous suffira de faire voir que l'équation

$$((5)) \qquad y''' = ky''^p, \qquad \text{où} \qquad p = 2 - n \neq 0, 1, 2, 3 \qquad \text{et} \qquad k \neq 0,$$

n'admet pas un groupe à plus de quatre paramètres.

2. Proposons-nous de déterminer le groupe de l'équation ((5)).

Soit

$$\xi(x, y, y')\frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x, y, y')\frac{\partial f}{\partial y} + \zeta_1(x, y, y')\frac{\partial f}{\partial y'}$$

une transformation de contact infinitésimale laissant invariante l'équation ((5)) et soit W sa fonction caractéristique, de sorte que

$$\xi = -\frac{\partial W}{\partial y'}, \qquad \eta = W - y'\frac{\partial W}{\partial y'}, \qquad \zeta_1 = \frac{\partial W}{\partial x} + y'\frac{\partial W}{\partial y}.$$

Désignons par X$f$ la transformation prolongée

$$\xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y} + \zeta_1\frac{\partial f}{\partial y'} + \zeta_2(x, y, y', y'')\frac{\partial f}{\partial y''} + \zeta_3(x, y, y', y'', y''')\frac{\partial f}{\partial y'''}.$$

On sait que

$$\zeta_2 = P_0 + P_1 y'' + P_2 y''^2 = F_2(y''),$$
$$\zeta_3 = Q_0 + 3Q_1 y'' + 3Q_2 y''^2 + Q_3 y''^3 + (R_0 + R_1 y'')y''' = F_3(y'') + y''' F_1(y''),$$

(¹) Plus généralement, si l'on remplace dans l'équation (V) $n$ par $1 - n$, on obtient une équation *semblable*.

avec

$$P_0 = \left(\left(\frac{\partial W}{\partial x} + y'\frac{\partial W}{\partial y}\right)\right)^2, \quad P_1 = \frac{\partial W}{\partial y} + 2\frac{\partial W}{\partial y'}\left(\left(\frac{\partial W}{\partial x} + y'\frac{\partial W}{\partial y}\right)\right), \quad P_2 = \frac{\partial^2 W}{\partial y'^2},$$

$$Q_0 = \left(\left(\frac{\partial W}{\partial x} + y'\frac{\partial W}{\partial y}\right)\right)^3, \quad Q_1 = \frac{\partial W}{\partial y'}\left(\left(\frac{\partial W}{\partial x} + y'\frac{\partial W}{\partial y}\right)\right)^2 + \frac{\partial W}{\partial y}\left(\left(\frac{\partial W}{\partial x} + y'\frac{\partial W}{\partial y}\right)\right),$$

$$Q_2 = \frac{\partial^2 W}{\partial y'^2}\left(\left(\frac{\partial W}{\partial x} + y'\frac{\partial W}{\partial y}\right)\right) + \frac{\partial^2 W}{\partial y\, \partial y'}, \quad Q_3 = \frac{\partial^3 W}{\partial y'^3},$$

$$R_0 = \frac{\partial W}{\partial y} + 3\frac{\partial W}{\partial y'}\left(\left(\frac{\partial W}{\partial x} + y'\frac{\partial W}{\partial y}\right)\right), \qquad R_1 = 3\frac{\partial^2 W}{\partial y'^2}.$$

Les équations aux dérivées partielles qui fournissent W s'obtiennent en écrivant que la multiplicité de points $(x, y, y', y'', y''')$ définie par

$$X(y''') = kpy''^{p-1}X(y'')$$

est contenue dans la multiplicité ((5)).

A cet effet, exprimons que la relation

$$(1) \qquad F_3 + ky''^p F_1 = kpy''^{p-1}F_2,$$

est identique en $x, y, y', y''$.

L'identité (1) prend la forme

$$(2) \qquad F_3 = ky''^{p-1}(pF_2 - F_1 y'').$$

Si $p - 1$ n'est pas égal à la différence $\delta$ des degrés de $F_3$ et de $pF_2 - F_1 y''$, l'identité précédente se décompose en deux

$$(3) \qquad F_3 = 0, \qquad pF_2 - F_1 y'' = 0.$$

Voyons ce qui arrive si

$$(4) \qquad p - 1 = \delta.$$

Les valeurs possibles pour $\delta$ sont les nombres suivants :

$$3, \; 2, \; 1, \; 0, \; -1, \; -2.$$

Il résulte des hypothèses faites sur $p$ que l'égalité (4) ne peut avoir lieu que si

$$p = 4 \qquad \text{ou} \qquad p = -1.$$

Dans le premier cas, l'identité (2) montre que $F_3$ doit se réduire à son dernier terme

$$F_3 = Q_3 y''^3 = \frac{\partial^3 W}{\partial y'^3} y''^3,$$

et que $(4F_2 - F_1 y'')$ doit être indépendant de $y''$

$$4F_2 - F_1 y'' = P_0.$$

Cette dernière égalité montre que

$$4P_2 - R_1 = \frac{\partial^2 W}{\partial y'^2} = 0.$$

De là, on déduit l'identité

$$F_3 = 0;$$

et, par suite,

$$4F_2 - F_1 y'' = 0.$$

Dans le deuxième cas, l'identité (2) montre que

$$F_3 = Q_0, \qquad F_2 + F_1 y'' = (P_2 + R_1) y''^2;$$

de là on tire

$$P_0 = 0;$$

puis

$$Q_0 = 0;$$

donc, dans ce cas encore, les identités (3) sont vérifiées.

En résumé, l'identité (2) entraîne, dans tous les cas, les identités (3)

$$(3) \qquad F_3 = 0, \qquad pF_2 - F_1 y'' = 0.$$

Celles-ci donnent

$$(4) \qquad pP_2 - R_1 = 0, \qquad pP_1 - R_0 = 0, \qquad P_0 = 0,$$

$$(5) \qquad Q_1 = 0, \qquad Q_2 = 0.$$

La première montre que

$$(a) \qquad \frac{\partial^2 W}{\partial y'^2} = 0;$$

la seconde des égalités (5) donne alors

$$(b) \qquad \frac{\partial^2 W}{\partial y \, \partial y'} = 0.$$

La seconde des égalités (4) devient

$$(p-1)\frac{\partial W}{\partial y} + (2p-3)\frac{\partial^2 W}{\partial x \, \partial y'} = 0,$$

ou bien

$$(c)\qquad \frac{\partial W}{\partial y} + m\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial y'} = 0,$$

où

$$m = \frac{2p-3}{p-1}.$$

Si l'on remarque que cette dernière entraîne

$$(d)\qquad \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0,$$

on voit que les égalités $P_0 = 0$ et $Q_1 = 0$ prennent les formes suivantes

$$(e)\qquad \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + 2y'\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial y} = 0,$$

$$(f)\qquad \frac{\partial^3 W}{\partial x^2\,\partial y'} + \frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial y} = 0.$$

En différentiant l'équation $(e)$ par rapport à $y'$, on trouve l'équation

$$\frac{\partial^3 W}{\partial x^2\,\partial y'} + 2\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial y} = 0.$$

On aperçoit alors immédiatement que

$$(g)\qquad \frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial y} = 0,$$

et, par suite,

$$(h)\qquad \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0.$$

En résumé, nous avons trouvé les équations suivantes

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0,\qquad \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0,\qquad \frac{\partial^2 W}{\partial y'^2} = 0,\qquad \frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial y} = 0,\qquad \frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial y'} = 0,$$
$$\frac{\partial W}{\partial y} + m\frac{\partial^2 W}{\partial y\,\partial y'} = 0;$$

de là on déduit d'abord que toutes les dérivées du troisième ordre de W sont nulles, puis que

$$W = \alpha + \beta x + \gamma y' + \lambda(xy' - my).$$

Le groupe de l'équation ((5)) est donc défini par les quatre transformations infinitésimales

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad x\frac{\partial f}{\partial y}, \quad x\frac{\partial f}{\partial x} + my\frac{\partial f}{\partial y},$$

qui ont pour fonctions caractéristiques

$$-y', \quad 1, \quad x, \quad my - xy'.$$

De là on conclut que le groupe de l'équation (V) est bien un groupe à quatre paramètres, lorsque $n$ est différent de $-1, 0, 1, 2$. Ce que nous voulions démontrer.

En résumé, nous venons de trouver une nouvelle famille d'équations aux dérivées partielles admettant un groupe à quatre paramètres. Ce sont les équations semblables à celle qui a pour associée

$$\text{(V)} \qquad \frac{dz + x\,dy - y\,dx}{dx} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^n \qquad n \neq -1, 0, 1, 2.$$

3. Cherchons maintenant les équations aux dérivées partielles qui correspondent à l'équation canonique

$$((6)) \qquad y''' e^{y''} = 1.$$

Un calcul élémentaire montre que les courbes intégrales de cette équation sont représentées par

$$(1) \qquad y = \mathrm{F}(x+a) - b(x+a) + c,$$

avec

$$\mathrm{F}(x) = \frac{x^2}{2}\left(\mathfrak{L}x - \frac{3}{2}\right).$$

L'équation aux différentielles totales correspondant à l'équation (1) s'obtient en éliminant $x$ entre les équations

$$\begin{aligned} &\mathrm{F}'(x+a)\,da - (x+a)\,db + dc - b\,da = 0, \\ &\mathrm{F}''(x+a)\,da - db = 0. \end{aligned}$$

Si l'on remarque que

$$\begin{aligned} &\mathrm{F}''(x) = \mathfrak{L}x, \\ &\mathrm{F}'(x) = x\mathfrak{L}x - x = x\,\mathrm{F}''(x) - x, \end{aligned}$$

on trouve immédiatement que

$$\frac{dc - b\,da}{da} = e^{\frac{db}{da}}.$$

Remplaçons $a$, $b$, $c$ respectivement par

$$2a, \quad 2b, \quad 2c + 2ab,$$

l'équation précédente devient

$$\frac{dc + a\,db - b\,da}{da} = e^{\frac{db}{da}}.$$

Les équations aux dérivées partielles cherchées sont donc toutes semblables à celle qui a pour associée

$$\text{(VI)} \qquad \frac{dz + x\,dy - y\,dx}{dx} = e^{\frac{dy}{dx}}.$$

Un calcul analogue à celui qui a été fait (p. 55) plus haut montre que cette équation admet le groupe défini par les transformations infinitésimales

$$\text{(G)} \qquad \frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial z}, \quad \frac{\partial f}{\partial z}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} + x\frac{\partial f}{\partial z}, \quad x\frac{\partial f}{\partial x} + (x+y)\frac{\partial f}{\partial y} + 2z\frac{\partial f}{\partial z}$$

ou les transformations finies

$$x' = (x + a_1)e^{a_4}, \qquad y' - a_4 x' = (y + a_2)e^{a_4}, \qquad z' = (z + a_2 x - a_1 y + a_3)e^{2a_4}.$$

Nous allons démontrer maintenant que G est bien le groupe de l'équation (VI), c'est-à-dire que l'équation (VI) n'admet pas d'autres transformations infinitésimales que celles du groupe G. Tout revient à prouver que l'équation du troisième ordre

$$y''' e^{y''} = 1$$

n'admet pas de transformation infinitésimale étrangère au groupe déjà connu

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad x\frac{\partial f}{\partial y}, \quad x\frac{\partial f}{\partial x} + \left(\frac{x^2}{2} + 2y\right)\frac{\partial f}{\partial y}.$$

A cet effet, soit X$f$ une transformation infinitésimale de contact laissant invariante cette équation et, par suite, l'équation équivalente

$$y''' = e^{-y''}.$$

La fonction W, caractéristique de $Xf$, est déterminée par l'identité en $x, y, y', y''$

$$F_3 + e^{-y''} F_1 = - e^{-y''} F_2,$$

où $F_1$, $F_2$, $F_3$ ont les significations données plus haut (p. 83). De là on déduit d'abord

$$F_3 = 0, \qquad F_1 + F_2 = 0$$

et ensuite

$$\frac{\partial^2 W}{\partial y'^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 W}{\partial y\, \partial y'} = 0, \qquad \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0, \qquad 2\frac{\partial^2 W}{\partial x\, \partial y'} + \frac{\partial W}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x\, \partial y} = 0, \qquad \frac{\partial^2 W}{\partial x\, \partial y'} + \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0.$$

Donc W est donnée par l'équation

$$W = a_1 + a_2 x + a_3 y' + a_4 \left(2y + \frac{x^2}{2} - xy'\right).$$

L'équation du troisième ordre considérée n'admet donc que quatre transformations infinitésimales distinctes, à savoir, les quatre déjà connues. Donc l'équation (VI) n'admet aussi que quatre transformations infinitésimales distinctes, ce que nous voulions démontrer.

# CHAPITRE VII.

## ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES QUI ADMETTENT UN GROUPE A QUATRE PARAMÈTRES (SUITE). ÉQUATIONS QUI CORRESPONDENT A L'ÉQUATION CANONIQUE ((7))

$$yy''' + 3y'y'' = ky^{\frac{1}{2}} y''^{\frac{3}{2}}. \tag{(7)}$$

1. Je commencerai par intégrer l'équation ((7)), en me fondant sur la remarque suivante. Soit

$$f(x, y, a, b, c) = 0$$

la famille des courbes intégrales. Cette famille à *trois* paramètres admet le groupe G à *quatre* paramètres, défini par les transformations infinitésimales

$$(G) \qquad \frac{\partial f}{\partial x}, \quad x\frac{\partial f}{\partial x}, \quad y\frac{\partial f}{\partial y}, \quad x^2\frac{\partial f}{\partial x} + xy\frac{\partial f}{\partial y}$$

ou les transformations finies

$$(G) \qquad x' = \frac{x+a}{bx+c}, \qquad y' = \frac{my}{bx+c}.$$

Il résulte de là que chaque courbe de la famille admet certainement une transformation infinitésimale du groupe G. En d'autres termes, les courbes intégrales sont des *courbes* V (*voir* p. 65).

Ceci nous conduit à chercher si l'équation ((7)) admet une intégrale particulière ayant l'une des formes suivantes :

$$(1) \qquad y = x^n,$$

$$(2) \qquad y = e^x.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (1) représente une courbe intégrale est exprimée par l'équation

$$(3) \qquad (2n-1)\sqrt{k^2-1} = k.$$

Si $k^2$ est différent de l'unité, cette équation permet de calculer $n$ en fonction de $k$, et l'équation ((7)) admet, par suite, une intégrale particulière de la forme (1).

Si, au contraire,

$$k^2 = 1,$$

c'est l'équation (2) qui définit une intégrale particulière de l'équation ((7)).

En appliquant toutes les transformations du groupe G, dans le premier cas, à l'équation (1), dans le second cas, à l'équation (2), on trouve toutes les courbes intégrales cherchées.

Donc l'équation

$$(4) \qquad y = \frac{bx+c}{m}\left(\frac{x+a}{bx+c}\right)^n$$

représente, dans le premier cas, les courbes intégrales, pourvu que $n$ soit lié à $k$ par la relation (3).

Les courbes intégrales sont au contraire représentées par

$$(5) \qquad y = \frac{bx+c}{m} e^{\frac{x+a}{bx+c}}.$$

Si l'on a

$$k^2 = 1.$$

A la vérité, les équations (4) et (5) contiennent quatre paramètres $a$, $b$, $c$, $m$, mais ces quatre paramètres ne sont pas *essentiels*.

En effet, si l'on pose

$$m = \mu^{1-n}\varphi(a', b', c'), \qquad a = a', \qquad b = \mu b', \qquad c = \mu c',$$

l'équation (4) devient, après la suppression des accents,

$$(4') \qquad y = \frac{bx+c}{\varphi(a, b, c)}\left(\frac{x+a}{bx+c}\right)^n;$$

de même, par le changement de paramètres

$$m\frac{e^{\mu}}{1+b\mu} = \varphi(a', b', c'), \qquad \frac{b}{1+b\mu} = b', \qquad \frac{c}{1+b\mu} = c', \qquad \frac{a+c\mu}{1+b\mu} = a',$$

l'équation (5) prend la forme

$$y = \frac{bx+c}{\varphi(a, b, c)} e^{\frac{x+a}{bx+c}}.$$

La fonction arbitraire $\varphi(a, b, c)$ peut être remplacée par l'unité, mais nous verrons dans la suite qu'il y a avantage à poser

$$\varphi(a, b, c) = \sqrt{c-ab}.$$

2. *Recherche du premier groupe conjugué de* G. — Ce groupe $\Gamma$ est formé par les transformations en $a$, $b$, $c$ conjuguées des transformations

$$x' = \frac{x+\alpha}{\beta x+\gamma}, \qquad y' = \frac{\lambda y}{\beta x+\gamma},$$

par rapport à l'équation

$$(4') \qquad y = \frac{bx+c}{\varphi(a, b, c)}\left(\frac{x+a}{bx+c}\right)^n.$$

Plusieurs des transformations infinitésimales de $\Gamma$ peuvent être obtenues *a priori* sans avoir recours à la méthode générale.

En effet, il est clair que l'équation (4') ne change pas de forme si l'on remplace $x$, $a$, $c$ respectivement par

$$x+\alpha, \qquad a-\alpha, \qquad c-b\alpha$$

et si l'on choisit $\varphi$ de manière que

$$\varphi(a-\alpha,\ b,\ c-b\alpha)=\varphi(abc), \qquad \text{ou} \qquad \varphi=\mathrm{F}(c-ab).$$

Donc les transformations à un paramètre $\alpha$

$$a'=a-\alpha, \qquad c'=c-b\alpha$$

forment un sous-groupe de $\Gamma$ et, par suite, l'une des transformations infinitésimales de $\Gamma$ a pour symbole

$$\mathrm{A}_1 f=\frac{\partial f}{\partial a}+b\frac{\partial f}{\partial c}.$$

Quant à la fonction $\varphi$, nous la choisirons de manière que

$$\varphi=(c-ab)^m.$$

On aperçoit alors facilement que le groupe $\Gamma$ contient les deux sous-groupes à un paramètre $\lambda$

$$\begin{cases} a'=a\lambda, \\ c'=c\lambda, \end{cases} \qquad \begin{cases} b'=b\lambda, \\ c'=c\lambda, \end{cases}$$

et, par suite, les deux transformations infinitésimales

$$\mathrm{A}_2 f=a\frac{\partial f}{\partial a}+c\frac{\partial f}{\partial c}, \qquad \mathrm{A}_3 f=b\frac{\partial f}{\partial b}+c\frac{\partial f}{\partial c}.$$

Le groupe défini par les transformations infinitésimales $\mathrm{A}_1 f$, $\mathrm{A}_2 f$ et $\mathrm{A}_3 f$ étant le groupe conjugué du groupe défini par $\mathrm{X}_1 f$, $\mathrm{X}_2 f$, et $\mathrm{X}_3 f$, il ne reste plus qu'à déterminer la transformation infinitésimale conjuguée de $\mathrm{X}_4 f$.

Il suffit, pour cela, de calculer les fonctions $\alpha(a, b, c)$, $\beta(a, b, c)$, $\gamma(a, b, c)$, de manière que la transformation infinitésimale

$$x^2\frac{\partial f}{\partial x}+xy\frac{\partial f}{\partial y}+\alpha\frac{\partial f}{\partial a}+\beta\frac{\partial f}{\partial b}+\gamma\frac{\partial f}{\partial c}=\mathrm{X}f$$

laisse invariante la multiplicité de points définie par l'équation (4') ou l'équation équivalente

$$\mathfrak{L} y = (1-n)\,\mathfrak{L}(bx+c) + n\,\mathfrak{L}(x+a) - \mathfrak{L}\varphi.$$

Les équations qui déterminent $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ s'obtiennent en écrivant que la relation

$$x = \frac{1-n}{bx+c}(\beta x + \gamma + bx^2) + n\frac{x^2+\alpha}{x+a} - \frac{X(\varphi)}{\varphi}$$

est une identité en $x$, $a$, $b$, $c$. On trouve d'abord

$$\alpha = -a^2,$$

et, par suite

$$(1-n)\left[\frac{(\beta-c)x+\gamma}{bx+c} + a\right] = a + \frac{X(\varphi)}{\varphi}.$$

Choisissons $\varphi$ de manière que

$$X(\varphi) = -a\varphi.$$

Alors $\beta$ et $\gamma$ sont données par les équations

$$\beta = c - ab, \qquad \gamma = -ac,$$

et $\varphi$ par

$$\varphi = \sqrt{c-ab}.$$

La transformation infinitésimale conjuguée de $X_4 f$ est donc

$$-a^2\frac{\partial f}{\partial a} + (c-ab)\frac{\partial f}{\partial b} - ac\frac{\partial f}{\partial c};$$

le groupe à un paramètre qu'elle engendre est le suivant

$$a' = \frac{a}{1+\lambda a}, \qquad b' = \frac{b+\lambda c}{1+\lambda a}, \qquad c' = \frac{c}{1+\lambda a}.$$

En résumé, le groupe $\Gamma$ est engendré par les quatre transformations infinitésimales

$$A_1 f = \frac{\partial f}{\partial a} + b\frac{\partial f}{\partial c}, \qquad A_2 f = a\frac{\partial f}{\partial a} + c\frac{\partial f}{\partial c},$$

$$A_3 f = a^2\frac{\partial f}{\partial a} + (ab-c)\frac{\partial f}{\partial b} + ac\frac{\partial f}{\partial c}, \qquad A_4 f = b\frac{\partial f}{\partial b} + c\frac{\partial f}{\partial c}.$$

Grâce à la manière dont nous avons déterminé $\varphi$, le groupe conjugué est homographique et indépendant du nombre $n$.

3. *Recherches du second groupe conjugué de* G. — Ce groupe $\Gamma'$ est formé par les transformations en $a$, $b$, $c$, conjuguées des transformations

$$(G) \qquad x' = \frac{x+\alpha}{\beta x+\gamma}, \qquad y' = \frac{\lambda y}{\beta x+\gamma}$$

par rapport à l'équation

$$(5') \qquad y = \frac{bx+c}{\varphi(a,\,b,\,c)}\,e^{\frac{x+a}{bx+c}}.$$

Choisissons encore $\varphi$ de manière que

$$\varphi = \sqrt{c-ab}.$$

On peut déterminer toutes les transformations de $\Gamma'$ sans avoir recours à la méthode générale. En effet, si l'on multiplie les deux membres de l'équation $(5')$ par $e^\lambda$, on obtient

$$ye^\lambda = \frac{bx+c}{\sqrt{c-ab}}\,e^{\frac{x(1+\lambda b)+a+\lambda c}{bx+c}}:$$

donc l'équation $(5')$, considérée comme une équation à cinq variables $x$, $y$, $a$, $b$, $c$, admet la transformation

$$(1) \qquad x' = x, \qquad y' = ye^\lambda,$$

$$(2) \qquad a' = \frac{1+\lambda c}{1+\lambda b}, \qquad b' = \frac{b}{1+\lambda b}, \qquad c' = \frac{c}{1+\lambda b}.$$

Donc les équations (2) définissent un sous-groupe à un paramètre du groupe $\Gamma'$. L'une des transformations infinitésimales de $\Gamma'$ est donc

$$A_5 f = (ab-c)\frac{\partial f}{\partial a} + b^2\frac{\partial f}{\partial b} + bc\frac{\partial f}{dc}.$$

On voit aussi facilement que les trois premières transformations infinitésimales de $\Gamma$, à savoir $A_1 f$, $A_2 f$, $A_3 f$, sont également des transformations infinitésimales de $\Gamma'$. Ce groupe $\Gamma'$ est donc engendré par les quatre transformations infinitésimales distinctes

$$A_1 f, \quad A_2 f, \quad A_3 f, \quad A_5 f.$$

4. *Recherche des équations aux dérivées partielles qui correspondent à l'équation*

$$((7))\qquad yy''' + 3y'y'' = ky^{\frac{1}{2}}y''^{\frac{3}{2}}.$$

Nous supposerons dans la suite le nombre $k$ différent de zéro (et par suite $n \neq \frac{1}{2}$), car, pour cette valeur de $k$, l'équation ((7)) se réduit à

$$yy''' + 3y'y'' = 0,$$

c'est-à-dire

$$(y^2)''' = 0,$$

et dérive par une transformation ponctuelle

$$x_1 = x, \qquad y_1 = y^2$$

de l'équation

$$y_1''' = 0,$$

Supposons d'abord le nombre $k$ différent de l'unité. Les courbes intégrales de l'équation ((7)) sont alors représentées par

$$y = \frac{bx+c}{\varphi(a,b,c)}\left(\frac{x+a}{bx+c}\right)^n, \qquad \varphi = \sqrt{c-ab},$$

ou bien

$$\mathcal{L}y = (1-n)\mathcal{L}(bx+c) + n\mathcal{L}(x+a) - \mathcal{L}\varphi;$$

en appliquant la règle si souvent rappelée, nous sommes conduits à écrire que l'équation en $x$

$$\frac{(1-n)(x\,db+c)}{bx+c} + \frac{n\,da}{x+a} - \frac{d\varphi}{\varphi} = 0$$

a une racine double. A cet effet, posons

$$\frac{x+a}{bx+c} = t$$

et exprimons que le discriminant de l'équation en $t$

$$(1-n)(b\,dc - c\,db)t^2 + (n-\tfrac{1}{2})(dc - a\,db + b\,da)t - n\,da = 0$$

est nul; nous obtenons ainsi

$$(1)\qquad (2n-1)^2(dc - a\,db + b\,da)^2 - 16n(n-1)(b\,dc - c\,db)\,da = 0.$$

Comme $2n - 1$ n'est pas nul, nous pouvons poser

$$\frac{4n(n-1)}{(2n-1)^2} = h.$$

Remarquons immédiatement que $h$ n'est pas nul; il suffit pour le voir de se reporter à l'équation qui détermine $n$ en fonction de $k$. En outre, il est clair que

$$h \neq 1.$$

L'équation (1) devient alors, après le *changement de a en* $-a$,

$$(1) \qquad (dc + a\,db + b\,da)^2 + 4h(b\,dc - c\,db)\,da = 0.$$

Supposons maintenant

$$k^2 = 1.$$

Les courbes intégrales de l'équation ((7)) peuvent alors être représentées par l'équation

$$y = \frac{bx + c}{\sqrt{c + ab}}\, e^{\frac{x-a}{bx+c}}.$$

L'équation aux différentielles totales correspondante est

$$(dc + a\,db - b\,da)^2 + 4(da + b\,dc - c\,db)(b\,dc - c\,db) = 0.$$

En résumé, les équations aux dérivées partielles cherchées se partagent en deux classes. Celles de la première sont semblables à l'équation qui a pour associée

$$(\text{VII}') \qquad (dz + x\,dy - y\,dx)^2 + 4h(y\,dz - z\,dy)\,dx = 0, \qquad h \neq \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}.$$

celles de la seconde sont semblables à l'équation qui a pour associée

$$(\text{VIII}') \qquad (dz + x\,dy - y\,dx)^2 + 4(dx + y\,dz - z\,dy)(y\,dz - z\,dy) = 0.$$

L'équation (VII') admet, cnmme on a vu, le groupe défini par

$$X_1 f = \frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial z}, \qquad X_3 f = x^2\frac{\partial f}{\partial x} + (xy + z)\frac{\partial f}{\partial y} + xz\frac{\partial f}{\partial z},$$

$$X_2 f = x\frac{\partial f}{\partial x} + z\frac{\partial f}{\partial z}, \qquad X_4 f = y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z}.$$

L'équation (VIII′) admet le groupe défini par

$$X_1 f,\ X_2 f,\ X_3 f$$

et

$$X_5 f = (xy + z)\frac{\partial f}{\partial x} + y^2\frac{\partial f}{\partial y} + yz\frac{\partial f}{\partial z}.$$

*Remarque.* — Si dans la forme canonique (VIII′) on remplace $x, y,$ respectivement par

$$\frac{z}{y},\quad \frac{1}{y},\quad \frac{x}{y},$$

on obtient la forme suivante, qui peut remplacer la forme (VIII′) :

(VIII) $$(dz + x\,dy - y\,dx)^2 + 4(dx + y\,dz - z\,dy)\,dx = 0.$$

Le groupe $(X_1, X_2, X_3, X_5)$ se transforme d'ailleurs en

$$X_1 f,\ X_2 f,\ X_3 f,\ X_6 f,$$

où

$$X_6 f = \frac{\partial f}{\partial y} - x\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Observons en outre que les six transformations infinitésimales

$$X_1 f, X_2 f, \ldots, X_6 f,$$

déterminent un groupe H, à savoir le groupe des transformations homographiques qui laissent invariante la surface du second degré

$$xy + z = 0.$$

Les transformations $X_1 f$, $X_2 f$, $X_3 f$ déterminent un sous-groupe de H et il en est de même de $X_4 f$, $X_5 f$, $X_6 f$ [on sait que ces deux sous-groupes sont réciproques ([1])].

5. Nous venons de trouver que les équations canoniques (VII′), (VIII), (VIII′) admettent chacune un groupe à quatre paramètres; nous allons maintenant démontrer qu'elles n'admettent pas un groupe d'ordre plus élevé. A cet effet, nous prouverons, ce qui est évidemment suffisant, que

([1]) Voir *Transformationsgruppen*, t. I, p. 382.

l'équation

$$((7)) \qquad yy''' + 3y'y'' = ky^{\frac{1}{2}}y''^{\frac{3}{2}}, \qquad \text{où} \qquad k \neq 0,$$

n'admet pas un groupe de transformations de contact à plus de quatre paramètres.

Soit

$$\xi(x, y, y')\frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x, y, y')\frac{\partial f}{\partial y} + \zeta_1(x, y, y')\frac{\partial f}{\partial y'}$$

une transformation infinitésimale laissant invariante l'équation ((7)) et soit W sa fonction caractéristique, de sorte que

$$\xi = -\frac{\partial W}{\partial y'}, \qquad \eta = W - y'\frac{\partial W}{\partial y'}, \qquad \zeta_1 = \frac{\partial W}{\partial x} + y'\frac{\partial W}{\partial y}.$$

Désignons par $Xf$ la transformation prolongée

$$Xf = \xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y} + \zeta_1\frac{\partial f}{\partial y'} + \zeta_2\frac{\partial f}{\partial y''} + \zeta_3\frac{\partial f}{\partial y'''} \text{ (1)}.$$

Cela posé, l'équation ((7)) peut prendre la forme

$$(1) \qquad y''' = 3y''\varphi + y''^{\frac{3}{2}}\psi, \qquad \varphi = -\frac{y'}{y}, \qquad \psi = ky^{-\frac{1}{2}}.$$

Les équations qui déterminent W s'obtiennent en écrivant que la multiplicité de points $(x, y, y', y'', y''')$ définie par

$$(2) \qquad X(y''') = 3\varphi X(y'') + 3y''X(\varphi) + \tfrac{3}{2}\psi y''^{\frac{1}{2}}X(y'') + y''^{\frac{3}{2}}X(\psi)$$

est contenue dans la multiplicité (1). Pour cela exprimons que

$$F_3 + (3y''\varphi + y''^{\frac{3}{2}}\psi)F_1 = 3X(y''\varphi) + y''^{\frac{3}{2}}X(\psi) + \tfrac{3}{2}y''^{\frac{1}{2}}\psi X(y'')$$

est identique en $x, y, y', y''$. Nous obtenons d'abord

$$(3) \qquad y''\psi F_1 = y''X(\psi) + \tfrac{3}{2}\psi X(y''),$$

$$(4) \qquad F_3 + 3y''\varphi F_1 = 3\varphi X(y'') + 3y''X(\varphi).$$

L'équation (3) montre que $X(y'')$ s'annule pour $y'' = 0$; donc

$$(a) \qquad P_0 = 0$$

---

(1) *Voir* p. 82 et 83.

et par suite

$$(b) \qquad Q_0 = 0.$$

L'équation (3) développée donne

$$(3') \qquad (R_0 + R_1 y'')\psi = X(\psi) + \tfrac{3}{2}\psi(P_1 + P_2 y''),$$

et par suite, comme $k$ est différent de zéro,

$$2R_1 = 3P_2,$$

c'est-à-dire

$$(c) \qquad \frac{\partial^2 W}{\partial y'^2} = 0.$$

Il résulte de là que

$$R_1 = P_2 = 0$$

et aussi

$$(d) \qquad Q_3 = 0.$$

L'équation (3′) devient alors

$$(3'') \qquad R_0\psi = X(\psi) + \tfrac{3}{2}\psi P_1$$

et l'équation (4) prend la forme

$$(4') \qquad Q_1 + Q_2 y'' + R_0\varphi = P_1\varphi + X(\varphi).$$

Cette identité exige que

$$(e) \qquad Q_2 = 0, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \frac{\partial^2 W}{\partial y\,\partial y'} = 0.$$

Revenons à l'équation (3″); elle peut s'écrire

$$(2R_0 - 3P_1)\psi = 2X(\psi),$$

c'est-à-dire, eu égard aux valeurs de $R_0$ et $P_1$,

$$\psi\frac{\partial W}{\partial y} + 2X(\psi) = 0$$

ou bien

$$X(y) = y\frac{\partial W}{\partial y},$$

ou enfin

$$(f) \qquad W = y\frac{\partial W}{\partial y} + y'\frac{\partial W}{\partial y'}.$$

Si l'ou différentie cette égalité par rapport à $y$, et si l'on tient compte de $(e)$, on trouve

$$(g) \qquad \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0.$$

En résumé, la fonction W doit satisfaire aux relations suivantes :

$$P_0 = 2y' \frac{\partial^2 W}{\partial x \, \partial y} + \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0, \qquad W = y \frac{\partial W}{\partial y} + y' \frac{\partial W}{\partial y'},$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial y'^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 W}{\partial y \, \partial y'} = 0, \qquad \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0.$$

De ces relations on déduit immédiatement que les dérivées du troisième ordre de W sont toutes nulles, sauf $\dfrac{\partial^3 W}{\partial x^2 \, \partial y'}$ qui satisfait à

$$\frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial y'} + 2 \frac{\partial^3 W}{\partial x \, \partial y} = 0;$$

donc W est de la forme

$$W = a_1 y + a_2 y' + a_3 x y' + a_4 (xy + x^2 y').$$

On voit donc que l'équation ((7)) ne peut admettre que les quatre transformations infinitésimales qui ont pour fonctions caractéristiques

$$y, \; y', \; xy', \; xy - x^2 y',$$

c'est-à-dire les quatre suivantes

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad x \frac{\partial f}{\partial x}, \quad y \frac{\partial f}{\partial y}, \quad x^2 \frac{\partial f}{\partial x} + xy \frac{\partial f}{\partial y}.$$

C'est précisément ce qu'il fallait démontrer.

Nous pouvons donc dire que les groupes des équations canoniques (VII'), (VIII'), (VIII) sont respectivement

$$(X_1, X_2, X_3, X_4), \quad (X_1, X_2, X_3, X_5), \quad (X_1, X_2, X_3, X_6).$$

6. *Modification de l'équation canonique* (VII')

$$(dz + x\,dy - y\,dx)^2 + 4h\,dx\,(y\,dz - z\,dy) = 0, \qquad h \neq 0, 1.$$

Effectuons la transformation homographique

$$x = \frac{x' + iy'}{i - z'}, \qquad y = \frac{x' - iy'}{i - z'}, \qquad z = -\frac{i + z'}{i - z'},$$

qui fait correspondre à la surface

$$xy + z = 0$$

la sphère

$$(\Sigma) \qquad x'^2 + y'^2 + z'^2 + 1 = 0.$$

Nous obtenons successivement les formules suivantes :

$$dz + x\,dy - y\,dx = -2i\,\frac{dz' + x'\,dy' - y'\,dx'}{(z' - i)^2},$$

$$dx = \frac{(i - z')(dx' + i\,dy') + (x' + iy')\,dz'}{(i - z')^2},$$

$$y\,dz - z\,dy = -\frac{(-i - z')(dx' - i\,dy') + (x' - iy')\,dz'}{(i - z')^2},$$

$$dx(y\,dz - z\,dy) = -\frac{(dx' + y'\,dz' - z'\,dy')^2 + (dy' + z'\,dx' - x'\,dz')^2}{(i - z')^2}.$$

L'équation proposée a donc pour transformée

$$(dz' + x'\,dy' - y\,dx')^2 + h(dx' + y'\,dz' - z'\,dy')^2 + h(dy' + z'\,dx' - x'\,dz')^2 = 0, \qquad h \neq \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}.$$

Nous pouvons, par suite, prendre pour équation canonique, à la place de l'équation (VII′), l'équation suivante

$$\text{(VII)} \qquad a(dz + x\,dy - y\,dx)^2 + (dx + y\,dz - z\,dy)^2 + (dy + z\,dx - x\,dz)^2 = 0,$$

avec

$$a \neq 1.$$

Nous verrons plus tard que, si $a = 1$, cette équation peut être ramenée par une transformation ponctuelle à la forme

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0,$$

Quant au groupe de l'équation (VII), c'est le groupe transformé du groupe de (VII'). Les six transformations infinitésimales

$$\begin{aligned}
X_1 f &= \frac{\partial f}{\partial x} + z\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial z} + x\left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z}\right),\\
X_2 f &= \frac{\partial f}{\partial y} + x\frac{\partial f}{\partial z} - z\frac{\partial f}{\partial x} + y\left(\cdots\cdots\cdots\cdots\right),\\
X_3 f &= \frac{\partial f}{\partial z} + y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y} + z\left(\cdots\cdots\cdots\cdots\right),\\
X_4 f &= \frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial z} - z\frac{\partial f}{\partial y} + x\left(\cdots\cdots\cdots\cdots\right),\\
X_5 f &= \frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial z} + y\left(\cdots\cdots\cdots\cdots\right),\\
X_6 f &= \frac{\partial f}{\partial z} + x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} + z\left(\cdots\cdots\cdots\cdots\right).
\end{aligned}$$

définissent le groupe homographique de la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0.$$

Le groupe de l'équation (VII) est défini par les quatre transformations infinitésimales

$$X_1 f, \quad X_2 f, \quad X_3 f, \quad X_6 f.$$

# CHAPITRE VIII.

## SUR DEUX CLASSES PARTICULIÈRES DE COMPLEXES. — INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES QUI ADMETTENT UN GROUPE A QUATRE PARAMÈTRES.

1. *Groupe spécial de transformations homologiques.* — Je commencerai par rappeler la définition d'un groupe de transformations homologiques que l'on rencontre fréquemment dans les recherches de M. S. Lie.

Considérons, dans le plan des $(x, y)$, les transformations homologiques ayant pour centre d'homologie le point O, et pour axe d'homologie une droite passant par ce point O. Ces transformations forment un groupe à deux paramètres, dont nous allons chercher les équations. Remarquons d'abord que les transformations homologiques qui ont le point O pour centre d'homologie sont les transformations homographiques qui laissent invariante chaque droite passant par l'origine. Ces transformations sont donc définies par les équations

$$(1) \qquad x' = \frac{x}{ax + by + c}, \qquad y' = \frac{y}{ax + by + c}.$$

L'axe d'homologie relatif à l'une de ces transformations étant une droite, dont chaque point reste invariant par cette transformation, a pour équation

$$ax + by + c = 1.$$

Les transformations particulières que nous cherchons s'obtiennent donc en faisant

$$c = 1$$

dans les équations (1), ce qui donne

$$(2) \qquad x' = \frac{x}{ax + by + 1}, \qquad y' = \frac{y}{ax + by + 1}.$$

Il est aisé de vérifier que ces équations déterminent un groupe et que ce groupe est engendré par les deux transformations infinitésimales

$$X_1 f = x\left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}\right), \qquad X_2 f = y\left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Nous appellerons ce groupe le groupe *homologique spécial* relatif au point O.

Remarquons que, D et D' étant deux droites quelconques du plan ne passant pas par l'origine, il existe toujours une transformation du groupe, et une seule, vis-à-vis de laquelle les droites D et D' sont homologues. L'axe d'homologie est la droite qui joint le point O au point d'intersection des droites D et D'.

D'une manière générale, soit C' la courbe homologue de C par rapport à une transformation du groupe G. D'après la nature des transformations du groupe G, il est clair que la courbe C ne peut admettre une transformation de ce groupe; donc il n'existe qu'une transformation du groupe changeant C en C'.

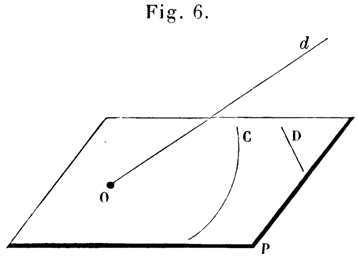
2. *Correspondance entre les droites d'un plan et les courbes d'une certaine famille à deux paramètres.* — Considérons dans un plan P un point O, une courbe absolument quelconque C, et une droite D ne passant pas par le point O. Appliquons au couple (C, D) toutes les transforma-

tions du groupe homologique spécial G, relatif au point O. L'ensemble des transformées de D comprend toutes les droites du plan ne passant pas par l'origine O (n° 1); l'ensemble des transformées de C constitue une certaine famille F de courbes à deux paramètres. Cela posé, soit D′ une droite quelconque du plan (ne passant pas par l'origine), et soit S la transformation du groupe G qui change D en D′. Faisons correspondre à la droite D′ la courbe C′, homologue de C par rapport à S. Nous avons ainsi défini une correspondance entre les droites du plan (ne passant pas par le point O) et les courbes C de la famille F. Il résulte, d'ailleurs, de la remarque faite précédemment (1), que cette correspondance est univoque.

Observons, en outre, que si deux droites, D et D′, se coupent au point A, les courbes correspondantes, C et C′, se coupent en un point situé sur OA. En effet, soit S la transformation du groupe G, qui fait correspondre le couple (C′, D′) au couple (C, D); l'axe d'homologie de cette transformation est évidemment la droite OA. Si donc B est un point d'intersection de OA avec la courbe C, la transformation S doit laisser invariant ce point B, et, par suite, il doit se trouver sur la courbe C′, transformée de C.

3. *Définition des complexes* K. — De la correspondance entre les droites du plan P et les courbes de la famille F, il est aisé de déduire une correspondance univoque entre les mêmes courbes et les droites $d$ passant par le point O, mais non situées dans le plan P. Il suffit pour cela de considérer un *complexe linéaire* H tel que le pôle du plan P soit précisément le point O, et de faire correspondre à chaque courbe C de la famille F la droite $d$ conjuguée de D par rapport au complexe H (*fig.* 6). Puisque la

Fig. 6.




correspondance entre les droites $d$ et D est univoque, ainsi que celle qui existe entre les courbes C et D, il en est de même de la correspondance entre les droites $d$ et les courbes C. Je dirai, dans la suite, qu'une droite $d$ et la courbe C correspondante sont deux lignes *associées*.

Cela posé, remarquons qu'à toutes les droites $d$ situées dans un même plan Q correspondent les droites D du plan P, passant par un point A situé sur l'intersection de P et de Q (A est le pôle du plan Q par rapport au complexe linéaire H). Donc on peut dire, en vertu de ce qui précède, qu'à toutes les droites $d$ situées dans le plan Q correspondent des courbes C se coupant en un point B de la droite OA. De là résulte que les droites rencontrant à la fois deux lignes associées forment un complexe. Tout complexe susceptible de ce mode de génération sera appelé un *complexe* K. Les courbes C seront dites les *directrices du complexe*.

4. *Complexes* K *de première espèce. Interprétation de l'équation* (V). — Supposons que la courbe C, qui a été jusqu'à présent complètement indéterminée, soit une courbe V relative au triangle formé par la droite D et deux droites $Ox$, $Oy$. Les complexes K, que l'on déduit du couple (D, V) ou des couples analogues situés dans le plan P ou un autre plan de l'espace, constituent une famille particulière de complexes; nous les appellerons *complexes de première espèce*.

Cherchons l'équation générale de ces complexes. A cet effet, considérons l'un d'entre eux, et prenons pour axes des $x$ et des $y$ les deux côtés communs aux triangles liés aux directrices, pour axe des $z$ la droite conjuguée, par rapport au complexe linéaire H, de la droite de l'infini du plan des $(x, y)$. Pour obtenir les équations des couples (D, V), il suffit d'appliquer à l'un d'entre eux, $(D_0, V_0)$, les transformations du groupe homologique spécial relatif au point O. Prenons pour droite $D_0$ la droite de l'infini; alors la courbe $V_0$ a pour équation

$$x^m y^n = k, \qquad m + n = 1, \qquad k \neq 0,$$

et, par suite, les couples (D, V) sont représentés par (*voir* n° 1)

$$\text{(D)} \qquad \alpha x + \beta y + 1 = 0,$$

$$\text{(V)} \qquad x^m y^n = k(\alpha x + \beta y + 1).$$

D'autre part, le complexe linéaire H est défini par les tangentes aux courbes intégrales de

$$h\,dz + x\,dy - y\,dx = 0, \qquad h \neq 0;$$

donc les équations de la droite conjuguée de D sont

$$(d) \qquad y = h\alpha z, \qquad x = -h\beta z.$$

La condition pour qu'une droite, représentée par

$$x = az + p, \qquad y = bz + q,$$

rencontre deux lignes associées $(d)$ et $(V)$, s'exprime alors par l'équation

$$k\left(1 + \frac{bp - aq}{h}\right) = p^m q^n.$$

Les droites du complexe peuvent donc être considérées comme les tangentes aux courbes intégrales de l'équation

$$(1) \qquad k\left(dz + \frac{x\,dy - y\,dx}{h}\right) = (x\,dz - z\,dx)^m (y\,dz - z\,dy)^n, \qquad m + n = 1.$$

Cette équation dérive, par une transformation homographique, de la forme

$$x' = \lambda x, \qquad y' = \lambda y, \qquad z' = \mu z$$

de l'équation

$$(2) \qquad (dz + x\,dy - y\,dx) = (x\,dz - z\,dx)^m (y\,dz - z\,dy)^n.$$

Si maintenant on remplace $x$, $y$, $z$ respectivement par $\left(-\frac{x}{z}\right)$, $\left(-\frac{y}{z}\right)$, $\left(-\frac{1}{z}\right)$, l'équation précédente devient

$$dz + x\,dy - y\,dx = dx^m\,dy^n, \qquad m + n = 1$$

ou bien

$$(\mathrm{V}) \qquad \frac{dz + x\,dy - y\,dx}{dx} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^n,$$

Le calcul précédent montre que, si dans l'équation canonique (V), on effectue la transformation homographique la plus générale, on obtient l'équation générale des complexes K de première espèce.

Le complexe K défini par l'équation (V) a ses directrices dans le plan de l'infini. Les deux côtés communs à tous les triangles liés aux directrices sont les intersections du plan de l'infini avec les plans $zOy$ et $zOx$.

5. *Groupe d'un complexe* K *de première espèce*. — Les considérations géométriques qui précèdent mettent en évidence qu'un complexe K de première espèce admet un groupe homographique à quatre paramètres. En effet, il est clair que ce complexe admet les transformations homographiques

qui laissent invariants à la fois le complexe linéaire H et la famille des couples (D, V), qui correspondent au complexe K. Nous allons déterminer ces transformations pour le complexe K défini par l'équation (2).

La famille des couples (D, V) admet évidemment le groupe, à trois paramètres, engendré par les transformations infinitésimales de G (nº 1)

$$X_1 f = x\left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}\right), \qquad X_2 = y\left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}\right),$$

et la transformation infinitésimale

$$X_3 f = nx\frac{\partial f}{\partial x} + (n-1)y\frac{\partial f}{\partial y},$$

qui laisse invariante la courbe $V_0$

$$(V_0) \qquad x^{1-n}.y^n = 1.$$

Considérons maintenant le tableau des transformations infinitésimales homographiques du complexe linéaire (¹)

$$dz + x\,dy - y\,dx = 0.$$

On aperçoit immédiatement que les transformations du groupe ayant les formes

$$X_1 f + \zeta_1\frac{\partial f}{\partial z}, \quad X_2 f + \zeta_2\frac{\partial f}{\partial z}, \quad X_3 f + \zeta_3\frac{\partial f}{\partial z}$$

sont les suivantes

$$(1) \qquad x\left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z}\right) + z\frac{\partial f}{\partial y},$$

$$(2) \qquad y\left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z}\right) - z\frac{\partial f}{\partial x},$$

$$(3) \qquad n\left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + 2z\frac{\partial f}{\partial z}\right) - \left(y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z}\right);$$

d'autre part, le même groupe contient une transformation infinitésimale (et une seule), laissant invariant chaque point du plan des $xy$, à savoir

$$(4) \qquad z\left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z}\right).$$

(¹) Voir *Transformationsgruppen*, t. II, p. 446.

Le complexe K considéré admet donc le groupe défini par les quatre transformations (1), (2), (3), (4). Si maintenant on remplace $x, y, z$ respectivement par $-\frac{x}{z}$, $-\frac{y}{x}$ et $-\frac{1}{z}$, le groupe devient

$$\text{(G)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x} - y\dfrac{\partial f}{\partial z}, \quad \dfrac{\partial f}{\partial z}, \quad \dfrac{\partial f}{\partial y} + x\dfrac{\partial f}{\partial z}, \\ n\left(x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} + 2z\dfrac{\partial f}{\partial z}\right) - \left(x\dfrac{\partial f}{\partial x} + z\dfrac{\partial f}{\partial z}\right), \end{array} \right.$$

et l'équation (2) a pour transformée l'équation (V). Donc l'équation (V) admet le groupe G; nous avons vu d'ailleurs qu'il ne peut admettre un groupe d'ordre plus élevé.

6. *Complexes* K *de seconde espèce. Interprétation de l'équation* (VI). — Nous avons vu qu'un complexe de première espèce est un complexe K dont les directrices sont des courbes V appartenant à des triangles ayant deux côtés communs. Supposons maintenant ces côtés confondus; nous dirons alors que le complexe est un complexe K de seconde espèce.

THÉORÈME. — *Les complexes* K *de seconde espèces dérivent tous, par une transformation homographique, de l'un quelconque d'entre eux, par exemple du complexe déterminé par les tangentes aux courbes intégrales de l'équation*

$$\text{(VI)} \qquad \frac{dz + x\,dy - y\,dx}{dx} = e^{\frac{dy}{dx}}.$$

Considérons un complexe quelconque de seconde espèce; prenons pour plan des $(x, y)$ le plan des directrices, pour origine le sommet commun à tous les triangles (aplatis), liés aux directrices, pour axe des $y$ une droite quelconque O$y$ du plan et pour axe des $z$ la droite conjuguée, par rapport au complexe linéaire, de la droite de l'infini du plan des $xy$.

Le complexe linéaire est alors défini par une équation de la forme

$$h\,dz + x\,dy - y\,dx = 0.$$

Comme précédemment, il suffit, pour obtenir les équations des couples (D, V), d'appliquer les transformations du groupe homologique spécial, relatif au point O, à un couple particulier $(D_0, V_0)$. Prenons encore pour droite $D_0$ la droite de l'infini; alors la courbe $V_0$ a pour équations

$$\frac{1}{x} = ke^{\frac{y}{x}}, \qquad z = 0,$$

et par suite les couples (D, V) sont représentés par

$$(\mathrm{D}) \qquad \begin{cases} \alpha x + \beta y + 1 = 0, \\ z = 0, \end{cases}$$

$$(\mathrm{V}) \qquad \begin{cases} \dfrac{\alpha x + \beta y + 1}{x} = ke^{\frac{y}{x}}, \\ z = 0. \end{cases}$$

Les équations de la droite $d$ conjuguée d'une droite D sont

$$x = -h\beta z, \qquad y = h\alpha z.$$

La condition pour que la droite

$$x = az + p, \qquad y = bz + q$$

rencontre deux lignes associées $(d)$ et (V) s'exprime alors par l'équation

$$\frac{1}{p}\left(1 + \frac{bp - aq}{h}\right) = ke^{\frac{q}{p}}.$$

Les droites du complexe défini par cette équation sont évidemment les tangentes aux courbes intégrales de

$$\frac{h\,dz + x\,dy - y\,dx}{h(x\,dz - z\,dx)} = ke^{\frac{y\,dz - z\,dy}{x\,dz - z\,dx}}.$$

On voit donc que le complexe dérive par une transformation homographique de la forme

$$x' = \lambda x, \qquad y' = \lambda y, \qquad z' = \mu z$$

du complexe de même espèce pour lequel $h = 1$ et $k = 1$, c'est-à-dire du complexe déterminé par l'équation

$$\frac{dz + x\,dy - y\,dx}{x\,dz - z\,dx} = e^{\frac{y\,dz - z\,dy}{x\,dz - z\,dx}}.$$

Si maintenant on remplace $x$, $y$, $z$ respectivement par

$$-\frac{x}{z}, \quad -\frac{y}{z}, \quad -\frac{1}{z},$$

ce qui revient à transporter à l'infini, par une transformation homographique, le plan des directrices, on trouve

$$\frac{dz + x\,dy - y\,dx}{dx} = e^{\frac{dy}{dx}},$$

ce que nous voulions démontrer.

On peut, comme précédemment, démontrer *a priori* qu'un complexe K de seconde espèce admet un groupe homographique à quatre paramètres et que ce groupe est un sous-groupe du complexe linéaire correspondant au complexe K.

7. *Définition des complexes* H. — Considérons une surface quelconque du second degré, et supposons qu'on ait établi, entre les génératrices d'un même système, une *correspondance homographique* quelconque. Cela posé, les droites qui rencontrent à la fois deux génératrices homologues forment évidemment un complexe.

Les génératrices du second système sont toutes des droites du complexe.

La surface du second degré est la surface singulière du complexe.

Tout complexe susceptible de ce mode de génération sera appelé un *complexe* H. Il y a lieu de distinguer les complexes pour lesquels les génératrices doubles de l'homographie sont distinctes de ceux pour lesquels les génératrices doubles sont confondues. Les complexes H de la première catégorie seront dits de *première espèce*, les autres seront dits de *seconde espèce*.

Avant de déterminer les équations de ces complexes, je commencerai par rappeler quelques théorèmes de M. Lie, relatifs aux transformations homographiques qui laissent invariante une surface du second degré non décomposable.

Considérons la surface représentée par l'équation

$$(\mathrm{S}) \qquad xy + z = 0.$$

Les transformations infinitésimales qui laissent invariante cette surface forment un groupe à six paramètres, défini par les transformations infinitésimales

$$\mathrm{X}_1 f = \frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial z}, \quad \mathrm{X}_2 f = x\frac{\partial f}{\partial x} + z\frac{\partial f}{\partial z}, \quad \mathrm{X}_3 f = x^2\frac{\partial f}{\partial x} + (xy+z)\frac{\partial f}{\partial y} + xz\frac{\partial f}{\partial z},$$

$$\mathrm{X}_4 f = y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z}, \quad \mathrm{X}_5 f = (xy+z)\frac{\partial f}{\partial x} + y^2\frac{\partial f}{\partial y} + yz\frac{\partial f}{\partial z}, \quad \mathrm{X}_6 f = \frac{\partial f}{\partial y} - x\frac{\partial f}{\partial z},$$

Les trois premières transformations infinitésimales déterminent un sous-groupe $\Gamma_1$ de G, les trois dernières forment également un sous-groupe $\Gamma_2$.

Les transformations du groupe $\Gamma_1$ laissent invariante *chacune* des génératrices d'un même système

$$(\text{D}) \qquad y = \lambda, \qquad \lambda x + z = 0.$$

Les transformations du groupe $\Gamma_2$, au contraire, échangent ces droites entre elles. Le groupe en $\lambda$, conjugué du groupe $\Gamma_2$, est engendré par les trois transformations infinitésimales

$$\lambda \frac{df}{d\lambda}, \qquad \lambda^2 \frac{df}{d\lambda}, \qquad \frac{df}{d\lambda},$$

qui correspondent respectivement à $X_4 f$, $X_5 f$, $X_6 f$.

De ce que le groupe conjugué est un groupe à trois paramètres résulte ce fait, que nous utiliserons à l'instant :

*Étant donnés deux couples quelconques* $(D_1, D'_1)$ *et* $(D_2, D'_2)$ *de génératrices* D, *il existe toujours une transformation du groupe* $\Gamma_2$ (*et même une infinité simple*) *qui transforme* $D_1$ *en* $D'_1$ *et* $D_2$ *en* $D'_2$.

Cela posé, revenons aux complexes H de première espèce.

8. *Complexes* H *de première espèce*. — Un de ces complexes est complètement déterminé quand on donne la surface singulière S, les deux génératrices doubles de l'homographie et le rapport anharmonique $k$ qui caractérise l'homographie.

Théorème. — *Les complexes* H *de première espèce, qui correspondent au même rapport anharmonique, dérivent tous, par une transformation homographique, de l'un quelconque d'entre eux, par exemple du complexe déterminé par les tangentes aux courbes intégrales de l'équation*

$$(\text{VII}) \qquad (dz + x\,dy - y\,dx)^2 + 4h(y\,dz - z\,dy)\,dx = 0.$$

En effet, considérons un quelconque de ces complexes et effectuons une première transformation homographique qui transforme la surface singulière du complexe en la surface suivante

$$(\Sigma) \qquad xy + z = 0.$$

Le complexe transformé est un complexe de même espèce ayant pour surface singulière $\Sigma$. Soient alors

$$(\mathrm{D}) \qquad y = \lambda, \qquad \lambda x + z = 0$$

les équations des génératrices liées par une homographie. Par une seconde transformation homographique, qui n'altère ni la surface $\Sigma$, ni l'ensemble des droites D, nous pouvons, comme on a vu, amener les deux génératrices doubles à coïncider avec les génératrices correspondantes aux valeurs $\lambda = 0$ et $\lambda = \infty$. Au complexe H transformé correspond alors une homographie définie par une équation de la forme

$$\lambda' = k\lambda''.$$

La condition pour que la droite

$$x = az + p, \qquad y = bz + q,$$

coupe la droite D est exprimée par l'équation

$$a\lambda^2 + \lambda(1 + bp - aq) - q = 0 :$$

donc l'équation du complexe est

$$(1 + bp - aq)^2 + \left(k + \frac{1}{k} + 2\right)aq = 0$$

ou bien

$$(1 + bp - aq)^2 + 4haq = 0, \qquad \text{où} \qquad 4h = k + \frac{1}{k} + 2.$$

Le complexe représenté par cette équation est précisément celui des tangentes aux courbes intégrales de l'équation (VII). Le théorème est donc démontré.

De la définition d'un complexe H de première espèce résulte immédiatement qu'il admet un groupe homographique à quatre paramètres. En effet, considérons, pour fixer les idées, le complexe H défini par l'équation (VII).

Ce complexe admet évidemment toutes les transformations homographiques qui laissent invariante la surface du second degré $\Sigma$ et les deux génératrices doubles de l'homographie. Or les transformations du groupe $\Gamma_1$ laissent, comme on a vu, chaque génératrice D invariante; donc le complexe admet le groupe $\Gamma_1$. En outre, la seule transformation infinitésimale de $\Gamma_2$, qui laisse invariantes les génératrices doubles ($\lambda = 0$, $\lambda = \infty$), est la transformation infinitésimale $X_4 f$ qui a pour conjuguée

$$Lf = \lambda \frac{df}{d\lambda}:$$

donc le complexe H considéré admet le groupe défini par les quatre transformations infinitésimales

$$X_1 f, \quad X_2 f, \quad X_3 f, \quad X_4 f.$$

Nous avons vu, d'ailleurs, que ce complexe n'admet pas de groupe d'ordre plus élevé.

Ainsi, pour former le groupe d'un complexe H de première espèce, il suffit de déterminer les transformations homographiques qui laissent invariantes la surface singulière du complexe et les génératrices doubles de l'homographie correspondant au complexe.

Si, dans l'équation (VII) qui contient déjà un paramètre $h$, on effectue la transformation homographique la plus générale, on obtient l'équation du complexe H le plus général. Cette équation contient à la vérité seize paramètres; mais, comme le groupe de l'équation est à quatre paramètres, douze seulement sont essentiels.

*Cas particulier.* — Si

$$k = 1, \qquad \text{d'où} \qquad h = 1,$$

c'est-à-dire, si chaque génératrice est à elle-même son homologue, le complexe (VII) est celui des tangentes de la surface Σ. Ce complexe admet évidemment le groupe à six paramètres G : donc il admet également un groupe à dix paramètres.

Remarquons d'ailleurs que, si l'on effectue dans l'équation (VII) la transformation homographique

$$x = \frac{x' + iy'}{i - z'}, \qquad y = \frac{x' - iy'}{i - z'}, \qquad z = -\frac{i + z'}{i - z'},$$

on obtient un complexe H de même espèce, défini par l'équation (*voir* p. 100)

$$(dz' + x'\,dy' - y'\,dx')^2 + h(dx' + y'\,dz' - z'\,dy')^2 + h(dy' + z'\,dx' - x'\,dz')^2 = 0.$$

La surface singulière du complexe est la sphère

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 + 1 = 0.$$

On retrouve alors ce résultat de M. Klein (1) :

*L'équation*

$$(dz + x\,dy - y\,dx)^2 + (dx + y\,dz - z\,dy)^2 + (dy + z\,dx - x\,dz)^2 = 0$$

*définit le complexe des tangentes à la sphère*

$$x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0.$$

Nous verrons plus loin par quelle transformation ponctuelle cette équation se change en la suivante

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0.$$

9. *Complexes* H *de seconde espèce.*

Théorème. — *Tous les complexes* H *de seconde espèce dérivent, par une transformation homographique, de l'un quelconque d'entre eux, par exemple, du complexe défini par l'équation*

$$\text{(VIII)} \qquad (dz + x\,dy - y\,dx)^2 + 4(dx + y\,dz - z\,dy)\,dx = 0.$$

En effet, considérons un complexe quelconque H de seconde espèce et effectuons encore une transformation homographique qui le change en un complexe ayant pour surface singulière

$$(\Sigma) \qquad xy + z = 0.$$

Soient alors

$$(\mathrm{D}) \qquad y = \lambda, \qquad \lambda x + z = 0$$

les équations des génératrices, qui sont liées par une homographie.

Une seconde transformation homographique, n'altérant ni la surface $\Sigma$, ni l'ensemble des droites D, permet, comme nous avons vu, d'amener le rayon double unique de l'homographie à coïncider avec la génératrice correspondante à $\lambda = \infty$.

L'homographie qui correspond au complexe H transformé est alors défini par une équation de la forme

$$\lambda' - \lambda'' = 2k, \qquad k \neq 0.$$

---

(1) Klein, *Mathematische Annalen*, t. V.

La condition pour que la droite

$$x = az + p, \qquad y = bz + q$$

rencontre deux génératrices homologues est alors exprimée par l'équation

$$(1 + bp - aq)^2 + 4aq - 4k^2q^2 = 0.$$

Cette équation représente le complexe des tangentes aux courbes intégrales de

$$(dz + x\,dy - y\,dx)^2 + 4(y\,dz - z\,dy)\,dx - 4k^2\,dx^2 = 0.$$

Il suffit maintenant de remplacer $y$ et $z$ respectivement par $iky$ et $ikz$ pour obtenir l'équation (VIII) et le théorème est démontré.

Remarquons, d'ailleurs, que la dernière transformation homographique n'altère ni la surface $\Sigma$, ni l'ensemble des droites D, ni la génératrice double de l'homographie. Donc la surface singulière du complexe (VIII) est encore la surface $\Sigma$; la génératrice double unique de l'homographie est la génératrice correspondant à $\lambda = \infty$. Enfin le nombre $k$ qui caractérise l'homographie est égal à $i$.

On verrait, comme précédemment, que, pour former le groupe d'un complexe H de seconde espèce, il suffit de déterminer les transformations homographiques, qui laissent invariantes la surface singulière et, sur cette surface, une génératrice et une seule, à savoir la génératrice double (unique) de l'homographie correspondante au complexe.

Si, dans l'équation (1), on effectue la transformation homographique la plus générale, on obtient l'équation du complexe H de deuxième espèce le plus général. Cette équation contient quinze paramètres; mais, comme le groupe de l'équation est à quatre paramètres, onze seulement sont essentiels [1].

10. De ce qui précède résulte que :

*Toute équation aux dérivées partielles qui admet un groupe à quatre paramètres dérive par une transformation ponctuelle d'une équation pour laquelle les tangentes aux courbes intégrales déterminent un complexe* I (*voir* p. 78), *un complexe* H *ou un complexe* K.

---

[1] Les complexes H se confondent avec les complexes [111(111)] et [111(12)] signalés par M. Weiler (*Math. Ann.*, t. VII, p. 168 et 178).

# CHAPITRE IX.

## SUR LES CARACTÉRISTIQUES DES ÉQUATIONS CANONIQUES. COURBES GAUCHES QUI ADMETTENT UNE TRANSFORMATION HOMOGRAPHIQUE INFINITÉSIMALE.

Les caractéristiques des équations canoniques appartiennent à la famille des courbes gauches, étudiée par MM. Sophus Lie et Klein, qui admettent une transformation homographique infinitésimale ([1]). Je me propose, dans ce Chapitre, de classer ces courbes et d'indiquer ensuite la catégorie à laquelle appartiennent les caractéristiques d'une équation canonique donnée. La méthode que je vais suivre est la généralisation de celle qui a été indiquée par M. Sophus Lie pour la détermination des courbes V planes (*voir* page 66).

1. Soient $x_1$, $x_3$, $x_3$, $x_4$ les coordonnées homogènes d'un point quelconque de l'espace.

Une transformation homographique infinitésimale quelconque est définie par le symbole

$$\mathrm{X}f = \sum_{k=1}^{4} \xi_k \frac{\partial f}{\partial x_k} \qquad \text{avec} \qquad \xi_k = \sum_{i=1}^{4} a_{ki} x_i.$$

Cette transformation infinitésimale (et, par suite, le groupe à un paramètre qu'elle engendre) laisse invariants des points $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ et des plans $(u_1, u_2, u_3, u_4)$ de l'espace. Ces points et ces plans sont définis par les équations ([2])

$$\sum_{i=1}^{4} a_{ki} x_i = \lambda x_k, \qquad k = 1, 2, 3, 4,$$

$$\sum_{k=1}^{4} a_{ki} u_k = \lambda u_i, \qquad i = 1, 2, 3, 4,$$

$$\Phi(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

([1]) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (1870).

([2]) *Transformationsgruppen* (t. I, p. 580, 581, etc.).

Remarquons qu'à une racine $\lambda$ qui n'annule pas les mineurs du troisième degré correspondent un seul point invariant et un seul plan invariant.

Cela posé, à l'égard de ces points et de ces plans invariants, nous allons démontrer les théorèmes suivants :

THÉORÈME I. — *Tout point invariant correspondant à une racine $\lambda$ de l'équation*

$$\Phi(\lambda) = 0 \tag{1}$$

*se trouve dans tout plan invariant correspondant à une racine $\lambda'$ différente de $\lambda$.*

En effet, soient

$$\sum_i a_{ki} x_i = \lambda x_k, \qquad k = 1, 2, 3, 4 \tag{2}$$

les équations qui déterminent les points invariants correspondant à la racine $\lambda$, et soient

$$\sum_k a_{ki} u_k = \lambda' u_i, \qquad i = 1, 2, 3, 4 \tag{3}$$

les équations qui déterminent les plans invariants correspondant à la racine $\lambda'$.

De l'équation (3), on déduit

$$\sum_i \sum_k a_{ki} u_k x_i = \lambda' \sum_i u_i x_i$$

et, par suite,

$$\sum_k u_k \Big(\sum_i a_{ki} x_i\Big) = \lambda' \sum_i u_i x_i$$

ou bien

$$\lambda \sum_k u_k x_k = \lambda' \sum u_i x_i,$$

ou encore

$$(\lambda' - \lambda) \sum_i u_i x_i = 0.$$

Comme $\lambda'$ est différent de $\lambda$, cette égalité exige que

$$\sum_i u_i x_i = 0.$$

Ce qu'il fallait démontrer.

THÉORÈME II. — *Soit* $\lambda$ *une racine de l'équation*

$$\Phi(\lambda) = 0, \tag{1}$$

*qui n'annule pas tous les mineurs du troisième degré. Pour que le point invariant qui correspond à cette racine se trouve dans le plan invariant correspondant à la même racine, il faut et il suffit que la racine* $\lambda$ *soit une racine multiple.*

Il est clair que nous pouvons, sans particulariser la question, supposer le point invariant M au sommet ($x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$) du tétraèdre de référence, c'est-à-dire

$$a_{14} = 0, \qquad a_{24} = 0, \qquad a_{34} = 0, \qquad a_{44} = \lambda.$$

Le plan invariant P correspondant à cette racine est déterminé par les trois équations

$$\left.\begin{cases} (a_{11} - \lambda)u_1 + a_{21}u_2 + a_{31}u_3 + a_{41}u_4 = 0 \\ a_{12}u_1 + (a_{22} - \lambda)u_2 + a_{32}u_3 + a_{42}u_4 = 0 \\ a_{13}u_1 + a_{23}u_2 + (a_{33} - \lambda)u_3 + a_{43}u_4 = 0 \end{cases}\right\} a_{44} = \lambda. \tag{2}$$

Ces équations ne déterminent effectivement qu'un plan invariant, car il résulte de l'hypothèse faite sur $\lambda$ que les déterminants du troisième degré du Tableau des coefficients ne sont pas tous nuls. En outre, si $D_1$, $D_2$, $D_3$, $D_4$ désignent les déterminants du troisième ordre, obtenus en supprimant successivement la première colonne, la deuxième, ..., les coefficients $u_1$, $u_2$, $u_3$, $u_4$ du plan invariant

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0 \tag{P}$$

sont déterminés par les équations

$$u_1 = \rho D_1, \qquad u_2 = -\rho D_2, \qquad u_3 = \rho D_3, \qquad u_4 = -\rho D_4, \qquad \rho \neq 0.$$

Cela posé, pour que le plan (P) passe par le point (M), il faut et il suffit que

$$u_4 = 0$$

ou bien

$$D_4 = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Cette égalité exprime précisément que $\lambda$ est une racine multiple de l'équation (1).

Je vais maintenant démontrer un troisième théorème, qui nous permettra de diminuer considérablement le nombre des cas à distinguer dans la recherche des courbes V de l'espace.

Théorème III. — *Si l'équation en $\lambda$ admet une racine qui annule tous les mineurs du troisième degré, chacune des courbes qui admettent la transformation infinitésimale $Xf$ est une courbe plane.*

En effet, les courbes qui admettent la transformation infinitésimale $Xf$ sont déterminées par les équations différentielles

$$(1) \qquad \frac{dx_i}{dt} = \xi_i, \qquad i = 1, 2, 3, 4.$$

Supposons qu'une racine $\lambda$ de l'équation en $\lambda$ annule tous les mineurs du troisième degré, et cherchons une intégrale particulière du système (1) ayant la forme

$$x_i = A_i e^{\lambda t}, \qquad i = 1, 2, 3, 4;$$

les constantes $A_i$ sont données par les équations

$$\begin{aligned}
(a_{11} - \lambda) A_1 + a_{12} A_2 + a_{13} A_3 + a_{14} A_4 &= 0,\\
a_{21} A_1 + (a_{22} - \lambda) A_2 + a_{23} A_3 + a_{24} A_4 &= 0,\\
a_{31} A_1 + a_{32} A_2 + (a_{33} - \lambda) A_3 + a_{34} A_4 &= 0,\\
a_{41} A_1 + a_{42} A_2 + a_{43} A_3 + (a_{44} - \lambda) A_4 &= 0,
\end{aligned}$$

Eu égard à l'hypothèse faite sur $\lambda$, ces équations admettent certainement deux solutions distinctes

$$A_i = \alpha_i, \qquad A_i = \beta_i, \qquad i = 1, 2, 3, 4.$$

Si donc on désigne par $a$, $b$, $c$, $d$ quatre constantes arbitraires, l'intégrale générale du système (1) a la forme

$$x_i = (a\alpha_i + b\beta_i) e^{\lambda t} + c_i \varphi(t) + d_i \psi(t),$$

où $c_i$ et $d_i$ désignent des fonctions linéaires de $c$ et $d$.

Considérons une courbe intégrale correspondant à des valeurs déterminées de $a$, $b$, $c$, $d$, il est clair que cette courbe est située dans le plan

$$\begin{vmatrix} a\alpha_1+b\beta_1 & c_1 & d_1 & x_1 \\ a\alpha_2+b\beta_2 & c_2 & d_2 & x_2 \\ a\alpha_3+b\beta_3 & c_3 & d_3 & x_3 \\ a\alpha_4+b\beta_4 & c_4 & d_4 & x_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Ce qu'il fallait démontrer.

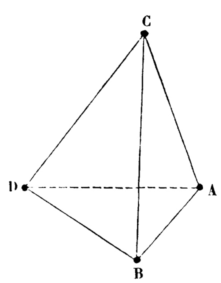
Les courbes V planes ayant déjà été déterminées, nous pourrons, dans la suite, supposer que l'équation en $\lambda$ *n'admet pas de racine annulant les mineurs du troisième degré.* Nous commencerons par démontrer que toutes les transformations $Xf$, satisfaisant à cette condition, sont semblables homographiquement à cinq d'entre elles.

2. Soit $Xf$ une transformation homographique infinitésimale et supposons que l'équation $\lambda$ n'admette pas de racine annulant les mineurs du troisième degré. Je vais étudier successivement les cinq cas suivants :

*Premier cas.* — L'équation en $\lambda$ a quatre racines simples : $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$, $\lambda_4$.

Les théorèmes I et II montrent que les quatre points et plans invariants

Fig. 7.




forment un tétraèdre ABCD (*fig.* 7). La transformation $Xf$ est alors homographiquement semblable à

$$\lambda_1 x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda_2 x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \lambda_3 x_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} + \lambda_4 x_4 \frac{\partial f}{\partial x_4},$$

qui laisse invariant le tétraèdre de référence. Cette transformation est d'ailleurs équivalente à

$$(\lambda_1-\lambda_4)x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + (\lambda_2-\lambda_4)x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + (\lambda_3-\lambda_4)x_3 \frac{\partial f}{\partial x_3}$$

et, par suite, à

$$X_1 f = x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + m x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + p x_3 \frac{\partial f}{\partial x_3}, \qquad m \neq p \neq 1, \qquad mp \neq 0.$$

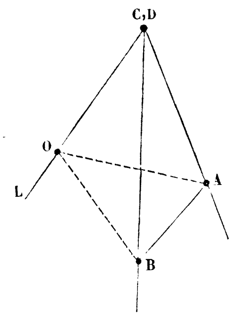
(Les droites invariantes, qui correspondent à $Xf$, sont les arêtes du tétraèdre.)

*Deuxième cas.* — L'équation en $\lambda$ a deux racines simples, $\lambda_1$ et $\lambda_2$, et une racine double, $\lambda_3$.

Les mêmes théorèmes I et II montrent que :

1° A la racine double correspond un point invariant (C, D), et un plan invariant P passant par (C, D) [*fig.* 8 [1]].

Fig. 8.




2° Aux racines simples $\lambda_1$ et $\lambda_2$ correspondent respectivement des points invariants A, B situés dans P, et des plans invariants BCL, ACL, formant avec le plan P un véritable trièdre.

On peut dire que la figure formée par les points et plans invariants est un tétraèdre ayant deux faces confondues.

Soit O un point quelconque de CL. En effectuant une transformation homographique convenable, on peut faire coïncider le tétraèdre de référence avec OABC. Soient

$$(\text{OBC}) \quad x_1 = 0, \qquad (\text{OAC}) \quad x_2 = 0, \qquad (\text{OAB}) \quad x_3 = 0, \qquad (\text{ABC}) \quad x_4 = 0$$

les équations des faces. La transformation infinitésimale $Xf$ prend la forme

$$X'f = \lambda_1 x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda_2 x_2 \frac{\partial f}{\partial x^2} + (\lambda_3 x_3 + \mu x_4) \frac{\partial f}{\partial x_3} + \lambda_3 x_4 \frac{\partial f}{\partial x_4}.$$

---

(1) Dans cette figure et les suivantes, les droites dessinées en traits pleins sont les droites invariantes.

Comme, par hypothèse, la racine $\lambda_3$ n'annule pas les mineurs du troisième degré, on doit supposer

$$\mu \neq 0.$$

$Xf$ est semblable, homographiquement, à la transformation $X'f$, ou à la transformation équivalente

$$X''f = (\lambda_1 - \lambda_3) x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + (\lambda_2 - \lambda_3) x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \mu x_4 \frac{\partial f}{\partial x_3}.$$

Cette dernière est semblable à la transformation

$$(2) \qquad X_2 f = x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + m x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + x_4 \frac{\partial f}{\partial x_3};$$

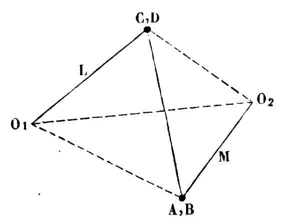
il suffit, pour le voir, de remplacer dans $X'f$ la variable $x_4$ par $\frac{(\lambda_1 - \lambda_3) x_4}{\mu}$, ce qui revient à déplacer le point O sur la droite CL.

(Les droites qui admettent la transformation infinitésimale $Xf$ sont ici les arêtes du trièdre C et la droite AB.)

*Troisième cas.* — L'équation en $\lambda$ a deux racines doubles, $\lambda_1$ et $\lambda_2$.

A ces racines correspondent respectivement deux points invariants (A, B) et (C, D), et deux plans invariants passant par AC (*fig.* 9).

Fig. 9.




Soit $O_1$ un point quelconque du plan correspondant à $\lambda_1$, et soit, de même, $O_2$ un point situé dans le plan correspondant à $\lambda_2$. Par une transformation homographique convenable, on peut faire coïncider le tétraèdre de référence avec le tétraèdre $O_1 O_2 AC$. Soient

$$(O_1AC) \quad x_1 = 0, \qquad (O_1O_2C) \quad x_2 = 0, \qquad (O_1O_2A) \quad x_3 = 0, \qquad (ACO_2) \quad x_4 = 0$$

les équations des faces. La transformation $Xf$ prend alors la forme

$$X'f = \lambda_1 x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + (a x_1 + \lambda_1 x_2 + b x_4) \frac{\partial f}{\partial x_2} + (a' x_1 + \lambda_2 x_3 + b' x_4) \frac{\partial f}{\partial x_3} + \lambda_2 x_4 \frac{\partial f}{\partial x_4}$$

et, en outre,

$$ab' \neq 0;$$

car, par hypothèse, l'équation en $\lambda$ n'admet pas de racine annulant les mineurs du troisième degré.

Remarquons que la transformation réduite

$$Af = (\lambda_1 x_2 + b x_4)\frac{\partial f}{\partial x_2} + (\lambda_2 x_3 + b' x_4)\frac{\partial f}{\partial x_3} + \lambda_2 x_4 \frac{\partial f}{\partial x_4}$$

indique l'effet produit par la transformation $Xf$ sur les points du plan $x_1 = 0$. Or on voit immédiatement que les éléments (points et droites) invariants, qui correspondent à $Af$, sont : un point simple A, un point double (C, D), une droite double (AC, AD), une droite simple passant par le point C. Cette dernière est représentée par

$$\text{(L)} \qquad x_1 = 0, \qquad (\lambda_1 - \lambda_2)x_2 + b x_4 = 0.$$

De même, la transformation $X'f$ laisse invariante, dans le plan $x_4 = 0$, une droite M passant par A et représentée par

$$x_4 = 0, \qquad (\lambda_2 - \lambda_1)x_3 + a' x_1 = 0.$$

En particulier, si l'on a choisi les points $O_1$ et $O_2$ sur les droites invariantes L et M, la transformation $X'f$ a la forme plus simple

$$\lambda_1 x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + (a x_1 + \lambda_1 x_2)\frac{\partial f}{\partial x_2} + (\lambda_2 x_3 + b' x_4)\frac{\partial f}{\partial x_3} + \lambda_2 x_4 \frac{\partial f}{\partial x_4},$$

ou la forme équivalente

$$X''f = (\lambda_1 - \lambda_2)x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + [a x_1 + (\lambda_1 - \lambda_2)x_2]\frac{\partial f}{\partial x_2} + b' x_4 \frac{\partial f}{\partial x_3}.$$

Si maintenant on remplace $x_1$, $x_4$ respectivement par

$$\frac{(\lambda_1 - \lambda_2)x_1}{a}, \qquad \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)x_4}{b'},$$

la transformation $X''f$ devient

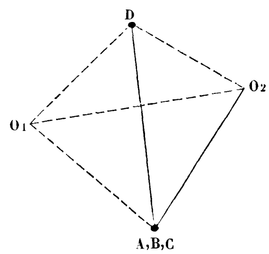
$$\text{(3)} \qquad X_3 f = x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + (x_1 + x_2)\frac{\partial f}{\partial x_2} + x_4 \frac{\partial f}{\partial x_3}.$$

Donc, dans ce cas, la transformation $Xf$ est semblable, homographiquement, à $X_3 f$. (Les droites invariantes, qui correspondent à $Xf$, sont au nombre de trois.)

*Quatrième cas.* — L'équation en $\lambda$ a une racine simple $\lambda_1$, et une racine triple $\lambda_2$. A la racine triple correspond un point invariant (A, B, C) et un plan invariant passant par ce point (théorème II). A la racine $\lambda_1$ correspond un point invariant D situé dans le plan précédent, et un plan invariant passant par A, mais non par D (*voir* théorèmes I et II).

Soient $O_1O_2A$ et $ADO_2$ les deux plans invariants (*fig.* 10). Par une

Fig. 10.




transformation homographique, on peut faire coïncider le tétraèdre de référence avec le tétraèdre $AO_1O_2D$. Soient

$$(O_1O_2A) \quad x_3 = 0, \qquad (ADO_2) \quad x_4 = 0,$$
$$(AO_1D) \quad x_1 = 0, \qquad (O_1O_2D) \quad x_2 = 0$$

les équations des faces. La transformation $Xf$ prend la forme

$$X'f = (\lambda_2 x_1 + a_{14} x_4)\frac{\partial f}{\partial x_1} + (a_{21} x_1 + \lambda_2 x_2 + a_{24} x_4)\frac{\partial f}{\partial x_2} + \lambda_1 x_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} + \lambda_2 x_4 \frac{\partial f}{\partial x_4}$$

et, en outre,

$$a_{21} a_{14} \neq 0;$$

car, par hypothèse, l'équation en $\lambda$ n'admet pas de racine annulant tous les mineurs du troisième degré.

Si l'on remplace $x_1$ par $x_1 + \alpha x_4$ (ce changement de variables équivaut à une rotation du plan $O_1AD$ autour de AD), $\alpha$ étant une constante convenablement choisie, la transformation précédente prend la forme

$$(\lambda_2 x_1 + a_{14} x_4)\frac{\partial f}{\partial x_1} + (a_{21} x_1 + \lambda_2 x_2)\frac{\partial f}{\partial x_2} + \lambda_1 x_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} + \lambda_2 x_4 \frac{\partial f}{\partial x_4}.$$

ou la forme équivalente

$$X''f = a_{14}x_4\frac{\partial f}{\partial x_1} + a_{21}x_1\frac{\partial f}{\partial x_2} + (\lambda_1 - \lambda_2)x_3\frac{\partial f}{\partial x_3}.$$

Les trois coefficients $a_{14}$, $a_{21}$, $\lambda_1 - \lambda_2$ étant différents de zéro, on peut déterminer $\alpha$, $\beta$, de manière que la transformation $X''f$ devienne

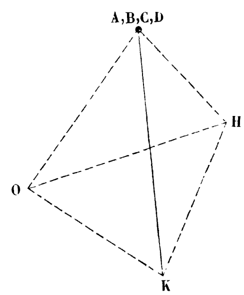
$$(4) \qquad X_4 f = x_4\frac{\partial f}{\partial x_1} + x_1\frac{\partial f}{\partial x_2} + x_3\frac{\partial f}{\partial x_3},$$

quand on remplace $x_1$ et $x_4$ respectivement par $\alpha x_1$ et $\beta x_4$.

Donc, dans ce cas, la transformation $Xf$ est réductible à la forme (4) (par une substitution homographique). Les droites qui admettent la transformation infinitésimale $Xf$ se réduisent ici à deux.

Cinquième cas. — *L'équation en $\lambda$ a une racine quadruple $\lambda_1$.* — A cette racine correspond (théorème II) un point invariant (A, B, C, D) et un plan P invariant passant par ce point (*fig.* 4). On sait d'ailleurs que,

Fig. 11.




parmi les droites du plan P qui passent par A, il en existe certainement une AK qui admet la transformation infinitésimale $Xf$ (¹). Cela posé, effectuons une transformation homographique qui fasse coïncider le plan

$$x_4 = 0,$$

avec le plan invariant P, le point

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = 0, \qquad x_4 = 0$$

(¹) Cela résulte immédiatement de ce qu'un groupe homographique, à une variable $x$, laisse invariant un point (au moins) de l'axe des $x$.

avec le point invariant A, et la droite

$$x_1 = 0, \qquad x_4 = 0$$

avec la droite AK. Alors la transformation $Xf$ prend la forme

$$(\lambda_1 x_1 + a_{14} x_4)\frac{\partial f}{\partial x_1} + (a_{21} x_1 + \lambda_1 x_1 + a_{24} x_4)\frac{\partial f}{\partial x_2}$$
$$+ (a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + \lambda_1 x_3 + a_{34} x_4)\frac{\partial f}{\partial x_3} + \lambda_1 x_4 \frac{\partial f}{\partial x_4}$$

ou la forme équivalente

$$X'f = a_{14} x_4 \frac{\partial f}{\partial x_1} + (a_{21} x_1 + a_{24} x_4)\frac{\partial f}{\partial x_2} + (a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{34} x_4)\frac{\partial f}{\partial x_3}.$$

En outre, pour une raison déjà donnée, on doit avoir

$$a_{14}\, a_{21}\, a_{32} \neq 0.$$

Je vais démontrer que la transformation $X'f$ est semblable, homographiquement à celle que l'on obtient, en supposant les trois coefficients $a_{14}$, $a_{21}$, $a_{32}$ égaux à l'unité et les autres nuls. A cet effet, remplaçons dans $X'f$ la variable $x_3$ par $x_3 + \alpha x_1 + \beta x_2$. En choisissant $\alpha$ et $\beta$ convenablement, on arrive à mettre la transformation sous la forme

$$a_{14} x_4 \frac{\partial f}{\partial x_1} + (a_{21} x_1 + a_{24} x_4)\frac{\partial f}{\partial x_2} + a_{32} x_2 \frac{\partial f}{\partial x_3}.$$

Effectuons un nouveau changement de variables homographique ; remplaçons $x_1$ par $x_1 + \rho x_4$, où $\rho$ est donné par

$$a_{21}\rho + a_{24} = 0.$$

La transformation infinitésimale précédente devient

$$a_{14} x_4 \frac{\partial f}{\partial x_1} + a_{21} x_1 \frac{\partial f}{\partial x_2} + a_{32} x_2 \frac{\partial f}{\partial x_3}.$$

Enfin remplaçons $x_1$, $x_2$, $x_4$ respectivement par $\alpha x_1$, $\beta x_2$, $\gamma x_4$ ; en choisissant $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ convenablement, on parvient à la transformation suivante

$$X_5 f = x_4 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial f}{\partial x_2} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_3}. \tag{5}$$

Ainsi la transformation considérée $Xf$ est, dans le cas actuel, semblable à la transformation $X_5 f$. (La transformation $Xf$ laisse invariante une droite et une seule.)

En résumé, une transformation homographique infinitésimale (de l'espace à trois dimensions), pour laquelle l'équation en $\lambda$ n'admet pas de racine annulant les mineurs du troisième degré, est semblable homographiquement à l'une des cinq suivantes :

$$\left|\begin{array}{ll}
(1) & X_1 f = x_1 \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + m x_2 \dfrac{\partial f}{\partial x_2} + p x_3 \dfrac{\partial f}{\partial x_3}, \\
(2) & X_2 f = x_1 \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + m x_2 \dfrac{\partial f}{\partial x_2} + x_4 \dfrac{\partial f}{\partial x_3}, \\
(3) & X_3 f = x_1 \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + (x_1 + x_2) \dfrac{\partial f}{\partial x_2} + x_4 \dfrac{\partial f}{\partial x_3}, \\
(4) & X_4 f = x_4 \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + x_1 \dfrac{\partial f}{\partial x_2} + x_3 \dfrac{\partial f}{\partial x_3}, \\
(5) & X_5 f = x_4 \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + x_1 \dfrac{\partial f}{\partial x_2} + x_2 \dfrac{\partial f}{\partial x_3},
\end{array}\right.$$

qui s'écrivent en coordonnées non homogènes de la manière suivante :

$$\left|\begin{array}{lll}
(1) & X_1 f = x \dfrac{\partial f}{\partial x} + m y \dfrac{\partial f}{\partial y} + p z \dfrac{\partial f}{\partial z} & m \neq p \neq 1, \quad mp \neq 0, \\
(2) & X_2 f = x \dfrac{\partial f}{\partial x} + m y \dfrac{\partial f}{\partial y} + p z \dfrac{\partial f}{\partial z} & m \neq 0,\ 1, \\
(3) & X_3 f = x \dfrac{\partial f}{\partial x} + (x + y) \dfrac{\partial f}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial z}, & \\
(4) & X_4 f = \dfrac{\partial f}{\partial x} + x \dfrac{\partial f}{\partial y} + z \dfrac{\partial f}{\partial z}, & \\
(5) & X_5 f = \dfrac{\partial f}{\partial x} + x \dfrac{\partial f}{\partial y} + y \dfrac{\partial f}{\partial z}. &
\end{array}\right.$$

3. *Courbes gauches qui admettent une transformation infinitésimale homographique.* — D'après ce qui précède, nous pouvons affirmer que toute courbe gauche, admettant une transformation homographique infinitésimale, est une transformée homographique d'une courbe admettant l'une des cinq transformations infinitésimales *canoniques*.

1° Cherchons d'abord les courbes qui admettent la transformation infinitésimale $X_1 f$, ces courbes intégrales de

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{my} = \frac{dz}{pz},$$

c'est-à-dire les suivantes

$$y = \mathrm{A}x^m, \qquad z = \mathrm{B}x^p.$$

Donc :

*Toute courbe gauche admettant une transformation infinitésimale homographique de la première classe est une transformée homographique de la courbe gauche*

$$y = x^m, \qquad z = x^p \qquad m \neq p \neq 1, \qquad mp \neq 0.$$

2° *De même, toute courbe gauche admettant une transformation infinitésimale homographique de la deuxième classe est une transformée homographique de la courbe gauche*

$$y = x^m, \qquad z = \mathfrak{L}x, \qquad m \neq 0 \quad \text{et} \quad 1.$$

3° *Toute courbe admettant une transformation infinitésimale de la troisième classe est une transformée homographique de la courbe gauche*

$$y = x\mathfrak{L}x, \qquad z = \mathfrak{L}x$$

*ou*

$$y = xz, \qquad x = e^z.$$

4° *Toute courbe admettant une transformation infinitésimale homographique de la quatrième classe est une transformée homographique de la courbe gauche*

$$y = \tfrac{1}{2}x^2, \qquad z = e^x.$$

5° *Enfin la famille des courbes, qui admettent une transformation homographique infinitésimale de la cinquième classe, est formée par les transformées homographiques de la cubique gauche*

$$y = \tfrac{1}{2}x^2, \qquad z = \tfrac{1}{6}x^3.$$

Nous allons voir que cette famille est celle de toutes les cubiques gauches de l'espace.

Ainsi les courbes gauches qui admettent une transformatioa homographique infinitésimale, courbes que MM. Sophus Lie et Klein ont appelées *courbes* V, peuvent être partagées en cinq catégories essentiellement distinctes. Je me propose d'examiner maintenant combien chacune de ces courbes admet de transformations homographiques infinitésimales. Auparavant, je ferai quelques remarques au sujet des courbes V de la première classe.

4. *Remarques relatives aux courbes* V *de la première classe.* — Ces courbes sont les transformées homographiques des courbes, en nombre doublement infini, représentées par les équations

$$(1)\qquad y = x^m, \qquad z = x^p \qquad m \neq p \neq 1, \qquad m \neq p \neq 0.$$

Nous représenterons par le symbole $(\alpha, \beta)$ la famille des courbes qui correspondent aux valeurs

$$m = \alpha, \qquad p = \beta$$

des exposants $m$ et $p$. L'identité de deux familles $(\alpha, \beta)$ et $(\alpha', \beta')$ sera exprimée par l'égalité

$$(\alpha, \beta) = (\alpha', \beta').$$

Si l'on effectue, dans les équations (1), successivement les transformations homographiques suivantes :

$$\begin{aligned} x' &= x, & y' &= z, & z' &= y, \\ x' &= y, & y' &= x, & z' &= z, \\ x' &= \frac{1}{x}, & y' &= \frac{y}{x}, & z' &= \frac{z}{x}, \end{aligned}$$

on aperçoit que

$$(2)\qquad (m, p) = (p, m) = \left(\frac{1}{m}, \frac{p}{m}\right) = (1 - m, 1 - p).$$

Cela posé, cherchons les familles $(m, p)$ composées de courbes tracées sur des surfaces du second degré (non décomposables).

Soit

$$\begin{aligned} f(x, y, z) = {} & \mathrm{A}x^2 + \mathrm{A}'y^2 + \mathrm{A}''z^2 \\ & + 2\mathrm{B}yz + 2\mathrm{B}'zx + 2\mathrm{B}''xy + 2\mathrm{C}x + 2\mathrm{C}'y + 2\mathrm{C}''z + \mathrm{D} = 0 \end{aligned}$$

l'équation d'une surface du second degré passant par la courbe

$$(1)\qquad y = x^m, \qquad z = x^p, \qquad m \neq p \neq 1, \quad m \neq p \neq 0.$$

Alors on a l'identité

$$\begin{aligned} &A x^2 + A' x^{2m} + A'' x^{2p} \\ &\quad + 2 B x^{m+p} + 2 B' x^{p+1} + 2 B'' x^{m+1} + 2 C x + 2 C' x^m + 2 C'' x^p + D = 0, \end{aligned}$$

qui exige que deux des dix exposants

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad p, \quad m, \quad p+1, \quad m+1, \quad m+p, \quad 2p, \quad 2m$$

soient égaux, c'est-à-dire que l'on ait (au moins) une des égalités

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{llllll} m=-1, & m=2, & m=\frac{1}{2}, & m+1=2p, & m+p=2, & m=2p, \\ p=-1, & p=2, & p=\frac{1}{2}, & p+1=2m, & m+p=0, & p=2m, \end{array} \right.$$

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{ll} m+p=1, & p=m+1, \\ & m=p+1. \end{array} \right.$$

Donc, si une famille $(m, p)$ est composée de courbes tracées sur des surfaces du second degré, on peut affirmer que l'une des égalités précédentes a lieu. Remarquons maintenant qu'en vertu des relations (2), toute famille $(m, p)$ pour laquelle une des égalités (3) a lieu est identique à une famille $(m', p')$ pour laquelle

$$m' = 2.$$

De même, toute famille $(m, p)$ pour laquelle une des égalités (4) a lieu est identique à une famille $(m', p')$ pour laquelle

$$p' = m' + 1.$$

Ainsi chacune des familles cherchées peut être représentée par un des deux symboles

$$F_1 = (2, p), \qquad F_2 = (m, m+1).$$

La réciproque est évidente : une courbe d'une famille $F_1$ est tracée sur une surface conique (ou cylindrique); une courbe d'une surface $F_2$ est tracée sur une surface du second degré de la classe *générale*.

On peut se demander quelles valeurs il faut donner à $p$ et $m$ pour que chacune des courbes considérées soit tracée sur deux (et par suite sur une infinité) surfaces du second degré.

Considérons d'abord les courbes d'une famille $(2, p)$. Soit

$$(5) \qquad f(x, y, z) = A x^2 + A' y^2 + \ldots + D = 0$$

l'équation d'une surface du second degré passant par la courbe

(6) $$y = x^2, \qquad z = x^p, \qquad\qquad p \neq 0,\ 1,\ 2.$$

Les coefficients de $f(x, y, z)$ sont déterminés par l'identité

$$Ax^2 + A'x^4 + A''x^{2p} + 2Bx^{p+2} + 2B'x^{p+1} + 2B''x^3 + 2Cx + 2C'x^2 + 2C''x^p + D = 0.$$

Si les nombres

$$0,\quad 1,\quad 2,\quad 3,\quad 4,\quad p,\quad p+1,\quad p+2,\quad 2p$$

sont tous distincts, c'est-à-dire si aucune des égalités

(7) $$p = -2, \qquad p = -1, \qquad p = \tfrac{1}{2}, \qquad p = \tfrac{3}{2}, \qquad p = 3, \qquad p = 4$$

n'a lieu, forcément il n'y a qu'une surface du second degré passant par la courbe considérée, à savoir

$$y = x^2.$$

Si au contraire une des égalités (7) a lieu, la famille $(2, p)$ est identique, en vertu des relations (2), à l'une des deux familles

$$\varphi_1 = (2, 3), \qquad \varphi_2 = (2, 4).$$

Dans le premier cas, la famille se compose de cubiques gauches; elle contient même, comme nous le verrons, toutes les cubiques gauches. Dans le second cas, la famille se compose des transformées homographiques de la biquadratique à point de rebroussement

$$y = x^2, \qquad z = x^4 \qquad \text{ou} \qquad y = x^2, \qquad y^2 = z$$

et contient, comme nous le verrons aussi, toutes les biquadratiques à point de rebroussement.

Considérons maintenant les courbes de la famille $(m, m+1)$. Soit encore

$$f(x, y, z) = 0$$

l'équation d'une surface du second degré passant par la courbe

(8) $$y = x^m, \qquad z = x^{m+1}, \qquad\qquad m \neq -1,\ 0,\ 1.$$

Les coefficients de $f(x, y, z)$ sont déterminés par l'identité

$$\begin{aligned} 0 = {} & Ax^2 + A'x^{2m} + A''x^{2m+2} \\ & + 2Bx^{2m+1} + 2B'x^{m+2} + 2B''x^{m+1} + 2Cx + 2C'x^m + 2C''x^{m+1} + D \end{aligned}$$

Si les nombres

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad m, \quad m+1, \quad m+2, \quad 2m, \quad 2m+1, \quad 2m+2$$

sont tous distincts, c'est-à-dire si aucune des égalités

$$(9) \qquad m=-2, \qquad m=-\tfrac{1}{2}, \qquad m=\tfrac{1}{2}, \qquad m=2$$

n'a lieu, il n'y a qu'une surface du second ordre passant par la courbe considérée, à savoir

$$z=xy.$$

Si, au contraire, une des égalités (9) a lieu, la famille $(m, m+1)$ est identique, en vertu des relations (2), à la famille (2, 3), c'est-à-dire la famille des cubiques gauches.

En résumé, les familles $(m, p)$ qui se composent de courbes tracées sur des surfaces du second degré se partagent en quatre catégories :

*La première comprend les cubiques gauches.*

*La seconde comprend les biquadratiques à point de rebroussement.*

*La troisième comprend les familles* $(2, p)$ *qui se composent de courbes, dont chacune est tracée sur une surface du second degré et une seule, la surface étant conique.*

*La quatrième comprend les familles* $(m, m+1)$ *dont chaque membre est tracé sur une surface du second degré et une seule, la surface appartenant à la classe générale.*

Enfin remarquons que les courbes de la première et de la quatrième catégorie constituent la famille des transformées homographiques des loxodromies de l'espace. En effet, les courbes des deux catégories considérées peuvent être obtenues en appliquant toutes les transformations homographiques aux courbes suivantes

$$y=\mathrm{A}x^m, \qquad z=\mathrm{A}x^{m+1}, \qquad\qquad m \neq 0, 1, -1,$$

c'est-à-dire aux courbes définies par

$$(1) \qquad \left\{\begin{aligned} &z=xy, \\ &\frac{m-1}{m+1}\,dz=x\,dy-y\,dx. \end{aligned}\right.$$

Or, par la substitution homographique

$$x = \frac{x' + iy'}{1 - z'}, \qquad y = \frac{x' - iy'}{1 - z'}, \qquad z = \frac{1 + z'}{1 - z'},$$

le système (1) se transforme dans le suivant

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} & x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1, \\ & i \frac{m-1}{m+1} dz = x' dy' - y' dx', \end{aligned} \right\} \qquad (\mathrm{S})$$

qui représente les loxodromies de la sphère S correspondant aux méridiens passant par l'axe des $z'$. Les courbes de la première et de la quatrième catégorie sont donc les transformées homographiques des loxodromies (2). Il résulte évidemment de là que ces courbes constituent la famille des transformées homographiques de toutes les loxodromies de l'espace.

5. *Nombre des transformations infinitésimales qui laissent invariante une courbe* V. — Considérons d'abord les courbes V de la première classe. Pour déterminer le nombre des transformations infinitésimales qu'admet une de ces courbes, il suffit évidemment de chercher combien la courbe

$$(1) \qquad y = x^m, \qquad z = x^p, \qquad m \neq p \neq 1, \quad mp \neq 0$$

admet de ces transformations. Soit

$$\mathrm{X}f = \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta \frac{\partial f}{\partial z}$$

une transformation homographique infinitésimale laissant invariante la courbe (1). Les polynômes $\xi$, $\eta$, $\zeta$ s'obtiennent en écrivant que les relations

$$\eta = m x^{m-1} \xi, \qquad \zeta = p x^{p-1} \xi$$

sont vérifiées en chaque point de la courbe (1). Donc les coefficients de $\xi$, $\eta$, $\zeta$ sont définis par les identités suivantes :

$$b_0 + b_1 x + b_2 x^m + b_3 x^p = m x^{m-1}(a_0 + a_1 x + a_2 x^m + a_3 x^p) + (m-1) x^m (\lambda x + \mu x^m + \nu x^p),$$
$$c_0 + c_1 x + c_2 x^m + c_3 x^p = p x^{p-1}(a_0 + a_1 x + a_2 x^m + a_3 x^p) + (p-1) x^p (\lambda x + \mu x^m + \nu x^p),$$

qui peuvent prendre la forme

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} & b_0 + b_1 x + (b_2 - m a_1) x^m + b_3 x^p \\ & \quad = m x^{m-1}(a_0 + a_2 x^m + a_3 x^p) + (m-1) x^m (\lambda x + \mu x^m + \nu x^p), \\ & c_0 + c_1 x + c_2 x^m + (c_3 - p a_1) x^p \\ & \quad = p x^{p-1}(a_0 + a_2 x^m + a_3 x^p) + (p-1) x^p (\lambda x + \mu x^m + \nu x^p). \end{aligned}\right.$$

Nous sommes alors conduits à distinguer plusieurs cas.

*Premier cas.* — La courbe (1) n'est pas située sur une surface du second degré. Dans ce cas (*voir* n° 4), si l'on considère les termes de l'une quelconque des identités (2), on aperçoit que les exposants de $x$ dans ces termes sont tous distincts. Par suite,

$$b_2 = m a_1, \qquad c_3 = p a_1;$$

quant aux autres coefficients de $\xi$, $\eta$, $\zeta$, ils sont tous nuls, sauf $a_1$. Donc la courbe (1) n'admet alors qu'une transformation infinitésimale (homographique), à savoir

$$X_1 f = x \frac{\partial f}{\partial x} + m y \frac{\partial f}{\partial y} + p z \frac{\partial f}{\partial z}.$$

*Deuxième cas.* — La courbe (1) est une cubique gauche.

La courbe est alors (*voir* n° 4) une transformée homographique de la courbe

$$(3)\qquad y = \frac{x^2}{2}, \qquad z = \frac{x^3}{6}.$$

Un calcul analogue au précédent montre que la cubique (3) admet trois transformations homographiques infinitésimales, à savoir

$$\begin{aligned} X_1 f &= \frac{\partial f}{\partial x} + x \frac{\partial f}{\partial y} + y \frac{\partial f}{\partial z}, \\ X_2 f &= x \frac{\partial f}{\partial x} + 2y \frac{\partial f}{\partial y} + 3z \frac{\partial f}{\partial z}, \\ X_3 f &= 3x\left(x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z}\right) - 4y \frac{\partial f}{\partial x} - 3z \frac{\partial f}{\partial y}. \end{aligned}$$

En appliquant à cette cubique les $\infty^{15}$ transformations homographiques de l'espace, on obtient donc une famille de cubiques dépendant de douze paramètres essentiels, c'est-à-dire la famille totale des cubiques gauches de l'espace. Nous parvenons donc à ce résultat déjà annoncé.

L'ensemble des transformées homographiques de la cubique gauche

$$y = \frac{x^2}{2}, \qquad z = \frac{x^3}{6}$$

se compose de toutes les cubiques gauches de l'espace.

*Troisième cas.* — La courbe (1) est une biquadratique à point de rebroussement. Nous avons vu qu'elle est alors une transformée homographique de

$$(4) \qquad y = x^2, \qquad z = x^4.$$

En répétant sur ces équations les calculs et raisonnements qui précèdent, on voit d'abord que la courbe (4) n'admet qu'une transformation homographique infinitésimale, ensuite que l'ensemble des transformées homographiques de (4) se compose de toutes les biquadratiques à point de rebroussement.

*Quatrième cas.* — La courbe (1) est tracée sur une surface de second degré S et une seule.

La courbe est alors (*voir* n° 4) une transformée homographique de

$$(5) \qquad y = x^2, \qquad z = x^p, \qquad \begin{cases} p \neq 0, 1, 2, \\ p \neq -2, -1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 3, 4, \end{cases}$$

ou de

$$(6) \qquad y = x^m, \qquad z = xy, \qquad \begin{cases} m \neq -1, 0, 1, \\ m \neq -2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2. \end{cases}$$

Remarquons d'ailleurs que, si une transformation homographique laisse invariante la courbe considérée, elle laisse également invariante la surface S. En effet, si elle transformait S en une autre surface S′, la courbe en question serait l'intersection de deux surfaces du second degré, ce qui est contraire à l'hypothèse.

En ayant égard à cette remarque et aux inégalités (5) et (6), on trouve facilement que la courbe (1) n'admet qu'une transformation homographique infinitésimale.

Passons aux courbes V de la seconde classe, c'est-à-dire aux transformées homographiques de la courbe

$$(1) \qquad y = x^m, \qquad z = \mathcal{L}x, \qquad m \neq 0, 1.$$

Soit $Xf$ une transformation infinitésimale (homographique), qui laisse invariante cette courbe. Les relations

$$\eta = m x^{m-1}\xi, \qquad x\zeta = \xi$$

doivent être vérifiées en chaque point de la courbe (1) : donc on doit avoir les deux identités en $x$

$$(2) \quad \begin{cases} b_0 + b_1 x + b_2 x^m + b_3 \mathcal{L} x \\ \quad = m x^{m-1}(a_0 + a_1 x + a_2 x^m + a_3 \mathcal{L} x) + (m-1)(\lambda x + \mu x^m + \nu \mathcal{L} x) x^m, \end{cases}$$

$$(3) \quad \begin{cases} x(c_0 + c_1 x + c_2 x^m + c_3 \mathcal{L} x) \\ \quad = a_0 + a_1 x + a_2 x^m + a_3 \mathcal{L} x + (x - x \mathcal{L} x)(\lambda x + \mu x^m + \nu \mathcal{L} x). \end{cases}$$

En égalant les coefficients de $\mathcal{L} x$, dans les deux membres de l'identité (5), on trouve

$$b_3 = m a_3 x^{m-1} + (m-1)\nu x^m,$$

d'où

$$(\alpha) \qquad b_3 = 0, \qquad a_3 = 0, \qquad \nu = 0,$$

car, par hypothèse,

$$m \neq 0, \qquad m \neq 1.$$

L'identité (3) donne de même

$$c_3 x = -\lambda x^2 - \mu x^{m+1}$$

ou

$$c_3 + \lambda x + \mu x^m = 0,$$

ce qui exige que

$$(\beta) \qquad c_3 = \lambda = \mu = 0.$$

Les identités (2) et (3) deviennent alors

$$b_0 + b_1 x + b_2 x^m = m x^{m-1}(a_0 + a_1 x + a_2 x^m),$$
$$x(c_0 + c_1 x + c_2 x^m) = a_0 + a_1 x + a_2 x^m.$$

De là on déduit, eu égard aux hypothèses faites sur $m$,

$$b_2 = m a_1, \qquad c_0 = a_1, \qquad c_2 = 0$$

et, par suite,

$$b_0 + b_1 x = m x^{m-1}(a_0 + a_2 x^m),$$
$$c_1 x^2 = a_0 + a_2 x^m;$$

d'où

$$b_0 + b_1 x = m c_1 x^{m+1},$$

c'est-à-dire

$$(\gamma) \qquad b_0 = b_1 = c_1 = 0,$$

ce qui entraîne les égalités

$$(\delta) \qquad a_0 = a_2 = 0.$$

Les relations $(\alpha)$, $(\beta)$, $(\gamma)$, $(\delta)$ donnent

$$\xi = a_1 x, \qquad \eta = m a_1 y, \qquad \zeta = a_1.$$

La courbe (1) n'admet donc que la transformation homographique infinitésimale

$$\mathrm{X}f = x\frac{\partial f}{\partial x} + my\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}.$$

*Remarque.* — Parmi les courbes V de la deuxième classe se trouvent les transformées homographiques des hélices de l'espace. Ceci résulte de ce que la courbe

$$(\mathrm{C}) \qquad xy = 1, \qquad x = e^z,$$

qui correspond à $m = -1$, se transforme, par la substitution linéaire

$$x = x' + iy', \qquad y = x' - iy', \qquad z = iz',$$

en la courbe suivante

$$x' = \cos\varphi, \qquad y' = \sin\varphi, \qquad z' = \varphi,$$

qui est évidemment une hélice.

Considérons enfin les courbes de la troisième et de la quatrième classe. Ces courbes sont les transformées homographiques de la courbe

$$y = xz, \qquad z = e^x$$

ou de

$$2y = x^2, \qquad z = e^x.$$

Des calculs identiques à ceux qui ont déjà été faits plusieurs fois montrent que chacune de ces courbes n'admet qu'une transformation homographique infinitésimale.

Quant aux courbes V de la cinquième classe, elles ont déjà été étudiées; car les cubiques gauches appartiennent aussi à la première classe.

En résumé, toute cubique gauche admet trois transformations homographiques infinitésimales. Les cubiques gauches sont les seules courbes gauches admettant plus d'une transformation homographique infinitésimale.

6. *Caractéristiques des équations canoniques.* — Nous avons déjà vu que les caractéristiques des équations canoniques (I), (II), (III), (IV) sont des droites. Je me propose maintenant d'indiquer la nature des caractéristiques des autres équations canoniques.

*Caractéristiques de l'équation*

$$(\mathrm{V}) \qquad \frac{dz + x\,dy - y\,dx}{dx} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^n, \qquad n \neq -1,\ 0,\ 1,\ 2.$$

Supposons d'abord

$$n \neq \tfrac{1}{2}.$$

Les caractéristiques sont alors données par les équations (*voir* p. 79)

$$\left.\begin{aligned} \beta &= \frac{1}{m(m-1)}\left(\alpha + \frac{2x}{n}\right)^m - 2\frac{\alpha y}{n} + 2\frac{z - xy}{n^2} \\ \gamma &= \frac{1}{m-1}\left(\alpha + \frac{2x}{n}\right)^{m-1} - \frac{zy}{n} \end{aligned}\right\} \quad m = \frac{2n-1}{n-1} \quad \text{ou} \quad n = \frac{m-1}{m-2}.$$

Considérons, en particulier, la caractéristique correspondant aux valeurs

$$\alpha = \beta = \gamma = 0.$$

Elle a pour équations

$$(\mathrm{C}_0) \qquad (2n-1)z = xy, \qquad y = kx^{\frac{n}{n-1}} \qquad \text{avec} \quad k = \frac{n-1}{2}\left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{n-1}}.$$

En lui appliquant toutes les transformations du groupe G de l'équation (V) (*voir* p. 81), on obtient toutes les caractéristiques de l'équation (V). Or on voit que la courbe $C_0$ est une courbe V de la première classe et de la famille $\left(\frac{n}{n-1}, \frac{n}{n-1} + 1\right)$ (*voir* p. 128). Donc les caractéristiques sont des courbes V de la première classe. Examinons si ces caractéristiques peuvent être des cubiques gauches; il faut, pour cela, que l'on ait une des égalités suivantes (p. 131) :

$$\frac{n}{n-1}=-2, \qquad \frac{n}{n-1}=-\frac{1}{2}, \qquad \frac{n}{n-1}=\frac{1}{2}, \qquad \frac{n}{n-1}=2.$$

Les deux dernières égalités sont impossibles, eu égard aux hypothèses faites sur $n$.

Les deux premières sont équivalentes aux suivantes :

$$n=\tfrac{1}{3}, \qquad n=\tfrac{2}{3}.$$

Ainsi, pour que les caractéristiques de l'équation (V) soient des cubiques gauches, il faut et il suffit que

$$n=\tfrac{1}{3} \quad \text{ou} \quad n=\tfrac{2}{3}.$$

Dans tous les autres cas, les caractéristiques sont des courbes V de la première classe et de la quatrième catégorie (*voir* p. 131). On peut dire que, dans tous les cas, les caractéristiques sont des transformées homographiques d'une loxodromie.

Remarquons d'ailleurs que les deux équations

$$\frac{dz+x\,dy-y\,dx}{dx}=\left(\frac{dy}{dx}\right)^{\frac{1}{3}}, \qquad \frac{dz+x\,dy-y\,dx}{dx}=\left(\frac{dy}{dx}\right)^{\frac{2}{3}}$$

sont homographiquement semblables, car la somme des deux exposants est égale à l'unité (*voir* la note p. 82).

Soit maintenant

$$n=\tfrac{1}{2}.$$

Les caractéristiques sont alors (p. 80) données par

$$\beta=8(z-xy)-2\alpha y-\mathrm{L}(\alpha+8x), \qquad \gamma+2y+\frac{1}{\alpha+8x}=0.$$

Comme précédemment, il suffit, pour étudier la nature de ces courbes, de considérer une caractéristique particulière, par exemple

$$16xy+1=0, \qquad 8z+\mathrm{L}x=0,$$

qui est une transformée homographique de

$$xy=1, \qquad z=\mathrm{L}\,x,$$

Donc les caractéristiques sont des courbes V de la deuxième classe et en particulier (*voir* p. 136) des transformées homographiques d'une hélice.

*Caractéristiques de l'équation* (VI).

$$\text{(VI)} \qquad \frac{dz + x\,dy - y\,dx}{dx} = e^{\frac{dy}{dx}}.$$

Si l'on se reporte au calcul qui a été fait (p. 86), on voit que les caractéristiques de cette équation sont représentées par

$$\text{(C)} \qquad \begin{cases} F(\alpha + 2x) - 2y(\alpha + 2x) + 2z + 2xy = \beta, \\ F'(\alpha + 2x) - 2y = \gamma. \end{cases}$$

Ces courbes peuvent être considérées comme obtenues en appliquant les transformations du groupe de l'équation (VI) à la caractéristique particulière $C_0$,

$$(C_0) \qquad 2z = x^2, \qquad 2x = e^{\frac{x+y}{x}}, \qquad (\alpha = \beta = \gamma = 0).$$

Or cette dernière est une transformée homographique de l'hélice

$$x_1 = \cos\varphi, \qquad y_1 = \varphi, \qquad z_1 = \sin\varphi;$$

il suffit, pour le voir, de poser

$$x_1 + iz_1 = \frac{1}{2x}, \qquad x_1 - iz_1 = \frac{4z}{x}, \qquad \frac{x+y}{x} = -iy_1.$$

On voit donc que les caractéristiques de l'équation (VI) sont aussi des transformées homographiques d'une hélice.

*Caractéristiques des équations canoniques* (VII) *et* (VII'). — Considérons d'abord l'équation

$$\text{(VII')} \qquad (dz + x\,dy - y\,dx)^2 + 4h(y\,dz - z\,dy)\,dx = 0, \qquad h = 0, 1.$$

Les caractéristiques de cette équation peuvent être représentées (*voir* p. 94),

$$(1) \quad \frac{\alpha y + z}{\sqrt{xy + z}}\left(\frac{\alpha - x}{\alpha y + z}\right)^n = \beta, \qquad \frac{(1-n)y}{\alpha y + z} + \frac{n}{\alpha - x} = \gamma, \quad 4n(n-1) = h(2n-1)^2.$$

Considérons en particulier les caractéristiques pour lesquelles

$$\alpha = \gamma = 0.$$

Ces caractéristiques sont représentées par

$$nz = (1-n)xy, \qquad xy^{1-2n} = \text{const.} \tag{2}$$

En appliquant à ces caractéristiques les transformations du groupe G de l'équation (VII′), (p. 95), on obtient [1] toutes les caractéristiques de l'équation (VII′). Or chaque courbe (2) est une transformée homographique de la courbe

$$z = xy, \qquad x = y^{2n-1}.$$

Donc les caractéristiques de l'équation (VII′) sont des courbes V de la première classe et de la première ou de la quatrième catégorie. Cherchons pour quelles valeurs de $h$ les caractéristiques sont des cubiques gauches. Il faut pour cela (*voir* p. 131) que l'une des égalités suivantes ait lieu

$$2n-1 = -2, \qquad 2n-1 = -\tfrac{1}{2}, \qquad 2n-1 = \tfrac{1}{2}, \qquad 2n-1 = 2$$

ou

$$n = -\tfrac{1}{2}, \qquad n = \tfrac{1}{4}, \qquad n = \tfrac{3}{4}, \qquad n = \tfrac{3}{2},$$

c'est-à-dire

$$h = \tfrac{3}{4} \qquad \text{ou} \qquad h = -3.$$

Dans tous les autres cas, les caractéristiques sont des courbes V de la première classe et de la quatrième catégorie. On peut dire aussi que les caractéristiques sont, dans tous les cas, des transformées homographiques d'une loxodromie.

Comme l'équation VII dérive de l'équation (VII′) par une transformation homographique (p. 100), il en résulte que les caractéristiques de (VII) sont aussi des transformées homographiques d'une loxodromie.

On peut obtenir simplement les caractéristiques de l'équation (VII) en effectuant la transformation déjà utilisée (p. 100) dans le système (2) ou le système équivalent

$$n(xy+z) = xy, \qquad dz = x\,dy - y\,dx,$$

---

[1] Cette opération fournit une famille de courbes ne contenant que trois paramètres essentiels, car la famille (2) admet deux transformations infinitésimales de G, à savoir $X_2f$ et $X_4f$.

ce qui donne

$$(3) \qquad \begin{cases} n(x'^2+y'^2+z'^2+1)=x'^2+y'^2, \\ dz'=x'\,dy'-y'\,dx, \end{cases}$$

et en appliquant ensuite aux courbes (3) toutes les transformations du groupe de (VII).

*Caractéristiques de l'équation canonique* (VIII). — Si l'on se reporte au calcul qui a été fait (p. 95), on voit que les caractéristiques de l'équation (VIII') peuvent être représentées par

$$\frac{\alpha y+z}{\sqrt{xy+z}}\, e^{\frac{\alpha-x}{\alpha y+z}}=\beta, \qquad \frac{y}{\alpha y+z}+\frac{xy+z}{(xy+z)^2}=\gamma.$$

En remplaçant dans ces équations $x, y, z$ respectivement par $\frac{z}{y}, \frac{1}{y}, \frac{x}{y}$, on obtient les caractéristiques de l'équation (VIII); on trouve ainsi

$$\frac{x+\alpha}{\sqrt{xy+z}}\, e^{\frac{\alpha y-z}{x+\alpha}}=\beta, \qquad \frac{1}{x+\alpha}+\frac{xy+z}{(x+\alpha)^2}=\gamma.$$

En particulier, considérons les caractéristiques pour lesquelles

$$\alpha=\gamma=0,$$

c'est-à-dire les courbes représentées par

$$(G_0) \qquad xy+z+x=0, \qquad e^y\sqrt{x}=\text{const.}$$

En appliquant à ces courbes les transformations du groupe de l'équation (VIII), on obtient toutes les caractéristiques de l'équation (VIII). Or, les courbes $G_0$ sont des transformées homographiques de la courbe

$$z=xy, \qquad x=e^y.$$

Donc les caractéristiques de l'équation (VIII) sont des courbes V de la troisième classe.

## TABLEAU DES ÉQUATIONS CANONIQUES.

(I) $$dx^2 + dy^2 + dx^2 = 0,$$

(II) $$\left(\frac{dy}{dx}\right)^n = \frac{dz}{dx},$$

(III) $$e^{\frac{dy}{dx}} = \frac{dz}{dx},$$

(IV) $$\varphi\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dz}{dx},$$

(V) $$\frac{dz + x\,dy - y\,dx}{dx} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^n, \qquad n \neq -1, 0, 1, 2,$$

(VI) $$\frac{dz + x\,dy - y\,dx}{dx} = e^{\frac{dy}{dx}},$$

(VII) $$a(dz + x\,dy - y\,dx)^2 + (dx + y\,dz - z\,dy)^2 + (dy + z\,dx - x\,dz)^2 = 0,$$
$$a \neq 0, \qquad a \neq 1.$$

(VIII) $$(dz + x\,dy - y\,dx)^2 + 4\,dx\,(dx + y\,dz - z\,dy) = 0.$$

*Note.* — L'équation (VII) peut être remplacée par la suivante

$$(dz + x\,dy - y\,dx)^2 + 4h(y\,dz - z\,dy)\,dx = 0, \qquad h \neq 0, 1.$$

# NOTE.

## RÉDUCTION DE PLUSIEURS ÉQUATIONS CONNUES A LA FORME CANONIQUE. TRANSFORMATION PONCTUELLE FAISANT CORRESPONDRE AUX TANGENTES D'UNE SURFACE DU SECOND DEGRÉ LES DROITES RENCONTRANT UNE CONIQUE.

1. Comme exemple d'équation aux dérivées partielles admettant un groupe, je choisirai l'équation pour laquelle les normales aux surfaces intégrales sont tangentes à une sphère (¹)

$$(z - px - qy)^2 = (1 + p^2 + q^2)(x^2 + y^2 + z^2 - 1). \tag{1}$$ (MONGE).

Je me propose de montrer que cette équation dérive par une transformation ponctuelle de l'équation canonique

$$1 + p^2 + q^2 = 0. \tag{I}$$

A cet effet, je considère l'équation *associée* à l'équation (1), qui est évidemment

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = (x\,dx + y\,dy + z\,dz)^2. \tag{2}$$

Effectuons la transformation

$$x = r \sin\theta \cos\psi, \qquad y = r \sin\theta \sin\psi, \qquad z = r \cos\theta. \tag{3}$$

L'équation (2) se change en la suivante

$$dr^2 + r^2\,d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\,d\psi^2 = r^2\,dr^2$$

ou

$$\frac{1 - r^2}{r^2}\,dr^2 + d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\psi^2 = 0. \tag{4}$$

Posons

$$\frac{\sqrt{1 - r^2}}{r}\,dr = \frac{d\rho}{\rho},$$

c'est-à-dire

$$i \arcsin\frac{1}{r} + \sqrt{1 - r^2} = \mathcal{L}\rho. \tag{5}$$

L'équation (4) devient

$$d\rho^2 + \rho^2\,d\theta^2 + \rho^2 \sin^2\theta\,d\psi^2 = 0 \tag{6}$$

(¹) Je suppose le centre de la sphère à l'origine et le rayon égal à l'unité.

ou bien

$$(\mathrm{I}) \qquad dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 = 0,$$

en posant

$$(7) \qquad x' = \rho \sin\theta \cos\psi, \qquad y' = \rho \sin\theta \sin\psi, \qquad z' = \rho \cos\theta.$$

Si donc on effectue dans l'équation canonique (I) la transformation ponctuelle

$$x' = \frac{\rho}{r} x, \qquad y' = \frac{\rho}{r} y, \qquad z' = \frac{\rho}{r} z,$$

où $\rho$ et $r$ sont définis en fonction de $x, y, z$ au moyen des relations

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \qquad \rho = e^{i \arc\sin\frac{1}{r} + \sqrt{1 - r^2}},$$

on trouve précisément l'équation (2). Ce que nous voulions démontrer.

Cette réduction de l'équation (2) à la forme canonique permet d'intégrer cette équation.

Je ne parlerai pas des résultats de cette intégration, qui sont connus depuis longtemps.

2. Parmi les équations, qui sont des transformées ponctuelles de

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0,$$

se trouvent évidemment toutes les équations du second degré non décomposables

$$f(dx, dy, dz) = \mathrm{A}\, dx^2 + \mathrm{A}'\, dy^2 + \ldots = 0,$$

à coefficients constants.

Cela posé, considérons l'équation aux dérivées partielles pour laquelle les tangentes aux courbes intégrales sont les normales aux surfaces homofocales

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a+u} + \frac{y^2}{b+u} + \frac{z^2}{c+u} = 1 \text{ [1]}.$$

Cette équation a pour *associée* la suivante

$$(2) \qquad a\, dx(y\, dz - y\, dz) + b\, dy(z\, dx - x\, dz) + c\, dz(x\, dy - y\, dx) = 0$$

ou bien

$$(b-c) x\, dy\, dz + (c-a) y\, dz\, dx + (a-b) z\, dx\, dy = 0,$$

---

[1] Consulter, au sujet du complexe déterminé par ces normales, le Mémoire publié par M. Darboux dans le *Bulletin des Sciences mathématiques*, t. II, année 1871.

ou encore

$$(3)\qquad (b-c)\frac{dx}{x}+(c-a)\frac{dy}{y}+(a-b)\frac{dz}{z}=0.$$

Par la transformation

$$x'=\mathcal{L}\,x,\qquad y'=\mathcal{L}\,y,\qquad z'=\mathcal{L}\,z,$$

l'équation (3) se change en la suivante

$$(4)\quad \frac{b-c}{dx'}+\frac{c-a}{dy'}+\frac{a-b}{dz'}=0 \quad \text{ou} \quad (b-c)\,dy'\,dz'+(c-a)\,dz'\,dx'+(a-b)\,dx'\,dy'=0.$$

En vertu de la remarque que nous venons de faire, cette équation dérive par une transformation ponctuelle de l'équation

$$dx'^2+dy'^2+dz'^2=0.$$

Donc l'équation aux dérivées partielles considérée est une transformée ponctuelle de l'équation canonique

$$1+p^2+q^2=0.$$

L'équation (2) peut aussi être considérée comme définissant un complexe tétraédral, les faces du tétraèdre étant les trois plans de coordonnées et le plan de l'infini. Tout complexe tétraédral est d'ailleurs une transformée homographique de celui-là. Donc :

*Toute équation aux dérivées partielles, pour laquelle les tangentes aux courbes intégrales déterminent un complexe tétraédral est une transformée ponctuelle de l'équation canonique*

$$1+p^2+q^2=0.$$

3. *Transformation ponctuelle faisant correspondre aux tangentes d'une surface du second degré les droites rencontrant une conique.* — Enfin considérons l'équation aux dérivées partielles associée à l'équation

$$(1)\quad dx^2+dy^2+dz^2+(y\,dz-z\,dy)^2+(z\,dx-x\,dz)^2+(x\,dy-y\,dx)^2=0\ (^1).$$

Les tangentes aux courbes intégrales de cette équation sont tangentes à la

(1) Cette équation peut aussi s'écrire

$$(dx+y\,dz-z\,dy)^2+(dy+z\,dx-z\,dx)^2+(dz+x\,dy-y\,dx)^2=0.$$

C'est sous cette forme que nous l'avons rencontrée plusieurs fois dans ce travail (en particulier, *voir* p. 100).

sphère

$$x^2+y^2+z^2+1=0. \tag{2}$$

Je dis que l'équation aux dérivées partielles considérée dérive encore de l'équation $1+p^2+q^2=0$, par une transformation ponctuelle, ou, ce qui revient au même, que l'équation (1) est une transformée ponctuelle de l'équation

$$dX^2+dY^2+dZ^2=0. \tag{3}$$

En effet, effectuons dans l'équation (1) la transformation ponctuelle

$$x=\frac{X}{U}, \qquad y=\frac{Y}{U}, \qquad z=\frac{Z}{U}, \qquad U=\varphi(X, Y, Z), \tag{4}$$

$\varphi$ désignant une fonction indéterminée. L'équation (1) a pour transformée

$$(dX^2+dY^2+dZ^2+dU^2)(X^2+Y^2+Z^2+U^2)-(X\,dX+Y\,dY+Z\,dZ+U\,dU)^2=0.$$

Pour que cette équation soit identique à l'équation (3), il suffit que U satisfasse à l'équation

$$(X^2+Y^2+Z^2+U^2)\,dU^2=(X\,dX+Y\,dY+Z\,dZ+U\,dU)^2$$

ou

$$dU=d\sqrt{X^2+Y^2+Z_1^2+U^2};$$

il suffit donc de prendre U de manière que

$$\sqrt{X^2+Y^2+Z^2+U^2}=U-1,$$

c'est-à-dire

$$-U=\frac{X^2+Y^2+Z^2-1}{2}. \tag{5}$$

La fonction U étant déterminée par l'équation (5), la transformation (4) change l'équation (1) en l'équation (2), ce que nous voulions démontrer.

*Remarque.* — La transformation précédente offre ceci de curieux, qu'elle change les *droites tangentes* à la sphère (2) *en droites rencontrant* le cercle imaginaire de l'infini. Cette transformation est un cas particulier d'une transformation plus générale, faisant correspondre aux tangentes d'une surface du second degré S les droites rencontrant une section plane C de cette surface. Voici cette transformation ([1]).

Considérons la transformation ponctuelle qui fait correspondre à chaque point $M(x, y, z)$ de l'espace les sommets $m$ et $m'$ des deux cônes qui passent par la

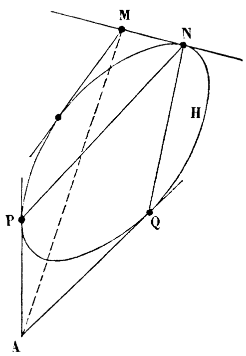
---

([1]) Cette transformation a été utilisée par M. Darboux dans ses recherches sur les cyclides.

conique C et la conique K intersection de S avec le plan polaire de M (*fig.* 12). Cette transformation jouit bien de la propriété en question.

En effet, soit A le pôle du plan de la conique C. Les deux points $m$, $m'$ doivent évidemment se trouver sur l'intersection des plans tangents à la surface S aux points d'intersection des deux coniques C et K, c'est-à-dire sur la droite conjuguée de l'intersection des deux plans C et K. Or cette droite est précisément la droite AM : donc les deux points $m$, $m'$ se trouvent sur AM. Cela posé, considérons une droite quelconque MN tangente en N à la surface S et faisons passer un plan par le point A et la droite MN. Ce plan coupe la surface S suivant une

Fig. 12.




conique H et la conique C en deux points P et Q. Il résulte immédiatement de la remarque qui vient d'être faite que les points $m$ et $m'$ qui correspondent à un point M de la droite MN doivent se trouver aux points d'intersection de AM avec les droites NP et NQ. On peut donc dire que la transformation considérée fait correspondre aux points de la droite MN les points des deux droites NP et NQ et, par suite, à l'ensemble des tangentes de la surface S, l'ensemble des droites rencontrant la conique C.

Supposons en particulier que la surface S soit la sphère représentée par l'équation

$$(S) \qquad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 + 1 = 0,$$

et que la conique C soit le centre imaginaire de l'infini. Soient $m(x, y, z)$ et $M(X, Y, Z)$ deux points correspondants. Pour trouver les relations qui lient les six quantités $(x, y, z, X, Y, Z)$, il suffit d'écrire que la sphère de rayon nul

$$(\xi - X)^2 + (\eta - Y)^2 + (\zeta - Z)^2 = 0$$

passe par l'intersection de la sphère S avec le plan polaire du point M, c'est-à-dire que les deux équations

$$x\xi + y\eta + z\zeta + 1 = 0,$$
$$(\xi - X)^2 + (\eta - Y)^2 + (\zeta - Z)^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 + 1$$

représentent le même plan. On obtient ainsi les équations

$$\frac{x}{X} = \frac{y}{Y} = \frac{z}{Z} = \frac{2}{1 - X^2 - Y^2 - Z^2},$$

qui sont identiques, comme je l'ai annoncé, aux équations (4) et (5).

# TABLE DES MATIÈRES

DU MÉMOIRE DE M. W. DE TANNENBERG.

## PREMIÈRE PARTIE.



## SECONDE PARTIE.