ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

GUSTAF KOBB

Sur le principe de la moindre action

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 1re série, tome 5, nº 3 (1891), p. D1-D3
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1891_1_5_3_D1_0>

© Université Paul Sabatier, 1891, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (http://picard.ups-tlse.fr/~annales/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUR LE

PRINCIPE DE LA MOINDRE ACTION,

PAR M. GUSTAF KOBB,

Maître de Conférences à l'Université de Stockholm.

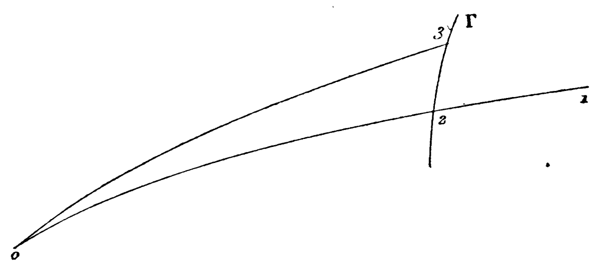
En énonçant le principe de la moindre action, on se borne généralement à dire que l'intégrale

$$J = \int \sqrt{2(u+h)}\, ds$$

est un maximum ou un minimum dans le cas du mouvement naturel. Il est cependant très facile de voir qu'un maximum ne peut jamais avoir lieu.

En effet, considérons un point (2) quelconque de la trajectoire o — 1, et

Fig. 1.



faisons passer par (2) une autre courbe arbitraire Γ. Imaginons une autre trajectoire, très voisine de o — 1, et qui coupe la courbe Γ au point (3).

Pour qu'un maximum ait lieu, il faut évidemment que la différence

$$J_{03} + J_{32} - J_{02} = \Delta J$$

soit toujours négative, J_{ik} désignant la valeur de l'intégrale le long de la courbe i, k. En posant

$$\int \sqrt{2u+h}.ds = \int f(x, y, z; x', y', z')\, d\tau,$$

où

$$x' = \frac{dx}{d\tau}, \qquad y' = \frac{dy}{d\tau}, \qquad z' = \frac{dz}{d\tau},$$

on a

$$J_{03} - J_{02} = \xi \frac{\partial f}{\partial x'} + \eta \frac{\partial f}{\partial y'} + \zeta \frac{\partial f}{\partial z'} + (\ldots)_2 + \ldots,$$

en désignant par ξ, η, ζ les projections du segment 2-3; d'où

$$J_{03} - J_{02} = \sqrt{2(u+h)}[\xi\alpha + \eta\beta + \zeta\gamma] + \ldots,$$

si α, β et γ sont les cosinus directeurs de la tangente à la trajectoire au point (2). Ensuite

$$J_{32} = \int_{(3)}^{(2)} \sqrt{2(u+h)}\, ds = \sqrt{2(u+h)}.\sigma + (\sigma)_2 + \ldots,$$

si σ désigne l'arc $(3 - 2)$ de Γ. Mais alors

$$\xi = -\bar{\alpha}\sigma + (\sigma)_2 + \ldots, \qquad \eta = -\bar{\beta}\sigma + (\sigma)_2 + \ldots, \qquad \zeta = -\bar{\gamma}\sigma + (\sigma)_2 + \ldots,$$

où $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ et $\bar{\gamma}$ sont les cosinus directeurs de la tangente à la courbe Γ au point (2).

On aura ainsi

$$\begin{aligned}\Delta J &\doteq \sqrt{2(u+h)}(1 - \alpha\bar{\alpha} - \beta\bar{\beta} - \gamma\bar{\gamma})\sigma + (\sigma_2) + \ldots \\ &= \sqrt{2(u+h)}(1 - \cos\psi)\sigma + \ldots,\end{aligned}$$

d'où suit immédiatement que, pour des valeurs assez petites de σ, ΔJ reste toujours positif et, par conséquent, qu'un maximum ne peut pas avoir lieu. En appliquant les mêmes considérations à l'intégrale

$$\int f(x, y, z)\, ds,$$

on voit facilement que l'on peut énoncer le résultat suivant. Si $f(x, y, z)$ change son signe entre les limites d'intégration, il n'y a jamais ni un maximum ni un minimum; si la fonction $f(x, y, z)$ reste constamment positive, il n'y a jamais un maximum et si elle reste constamment négative jamais un minimum.

La méthode employée, qui n'exige pas la considération de la seconde variation de l'intégrale, est une application d'un principe développé par M. Weierstrass dans ses leçons sur le Calcul des variations.