

IVAR BENDIXSON

**Détermination des équations résolubles algébriquement  
dans lesquelles chaque racine peut s'exprimer en fonction  
rationnelle de l'une d'entre elles**

*Annales de la faculté des sciences de Toulouse 1<sup>re</sup> série*, tome 7, n° 2 (1893), p. C1-C7

[http://www.numdam.org/item?id=AFST\\_1893\\_1\\_7\\_2\\_C1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AFST_1893_1_7_2_C1_0)

© Université Paul Sabatier, 1893, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

---

DÉTERMINATION  
DES  
ÉQUATIONS RÉSOUBLES ALGÈBRIQUEMENT

DANS LESQUELLES

CHAQUE RACINE PEUT S'EXPRIMER EN FONCTION RATIONNELLE  
DE L'UNE D'ENTRE ELLES (1),

PAR M. IVAR BENDIXSON,

Maitre de Conférences à l'Université de Stockholm.

---

Le but du travail est de montrer que l'on peut parvenir à la détermination des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une équation algébrique soit résoluble par radicaux sans avoir recours à la théorie des substitutions, introduite dans l'Algèbre par Galois. On peut en effet déterminer lesdites conditions par une extension très facile à effectuer des considérations employées par Abel dans ses deux Mémoires : *Mémoire sur une classe particulière d'équations résolubles algébriquement* et *Sur les équations résolubles algébriquement*.

Nous étudierons à cette fin les équations telles que chaque racine puisse s'exprimer en fonction rationnelle de l'une d'entre elles, chaque équation pouvant en effet être réduite à une telle équation. Par une *fonction rationnelle* de  $x$ , nous entendons toujours ici une fonction formée par de seules opérations arithmétiques de  $x$  et des quantités  $R', \dots, R^s$  définissant le domaine de rationalité donné.

Soit

$$(1) \quad F(x) = 0$$

---

(1) Cette Note est le résumé d'un travail publié en suédois dans les *Ofversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Forhandlingar*; 1891. N° 3. Stockholm.

une équation irréductible dans le domaine de rationalité donné, dont les racines peuvent s'écrire

$$\begin{array}{cccc} x_1, & \theta x_1 & \dots, & \theta^{n-1} x_1, \\ \theta_1 x_1, & \theta \theta_1 x_1, & \dots, & \theta^{n-1} \theta_1 x_1, \\ \dots, & \dots, & \dots, & \dots, \\ \theta_{\mu-1} x_1, & \theta \theta_{\mu-1} x_1, & \dots, & \theta^{n-1} \theta_{\mu-1} x_1, \end{array}$$

les fonctions  $\theta_\nu$  désignant des fonctions rationnelles de  $x$  et  $\theta$  satisfaisant en outre à

$$\theta^\nu \theta x_1 = \theta^{\nu+1} x_1, \quad \theta^n x_1 = x_1 \quad (\nu = 1, 2, \dots).$$

Posons

$$f(x) = (x - x_1)(x - \theta x_1) \dots (x - \theta^{n-1} x_1).$$

Les coefficients de  $f(x)$  peuvent alors s'exprimer en fonctions rationnelles de la quantité

$$\psi(t, x_1) = (t - x_1)(t - \theta x_1) \dots (t - \theta^{n-1} x_1),$$

$t$  désignant une quantité indéterminée, et cette quantité  $\psi$  satisfait à une équation de degré  $\mu$  à coefficients rationnels

$$(2) \quad F_1(x') = [x' - \psi(t, x_1)][x' - \psi(t, \theta_1 x_1)] \dots [x' - \psi(t, \theta_{\mu-1} x_1)] = 0.$$

L'équation (1) de degré  $\mu n$  est donc réduite à une équation de degré  $\mu$ .

$$F_1(x') = 0,$$

qui est irréductible (ce que l'on prouve aisément), et à une équation abélienne

$$f(x) = 0,$$

dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de l'une des racines de l'équation  $F_1 = 0$ .

Si l'on savait maintenant que l'une des racines de  $F_1 = 0$  pouvait s'exprimer en fonction rationnelle d'une autre de ses racines, celles-ci pourraient s'écrire

$$\left. \begin{array}{cccc} x'_1, & \lambda x'_1, & \dots, & \lambda^{n_1-1} x'_1 \\ x'_2, & \lambda x'_2, & \dots, & \lambda^{n_1-1} x'_2 \\ \dots, & \dots, & \dots, & \dots \\ x'_{\mu_1}, & \lambda x'_{\mu_1}, & \dots, & \lambda^{n_1-1} x'_{\mu_1} \end{array} \right\} \mu_1 n_1 = n,$$

où  $\lambda$  est une fonction rationnelle telle que l'on ait  $\lambda^n x'_1 = x'_1$ . On pourrait donc réduire  $F_1 = 0$  à une équation de degré  $\mu_1$

$$F_2(x'') = 0$$

et une équation abélienne du degré  $n_1$

$$f_1(x') = (x' - x'_1)(x' - \lambda x'_1) \dots (x' - \lambda^{n_1-1} x'_1) = 0,$$

dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de l'une des racines de  $F_2$ .

Dans ce cas on aura donc une fonction rationnelle  $\theta_1$  telle que

$$\psi(t, \theta_1 x_1) = \lambda \psi(t, x_1),$$

ce qui nous donne

$$\begin{aligned} \psi(t, \theta_1 \theta x_1) &= \lambda \psi(t, \theta x_1) \\ &= \psi(t, \theta_1 x_1). \end{aligned}$$

Mais  $t$  est une quantité indéterminée, ce qui fait voir qu'il existe un nombre entier  $\alpha$  tel que l'on ait

$$\theta_1 \theta x_1 = \theta^\alpha \theta_1 x_1.$$

De l'autre côté, on voit que cette dernière équation a pour conséquence

$$\psi(t, \theta_1 \theta x_1) = \psi(t, \theta_1 x_1),$$

ce qui nous donne

$$\psi(t, \theta_1 x_1) = \frac{1}{n} [\psi(t, \theta_1 x_1) + \psi(t, \theta_1 \theta x_1) + \dots + \psi(t, \theta_1 \theta^{n-1} x_1)],$$

d'où l'on conclut que  $\psi(t, \theta_1 x_1)$  est une fonction rationnelle de  $\psi(t, x_1)$ . La condition nécessaire et suffisante pour que l'une des racines de

$$F_1(x') = 0$$

puisse être exprimée en fonction rationnelle d'une autre de ces racines, c'est donc qu'il existe un tel nombre  $\alpha$  que l'on ait

$$\theta_1 \theta x_1 = \theta^\alpha \theta_1 x_1.$$

On voit alors que l'équation (2) peut se réduire à une équation abélienne de degré  $n_1$

$$f_1(x') = 0,$$

dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de

$$\begin{aligned} x''_1 &= (t_1 - x'_1)(t_1 - \lambda x'_1) \dots (t_1 - \lambda^{n-1} x'_1) \\ &= [t_1 - \psi(t, x_1)][t_1 - \psi(t, \theta_1 x_1)] \dots [t_1 - \psi(t, \theta_1^{n-1} x_1)] = \psi_1(t_1, t, x_1), \end{aligned}$$

laquelle expression est elle-même racine d'une équation

$$F_2(x'') = 0$$

de degré  $\mu_2$  à coefficients rationnels.

On prouve maintenant par des considérations tout analogues aux précédentes que la condition, pour que l'une des racines de  $F_2$  soit une fonction rationnelle d'une autre de ses racines, est qu'il existe des nombres entiers  $\alpha', \beta', \alpha'', \beta''$  tels que l'on ait

$$\begin{aligned} \theta_2 \theta x_1 &= \theta^{\alpha'} \theta_1^{\beta'} \theta_2 x_1, \\ \theta_2 \theta_1 x_1 &= \theta^{\alpha''} \theta_1^{\beta''} \theta_2 x_1. \end{aligned}$$

Ces dernières équations constituent en même temps les conditions suffisantes pour que l'une des racines de  $F_2$  soit une fonction rationnelle d'une autre de ces racines.

On parvient de cette manière au théorème que voici :

*Étant donnée une équation dont chaque racine peut s'exprimer en fonction rationnelle  $\theta_v x_1$  de l'une d'entre elles  $x_1$ , si entre les fonctions  $\theta_v x_1$  les relations suivantes ont lieu*

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} \theta_1 \theta x_1 &= \theta^{\alpha_1} \theta_1 x_1, \\ \theta_2 \theta x_1 &= \theta^{\alpha_2} \theta_1^{\beta_2} \theta_2 x_1, \\ \theta_2 \theta_1 x_1 &= \theta^{\alpha'_2} \theta_1^{\beta'_2} \theta_2 x_1, \\ &\dots\dots\dots, \\ \theta_v \theta x_1 &= \theta^{\alpha_v} \theta_1^{\beta_v} \dots \theta_{v-1}^{k_v} \theta_v x_1, \\ \theta_v \theta_1 x_1 &= \theta^{\alpha'_v} \theta_1^{\beta'_v} \dots \theta_{v-1}^{k'_v} \theta_v x_1, \\ &\dots\dots\dots, \\ \theta_v \theta_{v-1} x_1 &= \theta^{\alpha_{v-1}} \theta_1^{\beta_{v-1}} \dots \theta_{v-1}^{k_{v-1}} \theta_v x_1, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \right.$$

*l'équation donnée se réduit alors à une suite d'équations abéliennes et elle est par conséquent résoluble par radicaux.*



Formons maintenant

$$\psi(t, x_1) = (t - x_1)(t - \theta x_1), \dots, (t - \theta^{p_{q-1}} x_1) = \mathbf{H}(t, \mathbf{R}', \dots, \mathbf{R}^s, \mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_{q-1}),$$

et supposons pour plus de simplicité que  $\mathbf{V}_{q-1}$  soit réellement contenue en  $\mathbf{H}$ .

En mettant  $\omega_{q-1} \mathbf{V}_{q-1}$  au lieu de  $\mathbf{V}_{q-1}$  dans les équations ci-dessus, la fonction  $\mathbf{V}_q$  se change en  $\overline{\mathbf{V}}_q$  et l'on obtient une racine

$$x_2 = \varphi(\mathbf{R}', \dots, \mathbf{R}^s, \mathbf{V}_1, \dots, \omega_{q-1} \mathbf{V}_{q-1}, \overline{\mathbf{V}}_q).$$

On aura alors

$$\varphi(\mathbf{R}', \dots, \mathbf{R}^s, \mathbf{V}_1, \dots, \omega_{q-1} \mathbf{V}_{q-1}, \omega_q^y \overline{\mathbf{V}}_q) = \theta^y x_2.$$

Comme

$$\psi(t, x_2) = \mathbf{H}(t, \mathbf{R}', \dots, \mathbf{R}^s, \mathbf{V}_1, \dots, \omega_{q-1} \mathbf{V}_{q-1})$$

est différent de  $\psi(t, x_1)$ , il faut que  $x_2$  soit une racine différente de tous les  $\theta^y x_1$ .

On aura donc

$$x_2 = \theta_1 x_1.$$

En mettant

$$y_\nu = \mathbf{H}(t, \mathbf{R}', \dots, \mathbf{R}^s, \mathbf{V}_1, \dots, \omega_{q-1}^y \mathbf{V}_{q-1}), \quad \nu = 1, \dots, p_{q-1},$$

chaque fonction cyclique de  $y_1, \dots, y_{p_{q-1}}$  est indépendante de  $\mathbf{V}_{q-1}$ .

L'équation

$$(y - y_1)(y - y_2) \dots (y - y_{p_{q-1}}) = 0$$

sera donc une équation abélienne dans le domaine de rationalité  $\mathbf{R}', \dots, \mathbf{R}^s, \mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_{q-2}$ , ce qui nous permet d'affirmer que

$$(4) \quad y_2 = \bar{\lambda}(y_1, \mathbf{R}', \dots, \mathbf{R}^s, \mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_{q-2}),$$

$\bar{\lambda}$  désignant une fonction rationnelle.

Mais l'équation

$$\mathbf{H}(x, \mathbf{R}', \dots, \mathbf{R}^s, \mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_{q-1}) = 0$$

est évidemment irréductible dans le domaine de rationalité  $\mathbf{R}', \dots, \mathbf{R}^s, \mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_{q-1}$ , ce que l'on prouve aisément en observant que  $\mathbf{V}_q^{p_q} - \varphi_q$  est

irréductible dans ce domaine et que  $p_q$  est un nombre premier. L'équation (4), qui peut être écrite

$$\psi(t, \theta_1 x_1) = \bar{\lambda}[\psi(t, x_1), \mathbf{R}', \dots, \mathbf{R}^s, \mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_{q-2}],$$

a donc pour conséquence

$$\psi(t, \theta_1 \theta x_1) = \bar{\lambda}[\psi(t, \theta x_1), \mathbf{R}', \dots, \mathbf{R}^s, \mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_{q-2}] = \psi(t, \theta_1 x_1).$$

De cette dernière relation on conclut enfin que l'on a

$$\theta_1 \theta x_1 = \theta^x \theta_1 x_1.$$

Les autres relations (3) se démontrent d'une manière analogue, et l'on peut enfin affirmer qu'elles constituent les conditions nécessaires et suffisantes pour que  $\mathbf{F}(x)$  soit résoluble algébriquement.

Les équations (3) sont identiques à celles que l'on obtient par la méthode de Galois.

