ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

R. LE VAVASSEUR

Solution d'une question posée par M. Hermite

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 1re série, tome 8, nº 2 (1894), p. G1-G3

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1894_1_8_2_G1_0>

SOLUTION

D'UNE

QUESTION POSÉE PAR M. HERMITE,

PAR M. LE VAVASSEUR,

Professeur au Lycée de Moulins.

1. *Problème.* — L'intégrale elliptique de seconde espèce

$$J = \int_0^K k^2 \operatorname{sn}^2 x \, dx$$

peut s'écrire sous la forme

$$J = K k^2 \operatorname{sn}^2(\xi, k),$$

ξ étant compris entre les limites o et K.

Cette quantité ξ donne le maximum de la fonction $\frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}$, comme le montre la relation de Jacobi

$$\int_0^x k^2 \operatorname{sn}^2 x \, dx = \frac{Jx}{K} - \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}.$$

On demande de la définir en fonction du module par une équation différentielle (Ch. Hermite, *Intermédiaire des Mathématiciens*, n° 1, janvier 1894).

2. Soit

$$J = \int_0^1 \frac{k^2 y^2 \, dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}, \qquad K = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}, \qquad k^2 + k'^2 = 1.$$

On a

$$\frac{dJ}{dk} = \frac{k(K-J)}{k'^2}, \qquad \frac{dK}{dk} = \frac{k^2 K - J}{kk'^2}.$$

Rappelons aussi que K et $K' = K(k')$ sont des intégrales de l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$kk'^2 \frac{d^2K}{dk^2} + (1 - 3k^2)\frac{dK}{dk} - kK = 0.$$

3. Partons de l'équation

$$J = K k^2 \operatorname{sn}^2(\xi, k).$$

Prenons une première fois la dérivée des deux membres de cette équation par rapport à k,

$$\begin{aligned}\frac{dJ}{dk} = &\left(k^2 \frac{dK}{dk} + 2kK\right)\operatorname{sn}^2(\xi, k)\\ &+ 2Kk^2 \operatorname{sn}(\xi, k)\operatorname{cn}(\xi, k)\operatorname{dn}(\xi, k)\frac{d\xi}{dk} + 2Kk^2\operatorname{sn}(\xi, k)\frac{\partial \operatorname{sn}(\xi, k)}{\partial k}.\end{aligned}$$

Dans cette équation, remplaçons $\frac{dJ}{dk}$, $\frac{dK}{dk}$ par leurs valeurs; remarquons, en outre, qu'on a

$$\operatorname{sn}(\xi, k) = \frac{\sqrt{J}}{k\sqrt{K}}, \qquad \operatorname{cn}(\xi, k) = \frac{\sqrt{k^2K - J}}{k\sqrt{K}}, \qquad \operatorname{dn}(\xi, k) = \frac{\sqrt{K - J}}{\sqrt{K}},$$

enfin que

$$kk' \frac{\partial \operatorname{sn}(x, k)}{\partial k} = k^2 \operatorname{sn} x \operatorname{cn}^2 x + \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x \left[\frac{Jx}{K} - \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)} - k^2 x\right]$$

(voir *Cours* Hermite, 3e édition, page 263).

Il vient, après simplifications,

$$kk'^2 \frac{d\xi}{dk} + \frac{J - k^2K}{K}\xi - \frac{\Theta'(\xi)}{\Theta(\xi)} = \frac{k^2K^2 - 2(1 + k^2)KJ + 3J^2}{2\sqrt{KJ(K - J)(k^2K - J)}}. \tag{1}$$

4. Posons, d'autre part, avec M. Hermite,

$$U(x) = \frac{Jx}{K} - \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)},$$

et servons-nous de la formule

$$kk'^2 \frac{\partial U}{\partial k} = U \frac{\partial U}{\partial x} - k^2\left(U + x\frac{\partial U}{\partial x}\right) + k^2(x - \operatorname{sn} x \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x)$$

(voir *Cours* Hermite, 3e édition, page 264).

On en déduit, en observant que ξ annule la dérivée par rapport à x de $\frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}$,

$$kk'^2 \frac{\partial}{\partial k}\left[\frac{\Theta'(\xi)}{\Theta(\xi)}\right] = \frac{\mathrm{J} - k^2\mathrm{K}}{\mathrm{K}} \frac{\Theta'(\xi)}{\Theta(\xi)} + \frac{\sqrt{\mathrm{KJ}(\mathrm{K}-\mathrm{J})(k^2\mathrm{K}-\mathrm{J})}}{\mathrm{K}^2}.$$

5. Prenant dès lors la dérivée par rapport à k des deux membres de l'équation (1) et éliminant $\frac{\Theta'(\xi)}{\Theta(\xi)}$ entre le résultat obtenu et l'équation (1), on trouve, après un calcul assez long, mais n'offrant aucune difficulté, que l'équation différentielle demandée est

$$kk'^2 \frac{d^2\xi}{dk^2} + (1 - 3k^2)\frac{d\xi}{dk} - k\xi = \frac{[k^2(\mathrm{K}-\mathrm{J})^2 + k'^2\mathrm{J}^2][\mathrm{J}^2 - k^2\mathrm{K}^2][(\mathrm{K}-\mathrm{J})^2 - k'^2\mathrm{K}^2]}{4kk'^2[\mathrm{KJ}(\mathrm{K}-\mathrm{J})(k^2\mathrm{K}-\mathrm{J})]^{\frac{3}{2}}}.$$

La fonction ξ de k sera donc de la forme

$$\xi = \mathrm{K}(k) f(k) + \mathrm{K}'(k)\varphi(k);$$

les fonctions $f(k)$ et $\varphi(k)$ seront données par de simples quadratures.