Annales de la faculté des sciences de Toulouse

E. Vessiot

Sur les systèmes d'équations différentielles du premier ordre qui ont des systèmes fondamentaux d'intégrales

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 1re série, tome 8, nº 3 (1894), p. H1-H33
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1894_1_8_3_H1_0>

SUR LES SYSTÈMES

D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE

QUI ONT DES SYSTÈMES FONDAMENTAUX D'INTÉGRALES,

PAR M. E. VESSIOT,

Chargé de Cours à la Faculté des Sciences de Toulouse.

Dans un précédent travail (¹), nous avons étudié les équations du premier ordre qui ont des systèmes fondamentaux d'intégrales; il s'agit ici des systèmes d'équations différentielles du premier ordre possédant la même propriété, c'est-à-dire des systèmes

$$\frac{dx_i}{dt} = \mathfrak{F}_i(x_1, \ldots, x_n, t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

dont l'intégrale générale peut se mettre sous la forme

$$x_i = \Phi_i(x_{11}, \ldots, x_{1n}, x_{21}, \ldots, x_{pn} | c_1, \ldots, c_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{2}$$

où $x_{11}, \ldots, x_{1n}; \ldots; x_{p1}, \ldots, x_{pn}$ sont p intégrales particulières quelconques formant ce que l'on peut appeler *un système fondamental*, où $c_1, \ldots, c_n$ sont les constantes d'intégration, et où la forme des fonctions Φ_i est indépendante du système fondamental d'intégrales qui y figure. Il peut arriver du reste, comme l'a fait remarquer M. Lie (²), qu'à un système (1) corresponde une infinité de systèmes de formules (2), le plus général dépendant de fonctions arbitraires.

Se bornant au cas où il n'y a qu'un seul système de formules (2), M. Guldberg (³) a montré qu'on peut appliquer aux systèmes (1) considérés la méthode qui m'avait servi pour une seule équation, et qu'alors le nombre p ne peut dépasser $n + 2$. J'en conclus, peu après (⁴), que ces sys-

(¹) *Annales de l'École Normale*, 1893.
(²) *Comptes rendus*, t. CXVI, p. 1233.
(³) *Ibid.*, p. 964.
(⁴) *Ibid.*, t. CXVI, p. 1112.

tèmes appartenaient à une classe très remarquable introduite dans la Science par M. Lie, et que nous proposons d'appeler *systèmes de Lie*. Ce sont les systèmes de la forme

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{r} \theta_j(t)\,\xi_{ji}(x_1, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{3}$$

où les fonctions $\xi_{ji}(x)$ sont les coefficients de r transformations infinitésimales définissant un groupe fini continu de transformations

$$X_j f = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ji}(x_1, \ldots, x_n)\,\frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (j = 1, 2, \ldots, r). \tag{4}$$

Nous appellerons aussi *équation de Lie* l'équation linéaire aux dérivées partielles qui équivaut au système de Lie

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{j=1}^{r} \theta_j(t)\,X_j f = 0. \tag{5}$$

Dans la Note déjà citée, M. Lie annonçait enfin que, dans le cas le plus général, la classe des systèmes (1), possédant des systèmes fondamentaux d'intégrales, se confond avec celle des systèmes de la forme (3). M. Lie rappelait en même temps que, dans son célèbre Mémoire du tome XXV des *Mathematische Annalen* (1), il avait esquissé une théorie de l'intégration du système (3), et indiqué cette propriété fondamentale qu'on peut en obtenir l'intégrale générale dès qu'on en connaît un nombre suffisant d'intégrales particulières.

Dans les pages qui suivent, après avoir établi l'identité des deux classes précédentes de systèmes d'équations différentielles, nous développons une théorie de l'intégration des *systèmes de Lie,* fondée sur la considération du *groupe des paramètres;* l'idée fondamentale en était indiquée dans notre dernière Note (déjà citée). On trouvera dans le Chapitre IV des résultats équivalents à ceux de M. Lie; mais la méthode employée dans le n° 2 de ce Chapitre nous appartient. Nous démontrons dans le Chapitre II que, dans tous les cas, l'intégration d'un système de Lie se ramène à celle

(1) Et déjà dans les Comptes rendus de la Société des Sciences de Christiania (nov. et déc. 1882).

d'équations linéaires, dès qu'on connaît les équations finies du groupe (4) qui y figure, résultat que M. Lie n'avait annoncé qu'avec une restriction ([1]). Le Chapitre V contient l'extension aux systèmes de Lie de la célèbre théorie de Galois sur les équations algébriques ([2]); nous y complétons en même temps notre théorie de l'intégration des équations différentielles linéaires ([3]). Dans le Chapitre III, nous avons appliqué notre méthode à deux exemples. Le premier est le problème classique du mouvement d'un solide qui a un point fixe, quand on connaît en fonction du temps la rotation instantanée; on verra comment la belle solution donnée par M. Darboux dans ses *Leçons de Géométrie* se présente ici naturellement. L'autre exemple, la recherche des trajectoires orthogonales d'une famille de sphères, nous avait été autrefois indiqué par M. Lie comme une application de ses idées générales sur l'intégration des équations différentielles. Nous nous faisons un plaisir de reconnaître que ces idées nous ont constamment guidé.

Enfin, le Chapitre VI est consacré à certains systèmes d'équations différentielles dont l'intégration se ramène à celle de systèmes de Lie. On y retrouvera, obtenus par une méthode plus simple et exposés, nous l'espérons, avec une entière rigueur, les résultats que nous avions donnés dans une Note présentée à l'Académie des Sciences ([4]).

Nous avons supposé connus les principes de la théorie des groupes de transformations, y compris la notion des deux groupes des paramètres et du groupe adjoint, mais nous renvoyons chaque fois aux Chapitres à consulter dans le grand Ouvrage de MM. Lie et Engel ([5]). Nous serions heureux si notre travail pouvait montrer, une fois de plus, l'importance capitale de la théorie des groupes de transformations pour l'étude des équations différentielles.

---

(1) *Voir* la Note des *Comptes rendus* déjà citée.

(2) Nous avions annoncé déjà cette extension dans une Note présentée à l'Académie des Sciences en 1891.

(3) *Annales de l'École Normale*, 1892.

(4) *Comptes rendus*, t. CXVI, p. 427.

(5) *Theorie der Transformationsgruppen*, unter Mitwirkung von Dr Fr. Engel, bearbeitet von Sophus Lie. (Pour renvoyer à cet Ouvrage, nous emploierons l'abréviation : *Transf. Gruppen*.)

I. — *Généralités.*

1. Soit

$$\frac{dx_i}{dt} = \mathfrak{F}_i(x_1, \ldots, x_n, t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

un système d'équations différentielles du premier ordre, dont l'intégrale générale s'exprime au moins d'une manière par des formules

$$x_i = \Phi_i(x_{11}, \ldots, x_{1n}, x_{21}, \ldots, x_{pn} | c_1, \ldots, c_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{2}$$

où $x_{11}, \ldots, x_{1n}, \ldots, x_{p1}, \ldots, x_{pn}$ sont p systèmes *quelconques* d'intégrales particulières. Ces formules peuvent se résoudre en $c_1, \ldots, c_n$ et s'écrire

$$c_k = \Psi_k(x_{11}, \ldots, x_{1n}, x_{21}, \ldots, x_{pn}, x_1, \ldots, x_n) \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

On a donc, entre $p+1$ systèmes *quelconques* d'intégrales particulières, les relations

$$\Psi_k(x_{11}, \ldots, x_{1n}, x_{21}, \ldots, x_{pn}, x_{p+1,1}, \ldots, x_{p+1,n}) = \text{const.}, \tag{3}$$

d'où l'on conclut, par différentiation, que chacune des n fonctions Ψ_k satisfait identiquement à l'équation linéaire

$$\sum_{ij} \mathfrak{F}_i(x_{j,1}, \ldots, x_{j,n}, t) \frac{\partial f}{\partial x_{ji}} = 0 \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, n \\ j = 1, 2, \ldots, p+1 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Or les Ψ_k sont indépendants de t; ceci aura donc lieu pour chaque valeur de t, et, par suite, les équations déduites de (4) en y donnant à t des valeurs particulières, mais arbitraires, en nombre suffisant, ne sauraient être linéairement indépendantes. On aura donc des identités de la forme

$$\mathfrak{F}_i(x_{j,1}, \ldots, x_{j,n}, t) = \sum_{h=1}^{q} \theta_h \mathfrak{F}_i(x_{j,1}, \ldots, x_{j,n}, t_h),$$

où $t_1, \ldots, t_q$ sont q valeurs particulières de t. Ces identités ayant lieu pour toutes les valeurs de j, les coefficients θ_h ne peuvent dépendre que de t, et l'on peut écrire

$$\mathfrak{F}_i(x_1, \ldots, x_n, t) = \sum_{h=1}^{q} \theta_h(t) \xi_{hi}(x_1, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{5}$$

Si l'on pose alors

$$X_h f = \sum_{i=1}^{n} \xi_{hi}(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

$$X_h^{(j)} f = \sum_{i=1}^{n} \xi_{hi}(x_{j1}, \ldots, x_{jn}) \frac{\partial f}{\partial x_{ji}},$$

on voit, en supposant les θ_h linéairement indépendants, c'est-à-dire que q a la plus petite valeur possible, que chacun des Ψ_k satisfera aux q équations linéaires

$$X_h^{(1)} f + X_h^{(2)} f + \ldots + X_h^{(p+1)} f = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, q).$$

On peut donc déduire de ces équations un système complet, qui contiendra, par exemple, r équations de la même forme

$$X_h^{(1)} f + \ldots + X_h^{(p+1)} f = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, r).$$

Cela étant, on aura des identités

$$(X_i^{(j)} X_k^{(j)}) = \sum_s c_{i,k,s} X_s^{(j)},$$

où, à cause de l'indice j, les c_{iks} sont des constantes. Donc, en introduisant dans les identités (5), si $r > q$, $r - q$ fonctions identiquement nulles, $\theta_{q+1}, \ldots, \theta_r$, on voit que le système proposé est de la forme

$$(6) \qquad \frac{dx_i}{dt} = \sum_{h=1}^{r} \theta_h(t) \xi_{hi}(x_1, \ldots, x_n), \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

les r transformations infinitésimales

$$(7) \qquad X_h f = \sum_{i=1}^{n} \xi_{hi}(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (h = 1, 2, \ldots, r)$$

étant r transformations infinitésimales indépendantes d'un groupe à r paramètres, c'est-à-dire que c'est un *système de Lie.*

Remarque. — La démonstration précédente fournit en même temps la marche à suivre pour reconnaître si un système proposé est un système de Lie.

2. Réciproquement (1), soit donné un système de Lie (6), et déterminons n intégrales indépendantes du système complet

$$X_h^{(1)}f + X_h^{(2)}f + \ldots + X_h^{(p+1)}f = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, r),$$

où $0 \leqq np - r < n$. Soient

$$\Psi_k(x_{11}, \ldots, x_{1n}, x_{21}, \ldots, x_{pn}, x_{p+1,1}, \ldots, x_{p+1,n}) \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

ces intégrales; on peut supposer qu'elles sont indépendantes comme fonctions de $x_{p+1,1}, \ldots, x_{p+1,n}$ par exemple. Les équations

$$\Psi_k(x_{11}, \ldots, x_{1n}, x_{21}, \ldots, x_{pn}, x_1, \ldots, x_n) = c_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

définissent alors l'intégrale générale de (6), si $x_{11}, \ldots, x_{1n}, \ldots, x_{p1}, \ldots, x_{pn}$ sont p systèmes d'intégrales particulières; car on a, en différentiant par rapport à t dans cette hypothèse,

$$\frac{\partial \Psi_k}{\partial t} = \sum_{j=1}^{p} \sum_{h=1}^{r} \theta_h(t) X_h^{(j)} \Psi_k = -\sum_{h=1}^{r} \theta_h(t) X_h \Psi_k,$$

de sorte que chacune des fonctions

$$\Psi_k(x_{11}, \ldots, x_{pn}, x_1, \ldots, x_n) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

où les x_{ji} sont remplacés par leurs valeurs en fonction de t, est intégrale de l'équation linéaire *équivalente* au système (6),

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{h=1}^{r} \theta_h(t) X_h f = 0. \tag{8}$$

Nous sommes donc arrivé au résultat annoncé par M. Sophus Lie :

Les systèmes d'équations différentielles du premier ordre possédant des systèmes fondamentaux d'intégrales sont les systèmes de Lie.

3. Ces systèmes ont cette propriété remarquable qu'on peut dire comment figurent les constantes arbitraires dans l'intégrale générale. Repre-

(1) Le principe de la démonstration de cette réciproque est dû à M. Lie. Nous y employons les *invariants* de $p + 1$ points, pris par rapport au groupe (7).

nons, en effet, le système (6), et soient

$$x_i = f_i(x_1^0, \ldots, x_n^0 | a_1, \ldots, a_r) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{9}$$

les équations finies du groupe (7), que nous appellerons *le groupe* G *correspondant au système.* Je dis qu'elles représentent l'intégrale générale du système (6), en y considérant $x_1^0, \ldots, x_n^0$ comme des constantes arbitraires et $a_1, \ldots, a_r$ comme des fonctions de t convenablement choisies. Résolvons-les en effet par rapport à $x_1^0, \ldots, x_n^0$, ce qui donne

$$x_i^0 = \mathrm{F}_i(x_1, \ldots, x_n | a_1, \ldots, a_r), \tag{10}$$

et cherchons à déterminer $a_1, \ldots, a_r$ comme des fonctions de t, de manière que les seconds membres soient n intégrales de l'équation (8) : cela donne

$$\sum_{k=1}^{r} \frac{\partial \mathrm{F}_i}{\partial a_k} \frac{da_k}{dt} + \sum_{j=1}^{r} \theta_j(t) \mathrm{X}_j \mathrm{F} = 0,$$

ce qui s'écrit, en appliquant les identités fondamentales dans la théorie des groupes (1),

$$\mathrm{X}_j \mathrm{F} + \mathrm{A}_j \mathrm{F} = 0,$$

où les transformations infinitésimales

$$\mathrm{A}_j \mathrm{F} = \sum_{k=1}^{r} \alpha_{jk}(a_1, \ldots, a_r) \frac{\partial f}{\partial a_k} \qquad (j = 1, 2, \ldots, r) \tag{11}$$

définissent le *groupe des paramètres de* G,

$$\sum_{k=1}^{r} \frac{\partial \mathrm{F}_i}{\partial a_k} \left[\frac{da_k}{dt} - \sum_{j=1}^{r} \theta_j(t) \alpha_{jk}(a_1, \ldots, a_r) \right] = 0, \tag{12}$$

et ces identités seront évidemment vérifiées si les a_k sont intégrales du système

$$\frac{da_k}{dt} = \sum_{j=1}^{r} \theta_j(t) \alpha_{jk}(a_1, \ldots, a_r). \tag{13}$$

Elles ne le seront du reste qu'à cette condition, car les r paramètres

(1) *Transf. Gruppen,* t. I, Ch. 9.

$a_1, \ldots, a_r$ sont *essentiels* dans les équations (10), et, par suite, les n fonctions F_i ne peuvent vérifier une équation linéaire telle que (12) sans que les coefficients y soient tous nuls. Nous avons donc le résultat suivant :

Les équations (9) *représentent l'intégrale générale du système* (6) *à la condition* (*nécessaire et suffisante*) *que* $a_1, \ldots, a_r$ *y soient un système d'intégrales du système* (13).

4. Appliquons ce résultat au système (13), en remarquant que le groupe (11) est à lui-même son groupe des paramètres (¹). Soient

$$a_k = \varphi_k(a_1^0, \ldots, a_r^0 \mid b_1, \ldots, b_r) \tag{14}$$

ses équations finies. Elles définiront l'intégrale générale dès que $b_1, \ldots, b_r$ sera une intégrale particulière du système (13) lui-même. C'est là une propriété bien remarquable des systèmes de Lie dont le groupe correspondant est simplement transitif [on sait, en effet, que les équations finies d'un tel groupe peuvent toujours s'écrire sous la forme d'un groupe des paramètres (²)]. Actuellement, nous en pouvons conclure, en supposant connues les équations finies du groupe G, qu'au lieu d'intégrer le système (6), on peut intégrer le système (13).

Mais l'inverse est vrai aussi, car si, dans l'une quelconque des fonctions F_i, on met à la place des x_i un système d'intégrales du système (6), on aura

$$\frac{\partial F_i}{\partial t} = \sum \frac{\partial F_i}{\partial x_k} \sum \theta_j(t)\xi_{jk}(x) = \sum \theta_j(t) X_j F_i,$$

et, par suite, toujours à cause des mêmes identités que tout à l'heure,

$$\frac{\partial F_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{r} \theta_j(t) A_j F_i = 0,$$

c'est-à-dire que F_i est alors une intégrale de l'équation linéaire

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{j=1}^{r} \theta_j(t) A_j f = 0, \tag{15}$$

(¹) *Transf. Gruppen*, t. I, Ch. 21.
(²) *Ibid.*, Ch. 20, p. 394.

équivalente au système (13). Comme, de plus, $a_1, \ldots, a_r$ sont des paramètres *essentiels* dans les n fonctions F_i, en employant un nombre suffisant d'intégrales particulières du système (6), on arrivera à avoir r intégrales indépendantes de l'équation (15), et dès lors le système (13) sera intégré.

Nous arrivons donc à cette conséquence :

Si les équations finies du groupe G *sont connues, l'intégration du système* (6) *est équivalente à celle du système* (13).

5. L'application du principe précédent, fondamental pour la suite, suppose connues les équations finies du groupe G. Cette hypothèse est dans la nature des choses, car *l'intégration du système* (6) *fournit les équations finies de* G. En effet, le théorème du n° 3 signifie que *les équations* (6) *définissent une famille de transformations finies du groupe* G. La réciproque est à peu près évidente, car toute telle famille (à un paramètre t) est représentée par les équations (9) où $a_1, \ldots, a_r$ sont fonctions du paramètre, de sorte qu'on a, en vertu du premier théorème fondamental de la théorie des groupes,

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^{r} \frac{\partial x_i}{\partial a_k}\frac{da_k}{dt} = \sum_{k=1}^{r} \frac{da_k}{dt}\sum_{j=1}^{r} \psi_{jk}(a_1, \ldots, a_r)\xi_{ji}(x_1, \ldots, x_n),$$

c'est-à-dire que les x_i satisfont à un système de Lie. On peut, dès lors, supposer, en revenant au système donné (6), que les transformations qu'il définit ne sont contenues dans aucun sous-groupe de G, sans quoi c'est ce sous-groupe à qui on ferait jouer le rôle de G; de sorte qu'en effectuant successivement r des transformations définies par l'intégrale générale de (6), on obtiendra une transformation du groupe G avec r paramètres essentiels, c'est-à-dire les équations finies de G.

Il est donc naturel de décomposer en deux parties l'intégration du système (6), la première consistant dans la recherche des équations finies du groupe G. Nous ne nous occuperons que de la seconde, c'est-à-dire que, dans la suite, *les équations finies de* G *sont toujours supposées connues.*

II. — *Systèmes isomorphes. Réduction aux systèmes linéaires.*

1. Considérons deux systèmes de Lie formés avec les mêmes fonctions $\theta_h(t)$,

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum \theta_h(t)\xi_{hi}(x), \qquad \frac{dz_l}{dt} = \sum \theta_h(t)\zeta_{hl}(z) \quad \begin{pmatrix} l = 1, 2, \ldots, n \\ i = 1, 2, \ldots, m \end{pmatrix};$$

nous dirons qu'ils sont isomorphes si les groupes correspondants

$$X_h f = \sum \xi_{hi}(x)\frac{\partial f}{\partial x_i}, \qquad Z_h f = \sum \zeta_{hl}(z)\frac{\partial f}{\partial z_l} \qquad (h = 1, 2, \ldots, r)$$

sont isomorphes holoédriquement, et se trouvent, sous la forme précédente, rapportés isomorphiquement l'un à l'autre (1). On peut alors supposer leurs équations finies écrites sous une forme telle qu'ils aient même groupe des paramètres. C'est là un théorème de M. Lie (2), que nous retrouverons du reste bientôt. A ces deux systèmes correspond alors le même système (13), et, par suite, chacun des systèmes fournit, par son intégration, celle de l'autre. Nous pouvons donc dire que deux systèmes isomorphes sont équivalents, quel que soit le nombre des variables dont ils dépendent.

De là, cette conséquence fondamentale que l'intégration d'un système de Lie dépend uniquement de la nature des fonctions $\theta_h(t)$ et de la *structure* [*Zusammensetzung* (3)] du groupe correspondant, tous les systèmes isomorphes formant une classe, dont on peut prendre un représentant particulier pour type canonique, par exemple un système dépendant du moindre nombre de variables possible, c'est-à-dire dépendant d'une équation différentielle d'ordre minimum. C'est ainsi que l'intégration de tout système de Lie dont le groupe a la structure du groupe projectif à une variable se ramènera à l'intégration d'une équation de Riccati. Nous en donnons un exemple dans le Chapitre suivant.

2. Reprenons le système

$$(1) \qquad \frac{dx_i}{dt} = \sum_{h=1}^{r} \theta_h(t)\xi_{hi}(x_1, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

---

(1) *Transf. Gruppen,* t. I, Ch. 17.
(2) *Ibid.*, t. III, Ch. 26, et t. I, Ch. 17.
(3) *Ibid.*, t. I, Ch. 17.

dont le groupe *correspondant* est

$$X_h f = \sum_{i=1}^{n} \xi_{hi}(x) \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (h = 1, 2, \ldots, r). \tag{2}$$

Le *groupe adjoint* (¹) de ce groupe

$$e_k = \sum_{j=1}^{r} \rho_{kj}(a_1, \ldots, a_r) e_j^0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, r), \tag{3}$$

dont les transformations infinitésimales sont

$$E_k f = \sum_{s=1}^{r} \sum_{i=1}^{r} c_{iks} e_i \frac{\partial f}{\partial e_s} \qquad (k = 1, 2, \ldots, r), \tag{4}$$

est isomorphe au proposé et, sous la forme (3), il a même groupe des paramètres. L'isomorphisme est de plus holoédrique, si le groupe (2) ne contient pas de transformation infinitésimale *distinguée* [*ausgezeichnet* (²)]. Supposons-nous dans ce cas : il résulte alors du numéro précédent que le système (1) est équivalent au système linéaire isomorphe

$$\frac{de_s}{dt} = \sum_{k=1}^{r} \theta_k(t) \sum_{i=1}^{x} c_{iks} e_i. \tag{5}$$

Si le groupe (2) contient r' transformations infinitésimales distinguées, les équations (3) ne dépendent plus que de $r - r' = r''$ paramètres essentiels, le groupe (4) n'étant plus qu'à r'' paramètres. Si donc nous voulons étudier de quelle utilité sera, pour l'intégration du système proposé, celle du système linéaire (5), nous sommes conduit à reprendre les considérations du Chapitre précédent (nᵒˢ 3 et 4), en supposant que les équations (9) définissent un groupe, mais que $a_1, \ldots, a_r$ n'y sont pas des paramètres essentiels. On voit alors que les $F_i(x_1, \ldots, x_n \,|\, a_1, \ldots, a_r)$ sont encore des intégrales de l'équation (15), mais on n'en pourra plus déduire que r'' intégrales distinctes, si r'' est le nombre des paramètres essentiels du groupe G.

Donc ici l'intégration du système (5) fournira r'' intégrales de l'équa-

(¹) *Transf. Gruppen*, t. I, Ch. 16.
(²) *Ibid.*

tion

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{j=1}^{r} \theta_j(t) A_j f = 0.$$

On voit de plus facilement que ce sont celles qui sont en même temps intégrales des équations

$$A_1 f = 0, \quad \ldots, \quad A_{r'} f = 0,$$

en supposant que $A_1 f, \ldots, A_{r'} f$ sont les transformations infinitésimales distinguées du groupe des paramètres de (2).

Les autres s'obtiennent par des quadratures; l'une d'elles en effet s'obtient, par exemple, en intégrant le système complet

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \theta_1(t) A_1 f = 0, \quad A_2 f = 0, \quad \ldots, \quad A_r f = 0,$$

qui se ramène, en appliquant la méthode de M. Mayer, à une équation unique du premier ordre à deux variables séparées. En faisant ensuite jouer à $A_2 f, \ldots, A_{r'} f$ successivement le rôle que joue ici $A_1 f$, on obtiendra bien ainsi r' intégrales nouvelles indépendantes des premières.

Donc, *dans le cas le plus défavorable, l'intégration du système proposé n'exige, outre l'intégration du système linéaire adjoint* (5), *que des quadratures.*

3. Appliquons le théorème précédent au cas où les fonctions $\theta_h(t)$ se réduisent à des constantes λ_h. L'intégration du système (1) donne alors les équations finies du groupe (2) sous leur forme canonique. D'autre part, le système (5) étant alors un système linéaire à coefficients constants, son intégration peut toujours s'effectuer. D'où ce théorème de Lie [1] :

Lorsqu'on connaît les équations finies d'un groupe, on peut toujours les mettre sous forme canonique; l'opération exige au plus des quadratures.

M. Lie en a déduit des conséquences importantes. Supposons d'abord deux groupes isomorphes holoédriquement. On pourra toujours (c'est un problème d'Algèbre) écrire leurs transformations infinitésimales de manière

---

(1) *Transf. Gruppen*, t. III, Ch. 26.

que la correspondance isomorphique y soit en évidence ; soient

$$X_1 f, \quad \ldots, \quad X_r f; \qquad Z_1 f, \quad \ldots, \quad Z_r f.$$

Si l'on intègre alors les deux systèmes

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum \lambda_h \xi_{hi}(x), \qquad \frac{dz_l}{dt} = \sum \lambda_h \zeta_{hl}(z),$$

on obtiendra les équations finies des deux groupes sous une forme telle qu'ils auront même groupe des paramètres. Or cela exige au plus, d'après ce qu'on vient de voir, des quadratures, si l'on connaît déjà, sous une forme quelconque, les équations finies des deux groupes. Nous retrouvons donc le résultat invoqué plus haut.

Une autre conséquence, à laquelle on arrive d'une manière analogue, et qui nous sera utile, est que, dès qu'on connaît les équations finies d'un groupe, on peut considérer comme connues celles de tous ses sous-groupes et, par suite, les invariants de tous ces sous-groupes.

III. — *Applications.*

1. *Mouvement d'un solide qui a un point fixe.* — On suppose connues, en fonction du temps, les composantes de la rotation instantanée par rapport aux axes fixes, par exemple. Le problème revient alors à l'intégration du système

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = qz - ry, \\ \dfrac{dy}{dt} = rx - pz, \\ \dfrac{dz}{dt} = py - qx, \end{cases}$$

où p, q, r sont trois fonctions données de t. C'est un système de Lie, le groupe correspondant étant le groupe des rotations

$$(2) \qquad X_1 f = y\frac{\partial f}{\partial z} - z\frac{\partial f}{\partial y}, \qquad X_2 f = z\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial z}, \qquad X_3 f = x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x}.$$

Il est isomorphe au groupe projectif à une variable

$$\frac{\partial f}{\partial u}, \quad u\frac{\partial f}{\partial u}, \quad u^2\frac{\partial f}{\partial u},$$

ce qu'on met en évidence en l'écrivant

$$(3) \qquad U_3 f = iu\frac{\partial f}{\partial u}, \qquad U_1 f = \frac{i}{2}(u^2 - 1)\frac{\partial f}{\partial u}, \qquad U_2 f = \frac{1}{2}(u^2 + 1)\frac{\partial f}{\partial u},$$

de sorte que le système (1) est équivalent à l'équation isomorphe de Riccati

$$(4) \qquad \frac{du}{dt} = \frac{1}{2}(q - ip) + ir\,u + \frac{1}{2}(q + ip)u^2.$$

L'équation finie du groupe (3) est

$$(5) \qquad u = \frac{u_0 + a}{bu_0 + c}.$$

Pour écrire sous forme isomorphique les équations du groupe (2), il suffit de remarquer qu'il transforme projectivement les points du cercle imaginaire de l'infini, et, par suite, les génératrices rectilignes de chaque système d'une sphère quelconque ayant son centre à l'origine. On posera donc

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = w, \qquad x + iy = (w + z)u, \qquad x + iy = (z - w)v,$$

c'est-à-dire

$$(6) \qquad x = w\frac{uv - 1}{v - u}, \qquad y = -iw\frac{uv + 1}{v - u}, \qquad z = w\frac{u + v}{v - u}$$

avec

$$(6') \qquad u = \frac{u_0 + a}{bu_0 + c}, \qquad v = \frac{v_0 + a}{bv_0 + c},$$

et l'on aura, pour les équations cherchées,

$$(7) \qquad \begin{cases} x = x_0\,\dfrac{1 - a^2 - b^2 + c^2}{2(c - ab)} + y_0\,\dfrac{i}{2}\,\dfrac{1 + a^2 - b^2 - c^2}{c - ab} + z_0\,\dfrac{a - bc}{c - ab}, \\[2ex] y = x_0\,\dfrac{i}{2}\,\dfrac{-1 + a^2 - b^2 + c^2}{c - ab} + y_0\,\dfrac{1 + a^2 + b^2 + c^2}{2(c - ab)} + z_0\,\dfrac{-i(a + bc)}{c - ab}, \\[2ex] z = x_0\,\dfrac{b - ac}{c - ab} + y_0\,\dfrac{i(b + ac)}{c - ab} + z_0\,\dfrac{c + ab}{c - ab}. \end{cases}$$

La solution est donc la suivante. On intègre l'équation (4), et l'on met l'intégrale générale sous la forme (5), u_0 étant la constante d'intégration, pour en tirer a, b, c en fonction de t, et on porte ces valeurs dans les équations (7). Si u_0 est la valeur de u pour $t = t_0$, les valeurs (7) se réduisent respectivement pour $t = t_0$ à x_0, y_0, z_0.

On peut enfin remarquer que les équations (6), où $w = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$, et où u et v ont les valeurs (6′), fournissent déjà l'intégrale générale cherchée.

2. *Trajectoires orthogonales d'une famille de sphères.* — Soit

$$(X - g)^2 + (Y - h)^2 + (Z - k)^2 - r^2 = 0$$

l'équation des sphères de la famille considérée, au paramètre t.

Prenant pour inconnues

$$x = \frac{X - g}{r}, \qquad y = \frac{Y - h}{r}, \qquad z = \frac{Z - k}{r},$$

et posant

$$dg = 2r\lambda(t)\,dt, \qquad dh = 2r\mu(t)\,dt, \qquad dk = 2r\nu(t)\,dt,$$

on voit que tout revient à intégrer le système

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x(\lambda x + \mu y + \nu z) - 2\lambda, \\[2mm] \dfrac{dy}{dt} = 2y(\lambda x + \mu y + \nu z) - 2\mu, \\[2mm] \dfrac{dz}{dt} = 2z(\lambda x + \mu y + \nu z) - 2\nu \end{cases}$$

avec la condition

$$(2) \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

dont on voit qu'il suffit qu'elle soit remplie pour $t = t_0$.

Les trois transformations infinitésimales en évidence

$$X_1 f = x\left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z}\right) - \frac{\partial f}{\partial x},$$
$$X_2 f = y\left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z}\right) - \frac{\partial f}{\partial y},$$
$$X_3 f = z\left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z}\right) - \frac{\partial f}{\partial z},$$

ne forment pas un groupe, mais leurs *crochets* donnent les trois nouvelles transformations

$$Y_1 f = y\frac{\partial f}{\partial z} - z\frac{\partial f}{\partial y},\qquad Y_2 f = z\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial z},\qquad Y_3 f = x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x},$$

qui constituent avec elles le groupe projectif de la sphère (2). Ce groupe se compose, comme l'on sait ([1]), de deux sous-groupes invariants

$$(3)\qquad \begin{cases} C_1 = X_1 - iY_1, & C_2 = X_2 - iY_2, & C_3 = X_3 - iY_3, \\ D_1 = X_1 + iY_1, & D_2 = X_2 + iY_2, & D_3 = X_3 + iY_3, \end{cases}$$

et est isomorphe au groupe

$$\frac{\partial f}{\partial u},\quad u\frac{\partial f}{\partial u},\quad u^2\frac{\partial f}{\partial u},\quad \frac{\partial f}{\partial v},\quad v\frac{\partial f}{\partial v},\quad v^2\frac{\partial f}{\partial v},$$

comme on le voit en écrivant ce dernier

$$(4)\qquad \begin{cases} U_3 f = 2u\dfrac{\partial f}{\partial u}, & U_2 f = -i(1+u^2)\dfrac{\partial f}{\partial u}, & U_1 f = (1-u^2)\dfrac{\partial f}{\partial u}, \\ V_3 f = 2v\dfrac{\partial f}{\partial v}, & V_1 f = +i(1+v^2)\dfrac{\partial f}{\partial v}, & V_1 f = (1-v^2)\dfrac{\partial f}{\partial v}, \end{cases}$$

de sorte que le système (1) est isomorphe au système des deux équations de Riccati

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} = (\nu - \mu i) + 2\lambda u - (\nu + \mu i)u^2, \\ \dfrac{dv}{dt} = (\nu + \mu i) + 2\lambda v - (\nu - \mu i)v^2. \end{cases}$$

Les équations finies du groupe (4) sont

$$(6)\qquad u = \frac{u_0 + a}{bu_0 + c},\qquad v = \frac{v_0 + a'}{b'v_0 + c'},$$

et, pour mettre sous forme isomorphique celles du groupe (3), on voit facilement qu'il suffit de poser

$$x + iy = u(1+z),\qquad x - iy = v(1+z),$$

c'est-à-dire

$$(7)\qquad x = \frac{u+x}{1+uv},\qquad y = \frac{i(v-u)}{1+uv},\qquad z = \frac{1-uv}{1+uv}.$$

([1]) *Transf. Gruppen*, t. III, Ch. 10.

Elles deviennent alors, par un calcul analogue à celui du problème précédent,

$$
(8)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{x}{\mathrm{A}} = \frac{y}{\mathrm{B}} = \frac{z}{\mathrm{C}} = \frac{1}{\mathrm{D}},\\
&\mathrm{A} = (c + c' + ab' + ba')x_0 - i(c - c' + ab' - ba')y_0 + (ac' + ca' - b - b')z_0 + (ac' + ca' + b + b'),\\
&\mathrm{B} = i(c - c' - ab' + ba')x_0 + (c + c' - ab' - ba')y_0 + i(ca' - ac' - b + b')z_0 + i(ca' - ac' + b - b'),\\
&\mathrm{C} = (-a - a' + bc' + cb')x_0 + i(a - a' + bc' - cb')y_0 + (1 - aa' - bb' + cc')z_0 + (-1 - aa' + bb' + cc'),\\
&\mathrm{D} = (a + a' + bc' + cb')x_0 - i(a - a' + cb' - bc')y_0 + (aa' - bb' + cc' - 1)z_0 + (aa' + bb' + cc' + 1),
\end{aligned}
\right.
$$

On intégrera donc les équations (5) et l'on mettra l'intégrale générale sous la forme (6), u_0 et v_0 étant les valeurs de u et v pour $t = t_0$. On en tirera a, b, c, a', b', c' en fonction de t, et l'on portera dans les équations (8), où l'on devra supposer $x_0 + y_0^2 + z_0^2 = 1$. Elles fourniront l'intégrale cherchée. On peut remarquer qu'au fond les formules (7) répondent déjà à la question.

Remarquons enfin que, si l'on se borne au cas des quantités réelles, il suffit d'intégrer une seule des équations (5); son intégrale générale étant

$$u = \varphi(t) + i\psi(t),$$

celle de l'autre est

$$v = \varphi(t) - i\psi(t),$$

et les équations (7) se réduisent à

$$x = \frac{2\varphi}{1 + \varphi^2 + \psi^2}, \qquad y = \frac{2\psi}{1 + \varphi^2 + \psi^2}, \qquad z = \frac{1 - \varphi^2 - \psi^2}{1 + \varphi^2 + \psi^2}.$$

On peut encore se servir des équations (8), en y posant

$$
\begin{aligned}
a &= \alpha + i\alpha', & b &= \beta + i\beta', & c &= \gamma + i\gamma',\\
a' &= \alpha - i\alpha', & b' &= \beta - i\beta', & c &= \gamma - i\gamma';
\end{aligned}
$$

elles deviennent

$$\frac{x}{\mathfrak{A}} = \frac{y}{\mathfrak{B}} = \frac{z}{\mathfrak{C}} = \frac{1}{\mathfrak{D}}$$

avec

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{A} &= (2\gamma + \alpha\beta + \alpha'\beta')x_0 + (2\gamma' + \alpha\beta' - \beta\alpha')y_0 + (\alpha\gamma - 2\beta)z_0 + (\alpha\gamma + 2\beta),\\
\mathfrak{B} &= (-2\gamma' + \alpha\beta' - \beta\alpha')x_0 + (2\gamma - \alpha\beta)y_0 + (\alpha'\gamma' + 2\beta')z_0 + (\alpha'\gamma' - 2\beta'),\\
\mathfrak{C} &= (-2\alpha + \beta\gamma)x_0 + (-2\alpha' - \beta\gamma' + \gamma\beta')y_0 + (1 - \alpha^2 - \alpha'^2 - \beta^2 - \beta'^2 + \gamma^2 + \gamma'^2)z_0 - (1 + \alpha^2 + \alpha'^2 - \beta^2 - \beta'^2 - \gamma^2 - \gamma'^2),\\
\mathfrak{D} &= (2\alpha + \beta\gamma)x_0 + (2\alpha' - \beta\gamma' + \gamma\beta')y_0 + (-1 + \alpha^2 + \alpha'^2 - \beta^2 - \beta'^2 + \gamma^2 + \gamma'^2)z_0 + (1 + \alpha^2 + \alpha'^2 + \beta^2 + \beta'^2 + \gamma^2 + \gamma'^2).
\end{aligned}
$$

IV. — *Réduction à des systèmes simples.*

1. Nous dirons qu'un système de Lie est simple, si le groupe correspondant est simple. L'application de la théorie de M. Lie pour l'intégration des systèmes complets (1) qui admettent un groupe va nous montrer que *l'intégration de tout système de Lie peut se ramener à celle d'une suite de systèmes simples.*

Considérons à cet effet l'équation équivalente au système proposé (2)

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{j=1}^{r} \theta_j(t)\, A_j f = 0; \tag{15}$$

elle admet évidemment le *second groupe des paramètres* (3) du groupe G

$$B_h f = \sum_{k=1}^{r} \beta_{hk}(a_1 \ldots a_r) \frac{\partial f}{\partial a_k} \qquad (h = 1, 2, \ldots, r), \tag{16}$$

puisque les deux groupes des paramètres sont *réciproques*, c'est-à-dire que l'on a

$$(A_j B_h) = 0 \qquad (j, h = 1, 2, \ldots, r).$$

Nous pouvons donc lui appliquer la théorie de M. Lie, comme nous allons l'indiquer rapidement.

Le groupe (16) est isomorphe au groupe donné G. Supposons-les *non simples*, et soit

$$B_1 f, \quad \ldots, \quad B_{r'} f \tag{17}$$

un sous-groupe invariant maximum de (16). Comme on connaît les équations finies du groupe (16), on connaît aussi celles de (17) et par suite ses invariants, et soient par exemple

$$a'_1(a_1 \ldots a_r), \quad \ldots, \quad a'_{r-r'}(a_1 \ldots a_r)$$

$r - r'$ invariants indépendants de ce sous-groupe. Introduisons-les comme

(1) *Mathematische Annalen*, t. XXV.
(2) Nous reprenons les notations et numéros du Chap. I.
(3) *Transf. Gruppen*, t. III, Ch. 27.

nouveaux paramètres, à la place de $a_{r'+1}, \ldots, a_r$ par exemple. Il vient

$$
(18) \qquad \begin{cases} A_j f = A'_j f + \overline{A_j} f & (j = 1, 2, \ldots, r), \\ B_k f = B'_k f & (k = 1, 2, \ldots, r'), \\ B_{r'+h} f = B'_{r'+h} f + \overline{B_{r'+h}} f & (h = 1, 2, \ldots, r - r') \end{cases}
$$

avec

$$
A'_j f = \sum_{k=1}^{r'} \alpha'_{jk}(a_1 \ldots a_{r'}\, a'_1 \ldots a'_{r-r'}) \frac{\partial f}{\partial a_k},
$$

$$
\overline{A_j} f = \sum_{h=1}^{r-r'} \alpha'_{j,r'+h}(a'_1 \ldots a'_{r-r'}) \frac{\partial f}{\partial a'_h}
$$

et des formules analogues pour les $B'f$ et les $\overline{B}f$. On voit alors que l'on peut intégrer d'abord l'équation en $a'_1 \ldots a'_{r-r'}$ et t

$$
\frac{\partial f}{\partial t} + \sum \theta_j(t)\, \overline{A_j} f = 0,
$$

qui admet le groupe *simple*

$$
\overline{B_{r'+1}} f, \quad \ldots, \quad \overline{B_r} f.
$$

Cette intégration effectuée, nous prenons pour nouvelles variables, au lieu de $a'_1 \ldots a'_{r-r'}$, $r - r'$ intégrales indépendantes de cette équation; $a''_1(a' \mid t), \ldots, a''_{r-r'}(a' \mid t)$, ce qui donnera à l'équation (15) la forme

$$
(19) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} + \sum \theta_j(t)\, A''_j f = 0, \\ A''_j f = \displaystyle\sum_{k=1}^{r'} \alpha''_{jk}(a_1 \ldots a_{r'} \mid a''_1 \ldots a''_{r-r'} \mid t) \frac{\partial f}{\partial a_k}, \end{cases}
$$

et aux transformations du groupe (18) une forme analogue

$$
(20) \qquad B''_h f = \sum_{k=1}^{r'} \beta''_{hk}(a_1 \ldots a_r \mid a''_1 \ldots a''_{r-r'} \mid t) \frac{\partial f}{\partial a_k} \quad (h = 1, 2, \ldots, r').
$$

On pourra dès lors traiter les a'' comme des constantes, et, comme on connaît encore les équations finies du groupe (20), on opérera sur l'équation (19) comme on vient de le faire sur l'équation (15), et ainsi de suite. Il importe de remarquer que les $A''f$ ne définissent plus en général un groupe, mais cela n'importe en rien pour les transformations indiquées.

Ajoutons enfin qu'une légère modification à la méthode précédente permettrait de se passer des équations finies des groupes (16), (20), etc.

2. On sera donc ramené à une suite de problèmes du type suivant, qui est le *problème fondamental* auquel M. Lie ramène, en définitive, le cas général d'un système complet admettant un certain nombre de transformations infinitésimales :

Intégrer l'équation

$$\mathrm{L}f = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i(x_1 \ldots x_r, t)\frac{\partial f}{\partial x_i}, \tag{21}$$

connaissant les transformations infinitésimales du groupe simple et simplement transitif qu'elle admet :

$$\mathrm{X}_j f = \sum_{i=1}^{r} \xi_{ji}(x_1 \ldots x_r, t)\frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (j = 1, 2, \ldots, x). \tag{22}$$

Nous allons montrer que *ce problème revient à l'intégration d'un système de Lie simple*. Par là sera prouvé, en particulier, le résultat annoncé en tête de ce Chapitre.

Prenons un groupe quelconque isomorphe au groupe (22), et dont on connaisse les équations finies (son groupe adjoint pourra par exemple toujours servir), soit

$$\mathrm{Z}_j f = \sum_{i=1}^{n} \zeta_{ji}(z_1, \ldots, z_n)\frac{\partial f}{\partial z_i} \qquad (j = 1, 2, \ldots, r). \tag{23}$$

Nous pouvons supposer que, sous la forme (22) et (23), les deux groupes sont rapportés isomorphiquement l'un à l'autre. Alors les équations

$$\mathrm{L}f = 0, \qquad \mathrm{X}_1 f + \mathrm{Z}_1 f = 0, \qquad \ldots, \qquad \mathrm{X}_r f + \mathrm{Z}_r f = 0 \tag{24}$$

forment un système complet. Déterminons ses n intégrales en employant la méthode de M. Mayer : à cet effet, nous résolvons les équations (24) en $\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_r}$ et posons

$$x_1 = u_1 t, \qquad x_2 = u_2 t, \qquad \ldots, \qquad x_r = u_r t.$$

On est ramené alors à une équation unique de la forme

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\sum_{j=1}^{r}\theta_j(u\,|\,t)\,Z_j f=0, \tag{25}$$

où les u doivent être traités comme des constantes. C'est donc une *équation de Lie* simple.

Reste à montrer qu'elle fournit l'intégration complète de l'équation (21). Remarquons, en effet, que intégrer le système (24) revient à former les équations finies du groupe (23) en prenant pour paramètres r intégrales indépendantes de l'équation (21), de sorte que n intégrales indépendantes de ce système, en y considérant les $z_1, \ldots, z_n$ comme des constantes *arbitraires*, dépendent *essentiellement* de r fonctions de $x_1, \ldots, x_r, t$ indépendantes, que l'on obtiendra par conséquent toujours, en donnant aux z, dans ces intégrales, un nombre suffisant de systèmes de valeurs constantes.

V. — *La théorie de Galois* (¹).

1. Considérons un système de Lie

$$\frac{dx_i}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\theta_j(t)\,\xi_{ji}(x_1\ldots x_n) \qquad (i=1,2,\ldots,n), \tag{1}$$

où le groupe

$$X_j f=\sum_{i=1}^{n}\xi_{ji}(x)\frac{\partial f}{dx_i} \qquad (j=1,2,\ldots,n), \tag{2}$$

est un groupe simplement transitif, dont on connaît les équations finies. On peut toujours supposer que c'est un groupe des paramètres (*voir* I, n° 4), de sorte que, ses équations étant

$$x_i=f_i(x_1^0\ldots x_n^0\,|\,a_1\ldots a_n) \qquad (i=1,2,\ldots,n), \tag{3}$$

l'intégrale générale de (1) peut s'écrire

$$x_i=f_i(c_1\ldots c_n\,|\,\overline{x_1}\ldots\overline{x_n}) \qquad (i=1,2,\ldots,n), \tag{4}$$

(¹) Pour les théorèmes de la théorie des groupes employés dans ce Chapitre, on peut consulter la première Partie de notre travail : *Sur l'Intégration des équations différentielles linéaires* (*Annales de l'Ecole Normale*, 1892).

où $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n$ est une intégrale particulière quelconque, constituant donc à elle seule un *système fondamental*. Remarquons toutefois que ceci n'est vrai que si l'on peut résoudre les équations (4) par rapport aux constantes. La condition s'écrit simplement, si l'on remarque que les équations (4), interprétées comme transformation des $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n$ en $x_1, \ldots, x_n$, sont celles du groupe simplement transitif *réciproque* (1) du groupe (2), et dont nous écrirons les transformations infinitésimales

$$Z_k f = \sum_{i=1}^{n} \zeta_{ki}(x) \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{5}$$

On a donc des identités de la forme

$$\frac{\partial x_i}{\partial c_k} = \sum \psi_{jk}(c)\, \zeta_{ji}(x),$$

d'où l'on conclut [en remarquant que les équations (4) résolues par rapport aux $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n$ forment encore une transformation du groupe] que la condition pour que le système considéré soit *fondamental* est qu'il n'annule pas le déterminant des fonctions ζ_{ki}.

C'est du reste ce groupe (5) qui va jouer, dans cette théorie, le même rôle fondamental que joue le groupe des substitutions de n lettres dans la théorie de Galois. Nous le supposerons *prolongé* chaque fois autant qu'il sera nécessaire, les x_i y étant considérés comme des fonctions indéterminées de la variable t, non transformée par le groupe.

Une fonction quelconque de $x_1, \ldots, x_n$ et de leurs dérivées, jusqu'à un ordre quelconque, admet un certain nombre (qui peut être zéro) de transformations infinitésimales du groupe (5), qui définissent un sous-groupe de ce groupe. Ce sous-groupe est le *groupe de la fonction*. On voit facilement qu'une fonction et ses dérivées ont le même groupe.

2. Le groupe (5) n'a pas d'invariant d'ordre zéro. Il a n invariants différentiels (au sens qu'on vient d'indiquer) du premier ordre, et n seulement, indépendants les uns des autres. On les obtient en résolvant, par

(1) *Transf. Gruppen*, t. I, Ch. 20.

rapport aux Δ_j, les équations

$$(6) \qquad x'_i = \sum_{j=1}^{n} \Delta_j \, \xi_{ji}(x_1 \ldots x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où les accents désignent, pour abréger, les dérivées; c'est-à-dire que ce sont les coefficients du système considéré. Il est évident qu'on obtient ainsi des fonctions indépendantes, puisque les formules (6) permettent d'en tirer $x'_1, \ldots, x'_n$. Montrons qu'ils admettent une quelconque des transformations infinitésimales du groupe (5). A cet effet, nous appliquons aux deux membres de chaque identité (6) l'opération $Z_k f$, prolongée jusqu'au premier ordre; il vient

$$\sum_h x'_h \frac{\partial \zeta_{ki}(x)}{\partial x_h} = \sum_j \xi_{ji}(x) Z_k \Delta_j + \sum_j \Delta_j Z_k \xi_{ji}(x).$$

Or les transformations infinitésimales X_j et Z_k sont échangeables, et l'on a

$$Z_k \xi_{ji}(x) = X_j \zeta_{ki}(x) = \sum_h \zeta_{jh}(x) \frac{\partial \zeta_{ki}(x)}{\partial x_h},$$

de sorte que les identités précédentes deviennent

$$\sum_h \frac{\partial \zeta_{ki}(x)}{\partial x_h} \left[x'_h - \sum_j \Delta_j \, \xi_{jh}(x) \right] = \sum_j \xi_{ji}(x) Z_k \Delta_j.$$

Le premier membre est identiquement nul : on a donc

$$\sum_j \xi_{ji}(x) Z_k \Delta_j = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

et, par suite, comme le déterminant des ξ_{ji} n'est pas nul

$$Z_k \Delta_j = 0 \qquad (j, k = 1, 2, \ldots, n),$$

ce qui démontre le théorème.

3. Considérons alors une fonction quelconque des x et de leurs dérivées, que nous écrivons, pour abréger,

$$V(x \,|\, x' \,|\, x'' \,|\, \ldots).$$

On peut en faire disparaître toutes les dérivées en se servant des équations (6) et de celles qu'on en déduit par différentiations successives. Il vient ainsi une identité

$$V(x\,|\,x'\,|\,x''\,|\ldots) = U(x\,|\,\Delta\,|\,\Delta'\,|\ldots);$$

et si nous appliquons aux deux membres l'opération $Z_k f$, comme on a

$$Z_k \Delta_j = 0, \qquad Z_k \Delta'_j = 0, \qquad \ldots,$$

on voit que le résultat dans le premier membre est le même que celui qu'on obtient dans le second en considérant les Δ, Δ', ... comme des constantes. Donc la fonction V admet le même groupe que la fonction U qu'on en déduit en en faisant disparaître les dérivées.

On en conclut, en particulier, que, si V est un invariant du groupe (5), U ne contiendra pas les x explicitement, d'où ce théorème, analogue au théorème des fonctions symétriques dans la théorie des équations algébriques :

Tout invariant du groupe (5) *s'exprime, par un calcul de substitutions, au moyen des* Δ_j *et de leurs dérivées successives.*

Plus généralement, supposons que le groupe de V se compose de $n-\nu$ transformations infinitésimales

$$Z_1 f, \quad \ldots, \quad Z_{n-\nu} f. \tag{7}$$

Il est inutile de les supposer prolongées, à condition qu'on fasse disparaître dans V, et dans toutes les autres fonctions des intégrales que l'on aura à considérer, les dérivées des x; ce que nous supposerons. Le groupe (7) a ν invariants indépendants; or V et ses dérivées sont des invariants, donc il existe entre V et ses ν premières dérivées, une relation

$$\Phi(V, V', \ldots, V^{(\nu)}\,|\,\Delta\,|\,\Delta'\,|\ldots) = 0, \tag{8}$$

identique par rapport aux x, x', x'', ... De plus, aucune relation de même forme ne peut exister entre V et ses $\nu-1$ premières dérivées, car elle serait vérifiée par la *valeur générale* qu'on déduit de V par la transformation générale (4) du groupe (5), valeur générale qui dépend de ν paramètres essentiels (1) et ne peut par conséquent satisfaire à aucune équation différentielle (8) d'ordre inférieur à ν.

---

(1) *Voir* notre travail des *Annales de l'École Normale*, 1re Partie, Ch. II; 1892.

Donc V, V′, ..., $V^{(\nu-1)}$ (après élimination des dérivées des x) sont ν invariants indépendants du groupe (7).

Dès lors, *toute autre fonction des intégrales, admettant le groupe de* V, *est une fonction de* V *et de ses dérivées (et des* Δ_j *et de leurs dérivées); et l'on en obtient l'expression par un calcul d'éliminations.*

On verra enfin d'une manière analogue que, si la seconde fonction W admet seulement $n-\nu-\nu'$ transformations infinitésimales indépendantes du groupe de V, elle est intégrale d'une équation différentielle d'ordre ν', de la forme

$$\Phi(W, W', \ldots, W^{(\nu')} \mid V, V', \ldots \mid \Delta \mid \Delta' \mid \ldots) = 0,$$

qu'on obtient encore par de simples éliminations; et, plus généralement, qu'une troisième fonction admettant le groupe commun à V et W, s'exprime, par un calcul d'éliminations, en fonction de V, W et de leurs dérivées (et des Δ_j et de leurs dérivées).

4. Revenons maintenant au système (1). Il est caractérisé par ce fait que les invariants Δ_j sont égaux à des fonctions données de t. Ces fonctions $\theta_j(t)$ sont considérées comme rationnelles, ainsi que certaines fonctions de t qui peuvent leur être *adjointes*, et toutes celles qu'on en déduit par des différentiations ou des éliminations entre des équations de forme rationnelle. Sont considérées comme de forme rationnelle les équations finies (4) du groupe (5) et celles de tous ses sous-groupes, donc aussi les invariants de ces groupes qu'on en déduit par voie d'élimination. Plus généralement, on considérera aussi, comme étant de forme rationnelle, certaines fonctions des indéterminées $x_1 \ldots x_n$, $x'_1 \ldots x'_n$, ..., et toutes celles qu'on en déduit par des différentiations partielles ou des éliminations. C'est à ce point de vue que nous parlons de fonctions rationnelles des intégrales; l'une quelconque de ces fonctions est intégrale d'une équation (8), au plus d'ordre n, où l'on doit remplacer les Δ_j et leurs dérivées par leurs valeurs en fonction de t. Cette équation est aussi de forme rationnelle, et, comme fonction de t (les V, V′, ... y étant considérés comme des paramètres), est une fonction rationnelle de t. Quant aux intégrales de cette équation, qui sont les diverses *valeurs* de la fonction considérée, et de celles qu'on en déduit par les transformations du groupe (4), ce n'est qu'exceptionnellement qu'elles seront des fonctions rationnelles de t (au sens expliqué). Ces valeurs ne peuvent, du reste, être distinguées les unes des autres (théorique-

ment), que si l'on a choisi pour $x_1 \ldots x_n$ un système particulier d'intégrales du système proposé. Cela étant fait, et après les explications précédentes, on peut parler de fonctions rationnelles des intégrales à valeur rationnelle. Et il résulte du paragraphe précédent que, si une fonction rationnelle des intégrales est à valeur rationnelle, toute fonction rationnelle des intégrales, admettant le groupe de la première, a aussi une valeur rationnelle.

Cela posé, imaginons toutes les fonctions rationnelles des intégrales à valeur rationnelle, et considérons-en une dont le groupe ait le nombre minimum de transformations infinitésimales indépendantes; soit V cette fonction, et G son groupe. Toute fonction rationnelle des intégrales admettant le groupe G aura une valeur rationnelle; et réciproquement, toute fonction rationnelle des intégrales, à valeur rationnelle, W, admet le groupe G; car, si elle en admettait seulement un sous-groupe G′, un invariant de G′, s'exprimant rationnellement au moyen de W, de V et de leurs dérivées, aurait une valeur rationnelle, ce qui est contraire au choix de V. On a donc le théorème suivant, qui est l'analogue du célèbre théorème de Galois.

Au système donné (1) *correspond un sous-groupe* G *du groupe* (5), *qui jouit de la propriété suivante :*

La condition nécessaire et suffisante, pour qu'une fonction rationnelle des intégrales soit à valeur rationnelle, est qu'elle admette toutes les transformations infinitésimales du groupe G.

Nous appellerons le groupe G le *groupe de Galois* du système (1).

5. Il serait maintenant facile de développer une théorie de l'intégration du système proposé analogue à celle que nous avons donnée autrefois pour l'équation linéaire d'ordre n. Tout revient ici encore à la réduction progressive du groupe de Galois du système; elle s'obtiendra en intégrant une suite d'équations différentielles, chacune de ces équations pouvant être remplacée, si l'on veut, par un système d'équations du premier ordre. Nous préférons exposer ici une autre méthode pour utiliser l'existence du groupe de Galois du système, méthode qui mettra bien en évidence que l'on est toujours conduit, comme systèmes auxiliaires, à des systèmes de Lie. Nous allons prouver, en effet, que *l'intégration du système proposé se ramène à celle d'un système de Lie ayant pour groupe correspondant*

un groupe isomorphe au groupe G. Il n'y aura plus ensuite qu'à appliquer à ce système la méthode exposée au Chapitre précédent.

Nous partons de cette remarque que les invariants du groupe G doivent être considérés comme des fonctions *connues* de t : soient $u_1 u_2 \ldots u_\rho$, ρ de ces invariants (indépendants), l'ordre de G étant $r = n - \rho$. Nous pouvons supposer que ce groupe est

$$\text{(G)} \qquad Z_1 f, \quad Z_2 f, \quad \ldots, \quad Z_r f.$$

Introduisons comme variables nouvelles $u_1 \ldots u_\rho$ et r autres fonctions des x : $v_1 \ldots v_r$; il viendra

$$\text{(G}'\text{)} \qquad Z_k f = \sum_{h=1}^{r} \zeta'_{kh}(v_1 \ldots v_r\, u_1 \ldots u_\rho) \frac{\partial f}{\partial v_h} \qquad (k = 1, 2, \ldots, \rho),$$

et les équations finies de ce groupe G′, qui sont connues, ont la forme

$$(9) \qquad v_h = g_h(v_1^0 \ldots v_r^0\, u_1^0 \ldots u_\rho^0 \mid y_1 \ldots y_r), \qquad (h = 1, 2, \ldots, r),$$

$$(10) \qquad u_l = u_l^0 \qquad (l = 1, 2, \ldots, \rho),$$

les $y_1 \ldots y_r$ étant les paramètres. Faisons enfin dans les transformations (G′) le changement de variables des v en y défini par les équations (9); il rend identiques les équations

$$Z_k f - Y_k f = 0,$$

où $Y_1 f, \ldots, Y_r f$ sont les transformations infinitésimales du groupe des paramètres du groupe (9, 10). Les équations fondamentales de la théorie des groupes donnent, en effet, ici des identités de la forme

$$\zeta'_{kh}(v_1, \ldots, v_r;\, u_1, \ldots, u_\rho) = \sum_{i=1}^{r} \eta_{ki}(y_1, \ldots, y_r) \frac{\partial v_h}{\partial y_i} = Y_k v_h,$$

à condition que les v et les u soient les fonctions des y définies par les équations (9), (10). Donc, par le changement de variables (9), le groupe (G′) prendra la forme

$$\text{(G}''\text{)} \qquad Y_k f = \sum_{h=1}^{r} \eta_{kh}(y_1, \ldots, y_r) \frac{\partial f}{\partial y_h} \qquad (k = 1, 2, \ldots, r).$$

En même temps, les transformations du groupe (2) deviennent

$$X_j f = X'_j f + \overline{X}_j f \qquad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

où

$$X'_j f = \sum_{h=1}^{r} \xi'_{jh}(y_1, \ldots, y_r;\ u_1, \ldots, u_\rho)\,\frac{\partial f}{\partial y_h},$$

$$X_j f = \sum_{l=1}^{\rho} \overline{\xi_{jl}}(u_1, \ldots, u_\rho)\,\frac{\partial f}{\partial u_\rho};$$

et les identités

$$(X_j Z_k) = 0$$

donnent

(11) $$(X'_j,\ Y_k) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots, r).$$

Enfin, le système proposé se décompose en deux

(12) $$\frac{dy_h}{dt} = \sum_j \theta_j(t)\,\xi'_{jh}(y, u) \qquad (h = 1, 2, \ldots, r),$$

$$\frac{du_l}{dt} = \sum_j \theta_j(t)\,\overline{\xi_{jl}}(u) \qquad (l = 1, 2, \ldots, \rho).$$

Or on connaît une intégrale particulière du second, puisqu'on a les expressions des u en fonctions de t; on portera donc ces valeurs dans les équations (12), c'est-à-dire qu'on n'aura qu'à intégrer l'équation

(13) $$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_j \theta_j(t)\,X'_j f = 0,$$

où les u auront été remplacés par leurs valeurs. Or, les relations (11) ayant lieu quels que soient les u, l'équation (13) admettra le groupe G″; on sera donc bien ramené au cas traité au Chapitre précédent, le fait que les X'_j ne forment pas un groupe n'empêchant nullement d'appliquer la méthode qui y a été exposée.

On pourrait objecter que l'on n'obtiendra pas ainsi l'intégrale générale du système proposé, mais nous avons vu qu'il suffit d'en avoir une intégrale particulière pour en déduire aussitôt cette intégrale générale.

6. Nous nous sommes bornés, dans ce qui précède, au cas d'un système de Lie dont le groupe correspondant est simplement transitif. Cela suffit pour indiquer dans chaque cas les particularités qu'apporte dans l'intégration le choix des fonctions $\theta(t)$, puisque nous avons montré (I, 4) que,

par l'emploi du groupe des paramètres, on rentre toujours dans ce cas. On peut remarquer toutefois que les résultats précédents s'appliquent d'eux-mêmes au cas où le groupe correspondant est p fois transitif. Il suffit alors de prendre pour fonctions inconnues p systèmes d'intégrales particulières

$$x_{11}, \quad \ldots, \quad x_{1n}, \quad \ldots, \quad x_{p1}, \quad \ldots, \quad x_{pn},$$

et, en posant

$$X_j^{(k)} = \sum_i \xi_{ji}(x_{k1}, \ldots, x_{kn}) \frac{\partial f}{\partial x_{ki}} \qquad (j = 1, 2, \ldots, np),$$

on a, en

$$\mathfrak{X}_j f = \sum_{k=1}^{p} X_j^{(k)} f \qquad (j = 1, 2, \ldots, np),$$

un groupe simplement transitif.

C'est le cas, par exemple, d'un système linéaire d'ordre n, le groupe correspondant étant alors le groupe linéaire homogène à n variables, qui est n fois transitif. Enfin, ce cas contient, comme cas particulier, celui d'une seule équation linéaire d'ordre n, qu'on peut toujours considérer, même au point de vue actuel, comme un système d'équations linéaires du premier ordre, en prenant pour fonctions inconnues nouvelles les $n - 1$ premières dérivées de la fonction cherchée.

Les résultats que nous venons d'obtenir contiennent donc, comme cas particuliers, ceux que nous avons donnés autrefois sur l'intégration de l'équation linéaire d'ordre n. Ils les complètent de plus en ce sens qu'ils montrent qu'on peut toujours faire en sorte de n'introduire, comme intégrations auxiliaires, que celles de systèmes de Lie simples, et, par conséquent, si l'on veut, que des équations linéaires à groupe simple.

Une dernière remarque, dans le même ordre d'idées. Nous avons montré dans le premier Chapitre qu'on pouvait remplacer l'intégration de tout système de Lie par celle d'un système linéaire, celui qui équivaut à l'équation de Lie

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_j \theta_j(t) E_j f = 0,$$

où $E_1 f, \ldots, E_r f$ est le groupe adjoint du groupe correspondant au système proposé. Or, les équations

$$E_1 f = 0, \qquad \ldots, \qquad E_r f = 0$$

ont toujours au moins une intégrale commune (1); supposons qu'il y en ait ρ de distinctes, par exemple

$$\Omega_1(e_1, \ldots, e_r), \quad \ldots, \quad \Omega_\rho(e_1, \ldots, e_r).$$

Les fonctions cherchées satisfont donc à des relations

$$\Omega_k(e_1, \ldots, e_r) = \text{const.} \qquad (k = 1, 2, \ldots, \rho),$$

d'où l'on conclut que le groupe de Galois du système linéaire auquel on est conduit est précisément (du moins dans le cas où les fonctions θ_j sont quelconques) le groupe adjoint $E_1 f, \ldots, E_r f$.

VI. — *Sur certaines équations différentielles.*

1. Étant donné un système d'équations différentielles du premier ordre (2)

$$(1) \qquad \frac{dx_i}{dt} = \mathfrak{F}_i(x_1, \ldots, x_n, t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

il peut arriver que l'on *connaisse* un système de formules

$$(2) \qquad x_i = \Phi_i(x_{11}, \ldots, x_{1n}, x_{21}, \ldots, x_{pn} | t | c_1, \ldots, c_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

donnant l'intégrale générale en fonction de p intégrales particulières *quelconques* (les fonctions φ_i dépendent de t, mais leur forme ne dépend pas du choix des intégrales particulières qui y figurent. On a alors p intégrales particulières nouvelles en prenant

$$(3) \qquad x'_{kj} = \Phi_j(x_{11} \ldots x_{1n}\, x_{21} \ldots x_{pn} \,|\, t \,|\, a_{k1} \ldots a_{kn}) \quad \begin{pmatrix} j = 1, 2, \ldots, n \\ k = 1, 2, \ldots, p \end{pmatrix},$$

et, par un choix convenable des nouvelles constantes c'_k,

$$(4) \qquad c'_h = \Psi_h(a_{11} \ldots a_{1n}\, a_{21} \ldots a_{pn} \,|\, c_1 \ldots c_n) \qquad (h = 1, 2, \ldots, n),$$

on devra avoir les identités en t :

$$(5) \quad \Phi_i(x'_{11} \ldots x'_{pn} \,|\, t \,|\, c_1 \ldots c_n) = \Phi_i(x_{11} \ldots x_{pn} \,|\, t \,|\, c'_1 \ldots c'_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

---

(1) *Transf. Gruppen,* t. III, Ch. 28, p. 673.

(2) Le cas d'équations d'ordre supérieur se ramène *ici* sans difficulté au cas du premier ordre.

En général, les formules (4) changeront avec le système d'intégrales particulières x_{kj} qui intervient ici.

Supposons cependant que les formules (4) soient indépendantes du choix des x_{kj} ; elles rendent alors les équations (5) identiques par rapport aux x_{kj} et à t, considérés comme indépendantes, c'est-à-dire que les équations (3) définissent un groupe (pour chaque valeur de t), dont le groupe des paramètres sera

$$a'_{kh} = \Psi_h(a_{11} \ldots a_{pn} | c_{k1} \ldots c_{kn}) \qquad \begin{pmatrix} h = 1, 2, \ldots, n \\ k = 1, 2, \ldots, p \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Je dis que, *dans ce cas, le système* (1) *peut se remplacer par un système de Lie.*

Remarquons, à cet effet, qu'étant donné un groupe simplement transitif

$$x_i = f_i(x_1^0 \ldots x_n^0 | a_1 \ldots a_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{7}$$

si l'on y effectue le changement de variables défini par les équations

$$x_i = f_i(x_1^0 \ldots x_n^0 | y_1 \ldots y_n), \tag{8}$$

où $x_1^0, \ldots, x_n^0$ sont des constantes arbitraires, le groupe se transforme en son groupe des paramètres. Cette propriété se démontre comme la remarque employée au n° 5 du Chapitre précédent, dont elle ne diffère pas au fond.

Si donc, dans le cas actuel, nous faisons dans le système (1) le changement de variables inconnues défini par les équations

$$x_i = \Phi_i(x_{11}^0 \ldots x_{pn}^0 | t | y_1 \ldots y_n), \tag{9}$$

il transformera le groupe (3) dans le groupe (6), écrit avec les y au lieu de a, et le système obtenu

$$\frac{dy_k}{dt} = G_k(y_1 \ldots y_n t) \tag{10}$$

sera tel que l'intégrale générale en sera donnée par les formules

$$y_h = \Psi_h(y_{11} \ldots y_{pn} | c_1 \ldots c_n), \tag{11}$$

où $y_{11}, \ldots, y_{pn}$ sont p intégrales particulières; et comme t ne figure plus explicitement dans ces formules, le système (10) est bien un système de Lie.

2. Pour une seule équation du premier ordre, il est bien remarquable que le cas particulier du numéro précédent soit précisément le cas général. Soit, en effet, l'équation

$$\frac{dx}{dt} = \mathrm{F}(x, t), \tag{12}$$

dont l'intégrale générale est donnée par la formule connue

$$x = \varphi(x_1 x_2 \ldots x_p \mid t \mid c), \tag{13}$$

où $x_1, \ldots, x_p$ sont p intégrales particulières quelconques. On en conclut comme précédemment, en posant

$$x'_k = \varphi(x_1 \ldots x_p \mid t \mid a_k) \qquad (k = 1, 2, \ldots, p), \tag{14}$$

l'identité en t, où c' est une nouvelle constante

$$\varphi(x'_1 \ldots x'_p \mid t \mid c) = \varphi(x_1 \ldots x_p \mid t \mid c'),$$

et, en résolvant par rapport à c',

$$c' = \chi(x_1 \ldots x_p \mid t \mid a_1 \ldots a_p \mid c). \tag{15}$$

Si cette relation est indépendante de $x_1, \ldots, x_p$, elle l'est aussi de t, et les équations (14) définissent un groupe. Dans le cas contraire, on y donnera aux a_k et à c des valeurs fixes particulières, et l'on obtiendra une relation de la forme

$$\omega(x_1 \ldots x_p t) = \text{const.} = c',$$

liant p intégrales quelconques, d'où l'on tirera une formule

$$x_p = \varpi(x_1 \ldots x_{p-1} \mid t \mid c'),$$

entièrement analogue à (13) et donnant l'intégrale générale de (12) en fonctions de $p - 1$ intégrales particulières

$$x = \varpi(x_1 \ldots x_{p-1} \mid t \mid c).$$

Reprenant alors sur cette formule les mêmes raisonnements, et continuant ainsi de suite, on arrivera à déterminer sans intégration l'intégrale générale de (12), à moins qu'on ne rencontre avant une formule analogue à (13) telle que les équations correspondantes analogues aux équations (14) définissent un groupe.

On peut donc supposer que les équations (14) définissent un groupe et appliquer le résultat obtenu au numéro précédent. On fera le changement de fonction inconnue

$$x = \varphi(x_1^0 \ldots x_p^0 \mid t \mid y),$$

et l'on obtiendra une équation en y

$$\frac{dy}{dt} = \mathrm{G}(y, t), \tag{16}$$

dont l'intégrale générale sera donnée par la formule

$$y = \psi(y_1 \ldots y_p \mid c),$$

telle que les équations

$$y'_k = \psi(y_1 \ldots y_p \mid a_k) \qquad (k = 1, 2, \ldots, p),$$

définissent un groupe. Ce sera donc une de ces équations que nous avons étudiées dans un autre Mémoire (1), et, par suite, l'intégration complète de l'équation (12) exigera une ou deux quadratures, ou l'intégration d'une équation de Riccati.

Il serait du reste facile de rattacher ce résultat à la théorie générale exposée dans les Chapitres précédents, théorie qui embrasse le cas de l'équation (16) comme cas très particulier.

---

(1) *Annales de l'École Normale*, 1893. — Des considérations analogues à celles qui précèdent permettent de combler une légère lacune au début du § 2 de ce Mémoire.