

H. BOUASSE

Sur les courbes de déformation typiques des fils neufs

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 1^{re} série, tome 12, n° 3 (1898), p. G1-G25

http://www.numdam.org/item?id=AFST_1898_1_12_3_G1_0

© Université Paul Sabatier, 1898, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LES

COURBES DE DÉFORMATION TYPIQUES DES FILS NEUFS,

PAR M. H. BOUASSE,

Professeur de Physique à l'Université de Toulouse.

PREMIÈRE PARTIE.

De la nature des problèmes à résoudre par l'étude de ces courbes de déformation. Considérations historiques et théoriques.

La théorie de l'élasticité se compose, comme on sait, de deux parties bien distinctes. Dans l'une, on détermine, quels que soient le milieu homogène ou hétérogène et la nature des déformations qu'il a subies, la manière dont sont nécessairement liées les forces qui agissent : 1° entre deux parties du solide à travers tous les éléments de surface qui limitent un élément de volume ; 2° sur tous les éléments de surface qui passent par un point. Cette partie de la théorie de l'élasticité est au fond tout entière dans le théorème suivant dû à Cauchy : *Si en un même point d'un milieu solide F et F' sont les forces exercées sur deux éléments plans S et S' , ayant les droites D et D' pour normales, la projection de F sur D' est égale à la projection de F' sur D* , et dans l'existence de l'ellipsoïde d'élasticité.

L'autre partie cherche à relier les forces, qui ont été définies par la première, aux déformations du solide, sous certaines restrictions de petitesse pour ces déformations : elle définit l'ellipsoïde de dilatation et les relations qui existent entre lui et l'ellipsoïde d'élasticité. Elle a donné lieu à bien des controverses, et les limitations qu'on doit imposer aux déformations pour qu'elle soit applicable semblent rendre son emploi impossible dans toutes les questions analogues à celles qui sont traitées dans ce Mémoire, où les déformations sont énormes. Mais c'est une illusion : son utilité subsiste même dans ce cas, soit qu'on veuille, avec Saint-Venant, déduire de la grandeur des axes de l'ellipsoïde de dilatation la détermination des plus

grandes dilatations qu'un solide peut supporter et en conclure le maximum des efforts qu'il peut subir; soit, en se plaçant à un point de vue tout différent et considérant avec Coulomb le milieu comme formé de particules parfaitement élastiques noyées dans un ciment, qu'on veuille calculer les déformations des particules et non plus du solide total, en leur appliquant ces équations. Nous reviendrons plus loin là-dessus.

Cherchons ce que la théorie de l'élasticité nous apprend sur un cylindre à base circulaire dont la longueur est un grand nombre de fois le diamètre, tordu et tendu simultanément. Ce cas, très élémentaire, mais dont l'étude complètement faite trancherait des questions d'une importance capitale, a été comme négligé des ingénieurs qui préfèrent ce qui prête à de brillants développements mathématiques ou ce qui semble se rapprocher davantage de la pratique, comme s'il y avait un espoir quelconque de confirmer la valeur d'une hypothèse en étudiant les déformations d'un fer à T.

Nous n'espérons pas dire des choses bien neuves, mais tracer à l'usage des physiciens un programme d'expériences que nous chercherons nous-mêmes à remplir dans la seconde Partie de ce Mémoire.

*Des forces aux divers points d'un cylindre circulaire tordu
et tendu.*

Dans tout ce qui suit, nous prenons comme axe des z l'axe du cylindre. Comme tout est symétrique autour de cet axe, nous plaçons le point considéré sur l'axe des x et posons $x = r$; le méridien passant en ce point est le plan zx et l'équateur ou section droite le plan xy . Nous rappelons que dans la notation des N et des T , T_1 désigne les forces normales à l'axe des x qui agissent sur les faces du prisme élémentaire, parallèles à cet axe; N_1 la force parallèle à l'axe des x qui agit sur la face normale à cet axe. Enfin les N sont prises avec le signe $+$, si ce sont des tractions; avec le signe $-$, si ce sont des pressions.

L'expérience donne, à chaque instant, la charge totale P et le couple total C ; cela ne suffit évidemment pas pour déterminer en tous les points du cylindre les N et les T ; mais on a fait de plus des hypothèses qui semblent légitimes.

On néglige d'abord la pression atmosphérique : de ce que le cylindre n'est plus pressé sur ses faces latérales résulte nécessairement la condition $N_1 = N_2 = 0$.

On admet que la charge P se répartit uniformément sur toute la section droite, d'où la relation $N_3 = P/\pi R^2$, où R est le rayon du cylindre.

Restent les forces tangentielles. Les forces T_2 , si elles existaient, tendraient à transformer les sections droites qui sont planes en des calottes de révolution autour de l'axe du cylindre; les forces T_3 , tout en laissant planes les sections droites, produiraient une courbure des droites tracées dans ces sections. En particulier, les diamètres se transformeraient, comme première approximation, en des courbes du troisième degré avec inflexion au centre.

Mais l'existence des forces T_2 est inconciliable dans un cylindre long et mince avec ce fait que, par raison de symétrie, les sections doivent rester planes, au moins à un petit nombre de diamètres des extrémités; l'existence des forces T_3 est inconciliable avec ce fait que, toujours à une petite distance des points d'attache, les forces tangentielles sur la surface même du cylindre sont nulles. On pose donc $T_2 = T_3 = 0$.

Il résulte de ces hypothèses que les divers cylindres creux concentriques dont on peut considérer l'emboîtement comme formant le cylindre plein, sont élastiquement indépendants et se déforment en même temps sans qu'il y ait tendance à se produire un glissement tangentiel de ces cylindres les uns par rapport aux autres. Les sections droites restent circulaires et planes; les droites qui y sont tracées restent droites et cela, non pas à cause des liaisons, mais par l'absence de forces tendant à les courber.

Tous les élasticiens sont d'accord pour considérer que cette distribution des forces s'établit à une distance des extrémités du cylindre qui n'est qu'un multiple peu élevé du diamètre, alors même que les forces appliquées à ces extrémités mêmes n'y satisfont aucunement. En effet, ce n'est généralement pas par des forces tangentielles de notation T_1 que les cylindres sont tordus (ce qui impliquerait que l'on collât invariablement une section droite du cylindre contre une pièce qui tournerait autour de l'axe du cylindre, ou plus généralement, que l'on appliquât des forces tangentielles convenables sur chaque élément des sections droites terminales), mais par des forces de notation T_3 appliquées sur les faces latérales (comme quand on prend le cylindre dans un étau). On admet généralement qu'à un ou deux diamètres des extrémités, la transformation des forces quelconques produisant un couple en forces de notation T_1 est complète.

Ce fait n'est pas particulier à la torsion. Quand le cylindre est tendu par des poids, ce ne sont généralement pas les forces N_3 qui agissent sur les

extrémités, mais les forces tangentielles T_2 , puisque généralement l'extrémité du fil est pincée dans un étau. Ici encore, la réaction des diverses parties transforme ces forces tangentielles en forces normales.

Cette transformation n'est pas seulement qualitative, mais encore quantitative. Dans le cas de la traction, elle est telle que tous les cylindres élémentaires dont l'ensemble fait le cylindre total, s'allongent de la même quantité, et cela que la déformation soit élastique ou permanente. Dans le cas de la torsion, elle est telle que tous les cylindres creux élémentaires concentriques, dont l'ensemble fait le cylindre total, tournent du même angle. Il est très difficile de donner une preuve rigoureuse de ces propositions; faut-il encore que les faits expérimentaux ne leur soient point contradictoires.

Prenons de la cire molle, pétrissons-la entre les doigts pour qu'elle soit bien homogène, puis roulons-la dans du papier pour en faire un cylindre aussi régulier que possible : avec une fine aiguille à repriser, perçons ce cylindre d'un trou, qui n'a pas besoin d'être dans une section droite, et étirons-le en le prenant entre les doigts par les extrémités. On constate qu'on peut diminuer beaucoup son diamètre, sans cesser de voir la lumière à travers le trou, et encore la lumière ne disparaît pas à cause de la courbure du canal, mais bien à cause de son aplatissement.

L'expérience sur la torsion se fait d'une manière analogue. On a souvent cherché à mettre hors de doute les hypothèses précédentes, en tordant des cylindres de fer, de cuivre ou d'acier d'assez gros diamètres, dans lesquels on avait percé de petits trous perpendiculairement à l'axe : ces trous étaient traversés par des aiguilles qui restaient droites quelque grande que fût la torsion. Il était bon de refaire la démonstration avec tout le soin possible sur des corps mous.

Perçons un trou très fin dans une section droite d'un cylindre de cire molle de 2^{cm} de diamètre sur 8^{cm} de longueur, obtenu comme il a été dit plus haut. Tordons-le bien régulièrement en le prenant entre les doigts par les extrémités. L'expérience montre qu'on peut le tordre de près d'un tour sans cesser de voir la lumière à travers le petit trou; pendant la torsion, la section du trou s'écrase naturellement beaucoup. On peut alors détordre le cylindre : la lumière passe toujours et la section du trou redevient sensiblement circulaire. L'expérience réussit quand, après avoir tordu au point que la section du trou s'est complètement aplatie et qu'on ne voit plus le jour à travers le trou, on détord. On revoit le jour, ce qui prouve bien que ce n'est

pas la courbure du canal, mais son aplatissement, qui empêchait la lumière de passer.

La torsion s'effectue par l'application de forces tangentielle de notation T_3 ; aux extrémités du cylindre, une droite tracée dans une section droite ne reste plus droite; il suffit, pour le voir, de tracer sur la face terminale du cylindre de cire molle un diamètre et de tordre par l'intermédiaire d'un bout de tube de 2^{mm} à 3^{mm} de hauteur dans lequel vient s'ajuster le cylindre.

Sur les conseils de M. Brillouin, j'ai cherché à répéter l'expérience sur des cylindres de plomb. Il fallait les couler en ménageant de petits trous dans les sections droites. Le moule se compose de deux tubes de laiton concentriques entrant l'un dans l'autre à frottement dur. Par un trait de scie, le tube intérieur est coupé en deux suivant un plan diamétral; l'autre est percé de petits trous qui se trouvent tous dans un même plan diamétral et deux à deux sur des perpendiculaires à l'axe du cylindre. On passe dans ces trous des bouts de fil de fer de 0^{mm}, 2 de diamètre qu'on tend fortement, et l'on entre, de part et d'autre du plan diamétral dessiné par ces fils, les deux morceaux du tube plus étroit. Le système est bouché à sa base par un disque de cuivre maintenant l'écartement des morceaux du tube coupé; il est tout entier, y compris les fils de fer, mouillé et talqué avant le montage. On coule du plomb, on laisse refroidir, on démoule; les fils de fer n'adhèrent pas. On recommence avec succès sur ces cylindres les expériences faites avec la cire molle. On peut laisser dans les trous les fils de fer pendant la torsion; on constate après la torsion qu'ils n'ont pas été tordus par la facilité qu'il y a à les enlever.

On avait commencé par ne prendre aucune précaution pour empêcher l'adhérence des fils de fer. On tordait, on sciait et on limait jusqu'à mettre à nu les fils dont on constatait la forme rectiligne. On pouvait objecter que la rigidité relativement grande des fils de fer vis-à-vis du plomb empêchait le fil de se déformer. L'expérience suivante, faite sur le conseil de M. Brillouin, montre qu'il n'en est rien.

On tend un fil non talqué parallèlement aux génératrices du moule, assez près de la surface du cylindre, et l'on coule le plomb; on tord. Le fil doit prendre la forme d'une hélice et, par conséquent, s'allonger beaucoup. Si sa rigidité était très grande vis-à-vis de celle du plomb, pour ne pas s'allonger il pénétrerait vers l'axe du cylindre en coupant le plomb. C'est ce qui se passe quand on tord un cylindre de cire molle parallèlement aux

génératrices duquel on a noyé un fil métallique fin. Pour le plomb, il en va tout autrement.

Là où le fil de fer adhère fortement au plomb, il s'allonge énormément; là où il adhère mal, il casse; de sorte qu'en le mettant à nu avec une râpe, on trouve des bouts de fil de fer très étirés, isolés les uns des autres. Donc l'expérience sur les droites tracées dans une section droite est concluante, alors même que le fil de fer adhère avec le plomb pendant la torsion.

Il n'est donc pas contraire à l'expérience de considérer les cylindres concentriques comme indépendants. Cependant il ne faudrait pas accorder à ces expériences une force probante qu'elles n'ont pas; elles prouvent simplement que les forces de notation T_1 sont supérieures aux forces de notations T_2 et T_3 à un point tel que, pendant la torsion, deux tranches droites consécutives du cylindre commencent à glisser l'une par rapport à l'autre alors que les déformations produites dans ces tranches par les forces de notations T_2 et T_3 sont encore parfaitement élastiques. Ces déformations parfaitement élastiques seraient d'ailleurs et en tous cas trop faibles pour qu'on pût démontrer directement, par la forme des diamètres, si elles existent ou non.

Relation des N et des T avec les forces appliquées.

Nous admettrons donc que seules les forces N_3 et T subsistent, et nous les appellerons N et T pour simplifier. Nous pouvons poser $N = P/\pi R^2$.

Il n'est pas possible de déduire la valeur en chaque point de T de la connaissance du couple total, si l'on ne sait pas comment varie T en fonction de la distance à l'axe du cylindre, puisque la seule équation d'équilibre que l'on ait est

$$C = \int_0^R 2\pi r^2 T dr.$$

On est amené à considérer deux cas principaux :

1° T est constant. Nous appellerons $[C_1]$ et $[T]$ les valeurs particulières du couple total et de la force tangentielle dans ce cas.

$$[C_1] = \frac{2\pi R^3}{3} [T];$$

2° T peut être représenté par une expression de la forme $T = \mu \alpha r$, où μ

et α seront définis plus loin, et l'on a

$$C = \frac{\pi}{2} \mu \alpha R^3.$$

Ellipsoïde d'élasticité.

De la connaissance de N et de T se déduit immédiatement la forme et la position de l'ellipsoïde d'élasticité, puisque l'équation généralement du troisième degré que l'on rencontre, admet ici une racine nulle. Soient A , B , C les axes de l'ellipsoïde; il vient

$$\begin{aligned} A &= \frac{N}{2} + \sqrt{\frac{N^2}{4} + T^2}, \\ B &= \frac{N}{2} - \sqrt{\frac{N^2}{4} + T^2}, \\ C &= 0. \end{aligned}$$

L'axe C coïncide avec l'axe des x ; les autres sont situés dans un plan parallèle à l'axe du cylindre et normal au plan méridien passant par le point considéré. Le grand axe A fait avec l'axe des z un angle ε tel que $\text{tang } \varepsilon = \frac{T}{A}$. En particulier, si le cylindre n'est que tordu, $\varepsilon = \frac{\pi}{4}$; si le cylindre n'est que tendu, $\varepsilon = 0$.

Des déformations purement élastiques.

Les équations de l'élasticité sont

$$\begin{aligned} N_1 &= \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \\ &\dots\dots\dots, \\ T_1 &= \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right), \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Si nous admettons que les sections droites restent planes et que les rayons restent droits, on a nécessairement

$$u = -\alpha zy - mx, \quad v = \alpha zx - my, \quad w = nz;$$

α désigne l'angle de torsion par unité de longueur et admet L^{-1} comme dimensions.

D'où, pour un point de l'axe des x ,

$$T_2 = T_3 = 0, \quad N_1 = N_2 = 0, \quad T = \mu \alpha r, \quad N = P/\pi R^2,$$

plus deux équations qui donnent m et n en fonction de N ,

$$m = \frac{\lambda}{3\mu(3\lambda + 2\mu)} N, \quad n = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} N.$$

Enfin l'on a

$$C = \alpha \mu \frac{\pi}{2} R^4.$$

Si donc on se donne les constantes λ et μ et les actions extérieures C et P , le problème est complètement résolu.

Ellipsoïde de dilatation.

Posons

$$\begin{aligned} n_1 &= 1 + \frac{\partial u}{\partial x}, \\ &\dots\dots\dots, \\ t_1 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \right), \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

On déduit immédiatement, par les formules générales, la forme et la position de l'ellipsoïde des dilatations, c'est-à-dire de la surface en laquelle se transforme, pendant les déformations, une sphère découpée dans le milieu primitif. Le calcul est ici simplifié par le fait que l'un des axes est sûrement dirigé suivant l'axe des x . Soient a , b , c les axes de l'ellipsoïde; on a, pour déterminer les axes qui sont dans le plan parallèle au plan des yz , l'équation

$$a^2 - a(n_2 + n_3) - t_1^2 + n_2 n_3 = 0;$$

d'où

$$\begin{aligned} a - 1 &= \frac{n - m}{2} + \sqrt{\left(\frac{n + m}{2}\right)^2 + \left(\frac{\alpha r}{2}\right)^2}, \\ b - 1 &= \frac{n - m}{2} - \sqrt{\left(\frac{n + m}{2}\right)^2 + \left(\frac{\alpha r}{2}\right)^2}, \\ c - 1 &= -m. \end{aligned}$$

Soit ε' l'angle du grand axe de l'ellipsoïde de dilatation avec l'axe des z .

On a

$$\operatorname{tang} \varepsilon' = \frac{m+n}{\alpha r} \pm \frac{1}{\alpha r} \sqrt{(m+n)^2 + \alpha^2 r^2}.$$

Si l'on admet les formules ordinaires reliant les deux ellipsoïdes, il est facile de constater que leurs axes coïncident.

Nous avons besoin, pour les discussions qui vont suivre, d'exprimer le grand axe de l'ellipsoïde de dilatation en fonction des forces. Or nous avons

$$m+n = \frac{N}{2\mu}, \quad n-m = \frac{\lambda+2\mu}{2\mu(3\lambda+2\mu)} N;$$

d'où

$$\mu(a-1) = \varepsilon = \frac{\lambda+2\mu}{4(3\lambda+2\mu)} N + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{N^2}{4} + T^2}.$$

Des efforts ou extensions limites.

D'après tout ce que nous savons sur les phénomènes de déformation des métaux, nous ne pouvons parler de ce que les élasticiens appelaient *efforts dangereux* ou *extensions dangereuses*, ni maintenir les distinctions qu'ils faisaient entre la rupture prochaine et la rupture éloignée. Lorsque Saint-Venant dit (*Comm. sur Navier*, n° 3, § 9) : « Ce n'est pas une rupture immédiate ou prochaine qu'il s'agit de prévenir en réglant les dimensions des solides à employer dans les constructions, c'est leur rupture éloignée », il pose une inégalité $p < q$ entre deux quantités p et q , en laissant la différence $q - p$ suffisante pour que la pièce ne se brise pas quels que soient les cycles de température, de pression, de tension, etc. qu'elle puisse supporter dans le cours des temps. Ce sont là des considérations fort utiles aux ingénieurs, qui ne signifient rien du tout pour les physiciens.

Nous appellerons *efforts* ou *extensions limites* les efforts ou les extensions les plus grandes que puisse supporter un élément de surface ou de volume *dans des conditions données*, sans rien préjuger d'ailleurs sur l'obtention expérimentale de tels efforts ou de telles extensions. Ceci posé, quand nous parlerons des hypothèses de Coulomb ou de Lamé, il s'agira de leurs hypothèses appliquées non plus à la rupture des corps, mais aux limites que nous venons de définir.

Les fils des métaux doux (fer, platine, or, argent, etc.), sur lesquels nous opérons, ne se rompent que parce que leur matière n'a pas partout les mêmes propriétés ou que leur forme n'est pas parfaite. Le problème de la rupture ne peut donc être abordé qu'une fois les courbes de déformation expérimentalement déterminées, comme conséquence de la non-homogénéité des fils et du principe incontestable qu'une déformation amène la rupture quand elle diminue la résistance des points de moindre résistance : ce qui revient à distinguer des portions stables et des portions instables dans les courbes de déformation.

Hypothèse de Coulomb.

Rappelons tout d'abord la définition des pressions à l'intérieur d'un solide. Considérons le milieu séparé en deux parties 1 et 2 par une surface quelconque que nous supposons décomposée en éléments d'aire dS . On admet qu'il est possible de supprimer la partie 2 du milieu et de maintenir la partie 1 dans son état primitif, en appliquant à tous les éléments d'aire dS des forces dirigées d'une manière convenable et dont la grandeur est proportionnelle à l'aire de chaque élément et indépendante de sa forme. Coulomb donnait des pressions, à peu de chose près, la même définition.

Appelons N la composante normale de la pression, T la résultante des composantes tangentielles; voici, traduites en langage moderne et convenablement généralisées, les hypothèses de Coulomb (*Mém. des Sav. étr.*; 1773) :

L'élément de surface résiste à une traction limite $[N]$ fonction de la composante tangentielle actuelle T et de divers paramètres tels que la température, etc., que nous aurons à énumérer.

L'élément de surface résiste à une force tangentielle limite $[T]$ qui est fonction de la composante normale actuelle N , croît quand N croît, si N est une pression, décroît quand N croît, si N est une traction, suivant des lois à déterminer; elle est, de plus, fonction de divers paramètres. Les mouvements donnant lieu aux déformations permanentes à l'intérieur de la masse se font au contact des plans pour lesquels on a dépassé l'une ou l'autre de ces limites. Ils peuvent être d'ailleurs arrêtés par d'autres forces dont ils sont eux-mêmes la cause.

Cette hypothèse très simple se prête à de commodés généralisations; elle indique immédiatement comment se feront les déformations permanentes; elle permet d'imaginer que la vitesse, suivant laquelle se font les déforma-

tions, peut influencer sur les limites $[N]$ et $[T]$. Implicitement, elle suppose que la matière n'est pas homogène et Coulomb, dès le début de son Mémoire, distingue avec soin l'élasticité de la cohésion, c'est-à-dire les propriétés élastiques des particules et les liaisons entre ces particules (*voir* BRILLOUIN, *Ann. de Chim. et de Phys.*; 1898 et notre Mémoire, *Ann. de Chim. et de Phys.*; 1897).

Coulomb applique sa théorie à la résistance à l'écrasement des piliers de maçonnerie; voici son exemple traduit en langage moderne: le pilier est un parallélépipède droit, posé sur un plan horizontal, et qui supporte un poids produisant, par unité de surface de tout plan horizontal, une pression A . Les pressions, appliquées sur tout plan vertical à l'intérieur du solide, sont nulles. L'ellipsoïde d'élasticité se réduit à son grand axe vertical de longueur A . Traçons, à l'intérieur du pilier, un plan dont la normale fasse avec la verticale un angle α . D'après le théorème général que nous rappelions au début de ce travail, la pression totale oblique sur le plan considéré est verticale et égale à $A \cos \alpha$. Elle se décompose en deux:

L'une normale au plan $N = A \cos^2 \alpha$;

L'autre tangentielle et dirigée suivant la ligne de plus grande pente du plan $T = A \cos \alpha \sin \alpha$.

Coulomb admet que la composante tangentielle limite $[T]$ se compose de deux parties: la première constante $[T_1]$, l'autre qu'il assimile à un frottement et considère comme proportionnelle à la composante normale. Il a donc l'équation

$$[T] = [T_1] + KN,$$

à laquelle il faut joindre l'équation de condition

$$T < [T];$$

d'où enfin

$$A \cos \alpha \sin \alpha - KA \cos^2 \alpha < [T_1].$$

Le premier membre est maximum pour l'inclinaison α donnée par l'équation

$$\tan \alpha = K \pm \sqrt{K^2 + 1}.$$

Coulomb applique ce calcul au cas d'une colonne de brique pour laquelle il prend $K = \frac{3}{4}$; il vient

$$\alpha = 63^\circ 26', \quad A < 4[T_1].$$

Enfin, ajoutant à ses hypothèses la condition $[T_1] = [N]$, qu'il croit

avoir démontrée par l'expérience, il conclut que la normale du plan suivant lequel tendent à se produire les glissements, fait avec la verticale un angle de $63^{\circ}26'$ et que « la force qu'il faudrait pour rompre une colonne de brique par une force pressante serait quadruple de celle qu'il faudrait pour rompre cette même colonne par une force de traction ».

Dans son *Commentaire sur Navier* (note du § 3), Saint-Venant cite très incomplètement Coulomb; de l'hypothèse il néglige cette partie qui fait dépendre la limite $[T]$ de la pression normale N . La condition se réduit alors à

$$A \cos \alpha \sin \alpha < [T_1];$$

d'où

$$\alpha = 45^{\circ} \quad \text{et} \quad A < 2[T_1];$$

de plus, admettant que $[T_1] = 0,8[N_1]$, il conclut que, d'après l'hypothèse de Coulomb, la force qu'il faudrait pour rompre une colonne par pression serait 1,6 de celle qu'il faudrait pour la rompre par traction. D'où cette conséquence que la théorie de Coulomb est erronée : c'est aller un peu vite en besogne.

Évidemment, certains détails de l'hypothèse de Coulomb peuvent être modifiés; rien n'impose que la variation de la force tangentielle limite s'exprime linéairement en fonction de la pression normale, c'est-à-dire par l'équation $[T] = [T_1] + KN$, ni surtout que le coefficient K soit égal au coefficient de frottement de deux morceaux de la même matière séparés l'un de l'autre. En admettant même que la forme linéaire soit aussi valable, lorsque N est une tension, $[T] = [T_1] - K'N$, rien n'indique que l'on ait $K = K'$.

Mais ce que nous tenons à mettre en évidence dans l'hypothèse de Coulomb, c'est qu'il suffit de connaître les forces qui agissent sur un élément plan pris à l'intérieur du solide, pour savoir si un glissement tangentiel ou une cession normale doit se produire sur cet élément plan. A supposer admissible l'hypothèse de Coulomb, la détermination du couple $[C_1]$ limite, auquel résiste un fil suffisamment tordu pour lequel on peut poser, au moins comme première approximation, $[C_1] = \frac{2\pi R^3}{3}[T]$, la torsion, s'effectuant à des vitesses ν déterminées et sous des charges connues N , permettrait de trouver les relations qui restent encore indéterminées entre $[T]$, N et ν .

Dès qu'on eut découvert l'existence des ellipsoïdes d'élasticité et de dilatation, on voulut tout y rapporter; la distinction entre la cohésion et l'élas-

ticité fut oubliée; la matière redevint homogène et deux groupes d'hypothèses nouvelles se firent jour; ce qu'elles sont et ce qu'elles valent, c'est maintenant le lieu de l'examiner.

Hypothèses de Lamé et Clapeyron, de Saint-Venant.

Avant d'entrer dans le détail, il faut discuter le principe même de ces hypothèses. Les unes et les autres donnent comme criterium à la possibilité pour la matière de résister à un effort qui, par hypothèse, est appliqué à un plan, la longueur du grand axe de l'ellipsoïde d'élasticité ou de dilatation. Telles qu'elles sont généralement présentées, elles semblent tout à fait insoutenables. Les preuves expérimentales que l'on a produites pour leur confirmation ne peuvent suffire à des physiciens : ce sont d'ailleurs les mêmes expériences que l'on a fait servir à étayer les deux groupes d'hypothèses. Considérons donc la question comme entière et cherchons à asseoir notre opinion sur d'autres preuves que celles que l'on trouve dans les traités sur la résistance des matériaux. Aussi bien il y a, dans le *Commentaire sur Navier*, de quoi ruiner l'hypothèse de Saint-Venant, qui y est cependant développée en 500 pages.

Le premier grief général à adresser à ces hypothèses, c'est que, ne considérant que la longueur du grand axe de l'ellipsoïde d'élasticité ou de dilatation, elles admettent implicitement que la longueur des autres axes est indifférente. Ceci est contredit par les faits, de l'aveu même de Saint-Venant. On lit en effet dans le § XVI de la note du n° 113 :

« *Possibilité de dépasser beaucoup la limite de dilatation adoptée pour les cas ordinaires, lorsqu'il y a simultanément et dans un autre sens de fortes contractions....* Divers faits établissent que lorsqu'un solide est fortement comprimé en certains points et en certains sens, il peut éprouver, aux mêmes points et dans d'autres sens, des dilatations extrêmement considérables sans se rompre ni se désagréger aucunement, comme si les compressions comblaient les vides des disjonctions produites par les dilatations. » Que si une compression dans une première direction permet d'augmenter la dilatation dans une autre, n'y a-t-il pas lieu de craindre qu'une dilatation dans la première direction ne force à diminuer la dilatation dans une autre, et n'est-ce pas la condamnation de l'hypothèse?

Il est vrai que les hypothèses peuvent se généraliser de manière à prendre comme criterium, non plus la longueur du grand axe, mais la valeur d'une

fonction symétrique de la grandeur des trois axes, par exemple des invariants ou de certaines fonctions des invariants; nous reviendrons sur ce point.

Le second grief général à adresser à ces hypothèses, c'est qu'à supposer qu'elles donnent le moyen de reconnaître si oui ou non la matière résistera, elles ne permettent pas de dire comment se feront les déformations permanentes, au cas où la matière ne peut résister. Saint-Venant répond à cette objection avec une curieuse désinvolture. On lit, page 287 de son grand *Mémoire Sur la torsion des prismes (Sav. étr.; 1856)*: « *Manières diverses dont s'opèrent les ruptures....* La théorie précédente a pour but de prévoir le commencement de la rupture et d'en écarter les chances même éloignées; on ne peut rien inférer contre son exactitude, de ce qu'elle n'en calcule pas les circonstances et les phases, ce qui serait aussi difficile qu'inutile à son objet. »

L'aveu, pour dépouillé d'artifice qu'il soit, n'est pas fait pour nous contenter: il est indifférent aux physiciens que la rupture se fasse, pourvu qu'ils en connaissent l'histoire. Corrélativement, les élasticiens parlent de points dangereux, c'est-à-dire de points où la rupture est le plus imminente, et jamais de surfaces dangereuses, c'est-à-dire de surfaces suivant lesquelles doivent se produire les déformations permanentes.

Le troisième grief général est que ces hypothèses, d'après leur nature même, ne permettent pas de tenir compte de la variation des efforts limites avec la vitesse suivant laquelle se produisent les déformations permanentes. Or, il ne s'agit pas là de différences médiocres et difficiles à mettre en évidence; on peut faire varier le couple auquel résiste un fil de fer de plus de $\frac{1}{20}$ de sa valeur en modifiant la vitesse de torsion. Par quel procédé faire entrer cette vitesse dans des conditions tirées de la longueur des axes d'un ellipsoïde, qui dépend des forces appliquées non seulement sur les faces du parallélépipède le long desquelles se produisent les déformations permanentes, mais encore sur les faces le long desquelles ne se produit rien du tout.

Si forts que soient ces arguments, nous ne pouvons en rester là. Il s'agit maintenant d'entrer dans le détail, de voir ce que ces hypothèses donnent dans le cas du fil tendu et tordu et à quelles vérifications on peut soumettre leurs conséquences.

Hypothèse de Lamé et Clapeyron.

Dans leur *Mémoire Sur l'équilibre intérieur des corps solides homogènes (Sav. étr., IV)*, Lamé et Clapeyron admettent que pour savoir si

des efforts peuvent être supportés par un corps, il suffit de calculer en tout point l'ellipsoïde d'élasticité. La condition de possibilité pour ces efforts est que le grand axe de l'ellipsoïde ne dépasse pas une longueur donnée qui caractérise la matière, quelles que soient d'ailleurs les longueurs des deux autres axes. Dans le cas particulier qui nous occupe, il résulte de cette hypothèse les conséquences suivantes. Soit $[A]$ la valeur limite du grand axe de l'ellipsoïde d'élasticité; soit $[T]$ l'effort tangentiel limite sous la traction normale $+ N$; la condition est exprimée par l'équation

$$[A] = \frac{N}{2} + \sqrt{\frac{N^2}{4} + [T]^2}$$

ou

$$[T]^2 = [A][[A] - N].$$

$[T]$ est donnée en fonction de N par une parabole. La courbe est représentée en (1).

Supposons maintenant un cylindre tordu à un point tel que nous puissions considérer, au moins comme première approximation, tous les éléments d'une section droite comme résistant avec la même force tangentielle; le couple total est donné par la formule

$$[T] = \frac{3[C_1]}{2\pi R^3};$$

nous avons d'ailleurs généralement

$$N = \frac{P}{\pi R^2}.$$

D'après l'hypothèse que nous discutons, la limite $[T]$, sans tension simultanée, est $[A]$; la limite $[N]$, sans torsion simultanée, est aussi $[A]$; on a donc, entre le couple total limite $[C_1]$ sans tension simultanée et la charge totale limite $[P]$ sans torsion simultanée, la relation

$$[P] = [C_1] \frac{1,5}{R}.$$

C'est là un résultat que l'expérience peut essayer de vérifier; en voici un autre plus important. On a, pour $N = 0$,

$$\frac{d[T]}{dN} = -\frac{1}{2}.$$

Dès le début, pour les moindres tensions, le couple limite varie beaucoup

avec la tension. Des autres hypothèses, nous tirerons des conséquences analogues qui leur serviront de pierre de touche.

L'hypothèse de Lamé et Clapeyron est muette dans le cas des pressions (il faut, dans les formules, prendre N négativement). C'est une opinion émise depuis longtemps et presque incontestable qu'une pression uniforme exercée sur un corps ne le désagrège pas, mais lui donne plus de cohésion et le rend moins déformable. Si donc on se borne à considérer le grand axe de l'ellipsoïde et non ses relations avec les autres, une compression exercée suivant une direction unique, comme dans l'exemple auquel Coulomb a appliqué sa théorie, équivaut à une compression uniforme et, par conséquent, ne peut en aucun cas désagréger le corps, ce qui est contraire à l'expérience.

D'ailleurs, Lamé et Clapeyron se rendaient bien compte de ce que leur hypothèse a de trop particulier. Ainsi ils disent (*loc. cit.*, p. 523) : « Il est possible que la plus grande traction à laquelle on puisse soumettre une tige, dans le sens de la longueur, sans altération permanente, varie avec les pressions latérales auxquelles la tige pourrait être exposée. »

En ce lieu de leur Mémoire, ils étudient les déformations d'un cylindre circulaire creux indéfini, inégalement pressé sur ses faces intérieure et extérieure. Il ne serait pas difficile de développer leur analyse en ajoutant une traction longitudinale, et le cas se prêterait très bien à des expériences précises. Il s'agirait de produire, à l'intérieur d'une telle tige, des pressions de plusieurs centaines d'atmosphères sous des charges variées. Aujourd'hui que la production des hautes pressions se fait aisément et que l'industrie livre couramment des tubes étirés, peut-être de telles expériences donneraient-elles des résultats intéressants.

On peut généraliser l'hypothèse de Lamé et Clapeyron sans abandonner leur point de vue, en faisant porter les conditions non plus sur la longueur du grand axe seul, mais sur une fonction symétrique des longueurs des axes. Si cette fonction était rationnelle, elle s'exprimerait rationnellement en fonction des coefficients

$$I_1 = N_1 + N_2 + N_3,$$

$$I_2^2 = N_2 N_3 + N_3 N_1 + N_1 N_2 - T_1^2 - T_2^2 - T_3^2,$$

$$I_3^3 = N_1 N_2 N_3 + 2 T_1 T_2 T_3 - N_1 T_1^2 - N_2 T_2^2 - N_3 T_3^2$$

de l'équation donnant les axes. Pour éviter toute particularisation sur cette

fonction, nous généraliserons l'hypothèse de Clapeyron en supposant tout de suite qu'il est possible d'exprimer la condition pour que la matière résiste à des forces données N , T , au moyen d'une ou plusieurs inégalités où entrent seulement I_1 , I_2^2 et I_3^3 .

L'hypothèse la plus simple consiste à prendre ces invariants eux-mêmes pour les fonctions cherchées et à leur imposer des limites numériques. Appliquées au cas qui nous occupe, ces conditions se réduiraient à limiter les deux quantités $A + B$ et AB .

Or $A + B = N$, $AB = -T^2$. Elles donneraient donc à N et à T une indépendance qu'ils n'ont pas. Mais nous pouvons imaginer bien d'autres fonctions des invariants.

Faisons porter, par exemple, l'une des limitations, à supposer qu'elles soient multiples, sur l'expression suivante :

$$I^2 = 2I_1^2 - 6I_2^2 = (A - B)^2 + (B - C)^2 + (C - A)^2,$$

qui devient, dans le cas du cylindre tendu et tordu,

$$I^2 = 2N^2 + 6T^2.$$

La courbe qui relie les limites de la force tangentielle à la traction est une ellipse (courbe 2).

$$\frac{d[T]}{dN} = 0 \quad \text{pour} \quad N = 0.$$

D'ailleurs on a, entre le couple total limite $[C_1]$ sans torsion et la charge limite $[P]$ sans torsion, la relation

$$[P] = [C_1] \frac{2,6}{R}.$$

Nous aurions là une condition; il pourrait en exister d'autres. A supposer que cet ordre d'hypothèses ait un sens, ce qui est peu probable, le choix de ces nouvelles conditions est, pour l'instant, tout à fait impossible. D'ailleurs, quelles qu'elles puissent être, on se heurtera toujours à cette difficulté que l'on y passera, d'une manière continue, des pressions aux tractions, tandis qu'il est vraisemblable que les pressions et les tractions produisent des phénomènes très différents et qu'il doit être impossible de compenser une pression dans un sens par une traction dans un autre sens.

Hypothèse de Saint-Venant.

Dans son grand Mémoire *Sur la torsion des prismes* (*Sav. étr.*, XIV) et surtout dans son Commentaire sur la *Résistance des corps solides* de Navier, Saint-Venant développe l'hypothèse suivante : Il n'y a pas d'efforts dangereux ; il y a des extensions dangereuses. Pour savoir si un corps peut résister à des déformations, il faut calculer la plus grande dilatation produite par ces déformations. Or, si l'on néglige les translations et les rotations, une sphère découpée dans le solide se transforme en un ellipsoïde que l'on appelle *ellipsoïde des dilatations*. Il suffit donc de calculer le grand axe de cet ellipsoïde (*voir* p. 8) pour savoir dans quelle direction se produit la plus grande dilatation et quelle est sa valeur. Si elle dépasse *une longueur déterminée une fois pour toutes et caractéristique de la matière*, le corps ne peut résister à la déformation.

Montrons des applications de cette hypothèse. Soit un cylindre uniformément pressé ou tiré dans la direction de l'axe des z et libre suivant ses faces latérales. On a $N_1 = N_2 = 0$ et en appelant i_1, i_2, i_3 les allongements parallèles aux trois axes,

$$i_1 = i_2, \quad 2i_1(\lambda + \mu) + \lambda i_3 = 0,$$

$$N_3 = \mu \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} i_3 = -\mu \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda} 2i_1.$$

Soit maintenant $[i]$ l'allongement limite.

PREMIER CAS : *Traction*. — Le grand axe de l'ellipsoïde de dilatation est vertical ; la tension maxima que peut supporter le solide par unité de surface est

$$[N_3] = \mu \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} [i] = \frac{10}{4} \mu [i],$$

si l'on pose avec Saint-Venant $\lambda = \mu$.

SECOND CAS : *Pression*. — Le grand axe de l'ellipsoïde est l'un quelconque des rayons de sa section horizontale. On a alors

$$[N_3] = -\mu \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda} 2[i] = 10\mu [i],$$

si l'on fait $\lambda = \mu$.

D'où la conclusion (*Commentaire*, § VII de la note du n° 3) : « Un prisme

courra le danger de se rompre par compression longitudinale, lorsque sa contraction longitudinale sera arrivée au quadruple de la dilatation reconnue dangereuse ou sous laquelle il se romprait par extension... On voit qu'un prisme d'égale contexture en tous sens et dont les faces latérales sont libres, rompra par compression longitudinale ou éprouvera un commencement de désagrégation qui amène la séparation et l'écrasement, sous une charge quatre fois plus grande que celle qui le romprait par extension ». On remarquera que ce nombre quatre est précisément celui de Coulomb. D'ailleurs, Saint-Venant ne fait aucune difficulté pour reconnaître que les vérifications expérimentales laissent à désirer.

Tandis que, dans la théorie de Coulomb, le sectionnement de la matière par rupture doit se faire suivant des plans plus ou moins inclinés sur la verticale, dans la théorie de Saint-Venant, le sectionnement doit se faire suivant des plans verticaux.

Quoi qu'il en soit, revenons au cas particulier qui nous occupe. Le grand axe de l'ellipsoïde de dilatation α est donné par la formule

$$\mu(\alpha - 1) = \mathcal{C} = \frac{\lambda + 2\mu}{4(3\lambda + 2\mu)} N + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{N^2}{4} + T^2}.$$

Il n'est pas possible de comparer la théorie et l'expérience sans faire une hypothèse sur le rapport $\frac{\mu}{\lambda}$; dans ce qui suit, $[\mathcal{C}]$ représentera le maximum de la quantité $\mu(\alpha - 1)$ compatible avec la matière choisie.

A. $\frac{\mu}{\lambda} = 0$:

$$[T]^2 = 4[\mathcal{C}]^2 - \frac{2}{3}[\mathcal{C}]N - \frac{2}{9}N^2 \quad (\text{courbe 4}),$$

$$\frac{d[T]}{dN} = -\frac{1}{6} \quad \text{pour} \quad N = 0,$$

$$[T] = 0 \quad \text{pour} \quad N = 3[\mathcal{C}];$$

d'où

$$[N]_{T=0} = 1,5 [T]_{N=0}.$$

B. $\frac{\mu}{\lambda} = \frac{1}{2}$: C'est l'hypothèse que fait Wertheim d'après le résultat de ses expériences.

$$[T]^2 = 4[\mathcal{C}]^2 - [\mathcal{C}]N - \frac{3}{16}N^2,$$

$$\frac{d[T]}{dN} = -\frac{1}{4} \quad \text{pour} \quad N = 0,$$

$$[T] = 0 \quad \text{pour} \quad N = 2,66[\mathcal{C}];$$

d'où

$$[N]_{T=0} = 1,33[T]_{N=0}.$$

C. $\frac{\mu}{\lambda} = 1$: C'est l'hypothèse que Saint-Venant fait toujours pour les corps isotropes qu'il appelle à *texture égale en tous sens*.

$$[T]^2 = 4[\mathcal{E}]^2 - \frac{6}{5}[\mathcal{E}]N - \frac{4}{25}N^2 \quad (\text{courbe 3}),$$

$$\frac{d[T]}{dN} = -\frac{3}{10} \quad \text{pour} \quad N = 0,$$

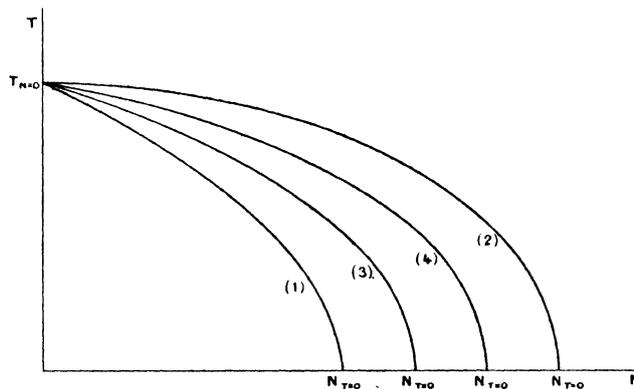
$$[T] = 0 \quad \text{pour} \quad N = 2,5[\mathcal{E}];$$

d'où

$$[N]_{T=0} = \frac{5}{4}[T]_{N=0}.$$

« C'est, dit Saint-Venant (*Comment.*, § IX du n° 152), la relation entre

Fig. 1.



les limites des efforts capables d'être indéfiniment supportés tangentielle-
ment et perpendiculairement par une même face matérielle. »

D. $\frac{\mu}{\lambda} = \infty$:

$$[T]^2 = 4[\mathcal{E}]^2 - 2[\mathcal{E}]N,$$

$$\frac{d[T]}{dN} = -\frac{1}{2} \quad \text{pour} \quad N = 0,$$

$$[T] = 0 \quad \text{pour} \quad N = 2[\mathcal{E}];$$

d'où

$$[N]_{T=0} = [T]_{N=0}.$$

Nous retrouvons la courbe donnée par l'hypothèse de Lamé et Clapeyron (courbe 1).

Courbe typique des fils neufs. Théorie de J. Thomson.

Jusqu'ici nous avons toujours supposé que la limite $[T]$ est unique et bien déterminée. Elle peut d'ailleurs être fonction de divers paramètres, de la température, de la tension, de la vitesse de torsion. Si le cylindre tordu et tendu était un tube infiniment mince, il résulterait de ce qui précède que sa courbe de torsion prise à partir du couple nul et prolongée jusqu'à des torsions considérables, se composerait de deux droites : l'une inclinée $C = \Gamma\alpha$, l'autre horizontale $C = [C_1]$. Mais le phénomène se trouve compliqué par ce fait que les divers cylindres qui forment le cylindre plein, n'arrivent pas à leur limite d'élasticité pour la même torsion. Le couple total, qui est la résultante des couples produits par les cylindres concentriques infiniment minces, ne varie donc plus suivant la loi qui vient d'être dite. J. Thomson a indiqué comment les choses devaient se passer dans l'hypothèse ici admise (*Camb. et Dub. Math. Journ.*, p. 252; 1848), cité par L. Kelvin (*Rep. of Papers*, t. III, p. 25).

Considérons un cylindre chauffé au rouge puis refroidi. Ses particules doivent être regardées comme complètement relâchées. Tordons-le jusqu'à ce que les éléments d'une section droite, situés près de la circonférence, subissent l'effort tangentiel limite $[T]$. Soit alors $[C_0]$ le couple total que supporte le cylindre et $[\alpha_0]$ la torsion correspondante par unité de longueur.

On a

$$[C_0] = \mu[\alpha_0] \frac{\pi}{2} R^4 = [T] \frac{\pi}{2} R^3,$$

puisque

$$[T] = \mu[\alpha_0]R.$$

Si l'on pousse plus loin la torsion, les éléments extérieurs d'une section droite vont glisser sur ceux qui appartiennent à la section droite immédiatement voisine, puisque nous savons que les sections droites ne se déforment pas et que l'accroissement de α sans glissement entraînerait un accroissement, par hypothèse impossible, de la force tangentielle. Les éléments des sections droites à des distances de plus en plus petites de l'axe vont atteindre successivement leur tension limite, et si, enfin, la torsion est suffisamment continuée, tous les éléments des sections droites seront soumis à l'effort tangentiel limite $[T]$. A ce moment, le couple $C = [C_1]$ sera

$$[C_1] = \frac{2\pi}{3} [T] R^3.$$

Le couple le plus grand que puisse supporter le cylindre total, dans l'hypothèse de l'invariabilité de l'effort limite $[T]$, est donc $\frac{1}{3}$ du couple pour lequel la courbe cesse d'être une droite.

Il est facile de trouver entre les limites $[C_0]$ et $[C_1]$ la forme de la courbe de torsion.

Soit, à un moment donné, r le rayon de la circonférence pour laquelle les éléments de la section droite arrivent à subir l'effort tangentiel maximum; on a, pour définir l'angle de torsion, la relation $[T] = \mu\alpha r$. Le cylindre intérieur à cette circonférence, dont la déformation est encore purement élastique, donne un couple

$$C' = \mu\alpha \frac{\pi}{2} r^4 = \frac{\pi}{2} \frac{[T]^4}{\mu^3 \alpha^3}.$$

Le tube extérieur, où tous les éléments des sections droites subissent l'effort tangentiel maximum, donne un couple

$$C'' = \frac{2\pi}{3} [T] (R^3 - r^3).$$

D'où, en tout, un couple

$$C = \frac{2\pi [T]}{3} R^3 - \frac{\pi [T]^4}{6 \mu^3 \alpha^3}.$$

En introduisant le couple

$$[C_0] = \frac{2\pi}{3} [T] R^3,$$

on trouve facilement :

$$\text{Au-dessous de la torsion } [\alpha_0], \text{ on a } \dots \quad C = [C_0] \frac{\alpha}{[\alpha_0]},$$

$$\text{Au-dessus de la torsion } [\alpha_0], \text{ on a } \dots \quad C = \frac{4}{3} [C_0] - \frac{[C_0]}{3} \frac{[\alpha_0]^3}{\alpha^3}.$$

On peut mettre ces équations sous une autre forme très générale. Posons

$$x = \frac{\alpha R}{[T]};$$

la droite par laquelle débute la courbe de torsion peut s'écrire

$$C = \mu\alpha \frac{\pi}{2} R^4 \quad \text{ou} \quad \frac{C}{[T]} = R^3 \left(\frac{\pi}{2} \mu x \right),$$

elle vaut jusqu'à la valeur $x = \frac{1}{\mu}$.

Au delà de cet angle, la courbe peut s'écrire

$$\frac{C}{[T]} = R^3 \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6\mu^3 x^3} \right).$$

Ces équations rentrent dans la forme générale $\alpha C = R^3 \varphi(\alpha R \alpha)$, en posant $\alpha[T] = 1$.

Lord Kelvin fait suivre la citation de J. Thomson d'une note dans laquelle il remarque que probablement la limite unique et déterminée $[T]$ n'existe pas : « Un morceau de cuivre ou de fer pris dans un état non déjà modifié devient certainement plus dur par les déformations et un semblable résultat est probable pour les métaux ductiles. Donc les éléments extérieurs doivent supporter des tensions limites plus fortes que les éléments plus voisins de l'axe, jusqu'à ce que la torsion ait été poussée assez loin pour amener ces tensions à leur vraie valeur maxima dans toute la section. Mais il est probable qu'avant cela la matière extérieure sera devenue friable et fissurée ». Il n'y a évidemment qu'un seul moyen de juger ces objections, c'est de décrire expérimentalement la courbe de J. Thomson qui est la courbe typique des fils neufs.

Résumé et plan d'expériences.

En résumé, les théories les plus généralement admises veulent expliquer tous les phénomènes dans un fil tendu et tordu, au moyen des deux constantes λ et μ et d'une relation entre les limites $[T]$ et $[N]$ dont elles supposent l'existence, et les autres forces qui existent simultanément.

Elles sont amenées à considérer dans un fil tordu :

1° La constante de torsion d'un fil donné, soit le couple en ergs pour une torsion de 1 radiant d'un fil de 1^{cm} de longueur

$$\Gamma = \mu \frac{\pi}{2} R^4;$$

2° Un premier couple total limite $[C_0]$ à partir duquel le fil ne peut plus être considéré comme parfaitement élastique, ni la courbe de torsion comme rectiligne

$$[C_0] = \frac{\pi}{2} [T] R^3,$$

c'est la limite d'élasticité énoncée en couple;

3° L'angle de torsion correspondant à ce couple

$$[\alpha_0] = \frac{[C_0]}{T} = \frac{[T]}{\mu R};$$

c'est la limite d'élasticité énoncée en radians.

4° Un second couple total limite $[C_1]$ que le fil ne peut dépasser

$$[C_1] = \frac{2\pi R^3}{3} [T]:$$

5° L'angle correspondant, qui serait l'angle de détorsion du fil tordu à sa limite jusqu'au couple nul, en supposant qu'au moment de l'arrêt il ne se passe aucun phénomène et que la courbe de détorsion est rigoureusement rectiligne.

Elles donnent des formules, d'ailleurs contradictoires, pour calculer les variations de ces constantes lorsque le fil est à la fois tendu et tordu; ces formules font changer la valeur de $[T]$ sans changer la loi du phénomène.

Elles ne tiennent aucun compte de la vitesse avec laquelle se font les torsions, ni de plusieurs autres phénomènes, tels que l'allongement produit par la torsion même à tension constante, et réciproquement la torsion produite par l'allongement à couple constant.

Nous nous proposons, dans un prochain Mémoire, de comparer à l'expérience les conséquences de ces théories. Dans ce but, nous chercherons quelles relations existent entre les quatre quantités suivantes : la vitesse de torsion, la vitesse d'allongement, le couple total et la charge totale. Nous décrirons les courbes typiques de déformation des fils neufs, en nous limitant aux cas les plus simples (1).

Historique expérimental.

Ces problèmes d'élasticité ne sont si embrouillés encore à l'heure actuelle, que parce que les expérimentateurs ne s'astreignent pas suffisamment à définir ce qu'ils font. M. Brillouin dans son Mémoire *Sur la Plasticité* (*Ann. de l'École Normale*, 1890), pouvait dire fort justement que les Mémoires de mesure, prodigieusement nombreux, obscurcissent chacun à leur tour un sujet déjà peu clair. Pour des raisons que l'on comprendra immédiatement, ce n'est qu'en décrivant les courbes des fils neufs

(1) Voir, sur la définition de ces courbes, un Mémoire paru dans le t. XII de ces *Annales*.

à vitesse constante qu'on peut espérer résoudre le problème ici posé. Cela implique que *les fils ne serviront qu'une fois, que chaque fil décrira en tout et pour tout sa première courbe de déformation*. Quels que soient les résultats obtenus, il faudra bien se garder de vouloir qu'ils s'accordent avec ceux que peuvent donner d'autres méthodes. Et réciproquement, il serait absurde de s'efforcer de les prévoir par analogie avec ceux qui proviennent d'expériences faites sur des cycles fermés.

Ceci posé, on n'a jamais fait d'expériences systématiques sur l'existence ou la variation des couples limites avec la vitesse de torsion (supposée constante pendant toute une expérience et variant d'une expérience à l'autre); ni sur les allongements dus à la torsion (*voir les généralités sur ce phénomène, § XXIV de notre Mémoire, Ann. de Chim. et de Phys., 1897*); enfin, sur l'influence de la tension, puisque, par définition même du problème ici posé, nous devons éliminer tout ce qui a trait aux cycles fermés ou presque fermés [résultats de Wiedemann, 1858; de Lord Kelvin, 1865 (*Rep. of Pap.*, t. III, p. 25); de Tomlinson (*Phil. Trans.*, 1886); de Wiedemann (*Wied. Ann.*, 1879)], il ne reste à parler que du Mémoire de Braun publié dans les *Wied. Ann.*, t. CLIX; 1876.

Le Chapitre V de ce Mémoire est consacré à « la torsion et la tension dans les fils ». On trouve au § 5 les deux règles suivantes, que je transcris sans commentaire :

« Die Torsionsverschiebung, welche eine bestimmte Kraft hervorruft, ändert sich nicht, wenn der Draht einer Längsspannung unterworfen wird ». Et, plus loin, après l'exposé d'expériences, où d'ailleurs sont comparés des résultats fournis par une méthode directe et par une méthode d'oscillation : « Aus den Zahlen ergiebt sich übereinstimmend, dass der Widerstand des Drahtes gegen Torsion bei vergrößerter Spannung eher abnimmt als zunimmt ». Après ces citations, on ne s'étonnera pas que nous considérions la question comme entière.

