E. GOURSAT

Recherches sur quelques équations aux dérivées partielles du second ordre

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 2e série, tome 1, nº 1 (1899), p. 31-78

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1899_2_1_1_31_0>

RECHERCHES

SUR QUELQUES

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

DU SECOND ORDRE,

PAR M. E. GOURSAT.

1. J'ai exposé en détail, dans un Ouvrage récent, la méthode d'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre, dont le principe est dû à M. Darboux. Cette méthode constitue jusqu'ici le moyen le plus puissant de ramener l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du second ordre à l'intégration d'équations différentielles ordinaires, lorsque la chose est possible. On ne connaît malheureusement, en dehors des équations linéaires, qu'un petit nombre de types d'équations auxquelles cette méthode s'applique avec succès. Le problème général, qui consisterait à déterminer toutes les équations du second ordre intégrables par cette méthode, paraît difficilement abordable. Celui auquel je me suis restreint dans ce travail est sans doute bien particulier, mais la solution très complète que j'obtiens fournira peut-être des indications pour traiter des cas plus étendus.

Une équation de la forme $s=f(x,y,z,p,q)$ a ses deux familles de caractéristiques distinctes, et les équations différentielles de ces caractéristiques admettent respectivement les combinaisons intégrables $dx=0$, $dy=0$. S'il existe pour chacun de ces systèmes une autre combinaison intégrable, ne renfermant que x, y, z, p, q, l'équation peut, comme il est bien connu, être ramenée à la forme $s=0$. Le problème le plus simple que l'on puisse se proposer sur ces équations est donc le suivant :

Déterminer toutes les équations $s=f(x,y,z,p,q)$ telles qu'il existe, pour chacun des systèmes de caractéristiques, une combinaison intégrable autre que $dx=0$ ou $dy=0$, dans laquelle ne figure aucune dérivée d'ordre su-

périeur au second, l'une d'elles au moins renfermant une dérivée du second ordre.

On connaît déjà quelques équations jouissant de cette propriété. Les solutions nouvelles que j'obtiens peuvent se ramener à quelques types très simples ([1]).

2. Nous démontrerons d'abord le lemme suivant :

Étant donnés un système de $n+1$ variables indépendantes $(x_1, x_2, \dots, x_n, z)$ et un système complet de n équations

$$\text{(1)}\qquad \begin{cases} X_1(f) = \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + (A_1 z + B_1)\dfrac{\partial f}{\partial z} = 0, \\ X_2(f) = \dfrac{\partial f}{\partial x_2} + (A_2 z + B_2)\dfrac{\partial f}{\partial z} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ X_n(f) = \dfrac{\partial f}{\partial x_n} + (A_n z + B_n)\dfrac{\partial f}{\partial z} = 0, \end{cases}$$

où les coefficients A_i, B_k ne contiennent pas z, ce système admet une intégrale linéaire par rapport à z, qui s'obtient par deux quadratures.

En effet, pour que le système (1) soit complet, il faut que l'on ait

$$X_i(A_k z + B_k) = X_k(A_i z + B_i) \qquad (i, k = 1, 2 \dots n),$$

ou, en développant,

$$\frac{\partial A_k}{\partial x_i} z + \frac{\partial B_k}{\partial x_i} + A_k(A_i z + B_i) = \frac{\partial A_i}{\partial x_k} z + \frac{\partial B_i}{\partial x_k} + A_i(A_k z + B_k),$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial A_i}{\partial x_k} = \frac{\partial A_k}{\partial x_i}, \qquad \frac{\partial B_i}{\partial x_k} + A_i B_k = \frac{\partial B_k}{\partial x_i} + A_k B_i;$$

si toutes ces conditions sont vérifiées, on s'assure immédiatement que la fonction

$$f = A z + B,$$

où l'on a

$$A = e^{-\int A_1 dx_1 + \dots + A_n dx_n},$$

$$B = -\int A(B_1\, dx_1 + B_2 dx_2 + \dots + B_n\, dx_n,$$

satisfait aux équations (1).

([1]) Les principaux résultats de ce travail ont été résumés dans une Note présentée à l'Académie des Sciences (*Comptes rendus*, t. CXXVII, p. 854-855; 28 novembre 1898).

Cela posé, considérons d'abord une équation du second ordre de la forme

$$s = \rho pq + ap + bq + c, \tag{2}$$

ρ, a, b, c étant des fonctions de x, y, z. Si cette équation admet une intégrale intermédiaire du premier ordre

$$\varphi(x, y, z, p) = \mathrm{X},$$

où X est une fonction arbitraire de x, elle doit être identique à l'équation

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} q + \frac{\partial\varphi}{\partial p} s = 0,$$

c'est-à-dire que l'on doit avoir

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial\varphi}{\partial z} + (\rho p + b)\frac{\partial\varphi}{\partial p} = 0, \\ &\frac{\partial\varphi}{\partial y} + (ap + c)\frac{\partial\varphi}{\partial p} = 0; \end{aligned}\right. \tag{3}$$

pour que ces deux équations admettent une autre intégrale que $\varphi = x$, il est nécessaire qu'elles forment un système complet. D'après le lemme qui vient d'être démontré, elles admettent donc une intégrale linéaire en p, et toute intégrale intermédiaire du premier ordre d'une équation de la forme (2) peut s'écrire

$$\mathrm{A}p + \mathrm{B} = \mathrm{X}, \tag{4}$$

A et B étant des fonctions de x, y, z seulement. La réciproque est évidente.

Considérons, en second lieu, une équation du second ordre

$$s = f(x, y, z, p, q), \tag{5}$$

où la fonction f est de forme quelconque. Soit

$$\Phi(x, y, z, p, r) = \mathrm{X} \tag{6}$$

une intégrale intermédiaire du second ordre de cette équation; les deux relations (5) et (6) doivent former un système en involution, quelle que soit la fonction arbitraire X. Il faut, pour cela, que la valeur de $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$, déduite de l'équation (5), soit identique à la valeur de la même dérivée obtenue en différentiant l'équation (6) par rapport à y, c'est-à dire que l'on ait identiquement

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} + \frac{\partial\Phi}{\partial z} q + \frac{\partial\Phi}{\partial p} f + \frac{\partial\Phi}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} p + \frac{\partial f}{\partial p} r + \frac{\partial f}{\partial q} f\right) = 0;$$

la fonction Φ doit, en outre, être indépendante de q, et l'on est ramené à rechercher les intégrales communes aux deux équations linéaires

$$(7)\quad \begin{cases} A(\Phi) = \dfrac{\partial\Phi}{\partial y} + \dfrac{\partial\Phi}{\partial z} q + \dfrac{\partial\Phi}{\partial p} f + \dfrac{\partial\Phi}{\partial r} H = 0, \\ B(\Phi) = \dfrac{\partial\Phi}{\partial q} = 0, \end{cases}$$

en posant, pour abréger,

$$H = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} p + \frac{\partial f}{\partial p} r + \frac{\partial f}{\partial q} f.$$

Des équations (7) on déduit successivement

$$C(\Phi) = B[A(\Phi)] - A[B(\Phi)] = \frac{\partial\Phi}{\partial z} + \frac{\partial\Phi}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial q} + \frac{\partial\Phi}{\partial r}\frac{\partial H}{\partial q} = 0,$$

$$C_1(\Phi) = B[C(\Phi)] - C[B(\Phi)] = \frac{\partial\Phi}{\partial p}\frac{\partial^2 f}{\partial q^2} + \frac{\partial\Phi}{\partial r}\frac{\partial^2 H}{\partial q^2} = 0.$$

Si $\dfrac{\partial^2 f}{\partial q^2}$ n'est pas nul, les trois équations $A(\Phi) = 0$, $C(\Phi) = 0$, $C_1(\Phi) = 0$ sont distinctes, et l'on en tire, puisque H est une fonction linéaire de r,

$$(8)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\Phi}{\partial p} + (ar + b)\dfrac{\partial\Phi}{\partial r} = 0, \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial z} + (a_1 r + b_1)\dfrac{\partial\Phi}{\partial r} = 0, \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial y} + (a_2 r + b_2)\dfrac{\partial\Phi}{\partial r} = 0, \end{cases}$$

les coefficients a, b, a_1, b_1, a_2, b_2 ne contenant pas r. Ces équations devant admettre une autre intégrale que l'intégrale évidente $\Phi = x$, il est nécessaire qu'elles forment un système complet; il en résulte, d'après le lemme précédent, qu'elles admettent une intégrale linéaire en r, et l'intégrale intermédiaire (8) peut être mise sous la forme

$$(9)\quad Pr + P_1 = X,$$

P et P_1 étant des fonctions de x, y, z, p seulement.

La conclusion est la même, si $\dfrac{\partial^2 f}{\partial q^2}$ est nul. Dans ce cas, f est linéaire en q, $f = aq + b$, et les équations $A(\Phi) = 0$, $C(\Phi) = 0$ donnent ici

$$A_1(\Phi) = \frac{\partial\Phi}{\partial y} + b\frac{\partial\Phi}{\partial p} + \left(\frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial z} p + \frac{\partial b}{\partial p} r + ab\right)\frac{\partial\Phi}{\partial r} = 0,$$

$$B_1(\Phi) = \frac{\partial\Phi}{\partial z} + a\frac{\partial\Phi}{\partial p} + \left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial z} p + \frac{\partial a}{\partial p} r + a^2\right)\frac{\partial\Phi}{\partial r} = 0;$$

si ces deux équations ne forment pas un système complet, on en déduira trois équations de la forme (8) formant un système complet, et le raisonnement s'achèvera comme tout à l'heure.

Le seul cas qui demande un examen particulier est celui où les deux équations précédentes formeraient un système complet. Il en est alors de même des deux équations

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} + b\frac{\partial\Phi}{\partial p} = 0, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial z} + a\frac{\partial\Phi}{\partial p} = 0,$$

qui déterminent les intégrales intermédiaires du premier ordre, et l'équation proposée admet une intégrale intermédiaire telle que

$$\Phi(x, y, z, p) = X.$$

Toute équation de la forme

$$F\left(\Phi, \frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}p + \frac{\partial\Phi}{\partial p}r\right) = X$$

est une intégrale intermédiaire du second ordre de l'équation proposée $s = aq + b$, et il y en a évidemment une infinité qui sont linéaires par rapport à r. Ceci est bien d'accord avec une propriété générale des équations du second ordre [1].

Remarque. — La propriété précédente se généralise facilement. Si l'équation (5) admet une intégrale intermédiaire d'ordre n telle que

$$\Phi\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial^n z}{\partial x^n}\right) = X,$$

on peut toujours supposer que le premier membre de cette équation est de la forme $A\frac{\partial^n z}{\partial x^n} + B$, A et B ne contenant pas $\frac{\partial^n z}{\partial x^n}$. Il résulte aussi du lemme démontré plus haut que, lorsqu'une équation $s = f(x, y, z, p, q)$ admet une intégrale intermédiaire d'un ordre quelconque, cette intégrale s'obtient par deux quadratures.

3. Revenons au cas où l'équation (5) admet une intégrale intermédiaire du second ordre que nous pouvons, d'après ce qui précède, supposer mise sous la forme (9)

$$Pr + P_1 = X,$$

P et P_1 ne dépendant que de x, y, z, p. En écrivant que les équations (5) et (9)

---

[1] *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes*, t. II, nos 161-164.

forment un système en involution, on est conduit aux deux relations

$$
(10)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial y}+\dfrac{\partial P}{\partial z}q+\dfrac{\partial P}{\partial p}f+P\dfrac{\partial f}{\partial p}=0, \\[2mm] \dfrac{\partial P_1}{\partial y}+\dfrac{\partial P_1}{\partial z}q+\dfrac{\partial P_1}{\partial p}f+P\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial z}p+\dfrac{\partial f}{\partial q}f\right)=0, \end{cases}
$$

qui doivent admettre en P, P_1 des solutions indépendantes de q. En posant $P_1=\lambda P$, on peut remplacer la seconde des équations (10) par la nouvelle équation, ne renfermant que λ,

$$
(E)\quad \frac{\partial\lambda}{\partial y}+\frac{\partial\lambda}{\partial z}q+\frac{\partial\lambda}{\partial p}f-\lambda\frac{\partial f}{\partial p}+\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}p+\frac{\partial f}{\partial q}f=0.
$$

Si (P, P_1) est un couple de solutions des équations (10), il en est de même de (P, P_1+C), où C est une constante quelconque. L'équation (E) admettra donc l'intégrale

$$
\lambda=\frac{P_1}{P}+\frac{C}{P},
$$

qui dépend d'une constante arbitraire. Inversement, si l'équation (E) admet deux intégrales distinctes λ_1 et λ_2, $\lambda_1+C(\lambda_1-\lambda_2)$ est aussi une intégrale; la différence $\lambda_1-\lambda_2$ satisfait à l'équation

$$
(E')\quad \frac{\partial\lambda}{\partial y}+\frac{\partial\lambda}{\partial z}q+\frac{\partial\lambda}{\partial p}f-\lambda\frac{\partial f}{\partial p}=0,
$$

que nous appellerons l'équation en λ sans second membre. Cette équation se déduit de la première des équations (10) en y remplaçant P par $\frac{1}{\lambda}$, de sorte qu'en posant

$$
P=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2},\qquad P_1=\frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}
$$

on aura un système de solutions des équations (10). Tout revient donc à chercher à quelles conditions l'équation (E) admet deux intégrales indépendantes de q. Lorsqu'il en est ainsi, l'équation (E′) doit admettre à son tour une intégrale indépendante de q, autre que $\lambda=0$. On peut donc toujours commencer la discussion par l'examen de l'équation (E′).

Tout pareillement, pour que l'équation $s=f(x, y, z, p, q)$ admette une intégrale intermédiaire du second ordre de la forme

$$
(9)'\quad Qt+Q_1=Y,
$$

où Q et Q_1 ne dépendent que de x, y, z, q, et où Y est une fonction arbitraire de y, il faut et il suffit que l'équation $(E)_1$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x}+\frac{\partial\lambda}{\partial z}p+\frac{\partial\lambda}{\partial q}f-\lambda\frac{\partial f}{\partial q}+\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}q+\frac{\partial f}{\partial p}f=0 \tag{$(E)_1$}$$

admette deux intégrales indépendantes de p. Nous désignerons encore par $(E')_1$ l'équation déduite de $(E)_1$, par la suppression des termes indépendants de λ.

Remarque. — Si l'équation (E) admet une intégrale indépendante de q, dépendant de plusieurs constantes arbitraires, ou d'une fonction arbitraire, il en sera de même de l'équation (E′). Or on démontre aisément que ceci ne peut avoir lieu que si la fonction f est de la forme $f=aq+b$, et si l'on a de plus

$$\frac{\partial b}{\partial z}-b\frac{\partial a}{\partial p}=\frac{\partial a}{\partial y}-a\frac{\partial b}{\partial p};$$

c'est le cas déjà signalé où l'équation $s=aq+b$ admet une intégrale intermédiaire du premier ordre.

4. Si l'équation (E′) admet une intégrale indépendante de q, différente de $\lambda=0$, cette intégrale satisfait aussi aux équations

$$\frac{\partial\lambda}{\partial z}+\frac{\partial\lambda}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial q}-\lambda\frac{\partial^2 f}{\partial p\,\partial q}=0,$$
$$\frac{\partial\lambda}{\partial p}\frac{\partial^2 f}{\partial q^2}-\lambda\frac{\partial^3 f}{\partial p\,\partial q^2}=0.$$

Si $\frac{\partial^2 f}{\partial q^2}$ n'est pas nul, on voit que le rapport $\frac{\partial^3 f}{\partial p\partial q^2}:\frac{\partial^2 f}{\partial q^2}$ doit être indépendant de q, c'est-à-dire que l'on doit avoir

$$\frac{\partial^2}{\partial p\,\partial q}\left(\log\frac{\partial^2 f}{\partial q^2}\right)=0;$$

$\frac{\partial^2 f}{\partial q^2}$ doit donc être de la forme

$$\frac{\partial^2 f}{\partial q^2}=f_1(x,y,z,p)\,\varphi_1(x,y,z,q), \tag{11}$$

et cette forme comprend évidemment le cas où $\frac{\partial^2 f}{\partial q^2}$ serait nul. De même, si l'équation $(E)_1$ admet deux intégrales indépendantes de p, $\frac{\partial^2 f}{\partial p^2}$ doit être de la forme

$$\frac{\partial^2 f}{\partial p^2}=f_2(x,y,z,p)\,\varphi_2(x,y,z,q). \tag{12}$$

Des conditions (11) et (12) on tire

$$\frac{\partial^4 f}{\partial p^2 \partial q^2} = \frac{\partial^2 f_1}{\partial p^2} \varphi_1 = f_2 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial q^2}.$$

Écartons d'abord le cas où l'un des produits $f_1 \varphi_1$, $f_2 \varphi_2$ serait nul ; on peut alors écrire

$$\frac{\dfrac{\partial^2 f_1}{\partial p^2}}{f_2} = \frac{\dfrac{\partial^2 \varphi_2}{\partial q^2}}{\varphi_1} = \frac{1}{k},$$

k étant une simple fonction de x, y, z. De là on tire

$$f_2 = k \frac{\partial^2 f_1}{\partial p^2}, \qquad \varphi_1 = k \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial q^2},$$

et les équations (11) et (12) deviennent

$$\frac{\partial^2 f}{\partial q^2} = k(x, y, z) f_1 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial q^2}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial p^2} = k(x, y, z) \frac{\partial^2 f_1}{\partial p^2} \varphi_2,$$

dont l'intégrale générale est

$$f = k(x, y, z) f_1(x, y, z, p) \varphi_2(x, y, z, q) + \rho pq + ap + bq + c,$$

ρ, a, b, c étant des fonctions de x, y, z.

Supposons, en second lieu, que l'une des deux dérivées secondes, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial q^2}$ par exemple, soit nulle. Il faut alors que l'on ait

$$\frac{\partial^4 f}{\partial p^2 \partial q^2} = f_2 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial q^2} = 0;$$

si $\dfrac{\partial^2 \varphi_2}{\partial q^2} = 0$, φ_2 est une fonction linéaire de q et f est de la forme

$$f = f_1(x, y, z, p)(\alpha q + \beta) + \rho pq + ap + bq + c,$$

α, β, ρ, a, b, c étant des fonctions de x, y, z.

Enfin, si $f_2 = 0$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial p^2}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial q^2}$ sont nuls et f est une fonction linéaire de p et de q

$$f = \rho pq + ap + bq + c.$$

En résumé, *toutes les équations du second ordre* $s = f(x, y, z, p, q)$ *qui admettent deux intégrales intermédiaires distinctes du second ordre, corres-*

pondant aux deux familles de caractéristiques, sont de la forme

$$s = \varphi(x, y, z, p)\,\psi(x, y, z, q) + \rho pq + ap + bq + c, \tag{13}$$

ρ, a, b, c étant des fonctions de x, y, z.

Nous aurons à distinguer plusieurs cas dans la discussion, suivant la forme des fonctions φ et ψ. Nous traiterons d'abord le cas général où φ n'est pas une fonction linéaire de p, ni ψ une fonction linéaire de q, puis le cas où une seule de ces fonctions est linéaire, et enfin le cas où l'équation se réduit à $s = \rho pq + ap + bq + c$.

Remarque. — Une équation de la forme (5) ne change pas de forme, quand on fait un changement de variables tel que

$$x' = \mathrm{X}(x), \qquad y' = \mathrm{Y}(y), \qquad z' = \mathrm{F}(x, y, z), \tag{14}$$

ou encore quand on permute les variables x et y. Nous ne considérerons pas comme distinctes deux équations qui peuvent se déduire l'une de l'autre par une transformation de cette nature. Ce sont d'ailleurs les transformations de contact les plus générales qui ne changent pas la forme de l'équation (5), lorsque celle-ci n'admet pas d'intégrale intermédiaire du premier ordre. Par exemple, dans l'équation (13), on peut, sans diminuer la généralité, supposer $\rho = 0$, car il suffit, pour être ramené à ce cas, de prendre pour nouvelle fonction inconnue une fonction $\theta(x, y, z)$ satisfaisant à la condition

$$\frac{\partial\theta}{\partial z} = e^{-\int \rho\,dz}.$$

5. Dans le cas général, on peut donc supposer l'équation (5) de la forme

$$s = \varphi(x, y, z, p)\,\psi(x, y, z, q) + ap + bq + c, \tag{15}$$

aucune des fonctions φ et ψ n'étant linéaire en p ou q. L'équation (E') correspondante devient ici

$$\frac{\partial\lambda}{\partial y} + \frac{\partial\lambda}{\partial z}q + \frac{\partial\lambda}{\partial p}(\varphi\psi + ap + bq + c) - \lambda\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p}\psi + a\right) = 0;$$

en différentiant par rapport à q, on en tire successivement

$$\frac{\partial\lambda}{\partial z} + \frac{\partial\lambda}{\partial p}\left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial q} + b\right) - \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial p}\frac{\partial\psi}{\partial q} = 0,$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial p}\varphi - \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial q} = 0.$$

Si l'on pose $\lambda = e^u$, $\dfrac{\partial \log \varphi}{\partial p} = v$, ces trois équations deviennent

$$\frac{\partial u}{\partial p} = v, \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = -bv, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -(ap+c)v + a,$$

et des trois conditions d'intégrabilité de ce système on déduit que l'on doit avoir

$$v\left(\frac{\partial a}{\partial z}p + \frac{\partial c}{\partial z} + ab - \frac{\partial b}{\partial y}\right) - \frac{\partial a}{\partial z} = 0.$$

Si $\dfrac{\partial a}{\partial z}$ n'était pas nul, on en déduirait que φ est une fonction linéaire de p, contrairement à l'hypothèse; si $\dfrac{\partial a}{\partial z}$ était nul, sans qu'il en fût de même de $\dfrac{\partial c}{\partial z} + ab - \dfrac{\partial b}{\partial y}$, on aurait $v = 0$, et φ serait indépendant de p. Il faut donc que l'on ait à la fois

$$\frac{\partial a}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial b}{\partial y} = ab + \frac{\partial c}{\partial z},$$

et, par raison de symétrie, on aura aussi

$$\frac{\partial b}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial a}{\partial x} = ab + \frac{\partial c}{\partial z}.$$

On déduit de là $\dfrac{\partial b}{\partial y} = \dfrac{\partial a}{\partial x}$, de sorte que a et b sont les dérivées partielles d'une fonction des deux variables x et y,

$$a = \frac{\partial U}{\partial y}, \qquad b = \frac{\partial U}{\partial x},$$

et l'on a ensuite

$$c = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x\, \partial y} - \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial y}\right)z + V(x, y).$$

Changeons dans l'équation (15) z en $e^U z$; cette équation est remplacée par une équation de même forme pour laquelle les coefficients a, b, c ont les valeurs suivantes

$$a = 0, \qquad b = 0, \qquad c = V(x, y)\, e^{-U}.$$

Il suffira de changer ensuite z en $z + F(x, y)$, où $F(x, y)$ est une intégrale particulière de l'équation

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y} = V(x, y)e^{-U},$$

pour arriver en définitive à une équation de la forme

$$(15)' \qquad s = \varphi(x, y, z, p)\, \psi(x, y, z, q).$$

6. Pour une équation de la forme $(15)'$, l'équation (E') est

$$\frac{\partial\lambda}{\partial y}+\frac{\partial\lambda}{\partial z}q+\frac{\partial\lambda}{\partial p}\varphi\psi-\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial p}\psi=0.$$

En différentiant deux fois de suite par rapport à q et observant que $\dfrac{\partial^2\psi}{\partial q^2}$ n'est pas nul, on en déduit les trois conditions

$$\frac{\partial\lambda}{\partial y}=0,\qquad \frac{\partial\lambda}{\partial z}=0,\qquad \varphi\frac{\partial\lambda}{\partial p}-\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial p}=0,$$

qui ne peuvent être compatibles que si $\dfrac{\partial\log\varphi}{\partial p}$ ne contient ni y, ni z; on voit donc que φ doit être le produit d'une fonction de x, y, z par une fonction de x et de p, et l'on verrait de même que ψ est le produit d'une fonction de x, y, z par une fonction de y et de q, de sorte que l'équation $(15)'$ peut encore s'écrire

$$s=\mathrm{H}(x,y,z)\varphi(x,p)\psi(y,q). \tag{16}$$

Considérons maintenant l'équation (E)

$$\frac{\partial\lambda}{\partial y}+\frac{\partial\lambda}{\partial z}q+\frac{\partial\lambda}{\partial p}f-\lambda\frac{\partial f}{\partial p}+\mathrm{K}=0, \tag{E}$$

en posant

$$\mathrm{K}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}p+\frac{\partial f}{\partial q}f.$$

Toute intégrale indépendante de q doit satisfaire en même temps aux deux relations

$$\frac{\partial\lambda}{\partial z}+\frac{\partial\lambda}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial q}-\lambda\frac{\partial^2 f}{\partial p\,\partial q}+\frac{\partial\mathrm{K}}{\partial q}=0,$$
$$\frac{\partial\lambda}{\partial p}\frac{\partial^2 f}{\partial q^2}-\lambda\frac{\partial^3 f}{\partial p\,\partial q^2}+\frac{\partial^2\mathrm{K}}{\partial q^2}=0;$$

la dérivée $\dfrac{\partial^2 f}{\partial q^2}$ n'étant pas nulle, cette dernière relation peut s'écrire

$$\frac{\partial\lambda}{\partial p}-\lambda\frac{\partial}{\partial p}\left(\log\frac{\partial^2 f}{\partial q^2}\right)+\frac{\dfrac{\partial^2\mathrm{K}}{\partial q^2}}{\dfrac{\partial^2 f}{\partial q^2}}=0,$$

et, en différentiant une nouvelle fois par rapport à q, on en conclut que le rapport $\dfrac{\partial^2\mathrm{K}}{\partial q^2}:\dfrac{\partial^2 f}{\partial q^2}$ doit être indépendant de q. Soit

$$\frac{\partial^2\mathrm{K}}{\partial q^2}=\mathrm{R}(x,y,z,p)\frac{\partial^2 f}{\partial q^2};$$

on en déduit, en intégrant deux fois de suite,

$$\frac{\partial K}{\partial q} = R(x, y, z, p)\frac{\partial f}{\partial q} + R_1(x, y, z, p),$$

$$K = R(x, y, z, p) f + R_1(x, y, z, p) q + R_2(x, y, z, p). \tag{17}$$

Les trois équations auxquelles doit satisfaire la fonction λ deviennent alors, en remplaçant f, K, $\frac{\partial K}{\partial q}$, $\frac{\partial^2 K}{\partial q^2}$ par leurs valeurs,

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial \lambda}{\partial p} - \lambda\frac{\partial \log\varphi}{\partial p} + R(x, y, z, p) &= 0, \\ \frac{\partial \lambda}{\partial z} + R_1(x, y, z, p) &= 0, \\ \frac{\partial \lambda}{\partial y} + R_2(x, y, z, p) &= 0; \end{aligned}\right. \tag{18}$$

ces équations devant admettre une infinité d'intégrales dépendant d'une constante arbitraire, il faudra que les conditions d'intégrabilité soient vérifiées identiquement.

D'autre part, si, dans la condition (17), on remplace K et f par leurs expressions développées, on aboutit à la relation suivante, qui devra se réduire à une identité,

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \log H}{\partial x} + \frac{\partial \log\varphi}{\partial x} + p\frac{\partial \log H}{\partial z} + H\varphi\frac{\partial \psi}{\partial q} \\ &\quad = R(x, y, z, p) + \frac{R_1(x, y, z, p) q + R_2(x, y, z, p)}{H\varphi\psi}. \end{aligned}\right. \tag{17'}$$

Si, dans cette identité, on attribue aux variables x, z, p des valeurs constantes quelconques n'annulant pas $H\varphi$, comme ψ ne dépend que de y et de q, on est conduit à une relation de la forme

$$\frac{\partial \psi}{\partial q} = \frac{Y_0 + Y_1 q}{\psi} + Y_2, \tag{19}$$

Y_0, Y_1, Y_2 désignant des fonctions de y. La fonction $\psi(y, q)$ ne peut donc être quelconque, mais doit vérifier une équation différentielle de cette espèce.

Supposons qu'il en soit ainsi; remplaçons $\frac{\partial \psi}{\partial q}$ par la valeur précédente dans (17)'; il vient

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \log H}{\partial x} + \frac{\partial \log\varphi}{\partial x} + p\frac{\partial \log H}{\partial z} + H\varphi\left(\frac{Y_0 + Y_1 q}{\psi} + Y_2\right) \\ &\quad = R(x, y, z, p) + \frac{R_1(x, y, z, p) q + R_2(x, y, z, p)}{H\varphi\psi}. \end{aligned}\right. \tag{17''}$$

Si les deux membres n'étaient pas identiques, quels que soient q et ψ, on en conclurait que ψ est une fonction linéaire de q, contrairement à l'hypothèse ; en égalant les coefficients de $\frac{1}{\psi}$, de $\frac{q}{\psi}$ et les termes indépendants de ψ, on obtient les valeurs de R, R_1, R_2 :

$$R = \frac{\partial \log H}{\partial x} + \frac{\partial \log \varphi}{\partial x} + p\frac{\partial \log H}{\partial z} + H\varphi Y_2, \qquad R_1 = H^2\varphi^2 Y_1, \qquad R_2 = H^2\varphi^2 Y_0.$$

Remplaçons R, R_1, R_2 par ces valeurs dans les équations (18) et posons $\lambda = -\varphi v$, v désignant une nouvelle inconnue ; il vient

$$(20) \qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial v}{\partial p} = \frac{1}{\varphi}\frac{\partial \log H}{\partial x} + \frac{1}{\varphi}\frac{\partial \log \varphi}{\partial x} + HY_2 + \frac{p}{\varphi}\frac{\partial \log H}{\partial z},\\ &\frac{\partial v}{\partial z} = H^2\varphi Y_1,\\ &\frac{\partial v}{\partial y} = H^2\varphi Y_0.\end{aligned}\right.$$

Avant d'écrire les conditions d'intégrabilité de ce système, observons que la fonction $\varphi(x, p)$ doit vérifier une équation différentielle, analogue à l'équation (19),

$$(21) \qquad \frac{\partial \psi}{\partial q} = \frac{X_0 + X_1 p}{\varphi} + X_2,$$

X_0, X_1, X_2 étant des fonctions de x. On le démontrerait, en partant de l'équation $(E)_1$, comme on a établi la relation (19) en partant de l'équation (E). Cela posé, les conditions d'intégrabilité du système (20) sont les suivantes :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\varphi}\frac{\partial^2 \log H}{\partial x\,\partial z} + \frac{\partial H}{\partial z}Y_2 + \frac{p}{\varphi}\frac{\partial^2 \log H}{\partial z^2} = H^2 Y_1\left(\frac{X_0 + X_1 p}{\varphi} + X_2\right),\\ &\frac{1}{\varphi}\frac{\partial^2 \log H}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}(HY_2) + \frac{p}{\varphi}\frac{\partial^2 \log H}{\partial y\,\partial z} = H^2 Y_0\left(\frac{X_0 + X_1 p}{\varphi} + X_2\right),\\ &\frac{\partial}{\partial y}(H^2 Y_1) = 2HY_0\frac{\partial H}{\partial z};\end{aligned}$$

φ n'étant pas, par hypothèse, une fonction linéaire de p, les deux premières conditions d'intégrabilité se dédoublent en trois relations distinctes, ce qui fait en tout sept conditions :

$$(22) \qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \log H}{\partial x\,\partial z} = X_0 Y_1 H^2, \qquad \frac{\partial^2 \log H}{\partial y\,\partial z} = X_1 Y_0 H^2,\\ &\frac{\partial^2 \log H}{\partial x\,\partial y} = X_0 Y_0 H^2, \qquad \frac{\partial^2 \log H}{\partial z^2} = X_1 Y_1 H^2,\\ &Y_2\frac{\partial H}{\partial z} = X_2 Y_1 H^2, \qquad \frac{\partial}{\partial y}(HY_2) = X_2 Y_0 H^2, \qquad \frac{\partial}{\partial y}(H^2 Y_1) = 2HY_0\frac{\partial H}{\partial z}.\end{aligned}\right.$$

Par raison de symétrie, en se servant du second système de caractéristiques, on obtiendrait de même sept équations de condition, dont les trois dernières seulement sont nouvelles,

$$(23)\qquad X_2\frac{\partial H}{\partial z}=X_1Y_2H^2,\qquad \frac{\partial}{\partial x}(HX_2)=X_0Y_2H^2,\qquad \frac{\partial}{\partial x}(H^2X_1)=2X_0H\frac{\partial H}{\partial z}.$$

Tout se ramène donc à rechercher pour quelles formes des fonctions X_0, X_1, X_2, Y_0, Y_1, Y_2, les dix équations (22) et (23) admettent une solution commune en $H(x, y, z)$. Lorsqu'il en est ainsi, l'équation du second ordre

$$s=H(x,y,z)\,\varphi(x,p)\,\psi(y,q)$$

admet deux intégrales intermédiaires distinctes du second ordre; on les obtiendra, comme il a été expliqué plus haut, par l'intégration du système (18) ou du système équivalent (20), et du système analogue provenant de l'équation $(E)_1$. Si les équations (22) étaient satisfaites, et non les équations (23), il n'y aurait qu'une seule intégrale intermédiaire du second ordre; ce cas sera laissé de côté.

Nous allons passer en revue les différentes hypothèses qui peuvent se présenter dans la discussion du système des équations (22) et (23), et rechercher, en particulier, toutes les formes distinctes auxquelles peuvent se ramener les équations du second ordre répondant à la question au moyen des transformations de la forme (14).

7. Observons d'abord que l'on peut toujours multiplier φ par une fonction quelconque de x, et ψ par une fonction quelconque de y, ce qui revient à changer la fonction $H(x, y, z)$. Or si, dans l'équation différentielle

$$\frac{\partial\varphi}{\partial p}=\frac{X_0+X_1p}{\varphi}+X_2,$$

on change $\varphi(x, p)$ en $f(x)\varphi(x, p)$, elle se change en

$$\frac{\partial\varphi}{\partial p}=\frac{X_0+X_1p}{f^2(x)\varphi}+\frac{X^2}{f(x)},$$

c'est-à-dire que X_0 et X_1 sont divisés par $f^2(x)$, et X_2 par $f(x)$. Si l'une des fonctions X_i $(i=0, 1, 2)$ n'est pas nulle, on peut donc, sans restreindre la généralité, la supposer égale à un; et, de même, si l'une des fonctions Y_i $(i=0, 1, 2)$ n'est pas nulle, on peut la supposer égale à un (1).

Observons encore que, si X_1 n'est pas nul, on peut supposer $X_0=0$; car, si

(1) Si l'on ne veut employer comme multiplicateurs que des fonctions réelles, et si les fonctions X_i et Y_i sont réelles, on pourra toujours supposer X_2 et Y_2 égaux à $+1$, si ces fonctions ne sont pas nulles, mais il faudra prendre pour X_0, X_1, Y_0, Y_1 les deux valeurs ± 1.

l'on change z en $z - \int \frac{X_0}{X_1} dx$, l'équation du second ordre ne change pas de forme et p est remplacé par $p - \frac{X_0}{X_1}$; de même, si Y_1 n'est pas nul, on peut supposer $Y_0 = 0$.

Remarquons enfin que, si $X_2 = 0$, on doit avoir, d'après les conditions (23), $X_1 Y_2 = 0$, et $X_0 Y_2 = 0$; comme on ne peut avoir en même temps $X_0 = X_1 = 0$, il s'ensuit que l'on doit avoir $Y_2 = 0$, de sorte que les fonctions X_2 et Y_2 sont nulles en même temps, ou toutes les deux différentes de zéro.

Cela posé, la discussion comprend plusieurs cas.

Premier cas. — Soient $X_2 = Y_2 = 0$, $X_1 = Y_1 = 0$. D'après la remarque qui vient d'être faite, on peut supposer $X_0 = 1$, $Y_0 = 1$; on en déduit

$$\varphi = \sqrt{2}\sqrt{p + f(x)}, \qquad \psi = \sqrt{2}\sqrt{q + f_1(y)},$$

et, en remplaçant z par $z + \int f(x)dx + \int f_1(y)dy$, on voit que l'on peut prendre $\varphi = \sqrt{2p}$, $\psi = \sqrt{2q}$. Les équations (22) et (23) se réduisent à deux :

$$\frac{\partial H}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \log H}{\partial x\, \partial y} = H^2;$$

l'expression la plus générale de H est donc $H = \frac{\sqrt{X'Y'}}{X + Y}$, X étant une fonction arbitraire de x et Y' une fonction arbitraire de y. L'équation cherchée est de la forme

$$s = \frac{2\sqrt{X'Y'}\sqrt{pq}}{X + Y};$$

si l'on prend X et Y pour variables indépendantes, elle prend la forme simple

$$\text{(I)} \qquad s = \frac{2\sqrt{pq}}{x + y};$$

c'est une équation que j'ai déjà étudiée en détail [1].

Deuxième cas. — $X_2 = Y_2 = 0$, $X_1 Y_1 \neq 0$. On peut alors supposer $X_1 = Y_1 = 1$, $X_0 = Y_0 = 0$. Les équations (22) et (23) se réduisent à trois :

$$\frac{\partial H}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial H}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \log H}{\partial z^2} = H^2;$$

---

[1] *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes*, t. II, n^{os} 171 et 191 (*Bulletin de la Société mathématique*, t. XXV; 1896).

l'intégrale générale de la dernière équation, qui s'obtient aisément, est donnée par la formule

$$H(z) = \frac{2C}{e^{C(z-z_0)} - e^{-C(z-z_0)}},$$

C et z_0 étant deux constantes arbitraires. On peut toujours supposer $z_0 = 0$, car cela revient à changer z en $z + z_0$; on peut aussi, en changeant z en αz, donner à la constante C telle valeur que l'on voudra, par exemple $C = 1$ ou $C = i$. Dans le premier cas, on aura $H = \frac{1}{\sin h z}$, et $H = \frac{1}{\sin z}$ dans le second cas; ils se déduisent d'ailleurs l'un de l'autre en changeant z en iz. Dans le cas limite où C serait nul, il faudra prendre $H = \frac{1}{z}$.

Quant aux fonctions $\varphi(x, p)$, $\psi(y, q)$, elles doivent vérifier respectivement les deux relations

$$\frac{\partial\varphi}{\partial p} = \frac{p}{\varphi}, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial q} = \frac{q}{\psi};$$

on en déduit

$$\varphi = \sqrt{p^2 + f(x)}, \qquad \psi = \sqrt{q^2 + f_1(y)},$$

et l'équation du second ordre proposée est de la forme

$$s = H(z)\sqrt{p^2 + f(x)}\sqrt{q^2 + f_1(y)};$$

en prenant pour variables indépendantes $\int \sqrt{f(x)}\,dx$ et $\int \sqrt{f_1(y)}\,dy$, l'équation se réduit à

$$s = H(z)\sqrt{p^2 + 1}\sqrt{q^2 + 1}.$$

Dans le cas qui nous occupe, on peut donc toujours, par l'emploi de transformations de la forme (14), ramener l'équation du second ordre à l'une des deux suivantes

$$\text{(II)} \qquad s = \frac{\sqrt{1 + p^2}\sqrt{1 + q^2}}{z},$$

$$\text{(III)} \qquad s = \frac{\sqrt{1 + p^2}\sqrt{1 + q^2}}{\sin z};$$

les intégrales intermédiaires sont, pour l'équation (II),

$$\frac{r}{\sqrt{1 + p^2}} + \frac{\sqrt{1 + p^2}}{z} = X,$$

$$\frac{t}{\sqrt{1 + q^2}} + \frac{\sqrt{1 + q^2}}{z} = Y,$$

et, pour l'équation (III),

$$\frac{r}{\sqrt{1+p^2}} + \sqrt{1+p^2}\cot z = X,$$

$$\frac{t}{\sqrt{1+q^2}} + \sqrt{1+q^2}\cot z = Y,$$

X et Y désignant deux fonctions arbitraires de x et de y respectivement. Si l'on ne voulait employer que des transformations réelles, il faudrait ajouter aux types (II) et (III) les équations obtenues en remplaçant $\sin z$ par $\sin h z$, $\sqrt{p^2+1}$ par $\sqrt{p^2-1}$, et $\sqrt{q^2+1}$ par $\sqrt{q^2-1}$.

Troisième cas. — $X_2 = Y_2 = 0$, $X_1 = 0$, $Y_1 \neq 0$. On peut alors supposer $X_0 = 1$, $Y_1 = 1$, $Y_0 = 0$. Les équations (22) et (23) sont incompatibles, car elles donneraient

$$\frac{\partial H}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \log H}{\partial x\, \partial z} = H^2.$$

Cette hypothèse ne donne donc rien; il en serait évidemment de même si l'on supposait $X_2 = Y_2 = 0$, $Y_1 = 0$, $X_1 \neq 0$.

Quatrième cas. — Supposons X_2 et Y_2 différents de zéro, ainsi que X_1 et Y_1. On peut alors supposer $X_1 = Y_1 = 1$, $X_0 = Y_0 = 0$. Les équations (22) et (23) nous donnent

$$Y_2 \frac{\partial H}{\partial z} = X_2 H^2, \qquad X_2 \frac{\partial H}{\partial z} = Y_2 H^2;$$

on a donc $Y_2 = \pm X_2$, et, comme l'on peut toujours changer ψ en $-\psi$, à condition de changer H en $-$H, on peut supposer $Y_2 = X_2$, la valeur commune de ces deux fonctions étant une constante K, différente de zéro. Les deux fonctions $\varphi(x, p)$, $\psi(y, q)$ doivent alors vérifier respectivement les deux relations

(24) $$\frac{\partial \varphi}{\partial p} = \frac{p}{\varphi} + K, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial p} = \frac{q}{\psi} + K;$$

quant à la fonction $H(x, y, z)$, elle doit satisfaire aux quatre équations

$$\frac{\partial H}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial H}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial H}{\partial z} = H^2, \qquad \frac{\partial^2 \log H}{\partial z^2} = H^2,$$

qui sont compatibles et admettent l'intégrale générale

$$H = \frac{-1}{z - z_0}.$$

On peut évidemment supposer $z_0 = 0$, et l'on a un nouveau type d'équation du second ordre admettant deux intégrales intermédiaires distinctes du second ordre

$$(\mathrm{IV}) \qquad sz + \varphi(x, p)\psi(y, q) = 0,$$

les fonctions φ et ψ vérifiant respectivement les deux conditions (24).

Les deux intégrales intermédiaires, que l'on obtient par l'application de la méthode générale, sont ici

$$\frac{r}{\varphi} + \frac{\varphi}{z} - \int \frac{1}{\varphi}\frac{\partial \log\varphi}{\partial x}\, dp = \mathrm{X},$$

$$\frac{t}{\psi} + \frac{\psi}{z} - \int \frac{1}{\psi}\frac{\partial \log\psi}{\partial y}\, dq = \mathrm{Y}.$$

Si l'on ne voulait employer que des transformations réelles, il faudrait joindre à l'équation (IV) l'équation

$$(\mathrm{IV})' \qquad sz - \varphi(x, p)\psi(y, q) = 0$$

et remplacer les équations (24) par les suivantes

$$(24)' \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial p} = -\frac{p}{\varphi} + \mathrm{K}, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial q} = -\frac{q}{\psi} + \mathrm{K}.$$

Cinquième cas. — Soient $X_2 Y_2 \neq 0$, $X_1 = Y_1 = 0$. En multipliant φ et ψ par deux facteurs convenables, on peut supposer $X_2 = Y_2 = 1$. Les équations qui déterminent φ et ψ sont alors de la forme

$$\frac{\partial\varphi}{\partial p} = \frac{X_0}{\varphi} + 1, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial q} = \frac{Y_0}{\psi} + 1,$$

et l'on en déduit que l'équation cherchée est de la forme

$$(25) \qquad s = \mathrm{H}(x, y, z)\,\varphi(x, p)\,\psi(y, q),$$

φ et ψ étant racines des deux équations transcendantes

$$\varphi - X_0 \mathrm{L}(X_0 + \varphi) = p + f(x),$$

$$\psi - Y_0 \mathrm{L}(Y_0 + \psi) = q + f_1(y);$$

on peut faire disparaître $f(x)$ et $f_1(y)$ en prenant pour fonction inconnue

$$z + \int f(x)\,dx + \int f_1(y)\,dy.$$

Si l'on suppose que l'on ait effectué au préalable cette transformation, les équations qui déterminent φ et ψ sont respectivement

$$\varphi - X_0 L(X_0 + \varphi) = p,$$
$$\psi - Y_0 L(Y_0 + \psi) = q.$$

Prenons maintenant deux nouvelles variables indépendantes

$$x' = \int X_0\, dx, \qquad y' = \int Y_0\, dy;$$

on a

$$p = \frac{\partial z}{\partial x'} X_0, \qquad q = \frac{\partial z}{\partial y'} Y_0, \qquad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x'\, \partial y'} X_0 Y_0,$$

et l'équation (25) se change en une équation de même forme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x'\, \partial y'} = H_1(x', y', z)\varphi_1\psi_1,$$

où l'on a $\varphi = X_0\varphi_1$, $\psi = Y_0\psi_1$.
Les équations qui déterminent φ_1 et ψ_1 sont alors

$$\varphi_1 - L(1 + \varphi_1) = \frac{\partial z}{\partial x'} + L(X_0),$$

$$\psi_1 - L(1 + \psi_1) = \frac{\partial z}{\partial y'} + L(Y_0);$$

enfin, si l'on prend pour nouvelle fonction inconnue

$$z + \int L(X_0)\, dx' + \int L(Y_0)\, dy',$$

on voit qu'après toutes ces transformations on peut prendre l'équation (25) sous la forme

$$s = H\,\varphi(p)\,\psi(q),$$

$\varphi(p)$ et $\psi(q)$ étant déterminées par les deux relations

$$(26) \qquad \left\{ \begin{aligned} \varphi(p) + 1 &= e^{\varphi(p) - p}, \\ \psi(q) + 1 &= e^{\psi(q) - q}, \end{aligned} \right.$$

ce qui revient à supposer $X_0 = Y_0 = 1$. Les équations qui déterminent $H(x, y, z)$ sont alors

$$\frac{\partial H}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial H}{\partial x} = H^2, \qquad \frac{\partial H}{\partial y} = H^2, \qquad \frac{\partial^2 \log H}{\partial x\, \partial y} = H^2;$$

on en tire, en négligeant une constante que l'on peut toujours ajouter à $x + y$,

$H = \frac{-1}{x+y}$, et l'on a le nouveau type d'équation

$$\text{(V)} \qquad s(x+y) + \varphi(p)\psi(q) = 0,$$

$\varphi(p)$ et $\psi(q)$ étant déterminées par les relations (26). Les intégrales intermédiaires sont respectivement

$$\frac{r}{\varphi} + \frac{\varphi}{x+y} = X, \qquad \frac{t}{\psi} + \frac{\psi}{x+y} = Y.$$

On pourrait prendre aussi pour forme canonique de cette classe d'équations l'une ou l'autre des formes suivantes

$$\text{(V)}' \quad s(y-x) = \varphi(p)\psi(q), \qquad \text{où l'on a} \qquad \varphi = -1 + e^{\varphi - p}, \qquad \psi = 1 + e^{q-\psi},$$

$$\text{(V)}'' \quad s(x+y) = \varphi(p)\psi(q), \qquad \text{où l'on a} \qquad \varphi = 1 + e^{p-\varphi}, \qquad \psi = 1 + e^{q-\psi},$$

ce qui permet d'éviter l'emploi des transformations imaginaires.

Sixième cas. — Soient $X_2 \neq 0$, $Y_2 \neq 0$, $X_1 = 0$, $Y_1 \neq 0$. On peut supposer $X_2 = Y_2 = 1$, et les équations (22) et (23) donnent des conditions incompatibles

$$\frac{\partial H}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial H}{\partial z} = Y_1 H^2.$$

Cette hypothèse ne donne donc rien; il en est évidemment de même, si l'on suppose $X_2 \neq 0$, $Y_2 \neq 0$, $X_1 \neq 0$, $Y_1 = 0$.

8. Supposons maintenant que l'une seule des fonctions φ et ψ soit linéaire, par exemple ψ. On a encore deux cas à distinguer, suivant que ψ contient effectivement q ou ne dépend pas de q. Nous examinerons d'abord la première hypothèse; l'équation du second ordre peut alors s'écrire

$$(27) \qquad s = \varphi(x, y, z, p)(q + \alpha) + ap + bq + c,$$

α, a, b, c étant des fonctions de x, y, z, et nous allons d'abord montrer que l'on peut supposer $a = b = 0$. Prenons, en effet, une nouvelle fonction inconnue u en posant $z = \Theta(x, y, u)$; l'équation du second ordre devient

$$\frac{\partial \Theta}{\partial u} s' = \varphi\left(x, y, \Theta, \frac{\partial \Theta}{\partial x} + \frac{\partial \Theta}{\partial u} p'\right)\left(\frac{\partial \Theta}{\partial u} q' + \frac{\partial \Theta}{\partial y} + \alpha\right)$$
$$- \frac{\partial^2 \Theta}{\partial u^2} p'q' - \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y \, \partial u} p' + a \frac{\partial \Theta}{\partial u} p' + \ldots,$$

les termes non écrits étant du premier degré en q'. Si l'on choisit la fonction Θ

de telle façon que l'on ait

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial u^2}\left(\alpha+\frac{\partial\Theta}{\partial y}\right)+\frac{\partial\Theta}{\partial u}\left(a\frac{\partial\Theta}{\partial u}-\frac{\partial^2\Theta}{\partial y\,\partial u}\right)=0,$$

on pourra réunir au premier terme les deux termes en $p'q'$ et en p', et la nouvelle équation aura encore la forme (27), mais on aura pour cette équation $a=0$. On peut aussi l'écrire

$$(27)' \qquad s=\varphi(x, y, z, p)(q+\alpha)+c,$$

ce qui revient à remplacer φ par $\varphi+b$ et c par $c-b\alpha$.

Cela posé, l'équation $(E)'_1$ déduite de $(E)_1$ (n° 3) en supprimant le terme indépendant de λ est ici

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x}+\frac{\partial\lambda}{\partial z}p+\frac{\partial\lambda}{\partial q}[\varphi(q+\alpha)+c]-\lambda\varphi=0;$$

cette équation doit admettre une intégrale indépendante de p, différente de $\lambda=0$. Cette intégrale satisfait, par conséquent, aux deux relations

$$\frac{\partial\lambda}{\partial z}+\frac{\partial\lambda}{\partial q}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial p}(q+\alpha)\right]-\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial p}=0, \qquad \frac{\partial\lambda}{\partial q}\frac{\partial^2\varphi}{\partial p^2}(q+\alpha)-\lambda\frac{\partial^2\varphi}{\partial p^2}=0;$$

comme $\frac{\partial^2\varphi}{\partial p^2}$ n'est pas nul, on en conclut que λ satisfait aux trois relations

$$\frac{\partial\lambda}{\partial q}=\frac{\lambda}{q+\alpha}, \qquad \frac{\partial\lambda}{\partial z}=0, \qquad \frac{\partial\lambda}{\partial x}+\frac{c\lambda}{q+\alpha}=0,$$

et les conditions d'intégrabilité donnent

$$\frac{\partial\alpha}{\partial z}=0, \qquad c=-\frac{\partial\alpha}{\partial x}.$$

Si l'on prend pour fonction inconnue $z+\int\alpha\,dy$, l'équation du second ordre devient

$$(28) \qquad s=q\,\varphi(x, y, z, p).$$

L'équation $(E)_1$ est alors

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x}+\frac{\partial\lambda}{\partial z}p+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial q}q-\lambda\right)\varphi+q\frac{\partial\varphi}{\partial y}+q^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}+\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial p}\right)=0,$$

et, en raisonnant comme au n° 6, on démontre que l'on doit avoir deux relations de la forme

$$(29)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = r(x, y, z)\varphi + r_1(x, y, z)p + r_2(x, y, z), \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial z} + \varphi\dfrac{\partial\varphi}{\partial p} = \mathrm{R}(x, y, z)\varphi + \mathrm{R}_1(x, y, z)p + \mathrm{R}_2(x, y, z), \end{cases}$$

et l'on a, pour déterminer λ, les trois équations

$$q\frac{\partial\lambda}{\partial q} - \lambda + r(x, y, z)q + \mathrm{R}(x, y, z)q^2 = 0,$$
$$\frac{\partial\lambda}{\partial z} + r_1(x, y, z)q + \mathrm{R}_1(x, y, z)q^2 = 0,$$
$$\frac{\partial\lambda}{\partial x} + r_2(x, y, z)q + \mathrm{R}_2(x, y, z)q^2 = 0.$$

Pour que ces équations forment un système complètement intégrable, il faudra que l'on ait

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial r_1}{\partial x} = \frac{\partial r_2}{\partial z}, \qquad \mathrm{R}_1 = \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial z}, \qquad \mathrm{R}_2 = \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial x};$$

r_1 et r_2 doivent être les dérivées partielles d'une même fonction $\mathrm{S}(x, y, z)$ et r doit se réduire à une fonction de la seule variable y, de sorte que la fonction $\varphi(x, y, z, p)$ doit satisfaire aux deux équations simultanées

$$(30)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = \mathrm{Y}\varphi + \dfrac{\partial \mathrm{S}}{\partial z}p + \dfrac{\partial \mathrm{S}}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial z} + \varphi\dfrac{\partial\varphi}{\partial p} = \mathrm{R}\varphi + \dfrac{\partial \mathrm{R}}{\partial z}p + \dfrac{\partial \mathrm{R}}{\partial x}, \end{cases}$$

où R et S sont des fonctions de x, y, z. En partant de même de l'équation (E), on trouve, pour déterminer λ, les trois équations

$$\frac{\partial\lambda}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial\lambda}{\partial z} + \frac{\partial\lambda}{\partial p}\varphi - \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial p} + \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}p + \varphi^2 = 0,$$
$$\frac{\partial\lambda}{\partial p}\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \lambda\frac{\partial^2\varphi}{\partial p\,\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}p + \varphi^2\right) = 0;$$

en écartant d'abord le cas où $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}$ serait nul, on en conclut, comme plus haut, que l'on doit avoir des relations de la forme

$$\frac{\partial\varphi}{\partial p} = u(x, z, p)\varphi + u_1(x, z, p),$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} + p\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \varphi^2 = \mathrm{U}(x, z, p)\varphi + \mathrm{U}_1(x, z, p),$$

et les équations en λ deviennent

$$\frac{\partial\lambda}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial\lambda}{\partial p} - u(x, z, p)\lambda + \mathrm{U}(x, z, p) = 0,$$
$$\frac{\partial\lambda}{\partial z} - u_1(x, z, p)\lambda + \mathrm{U}_1(x, z, p) = 0.$$

Les conditions d'intégrabilité sont ici

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u_1}{\partial p}, \qquad \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial z} - u_1 \mathrm{U} = \frac{\partial \mathrm{U}_1}{\partial p} - u\mathrm{U}_1;$$

on y satisfait de la façon la plus générale, en posant

$$u = \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial p}, \qquad u_1 = \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial z}, \qquad \mathrm{U} = e^{\mathrm{T}}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial p}, \qquad \mathrm{U}_1 = e^{\mathrm{T}}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z},$$

T et V désignant des fonctions de x, z, p. La fonction $\varphi(x, y, z, p)$ doit donc satisfaire aussi aux deux équations simultanées

$$(31) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial\varphi}{\partial p} = \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial p}\varphi + \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial z}, \\ &\frac{\partial\varphi}{\partial x} + p\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \varphi^2 = e^{\mathrm{T}}\left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial p}\varphi + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z}\right), \end{aligned} \right.$$

et nous sommes ramenés à rechercher les solutions communes en φ aux équations (30) et (31).

9. Supposons d'abord que Y ne soit pas nul; de la première équation (30) on déduit que φ est de la forme

$$\varphi = e^{\int \mathrm{Y}\,dy}\mathrm{F}(x, z, p) + ap + b,$$

a et b étant des fonctions de x, y, z. En prenant pour variable $\int \mathrm{Y}\,dy$ au lieu de y, l'équation du second ordre conserve la même forme et l'on a

$$(32) \qquad \varphi = e^{y}\mathrm{F}(x, z, p) + ap + b.$$

D'autre part, la première des équations (31) nous donne, en remarquant que T ne dépend pas de y,

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial p\,\partial y} = \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial p}\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \qquad \frac{\partial^3\varphi}{\partial p\,\partial y^2} = \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial p}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2},$$

et, par suite,

$$(33) \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial^3\varphi}{\partial p\,\partial y^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial p\,\partial y} = 0;$$

remplaçons φ par l'expression obtenue plus haut dans cette condition, il vient

$$e^y \frac{\partial F}{\partial p}\left[p\left(\frac{\partial a}{\partial y} - \frac{\partial^2 a}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial b}{\partial y} - \frac{\partial^2 b}{\partial y^2}\right] + e^y F\left(\frac{\partial^2 a}{\partial y^2} - \frac{\partial a}{\partial y}\right) + \frac{\partial b}{\partial y}\frac{\partial^2 a}{\partial y^2} - \frac{\partial a}{\partial y}\frac{\partial^2 b}{\partial y^2} = 0.$$

En différentiant par rapport à p, on trouve

$$p\left(\frac{\partial a}{\partial y} - \frac{\partial^2 a}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial b}{\partial y} - \frac{\partial^2 b}{\partial y^2} = 0,$$

ou

$$\frac{\partial^2 b}{\partial y^2} = \frac{\partial b}{\partial y}, \qquad \frac{\partial^2 a}{\partial y^2} = \frac{\partial a}{\partial y};$$

les coefficients a et b sont donc de la forme $a = Ae^y + B$, $b = Ce^y + D$, A, B, C, D étant des fonctions des variables x, z, et en réunissant, dans l'expression de φ, tous les termes divisibles par e^y, on peut supposer que, dans la formule (32), a et b sont indépendants de y. En substituant cette expression de φ dans la seconde des formules (31), on voit que la variable y n'y figurera que dans e^y, et le coefficient de e^{2y} sera F^2. On serait donc conduit à poser $F = 0$, de sorte que φ serait une fonction linéaire de p.

Nous devons donc supposer $Y = 0$; la formule (32) est remplacée par la suivante :

$$\varphi = F(x, z, p) + ap + b, \tag{34}$$

a et b étant des fonctions de x, y, z dont l'une au moins renferme y. On ne peut avoir $a = 0$, car on en déduirait

$$\frac{\partial T}{\partial p} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial p\, \partial z} = 0.$$

La condition (33) nous donne

$$\frac{\partial a}{\partial y}\frac{\partial^2 b}{\partial y^2} - \frac{\partial b}{\partial y}\frac{\partial^2 a}{\partial y^2} = 0,$$

et l'on en tire

$$b = a\psi(x, z) + \psi_1(x, z),$$

et l'expression de φ peut s'écrire

$$\varphi = F(x, z, p) + a[p + \psi(x, z)].$$

Comparons cette expression de φ avec la première des formules (30); il vient

$$\frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\partial S}{\partial z}, \qquad \frac{\partial a}{\partial y}\psi = \frac{\partial S}{\partial x},$$

et, par suite,

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \psi(x, z)\frac{\partial S}{\partial z}.$$

On a donc

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\dfrac{\partial S}{\partial x}}{\dfrac{\partial S}{\partial z}}\right) = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{\partial S}{\partial z}\frac{\partial^2 S}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial S}{\partial x}\frac{\partial^2 S}{\partial y\,\partial z} = 0;$$

l'intégrale générale de cette équation de second ordre, qui s'obtient facilement, est donnée par la formule

$$S = \Phi[y, \Psi(x, z)],$$

Φ et Ψ désignant deux fonctions arbitraires. La première équation (30) est donc

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\Phi}{\partial\Psi}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}p + \frac{\partial\Psi}{\partial x}\right),$$

et l'on en tire

$$\varphi = F(x, z, p) + H[y, \Psi(x, z)]\left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}p + \frac{\partial\Psi}{\partial x}\right), \qquad \text{où} \qquad H = \int\frac{\partial\Phi}{\partial\Psi}dy.$$

Observons maintenant que, si l'on prend pour inconnue $\Psi(x, z)$, l'équation du second ordre proposée se réduira à la forme

$$s = [F(x, z, p) + H(y, z)p]q,$$

la fonction F n'ayant plus la même signification que tout à l'heure.

Des conditions (31) on déduit que la fonction $F(x, z, p)$ est de la forme

$$F(x, z, p) = A(x, z)p + B(x, z)p\,Lp,$$

et les formules du bas de la page 52 nous donnent alors

$$u = \frac{1}{p}, \qquad u_1 = B(x, z), \qquad U = 2Bp\,Lp + \ldots, \qquad U_1 = -B^2p^2(Lp)^2 + \ldots,$$

les termes non écrits dans U étant du premier degré en p, et ceux de U_1 étant du premier degré en Lp. Les conditions auxquelles doivent satisfaire ces fonctions sont incompatibles, à moins d'avoir $B = 0$.

10. Lorsque l'équation du second ordre est de la forme

$$s = q\,\varphi(x, z, p), \tag{35}$$

elle admet toujours une intégrale intermédiaire du premier ordre $F(x, z, p) = X$, la fonction F étant déterminée par la condition

$$\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial p}\varphi = 0. \tag{36}$$

Pour qu'il y ait aussi une intégrale intermédiaire du second ordre correspondant à l'autre système de caractéristiques, il faut et il suffit, d'après ce qui précède, que la fonction φ vérifie une relation de la forme

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \varphi\frac{\partial\varphi}{\partial p} = R\varphi + \frac{\partial R}{\partial z}p + \frac{\partial R}{\partial x}, \tag{37}$$

où $R(x, z)$ est une fonction quelconque de x et de z. La fonction R est, en effet, déterminée par la condition

$$\frac{\partial^2}{\partial p^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \varphi\frac{\partial\varphi}{\partial p}\right) = R\frac{\partial^2\varphi}{\partial p^2},$$

et, par conséquent, ne peut pas dépendre de y. Inversement, si la fonction φ satisfait à la relation (37), l'équation du second ordre proposée (35) admet l'intégrale intermédiaire du second ordre

$$\frac{t}{q} - R(x, z)q = Y, \tag{38}$$

où Y est une fonction arbitraire de y. Choisissons comme inconnue une fonction $f(x, z)$ satisfaisant à la condition

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + R(x, z)\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = 0;$$

la nouvelle équation sera de même forme que la première et admettra l'intégrale intermédiaire $t = qY$. On aura, pour cette nouvelle équation, $R = 0$, et la fonction $\varphi(x, z, p)$ devra satisfaire à la condition

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \varphi\frac{\partial\varphi}{\partial p} = 0;$$

elle sera donc définie par une relation de forme arbitraire entre x, φ et $p - z\varphi$, telle que $p - z\varphi = f(x, \varphi)$, et l'équation du second ordre pourra s'écrire

$$p - z\frac{s}{q} = f\left(x, \frac{s}{q}\right); \tag{VI}$$

inversement, quelle que soit la fonction $f\left(x, \frac{s}{q}\right)$, l'équation (VI) admet l'intégrale intermédiaire du premier ordre

$$p = z\frac{X'}{X} + f\left(x, \frac{X'}{X}\right), \tag{39}$$

où X est une fonction arbitraire de x, et l'intégrale générale est donnée par la formule

$$z = XY + X\int f\left(x, \frac{X'}{X}\right)\frac{dx}{X}, \tag{40}$$

Y étant une fonction arbitraire de y. Pour faire disparaître le signe de quadrature, il suffira d'intégrer l'équation de Monge

$$XX_1' = f\left(x, \frac{X'}{X}\right), \tag{41}$$

c'est-à-dire d'exprimer x, X, X_1 par des fonctions explicites d'un paramètre α, d'une fonction arbitraire de α et de ses dérivées du premier et du second ordre. On sait que ce problème se ramène lui-même à l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre à deux variables indépendantes.

11. Supposons maintenant que la fonction ψ ne dépende pas de q, de telle sorte que l'équation du second ordre proposée soit de la forme

$$s = \varphi(x, y, z, p) + bq,$$

φ n'étant pas une fonction linéaire de p. L'équation $(E)_1'$ déduite de (E_1), en supprimant les termes indépendants de λ, est ici

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x} + \frac{\partial\lambda}{\partial z}p + \frac{\partial\lambda}{\partial q}(\varphi + bq) - \lambda b = 0;$$

cette équation doit admettre une intégrale, autre que $\lambda = 0$, indépendante de p. On en déduit successivement

$$\frac{\partial\lambda}{\partial z} + \frac{\partial\lambda}{\partial q}\frac{\partial\varphi}{\partial p} = 0, \qquad \frac{\partial\lambda}{\partial q}\frac{\partial^2\varphi}{\partial p^2} = 0$$

et, par suite,

$$\frac{\partial\lambda}{\partial q} = 0, \qquad \frac{\partial\lambda}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial b}{\partial z} = 0.$$

Il suffira de remplacer z par $ze^{\int b\,dx}$ pour faire disparaître le terme bq, et l'équation du second ordre prend la forme

$$s = \varphi(x, y, z, p). \tag{42}$$

En se servant, comme plus haut, de l'équation (E), on démontrera que la fonction φ doit satisfaire à deux équations de la forme

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial p} &= \frac{\partial S}{\partial p}\varphi + \frac{\partial S}{\partial y}, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x} + p\frac{\partial\varphi}{\partial z} &= e^S\left(\frac{\partial T}{\partial p}\varphi + \frac{\partial T}{\partial y}\right), \end{aligned}\right. \tag{43}$$

S et T étant des fonctions de x, y, p, et, en se servant de $(\mathrm{E})_1$, on verra, de même, que φ doit vérifier deux équations de la forme

$$(44)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \mathrm{Y}\varphi + \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial z}p + \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x},\\ &\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \varphi\frac{\partial\varphi}{\partial p} = \mathrm{U}\varphi + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z}p + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x},\end{aligned}\right.$$

U et V étant des fonctions de x, y, z. On déduit de la première des équations (43)

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial p\,\partial z} = \frac{\partial \mathrm{S}}{\partial p}\frac{\partial\varphi}{\partial z}, \qquad \frac{\partial^3\varphi}{\partial p\,\partial z^2} = \frac{\partial \mathrm{S}}{\partial p}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$$

et, par suite,

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial p\,\partial z}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} - \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial^3\varphi}{\partial p\,\partial z^2} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial^2}{\partial p\,\partial z}\left(\log\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) = 0,$$

et de la seconde, on tire de même

$$\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial z}\log\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) + p\frac{\partial^2}{\partial z^2}\log\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) = 0.$$

En différentiant la seconde par rapport à p et tenant compte de la première, il vient

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\log\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial z}\log\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) = 0;$$

il s'ensuit que l'on a

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = e^{\mathrm{Y}_1 z}\,\psi(x, y, p).$$

La fonction φ a donc l'une des trois formes suivantes

$$\varphi = e^{\mathrm{Y}_1 z}\mathrm{F}(x, y, p) + \mathrm{F}_1(x, y, p), \quad \varphi = \mathrm{F}(x, y, p)z + \mathrm{F}_1(x, y, p), \quad \varphi = \mathrm{F}(x, y, p);$$

nous examinerons successivement ces trois hypothèses.

12. *Premier cas.* — Supposons que φ soit de la forme

$$\varphi = e^{\mathrm{Y}_1 z}\mathrm{F}(x, y, p) + \mathrm{F}_1(x, y, p);$$

en prenant $\mathrm{Y}_1 z$ pour nouvelle inconnue, on peut supposer que l'on a $\mathrm{Y}_1 = 1$. De la première des équations (44) on tire

$$\frac{\partial^3\varphi}{\partial p^2\,\partial z} = \mathrm{Y}\frac{\partial^2\varphi}{\partial p^2},$$

c'est-à-dire

$$e^z \frac{\partial^2 F}{\partial p^2} = Y\left(e^z \frac{\partial^2 F}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial p^2}\right),$$

ou

$$e^z \frac{\partial^2 F}{\partial p^2}(1 - Y) = Y \frac{\partial^2 F_1}{\partial p^2},$$

ce qui exige que l'on ait

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial p^2} = 0, \qquad Y = 1, \qquad \text{ou bien} \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial p^2} = 0, \qquad Y = 0.$$

Adoptons la première hypothèse; la fonction φ est de la forme

$$\varphi = e^z F(x, y, p) + ap + b,$$

a et b étant des fonctions de x et y. La première équation (44) est alors

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \varphi - ap \quad b,$$

et l'on doit avoir

$$\frac{\partial U}{\partial z} = -a, \qquad \frac{\partial U}{\partial x} = -b.$$

Pour que ces équations soient compatibles, il faut que l'on ait $\frac{\partial a}{\partial x} = 0$, c'est-à-dire que a soit une simple fonction de y, $\psi(y)$. Si dans l'équation du second ordre

$$s = e^z F(x, y, p) + \psi(y) p + b,$$

on remplace z par $z + z_1$, z_1 étant une intégrale particulière de l'équation $s = \psi(y) p + b$, on fait disparaître le terme b, sans changer la forme de l'équation. Enfin, si l'on prend pour nouvelle inconnue $z\, e^{\int \psi(y)\, dy}$, l'équation du second ordre prend la forme

$$s = e^{Y_2 z} F(x, y, p).$$

L'équation en λ pour le premier système de caractéristiques est alors

$$\frac{\partial \lambda}{\partial y} + \frac{\partial \lambda}{\partial z} q + \frac{\partial \lambda}{\partial p} e^{Y_2 z} F - \lambda e^{Y_2 z} \frac{\partial F}{\partial p} + e^{Y_2 z} \frac{\partial F}{\partial x} + Y_2 e^{Y_2 z} F p = 0;$$

on en tire

$$\frac{\partial \lambda}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \lambda}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial \lambda}{\partial p} F - \lambda \frac{\partial F}{\partial p} + \frac{\partial F}{\partial x} + Y_2 F p = 0$$

et, par suite,

$$\frac{\partial^2 \log F}{\partial p\, \partial y} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \log F}{\partial x\, \partial y} + Y_2' p = 0.$$

On en conclut que $\log F$ est de la forme $f(p, x) + f_1(x, y)$, et la seconde équation devient

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x\, \partial y} + Y'_2 p = 0;$$

on a donc

$$Y'_2 = 0, \qquad \frac{\partial^2 f_1}{\partial x\, \partial y} = 0.$$

L'équation du second ordre peut donc s'écrire

$$s = XY e^z f(x, p),$$

et il suffira de remplacer les variables x et y par deux nouvelles variables convenablement choisies pour être ramené à la forme

$$(45) \qquad s = e^z f(x, p).$$

Cette équation admet toujours, quel que soit $f(x, p)$, une intégrale intermédiaire du second ordre

$$(46) \qquad r = F(x, p) + f(x, p) X,$$

la fonction F étant déterminée par l'équation

$$\frac{\partial F}{\partial p} f - \frac{\partial f}{\partial p} F = \frac{\partial f}{\partial x} + pf \qquad \text{ou} \qquad \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{F}{f}\right) = \frac{p}{f} + \frac{1}{f^2}\frac{\partial f}{\partial x}.$$

Pour savoir à quelles conditions il y aura aussi une intégrale intermédiaire correspondant à l'autre système de caractéristiques, reprenons les équations (44) dont la première se réduit ici à $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \varphi$. On en conclut que U est une simple fonction de y. De la seconde on tire ensuite

$$\frac{e^{2z}}{2}\frac{\partial^3 (f^2)}{\partial p^3} = e^z U \frac{\partial^2 f}{\partial p^2};$$

comme U et f ne renferment pas z, il faut que l'on ait $U = 0$, $\frac{\partial^3 f^2}{\partial p^3} = 0$, ou que f^2 soit une fonction entière et du second degré de p

$$f^2 = Xp^2 + 2X_1 p + X_2,$$

et la seconde équation (40) donne alors

$$e^{2z}(Xp + X_1) = \frac{\partial V}{\partial z} p + \frac{\partial V}{\partial x} \qquad \text{ou} \qquad \frac{\partial V}{\partial z} = e^{2z} X, \qquad \frac{\partial V}{\partial x} = e^{2z} X_1.$$

Ces équations sont compatibles pourvu que l'on ait $2X_1 = X'$, et en définitive l'équation du second ordre cherchée peut s'écrire

$$s = e^z \sqrt{Xp^2 + X'p + X_2},$$

les fonctions X et X_2 étant quelconques. Toutes ces équations peuvent être ramenées à une même forme canonique; d'abord, en changeant z en $z + f(x)$, on peut faire disparaître X_2 sans changer la forme de l'équation. En prenant ensuite X pour variable indépendante, on aboutit enfin à l'équation

$$\text{(VII)} \qquad s = e^z \sqrt{xp^2 + p},$$

qui admet les deux intégrales intermédiaires

$$t = \frac{q^2}{2} + \frac{x\,e^{2z}}{2} + Y, \qquad r = p^2 + X\sqrt{p^2 x + p}.$$

On verrait de la même façon que l'hypothèse $Y = 0$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial p^2} = 0$ conduit à des conditions incompatibles.

Deuxième cas. — Soit

$$\varphi = F(x, y, p)z + F_1(x, y, p).$$

La première des relations (44) donne

$$\frac{\partial^2 F}{\partial p^2} = Y\left(\frac{\partial^2 F}{\partial p^2} z + \frac{\partial^2 F_1}{\partial p^2}\right),$$

ce qui exige que l'on ait

$$Y = 0, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial p^2} = 0,$$

et φ est de la forme

$$\varphi = (ap + b)z + F_1(x, y, p).$$

On en déduit

$$\frac{\partial U}{\partial z} = a, \qquad \frac{\partial U}{\partial x} = b$$

et, par suite,

$$\frac{\partial a}{\partial x} = \frac{\partial b}{\partial z} = 0.$$

Si a n'est pas nul, c'est donc une fonction de la seule variable y, soit Y_1. En prenant pour inconnue $Y_1 z$ au lieu de z, et changeant ensuite z en $z + \lambda$, on peut ramener l'équation du second ordre à la forme

$$s = pz + F_1(x, y, p).$$

La première des équations (43) devient

$$z + \frac{\partial F_1}{\partial p} = \frac{\partial S}{\partial p}(pz + F_1) + \frac{\partial S}{\partial y},$$

et l'on en tire

$$\frac{\partial S}{\partial p} = \frac{1}{p}, \qquad \frac{\partial S}{\partial y} = \frac{\partial F_1}{\partial p} - \frac{F_1}{p}$$

et, par suite,

$$\frac{\partial^2 S}{\partial y\, \partial p} = \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial F_1}{\partial p} - \frac{F_1}{p}\right) = 0,$$

de sorte que F_1 est de la forme

$$F_1 = A(x, y)\, p + B(x, y)\, p\, L\, p,$$

tandis qu'on a

$$S = C(x, y) + L\, p.$$

La seconde des équations (43) est alors

$$\frac{\partial A}{\partial x} p + \frac{\partial B}{\partial x} p\, L\, p + p^2 = p\, e^{C(x,y)}\left(\frac{\partial T}{\partial p}(pz + \ldots) + \frac{\partial T}{\partial y}\right).$$

On en déduit

$$\frac{\partial T}{\partial p} = 0, \qquad \frac{\partial T}{\partial y} = e^{-C(x,y)}\left(p + \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial x} L\, p\right),$$

et ces conditions sont évidemment incompatibles.

Si l'on avait $a = 0$, la première des équations (43) donnerait

$$\frac{\partial F_1}{\partial p} = \frac{\partial S}{\partial p}(bz + F_1) + \frac{\partial S}{\partial y},$$

ou

$$\frac{\partial S}{\partial p} = 0, \qquad \frac{\partial S}{\partial y} = \frac{\partial F_1}{\partial p}$$

et, par suite,

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial p^2} = \frac{\partial^2 S}{\partial y\, \partial p} = 0,$$

de sorte que F_1 serait une fonction linéaire de p.

Troisième cas. — Soit

$$\varphi = F(x, y, p).$$

L'équation

$$s = F(x, y, p)$$

admet toujours une intégrale intermédiaire du premier ordre $\Phi(x, y, p) = X$, où Φ est déterminé par la condition

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial p} F = 0.$$

Pour qu'il existe une intégrale intermédiaire du second ordre pour le second système de caractéristiques, il faut que la fonction F vérifie aussi les relations (44) pour des formes convenablement choisies des fonctions Y, $U(x, y, z)$, $V(x, y, z)$. Ces équations sont ici

$$YF + \frac{\partial U}{\partial z} p + \frac{\partial U}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial p} F = UF + \frac{\partial V}{\partial z} p + \frac{\partial V}{\partial x};$$

puisque, par hypothèse, F n'est pas une fonction linéaire de p, on déduit de la première $Y = 0$, $\frac{\partial U}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial U}{\partial x} = 0$, de sorte que U est une fonction de la seule variable y. La seconde donne alors, en différentiant, par rapport à z,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} = 0, \qquad V = f_1(y) z + \Phi(x, y)$$

et, en définitive, la fonction $F(x, y, p)$ doit satisfaire à une relation de la forme

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial p} F = f(y) F + f_1(y) p + \frac{\partial \Phi}{\partial x}.$$

Lorsqu'il en est ainsi, l'équation $s = F(x, y, p)$ admet bien l'intégrale intermédiaire

$$t = f(y)\, q + f_1(y) z + \Phi(x, y) + Y,$$

Y désignant une fonction arbitraire de y. Toutes ces équations peuvent encore être ramenées à une forme canonique simple. Soient z_1 et z_2 deux intégrales distinctes, indépendantes de x, de l'équation différentielle linéaire

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f(y) \frac{\partial z}{\partial y} + f_1(y) z;$$

prenons pour variable indépendante $\frac{z_2}{z_1}$ au lieu de y, et changeons ensuite z en $z_1 z$; la nouvelle équation, devant admettre les deux intégrales 1 et y, se réduira à $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$. Si l'on applique les mêmes transformations à l'équation aux dérivées partielles du second ordre, l'intégrale intermédiaire du second ordre devient

$$t = \Phi(x, y) + Y,$$

et il suffira de changer encore z en $z + \mu(x, y)$, en choisissant μ convenablement, pour qu'elle devienne $t = Y$. Toutes ces transformations ne changent pas la forme de l'équation du second ordre considérée; on devra donc avoir finalement

$$\frac{\partial F}{\partial y} + F\frac{\partial F}{\partial p} = 0,$$

c'est-à-dire qu'on sera ramené à une équation du type suivant

$$\text{(VIII)} \qquad p - sy = f(x, s).$$

Cette équation admet l'intégrale intermédiaire du premier ordre

$$p - X'y = f(x, X'),$$

et l'intégrale générale est donnée par la formule

$$z = Xy + Y + \int f(x, X')\,dx.$$

Pour avoir des formules débarrassées de tout signe de quadrature, il suffira d'intégrer l'équation de Monge

$$X_1' = f(x, X').$$

13. Il ne nous reste plus qu'à examiner le cas où les deux fonctions φ et ψ sont linéaires en p et q respectivement. L'équation peut alors être ramenée à la forme

$$s = ap + bq + c,$$

a, b, c étant des fonctions de x, y, z. Nous distinguerons encore plusieurs cas dans la discussion.

Premier cas. — Soit $\frac{\partial a}{\partial z} = \frac{\partial b}{\partial z} = 0$. En changeant z en $ze^{\int b\,dx}$, on fait disparaître le terme en q, de sorte qu'on peut prendre l'équation sous la forme $s = ap + c$.

L'équation (E) est ici

$$\frac{\partial\lambda}{\partial y} + \frac{\partial\lambda}{\partial z}q + \frac{\partial\lambda}{\partial p}(ap + c) - a\lambda + p\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial c}{\partial x} + p\frac{\partial c}{\partial z} = 0;$$

on en déduit

$$\frac{\partial\lambda}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial\lambda}{\partial p}\frac{\partial c}{\partial z} + \frac{\partial^2 c}{\partial x\,\partial z} + p\frac{\partial^2 c}{\partial z^2} = 0,$$

et les coefficients de la dernière équation doivent être indépendants de z

$$\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial z}\left(\log\frac{\partial c}{\partial z}\right) = 0, \qquad \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\log\frac{\partial c}{\partial z}\right) = 0.$$

Écartons le cas où c serait une fonction linéaire de z; on tire de ces équations

$$c = e^{Yz + R(x,y)} + R_1(x,y);$$

en prenant pour inconnue Yz et changeant ensuite z en $z + \mu(x,y)$, on peut ramener l'équation à la forme

$$s = ap + e^{z+R(x,y)}.$$

Les équations qui déterminent λ sont alors

$$\frac{\partial\lambda}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial\lambda}{\partial p} + p + \frac{\partial R}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial\lambda}{\partial y} - a\lambda - ap^2 + p\left(\frac{\partial a}{\partial x} - a\frac{\partial R}{\partial x}\right) = 0,$$

et les conditions d'intégrabilité donnent

$$a = 0, \qquad \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} = 0;$$

l'équation du second ordre se ramène à l'équation de Liouville

$$\text{(IX)} \qquad s = e^z.$$

Deuxième cas. — Soient $\frac{\partial b}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial a}{\partial z} \neq 0$. On peut encore prendre l'équation sous la forme simple $s = ap + c$. Une discussion analogue aux précédentes conduit à la seule équation [1]

$$\text{(X)} \qquad s = e^z p,$$

qui admet l'intégrale intermédiaire du premier ordre $q = e^z + Y$, et l'intégrale intermédiaire du second ordre $r = p^2 + pX$. L'intégrale générale est donnée par la formule

$$e^z(X - Y) = Y'.$$

Troisième cas. — Soient $\frac{\partial a}{\partial z} \neq 0$, $\frac{\partial b}{\partial z} \neq 0$. En écrivant que l'équation $(E)'$ admet une intégrale indépendante de q et l'équation (E'_1) une intégrale indépendante de p, on arrive aux conditions suivantes

$$b = -\frac{\partial h}{\partial z}, \qquad a = -\frac{\partial k}{\partial z}, \qquad c = ah - \frac{\partial h}{\partial y} = bk - \frac{\partial k}{\partial x},$$

---

[1] Cette équation appartient à la classe générale étudiée par M. Moutard (*Comptes rendus*, 1870). *Voir* la note de M. E. Cosserat, dans le Tome IV de la *Théorie générale des surfaces,* de M. Darboux.

où l'on a posé

$$h = \frac{\dfrac{\partial c}{\partial z} + ab - \dfrac{\partial b}{\partial y}}{\dfrac{\partial a}{\partial z}}, \qquad k = \frac{\dfrac{\partial c}{\partial z} + ab - \dfrac{\partial a}{\partial x}}{\dfrac{\partial b}{\partial z}}.$$

En égalant les deux expressions de c, on a la condition

$$\frac{\partial k}{\partial x} - h\frac{\partial k}{\partial z} = \frac{\partial h}{\partial y} - k\frac{\partial h}{\partial z}$$

qui exprime que les deux équations

$$\frac{\partial f}{\partial x} - h\frac{\partial f}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} - k\frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

forment un système complet. On a donc, en désignant par $U(x, y, z)$ une solution de ce système,

$$h = \frac{\dfrac{\partial U}{\partial x}}{\dfrac{\partial U}{\partial z}}, \qquad k = \frac{\dfrac{\partial U}{\partial y}}{\dfrac{\partial U}{\partial z}},$$

et les formules précédentes donneront les expressions de a, b, c en fonction de U et de ses dérivées. On vérifie facilement, en se servant de ces expressions, que, si l'on prend pour inconnue nouvelle la fonction $U(x, y, z)$, l'équation du second ordre prend la forme simple

$$(47) \qquad s = apq.$$

On démontre ensuite, en se servant des équations (E), (E)$_1$ elles-mêmes que l'équation doit être de la forme

$$s = \left(\frac{1}{X + z} + \frac{1}{Y + z}\right)pq,$$

X désignant une fonction de x et Y une fonction de y. Si l'on prend pour variables indépendantes ces fonctions X et Y elles-mêmes, l'équation peut s'écrire

$$s = \left(\frac{1}{x + z} + \frac{1}{y + z}\right)pq;$$

enfin, si l'on prend pour fonction inconnue

$$u = L\left(\frac{x + z}{y + z}\right),$$

elle devient

$$(\text{XI}) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^u}{y - x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{e^{-u}}{x - y}\right) = 0.$$

Cette équation rentre dans la classe des équations de M. Moutard, et son intégration se ramène à celle de l'équation linéaire (1)

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x\, \partial y} + \frac{1}{x-y}\frac{\partial \lambda}{\partial y} + \frac{\lambda}{(x-y)^2} = 0.$$

14. En définitive, si nous faisons abstraction des équations linéaires et de celles qui s'y ramènent par un changement de fonction inconnue, toutes les équations du second ordre cherchées peuvent, par une transformation ponctuelle de la forme (14), être ramenées à l'un des types ci-dessous :

(I) $$s = \frac{2\sqrt{pq}}{x+y};$$

(II) $$s = \frac{\sqrt{1+p^2}\sqrt{1+q^2}}{z};$$

(III) $$s = \frac{\sqrt{1+p^2}\sqrt{1+q^2}}{\sin z};$$

(IV) $$sz + \varepsilon\varphi(x, p)\psi(y, q) = 0,$$

(où l'on a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial p} = \varepsilon\frac{p}{\varphi} + \mathrm{K}, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial p} = \varepsilon\frac{q}{\psi} + \mathrm{K}, \qquad \varepsilon = \pm 1,$$

K est une constante différente de zéro);

(V) $s(x+y) = \varphi(p)\psi(q)$, où $\varphi(p) = 1 + e^{p-\varphi(p)}$, $\psi(q) = 1 + e^{q-\psi(q)}$,

(VI) $$p - z\frac{s}{q} = f\left(x, \frac{s}{q}\right);$$

(VII) $$s = e^z\sqrt{xp^2+p};$$

(VIII) $$p - sy = f(x, s);$$

(IX) $$s = e^z;$$

(X) $$s = pe^z;$$

(XI) $$s - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^z}{y-x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{e^{-z}}{x-y}\right) = 0.$$

On connaît déjà sous forme entièrement explicite l'intégrale générale des équations (I), (IX), (X), (XI). Les équations (VI) et (VIII) sont intégrables par la méthode de Monge, et l'on a déjà fait remarquer qu'on peut obtenir l'intégrale générale sous forme explicite, moyennant l'intégration d'une équation de Monge. Il ne reste plus à étudier que les équations (II), (III), (IV), (V) et (VII).

L'équation (V) peut se ramener à une équation intégrable par une transforma-

(1) *Voir* la note déjà citée de M. E. Cosserat, p. 410 et suiv.

tion de Bäcklund. Introduisons deux variables auxiliaires u et v en posant

$$p - \varphi(p) = u, \qquad q - \psi(q) = v;$$

des équations qui définissent φ et ψ, on tire inversement

$$\varphi(p) = 1 + e^u, \qquad p = 1 + u + e^u, \qquad \psi(q) = 1 + e^v, \qquad q = 1 + v + e^v.$$

L'équation du second ordre peut s'écrire

$$\frac{s}{\varphi} = s - s\frac{d\varphi}{dp} = \frac{1 + e^v}{x + y},$$

c'est-à-dire

(48) $$\frac{\partial}{\partial y}(p - \varphi) = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1 + e^v}{x + y},$$

et l'on a de même

(49) $$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1 + e^u}{x + y},$$

de sorte que l'intégration de l'équation (V) est ramenée à celle des équations simultanées (48) et (49). L'élimination de v conduit à l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{e^u}{x + y}\right) - \frac{1}{(x + y)^2}$$

et, si l'on pose

$$u = \mathrm{L}(x + y) + t,$$

on arrive, enfin, à l'équation (X) signalée plus haut

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x\, \partial y} = e^t \frac{\partial t}{\partial y},$$

dont l'intégrale générale est donnée par la formule

$$e^t = \frac{-\mathrm{X}'}{\mathrm{X} + \mathrm{Y}}.$$

On en tire successivement

$$u = \mathrm{L}\left(\frac{x + y}{\mathrm{X} + \mathrm{Y}}\right) + \mathrm{L}(-\mathrm{X}'),$$

$$v = \mathrm{L}\left(\frac{x + y}{\mathrm{X} + \mathrm{Y}}\right) + \mathrm{L}(-\mathrm{Y}'),$$

$$p = 1 + \mathrm{L}\left(\frac{x + y}{\mathrm{X} + \mathrm{Y}}\right) - (x + y)\frac{\mathrm{X}'}{\mathrm{X} + \mathrm{Y}} + \mathrm{L}(-\mathrm{X}'),$$

$$q = 1 + \mathrm{L}\left(\frac{x + y}{\mathrm{X} + \mathrm{Y}}\right) - (x + y)\frac{\mathrm{Y}'}{\mathrm{X} + \mathrm{Y}} + \mathrm{L}(-\mathrm{Y}'),$$

$$z = \int p\, dx + q\, dy = (x + y)\,\mathrm{L}\left(\frac{x + y}{\mathrm{X} + \mathrm{Y}}\right) + \int \mathrm{L}(-\mathrm{X}')\, dx + \int \mathrm{L}(-\mathrm{Y}')\, dy.$$

Pour faire disparaître les deux signes de quadrature, il suffira d'introduire deux paramètres variables α et β en posant

$$X' = -e^{\alpha}, \qquad Y' = -e^{\beta}, \qquad x = f'(\alpha) + f''(\alpha), \qquad y = \varphi'(\alpha) + \varphi''(\beta),$$

ce qui donne

$$X = \int X'\,dx = -\int e^{\alpha}[f''(\alpha) + f'''(\alpha)]\,d\alpha = -e^{\alpha}f''(\alpha),$$

$$\int L(-X')\,dx = \int \alpha[f''(\alpha) + f'''(\alpha)]\,d\alpha = \alpha f'(\alpha) - f(\alpha) + \alpha f''(\alpha) - f'(\alpha),$$

et l'on aura de même

$$Y = \int Y'\,dy = -e^{\beta}\varphi''(\beta),$$

$$\int L(-Y')\,dy = \beta\varphi'(\beta) - \varphi(\beta) + \beta\varphi''(\beta) - \varphi'(\beta),$$

et il suffira de remplacer x, y, X et Y par ces expressions dans la formule qui donne z pour avoir les expressions explicites de x, y, z en fonction des deux paramètres α, β, et des deux fonctions arbitraires $f(\alpha)$ et $\varphi(\beta)$ et de leurs dérivées.

15. L'équation (VII) peut aussi, par une transformation de Bäcklund, se ramener à une équation admettant une intégrale intermédiaire du premier ordre. Il suffit de prendre une nouvelle fonction inconnue λ en posant

$$\frac{px+1}{p} = \lambda^2 \qquad \text{ou} \qquad p = \frac{1}{\lambda^2 - x};$$

l'équation proposée donne alors

$$s = e^z p\sqrt{\frac{px+1}{p}} = \frac{\lambda e^z}{\lambda^2 - x},$$

ou, en remarquant que $s = \dfrac{\partial p}{\partial y} = \dfrac{-2\lambda\dfrac{\partial\lambda}{\partial y}}{(\lambda^2 - x)^2}$,

$$e^z = \frac{-2\dfrac{\partial\lambda}{\partial y}}{\lambda^2 - x}.$$

On en déduit, en différentiant par rapport à x,

$$e^z\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-2\dfrac{\partial^2\lambda}{\partial x\,\partial y}(\lambda^2 - x) + 2\dfrac{\partial\lambda}{\partial y}\left(2\lambda\dfrac{\partial\lambda}{\partial x} - 1\right)}{(\lambda^2 - x)^2} = \frac{-2\dfrac{\partial\lambda}{\partial y}}{(\lambda^2 - x)^2}$$

ou

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x\, \partial y}(\lambda^2 - x) - 2\lambda \frac{\partial \lambda}{\partial x}\frac{\partial \lambda}{\partial y} = 0. \tag{50}$$

Cette équation admet l'intégrale intermédiaire du premier ordre

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} = X(\lambda^2 - x), \tag{51}$$

X désignant une fonction arbitraire de x, et une intégrale intermédiaire du troisième ordre que l'on obtiendra en remplaçant e^z, q, t par leurs valeurs en fonction de λ, $\frac{\partial \lambda}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 \lambda}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^3 \lambda}{\partial y^3}$ dans l'équation

$$t = \frac{q^2}{2} + \frac{x}{2}e^{2z} + Y.$$

L'intégrale générale de l'équation du premier ordre (51) est de la forme

$$\lambda = \theta_1(x) + \frac{\theta_2(x)}{Y + \theta_3(x)},$$

Y désignant une fonction arbitraire de y, et θ_1, θ_2, θ_3 des fonctions de x telles que $\dfrac{\frac{\partial \lambda}{\partial x}}{\lambda^2 - x}$ ne renferme pas Y. Il faut pour cela que l'on ait

$$\frac{\theta'_1}{\theta_1^2 - x} = \frac{\theta'_2}{2\theta_1\theta_2} = -\frac{\theta'_3}{\theta_2}; \tag{52}$$

pour satisfaire à ces conditions, il suffira d'exprimer x, θ_1, θ_2, θ_3 en fonction d'une variable auxiliaire α de telle façon que l'on ait

$$2\theta_1\, d\theta_1 - (\theta_1^2 - x)\frac{d\theta_2}{\theta_2} = 0, \qquad 2\theta_1\, d\theta_3 + d\theta_2 = 0.$$

On y arrive en posant

$$\theta_1 = \frac{e^\alpha}{F'(\alpha)}, \qquad \theta_2 = e^\alpha, \qquad \theta_3 = -\frac{F(\alpha)}{2}, \qquad x = -\frac{e^{2\alpha}}{F'^3}(F' - 2F''),$$

et l'intégrale générale de l'équation (50) est représentée par les équations

$$\left\{\begin{aligned} x &= -\frac{e^{2\alpha}}{F'^3(\alpha)}[F'(\alpha) - 2F''(\alpha)], \\ y &= y, \\ \lambda &= \frac{e^\alpha}{F'(\alpha)} + \frac{e^\alpha}{Y - \frac{F(\alpha)}{2}}, \end{aligned}\right. \tag{53}$$

$F(\alpha)$ étant une fonction arbitraire de α et Y une fonction arbitraire de y. Il suffira de remplacer λ par la valeur précédente dans l'expression de z pour avoir l'intégrale générale de l'équation (VII).

La transformation de Bäcklund qui nous a servi s'applique aussi à toutes les équations de la forme $s = e^z f(x, p)$ et conduit à des équations admettant des intégrales intermédiaires du premier ordre.

16. La méthode précédente d'intégration de l'équation (50) s'applique aussi à toute équation du second ordre admettant une intégrale intermédiaire de la forme

$$\frac{\partial z}{\partial x} = X(\alpha z^2 + 2\beta z + \gamma) + a z^2 + 2 b z + c,$$

$a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ étant des fonctions déterminées de x, et X une fonction arbitraire. Si l'on effectue une transformation telle que

$$z = \frac{l z' + m}{p z' + q}, \qquad x' = f(x),$$

on peut ramener cette intégrale intermédiaire à la forme

$$\frac{\partial z}{\partial x} = X z + z^2 - \varphi(x),$$

en négligeant les cas particuliers qui conduisent à des équations connues. Si l'on pose $z = e^u$, elle devient

$$\frac{\partial u}{\partial x} = X + e^u - \varphi(x) e^{-u},$$

et l'équation du second ordre correspondante est

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \, \partial y} = [e^u + e^{-u} \varphi(x)] \frac{\partial u}{\partial y};$$

elle admet aussi l'intégrale intermédiaire du troisième ordre

$$\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - 3\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^4 = Y\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2.$$

Quelle que soit la fonction $\varphi(x)$, une transformation de Bäcklund permet de ramener cette équation au type (VII). Si l'on pose en effet $\frac{\partial u}{\partial y} = e^v$, on a

$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^u + e^{-u} \varphi(x), \qquad e^{-v} \frac{\partial^2 v}{\partial x \, \partial y} = e^u - e^{-u} \varphi(x)$$

ou

$$e^u = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + e^{-v}\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}\right), \qquad e^{-u}\varphi(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - e^{-v}\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}\right);$$

on en tire

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} = e^v\sqrt{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 - 4\varphi(x)},$$

équation que l'on ramènera à la forme (VII), comme on l'a expliqué plus haut (n° 12).

17. Il ne reste donc plus à intégrer que les équations (II), (III), (IV). Je n'ai pu jusqu'ici achever l'intégration, comme dans les deux cas déjà traités. L'intégration de l'équation (III), par exemple, est ramenée à celle du système complètement intégrable

$$(54)\qquad \begin{cases} rz + 1 + p^2 = z\sqrt{1+p^2}\,X, \\ sz \qquad\quad = \sqrt{(1+p^2)(1+q^2)}, \\ tz + 1 + q^2 = z\sqrt{1+q^2}\,Y, \end{cases}$$

où X et Y sont deux fonctions arbitraires de x et de y respectivement. Cette intégration ne paraît pas possible en termes finis, quelles que soient les deux fonctions X et Y ; mais on peut cependant obtenir des intégrales particulières en assez grand nombre. Ainsi, pour $X = Y = 0$, l'intégrale générale de ce système est donnée par la formule

$$z^2 + x^2 + y^2 + 2axy + 2bx + 2cy + d = 0,$$

a, b, c, d étant quatre constantes liées par la relation

$$b^2 + c^2 - 2abc + (a^2 - 1)d = 0.$$

D'une manière plus générale, supposons que, pour un choix particulier de la fonction X, on ait obtenu l'intégrale générale de l'équation différentielle du second ordre

$$(55)\qquad rz + 1 + p^2 = z\sqrt{1+p^2}\,X,$$

qui ne renferme que x, z, p, r. L'intégrale générale est de la forme

$$z = F(x, Y, Y_1),$$

Y, Y_1 désignant deux fonctions arbitraires de y. En écrivant que z vérifie l'équation du second ordre proposée, on est conduit à une relation de la forme

$$(56)\qquad \Phi(Y, Y_1, Y', Y'_1) = 0,$$

et l'on obtiendra une infinité d'intégrales de l'équation proposée, dépendant d'une fonction arbitraire par l'intégration de l'équation de Monge (56). Ainsi, pour $X = 0$, l'intégrale générale de l'équation (55) est

$$z = \sqrt{2Y_1 + 2xY - x^2},$$

et la relation (56) devient

$$2Y_1(1 - Y'^2) + Y^2 + Y_1'^2 - 2YY'Y_1' = 0.$$

On obtiendrait d'autres intégrales, en supposant $X = C$, ou $X = \frac{C}{x}$.

Remarque. — Il n'est pas toujours nécessaire, pour intégrer une des équations que nous venons de passer en revue, de la ramener à la forme canonique correspondante; l'intégration directe peut parfois être plus facile. Prenons, par exemple, l'équation

$$s = \frac{q\sqrt{1+p^2}}{z},$$

qui admet l'intégrale intermédiaire du premier ordre

$$\frac{p + \sqrt{1+p^2}}{z} = \varphi(x)$$

et l'intégrale intermédiaire du second ordre

$$\frac{t}{q} + \frac{q}{z} = \psi(y).$$

Pour ramener cette équation à la forme canonique (VI), il faudrait (n° 10) prendre z^2 pour inconnue, mais il est plus simple d'intégrer directement l'équation $sz = q\sqrt{1+p^2}$; si l'on remplace $\varphi(x)$ par $-\frac{X'}{X}$, l'intégrale intermédiaire du premier ordre peut s'écrire

$$2pzX + X'z^2 = \frac{X^2}{X'},$$

et l'intégrale générale est donnée par la formule

$$z^2 = \frac{1}{X}\int \frac{X^2}{X'}\,dx + \frac{Y}{X}.$$

On fera disparaître le signe de quadrature en posant $x = \alpha f''(\alpha) - f'(\alpha)$, $X = \frac{1}{f''(\alpha)}$, α étant un paramètre variable et $f(\alpha)$ une fonction arbitraire de ce paramètre.

18. Je terminerai ce travail par l'examen d'une question qui se rattache aux questions déjà traitées. Étant donnée une équation

$$(57) \qquad s = f(x, y, z, p, q),$$

s'il n'existe, pour chaque système de caractéristiques du premier ordre, qu'une seule combinaison intégrable, soit $dx = 0$ ou $dy = 0$, les seules transformations de contact qui ne changent pas la forme de l'équation (57) sont précisément les transformations ponctuelles (14). Mais il n'en est plus de même s'il existe pour l'un des systèmes de caractéristiques du premier ordre deux combinaisons intégrables distinctes

$$dx = 0, \qquad d[u(x, y, z, p)] = 0.$$

Il existe alors une infinité de transformations de contact qui ne changent pas la forme de l'équation du second ordre proposée. Soit, en effet, $F(x, u)$ une fonction quelconque de x et de u; soit $\Phi(x, y, z, p)$ une seconde fonction satisfaisant à la condition

$$[F, \Phi] = 0;$$

les formules de transformation

$$X = F(x, u), \qquad Y = y, \qquad Z = \Phi(x, y, z, p)$$

définissent une transformation de contact qui, appliquée à l'équation (57), conduira à une équation du second ordre pour laquelle les deux familles de caractéristiques admettent respectivement les combinaisons intégrables

$$dX = 0, \qquad dY = 0.$$

Cette équation sera donc de la forme (57).

La fonction $F(x, u)$ pouvant être choisie arbitrairement, on est conduit à se demander s'il ne serait pas possible de trouver une transformation de contact ramenant l'équation du second ordre à une forme particulièrement simple, que l'on prendrait pour forme canonique. Je n'examinerai ici que le problème suivant :

Étant donnée une équation de la forme (57), *qui admet une intégrale intermédiaire du premier ordre* $u(x, y, z, p) = X$, X *étant une fonction arbitraire de x, peut-on trouver une transformation de contact telle que l'équation transformée admette une intégrale intermédiaire*

$$ap' + b = X',$$

a et b ne dépendant que de x', y', z', *et* X' *étant une fonction arbitraire de* x'?

Cela revient à trouver s'il existe deux fonctions $f(x, u)$ et $\varphi(x, u)$, et une transformation de contact qui les change respectivement en $ap' + b$ et x', a et b étant des fonctions de x', y', z'. Introduisons une notation homogène en posant

$$x = x_1, \qquad y = x_2, \qquad z = x_3, \qquad p = -\frac{p_1}{p_3}, \qquad q = -\frac{p_2}{p_3},$$

$$x' = x'_1, \qquad y' = x'_2, \qquad z' = x'_3, \qquad p' = -\frac{p'_1}{p'_3}, \qquad q' = -\frac{p'_2}{p'_3}.$$

Toute transformation de contact en (x, y, z, p, q) se change en une transformation homogène de contact en $(x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3)$ et inversement. Soient U et V ce que deviennent les fonctions $f(x, u)$ et $\varphi(x, u)$ quand on y remplace x, y, z, p, q par les valeurs précédentes; posons en même temps

$$\mathrm{U}' = -a(x'_1, x'_2, x'_3)\frac{p'_1}{p'_3} + b(x'_1, x'_2, x'_3), \qquad \mathrm{V}' = x'_1.$$

Nous sommes ramenés à rechercher s'il existe une transformation de contact homogène qui change U et V en U′ et V′ respectivement. Or on a

$$(\mathrm{U}', \mathrm{V}') = -\frac{a}{p'_3}, \qquad \big((\mathrm{U}', \mathrm{V}'), \mathrm{V}'\big) = 0;$$

il faudra donc que l'on ait aussi $\big((\mathrm{U}, \mathrm{V}), \mathrm{V}\big) = 0$, et le problème revient à celui-ci :

Posant $u = u\left(x_1, x_2, x_3, -\frac{p_1}{p_3}\right)$, $v = x_3$, *peut-on trouver deux fonctions* $\mathrm{U} = f(u, v)$, $\mathrm{V} = \varphi(u, v)$, *telles que l'on ait* $\big((\mathrm{U}, \mathrm{V}), \mathrm{V}\big) = 0$?

La condition est suffisante. En effet, supposons que l'on ait trouvé deux fonctions $f(u, v)$ et $\varphi(u, v)$ satisfaisant à cette condition. Comme on a $(\mathrm{V}, x_2) = 0$, on peut déterminer une transformation de contact homogène de telle façon que V se change en x'_1, x_2 restant égal à x'_2; U se change alors en une certaine fonction

$$\mathrm{U}' = \mathrm{F}\left(x'_1, x'_2, x'_3, \frac{p'_2}{p'_3}, \frac{p'_1}{p'_3}\right).$$

Comme on a $(\mathrm{U}, x_2) = 0$, on doit avoir aussi $(\mathrm{U}', x'_2) = 0$, c'est-à-dire $\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial p'_2} = 0$, et la fonction U′ ne contient pas p'_2. D'autre part, on a

$$(\mathrm{U}', x'_1) = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial p'_1}, \qquad \big((\mathrm{U}', x'_1), x'_1\big) = \frac{\partial^2 \mathrm{F}}{dp'^2_1},$$

et la condition $\big((\mathrm{U}, \mathrm{V}), \mathrm{V}\big) = 0$ nous donne $\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial p'^2_1} = 0$; la fonction U′ est donc une fonction linéaire de p'_1

$$U' = a\frac{p'_1}{p'_3} + b,$$

a et b ne dépendant que de x'_1, x'_2, x'_3. Si l'on revient aux variables primitives x, y, z, p, q, on en conclut qu'il existe une transformation de contact qui change le système des deux équations

$$d[u(x, y, z, p)] = 0, \qquad dx = 0,$$

en un système de deux équations

$$d(ap' + b) = 0, \qquad dx' = 0,$$

a et b étant des fonctions de x', y', z'. La condition énoncée est donc suffisante.

Pour reconnaître si l'on peut trouver deux fonctions $f(u, v)$, $\varphi(u, v)$ satisfaisant à cette condition, remarquons que l'on a

$$(U, V) = (f, \varphi) = (u, v)\Delta,$$

en posant, pour abréger,

$$\Delta = \frac{D(f, \varphi)}{D(u, v)};$$

on a ensuite

$$\begin{aligned}\big((U, V), V\big) &= \big(\Delta(u, v), \varphi(u, v)\big)\\ &= (u, v)^2\frac{D(\Delta, \varphi)}{D(u, v)} + \Delta\frac{\partial\varphi}{\partial u}\big((u, v), u\big) + \Delta\frac{\partial\varphi}{\partial v}\big((u, v), v\big).\end{aligned}$$

Comme f, φ, Δ ne dépendent que de u et de v, pour que la relation $\big((U, V), V\big) = 0$ soit vérifiée en prenant pour f et φ des fonctions choisies convenablement, *il faudra que l'on ait entre* $(u, v)^2$, $\big((u, v), u\big)$, $\big((u, v), v\big)$ *une relation de la forme suivante*

$$A(u, v)^2 + B\big((u, v), u\big) + C\big((u, v), v\big) = 0, \tag{58}$$

les coefficients A, B, C *ne dépendant que de u et de v.*

Inversement, lorsqu'il en est ainsi, on aura pour déterminer les fonctions f et φ les deux relations

$$\frac{\dfrac{D(\Delta, \varphi)}{D(u, v)}}{A} = \frac{\Delta\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}}{B} = \frac{\Delta\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}}{C}. \tag{59}$$

La fonction φ est déterminée par l'équation du premier ordre

$$C\frac{\partial\varphi}{\partial u} - B\frac{\partial\varphi}{\partial v} = 0;$$

si v_1 est une intégrale particulière, l'intégrale générale est $\varphi(v_1)$, φ étant une fonction arbitraire. On a ensuite, pour déterminer Δ l'équation suivante

$$\frac{\partial \log\Delta}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}-\frac{\partial \log\Delta}{\partial v}\frac{\partial\varphi}{\partial u}=\frac{A}{B}\frac{\partial\varphi}{\partial u}=\frac{A}{C}\frac{\partial\varphi}{\partial v},$$

qui peut s'écrire

$$C\frac{\partial \log\Delta}{\partial u}-B\frac{\partial \log\Delta}{\partial v}=A.$$

Si $\log\Delta_1$ est une intégrale particulière, l'intégrale générale est donnée par la formule

$$\log\Delta=\log\Delta_1+\log\psi(v_1),$$

ψ étant une nouvelle fonction arbitraire. On a enfin, pour déterminer f, l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}-\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial\varphi}{\partial u}=\Delta_1\psi(v_1)$$

ou

$$\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial v_1}{\partial v}-\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v_1}{\partial u}=\Delta_1\frac{\psi(v_1)}{\varphi'(v_1)}.$$

Si u_1 est une intégrale particulière de l'équation $\frac{D(u_1, v_1)}{D(u, v)}=\Delta_1$, l'intégrale générale de cette dernière équation est $f=u_1 f_1(v_1)+f_2(v_1)$. Toutes les solutions ainsi obtenues

$$\varphi=\varphi(v_1), \qquad f=u_1 f_1(v_1)+f_2(v_1),$$

où les trois fonctions φ, f_1, f_2 sont arbitraires, ne sont pas en réalité distinctes, car elles reviennent à remplacer, dans l'intégrale intermédiaire $ap+b=X$, x et $ap+b$ par $\varphi(x)$ et $f_1(x)(ap+b)+f_2(x)$ respectivement, ce qui ne donne qu'une seule équation du second ordre.

Remarque I. — Si une équation du second ordre admet l'intégrale intermédiaire

$$ap+b=X,$$

en prenant pour inconnue une fonction $\Theta(x, y, z)$ satisfaisant à l'unique condition $\frac{\partial\Theta}{\partial z}=a$, cette intégrale intermédiaire prendra la forme

$$p+b=X,$$

et l'équation du second ordre aura la forme simple

$$s+\frac{\partial b}{\partial z}q+\frac{\partial b}{\partial y}=0. \tag{60}$$

Telle est la forme canonique à laquelle on peut ramener une équation

$s = f(x, y, z, p, q)$ qui admet une intégrale intermédiaire du premier ordre, lorsque la condition exprimée par la formule (58) est satisfaite. Cette forme canonique n'est pas unique, car on peut y changer z en $z + F(x, y)$.

Remarque II. — Cherchons s'il peut exister deux relations *distinctes* de la forme (58), c'est-à-dire telles que les coefficients A, B, C ne soient pas proportionnels. S'il existe une première relation de cette forme, on peut s'en servir pour ramener l'intégrale intermédiaire à la forme canonique $p + b = X$. On a alors

$$u = b(x_1, x_2, x_3) - \frac{p_1}{p_3}, \qquad v = x_1,$$

$$(u, v) = -\frac{1}{p_3}, \qquad \big((u, v), v\big) = 0, \qquad \big((u, v), u\big) = \frac{1}{p_3^2}\frac{\partial b}{\partial x_3}.$$

Pour qu'il existe une relation de la forme (58), différente de $\big((u, v), v\big) = 0$, il faudra que $\dfrac{\big((u, v), u\big)}{(u, v)^2}$, c'est-à-dire $\dfrac{\partial b}{\partial x_3}$ se réduise à une fonction de x_1. On aura donc

$$b = \varphi(x_1)\, x_3 + \psi(x_1, x_2);$$

l'équation du second ordre correspondante $s + \varphi(x)q + \dfrac{\partial \psi}{\partial y} = 0$ peut être ramenée à la forme $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = 0$, en posant $z = \alpha u + \beta$.