ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

NICOLAS STOYANOFF

# Exposé de la méthode de M. C. Glasenapp pour la réduction des observations des éclipses des satellites de Jupiter

*Annales de la faculté des sciences de Toulouse 2e série*, tome 5, nº 2 (1903), p. 157-196

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1903_2_5_2_157_0>

# EXPOSÉ DE LA MÉTHODE DE M. C. GLASENAPP

## POUR LA RÉDUCTION DES OBSERVATIONS

## DES

# ÉCLIPSES DES SATELLITES DE JUPITER [1],

PAR M. NICOLAS STOYANOFF,

Professeur au Lycée de Sofia.

Dans la dernière année de mon séjour à Toulouse, comme étudiant à la Faculté des Sciences et assistant à l'Observatoire, M. H. Bourget, maître de conférences à la Faculté des Sciences et astronome à l'Observatoire, a bien voulu attirer mon attention sur la dissertation de M. Glasenapp intitulée *Comparaison des observations des éclipses des satellites de Jupiter entre elles et avec les Tables d'éclipses,* écrite en langue russe. Après avoir lu ce très intéressant Mémoire j'ai cru bien, avec l'autorisation bienveillante de M. Glasenapp, d'en écrire un exposé succinct en français, d'autant plus qu'il se rattache en partie au Mémoire de Bailly : *Sur les inégalités de la lumière des satellites de Jupiter, sur leurs diamètres, et sur un moyen de rendre les observations comparables.* (*Histoire de l'Académie des Sciences,* Paris, 1771.)

On sait qu'aujourd'hui encore il y a des astronomes qui préfèrent adopter la valeur de la constante d'aberration de Struve et d'autres celle de Delambre. La discordance entre ces valeurs et les tentatives sans succès de l'explication de cette discordance, ont été l'origine du travail de M. Glasenapp, qui a pour objet de vérifier les calculs de Delambre. Ce problème paraît d'autant plus intéressant que Delambre n'a publié aucun travail ni laissé aucun manuscrit, concernant la détermination de la vitesse de propagation de la lumière. Pour atteindre son but, l'auteur étudie, dans son Mémoire, principalement les causes qui peuvent modifier

(1) Le Mémoire de M. Glasenapp est un des plus importants qu'on ait écrits sur la réduction des observations des satellites de Jupiter. M. Downing en a donné autrefois une courte analyse dans le Tome XII (1889) du Recueil *The Observatory*. H. B.

l'éclat apparent du premier satellite de Jupiter et les circonstances que présente l'éclipse du satellite.

Le Mémoire, de 158 pages, est divisé en quatre Chapitres. Nous essayerons d'exposer ici le contenu essentiel de chacun de ces Chapitres.

Le premier Chapitre est consacré à l'étude des causes pouvant modifier l'éclat du premier satellite de Jupiter.

Dans le deuxième Chapitre, on détermine la grandeur du segment qui reste encore éclairé au moment de l'éclipse, dans des circonstances données.

Dans le troisième Chapitre, on examine l'influence sur la durée de l'immersion et de l'émersion du premier satellite due à l'inclinaison de l'orbite du satellite et à la position des nœuds de son orbite par rapport à l'orbite de Jupiter.

Enfin, dans le quatrième Chapitre, on applique les résultats obtenus dans les trois premiers Chapitres aux Problèmes suivants :

1° *Détermination de la vitesse de la lumière et vérification des Tables d'éclipses du premier satellite, construites par De Damoiseau.*

2° *Détermination de la longitude de Leyde au moyen des observations des éclipses du premier satellite, comparées aux Tables d'éclipses des satellites de De Damoiseau.*

3° *Recherche de la constance de la vitesse du mouvement de rotation de la Terre autour de son axe.*

# CHAPITRE I.

## MESURE DE LA QUANTITÉ DE LUMIÈRE IMPERCEPTIBLE.

Dans ce Chapitre, l'auteur tâche de déterminer, pour chacun des satellites de Jupiter et pour chaque éclipse, la quantité de lumière, réfléchie par le segment invisible (¹), en tenant compte de toutes les circonstances qui se présentent pendant l'observation.

En 1732, Grandjean de Fauchy (²) a fait remarquer aux astronomes que les inégalités subjectives du mouvement des satellites de Jupiter modifient les dimensions du segment invisible. De Fauchy a même montré qu'il était possible d'étu-

(¹) Bailly appelle *segment invisible* la portion du disque du satellite en dehors de l'ombre pure. Il paraît ignorer l'existence de la pénombre. H. B.

(²) *Hist. de l'Acad. d. Sc.*, Paris, 1732.

dier cette modification et de mesurer la quantité de lumière imperceptible, réfléchie par le segment éclairé au moment de l'éclipse apparente. De Fauchy n'a pu parvenir à confirmer son assertion en déterminant les dimensions du segment invisible et en étudiant les inégalités des mouvements des satellites de Jupiter. Ce n'est qu'en 1771 que Bailly (¹) est parvenu à faire les expériences, indiquées seulement par De Fauchy. Ces expériences sont basées sur la loi suivante :

*Les quantités de lumière reçues par l'œil dans deux lunettes sont en raison directe des carrés des diamètres des ouvertures des deux lunettes.*

La méthode de Bailly, que l'on peut nommer *la méthode des diaphragmes,* lui a permis de calculer la quantité S de lumière imperceptible, réfléchie par le segment éclairé au moment de l'éclipse apparente, en prenant pour unité la quantité de lumière, réfléchie par le disque entier du satellite pour la lunette d'ouverture $m$ (²), dont il a fait usage, et dans les conditions suivantes :

1° La distance zénithale de Jupiter étant égale à zéro;

2° Les distances de Jupiter au Soleil et à la Terre étant respectivement $a$ et $a - 1$, en désignant par $a$ le demi-grand axe de l'orbite de Jupiter, exprimé en prenant pour unité la distance moyenne de la Terre au Soleil.

Étant donnée la quantité S de lumière imperceptible du satellite dans les conditions ci-dessus (1° et 2°), l'auteur cherche comment varie S :

1° Quand au lieu d'observer avec une lunette d'ouverture $m$ on a observé avec une lunette d'ouverture $n$;

2° Quand la distance zénithale de Jupiter, au moment de l'observation, est $z$;

3° Et quand la distance de Jupiter au Soleil est $r$, et celle à la Terre $\Delta$.

En tenant compte des trois corrections dues aux trois conditions nouvelles, on aura, pour la quantité de lumière imperceptible, l'expression suivante :

$$(1) \qquad S\,\frac{m^2}{n^2}\,\varphi(z)\,\frac{r^2\Delta^2}{a^2(a-1)^2},$$

où S représente toujours la quantité de lumière imperceptible dans les conditions normales ($z = 0$, $a$, $a - 1$), mentionnées plus haut.

La Table de Seidel, annexée à la fin de cet exposé (Table III), donne les logarithmes des rapports de l'éclat de l'astre lorsqu'il se trouve au zénith à son éclat

(¹) *Sur les inégalités de la lumière des satellites de Jupiter, sur leurs diamètres et sur un moyen de rendre les observations comparables.* (*Hist. de l'Acad. d. Sciences*, Paris, 1771.)

(²) L'ouverture de la lunette de Bailly mesurait 24 lignes, ou bien $5^{cm},4$.

lorsqu'il est à une distance zénithale $z$ [1]. Les logarithmes de ces rapports [de la fonction $\varphi(z)$] sont donnés de degré en degré à partir de 13° jusqu'à 86°.

La valeur de l'expression (1) varie avec la phase du satellite. En effet, le satellite ne nous montre pas toujours toute sa moitié éclairée. Donc, l'expression (1) étant exacte dans le cas où l'on prend pour unité la quantité de lumière réfléchie par le disque entier, sera un peu modifiée dans le cas où nous ne verrons qu'une partie de la surface du satellite.

Si l'on désigne par $\alpha$ la valeur angulaire de la partie non éclairée du disque apparent du satellite, on pourra exprimer le rapport de la surface éclairée à la surface entière du disque par

$$(2) \qquad [1-\tfrac{1}{2}\alpha] : 1,$$

et il s'ensuit que, pour les différentes phases, l'expression (1) doit être multipliée par le facteur $\frac{1}{1-\frac{1}{2}\alpha}$. Donc, finalement, la quantité de lumière imperceptible sera donnée par l'expression

$$(3) \qquad S\frac{m^2}{n^2}\varphi(z)\frac{r^2\Delta^2}{a^2(a-1)^2}\frac{1}{1-\frac{1}{2}\alpha}.$$

La Table II, annexée à la fin de l'exposé, donne les valeurs de $\log\frac{1}{1-\frac{1}{2}\alpha}$ pour les différentes positions de Jupiter et de la Terre. Elle a pour argument l'angle $\chi$, ayant pour sommet le centre de Jupiter et pour côtés les droites qui joignent ce point au centre du Soleil et de la Terre. On a calculé les valeurs pour chaque degré, jusqu'à $\chi = 12°$. Pour le but que l'auteur poursuit, il suffit d'avoir la valeur approximative de cet angle, qui est égale à la valeur absolue de la différence entre la longitude héliocentrique et la longitude géocentrique de Jupiter.

Les causes suivantes peuvent également modifier la valeur de l'expression (3) :

*a*. La distance plus ou moins grande de la Lune; sa phase et sa distance zénithale;

*b*. L'état de l'atmosphère;

*c*. La vue de l'observateur;

*d*. Toutes les autres causes capables de modifier l'éclat apparent du satellite.

Or, jusqu'à l'apparition du Mémoire de M. Glasenapp, personne n'avait encore fait l'étude intéressante de l'influence de toutes ces causes d'erreurs, et, par conséquent, on n'en pouvait tenir compte.

L'auteur fait ensuite remarquer que les instruments employés peuvent avoir une

---

[1] SEIDEL, *Untersuchungen über die gegenseitige Heiligkeit der Fixsterne erster Grösse und über die Extinction des Lichtes, etc.*, Munchen, 1852.

influence considérable sur les observations des éclipses, et quand on compare les observations avec les Tables on ne peut se dispenser de tenir compte de cette influence. La conclusion est que les observations des éclipses, faites avec des réflecteurs, sont moins exactes que celles faites avec des réfracteurs.

L'éclat de Jupiter peut aussi faire varier la quantité S trouvée par Bailly; l'intensité apparente du satellite diminuant à mesure qu'il se rapproche du disque de Jupiter, et croissant au contraire lorsqu'il s'en éloigne. Pour étudier la loi de la variation de l'éclat des satellites avec leurs distances au centre de Jupiter, Bailly a fait des observations avec des diaphragmes pour diverses distances des satellites au centre de Jupiter à des époques différentes. Il a trouvé que la quantité S de lumière imperceptible, en fonction de la distance $\rho$ du satellite au centre de Jupiter, est donnée par la formule

$$S = A\frac{1}{\rho} + B\frac{1}{\rho^2}. \tag{4}$$

Bailly n'a déterminé les valeurs de ces constantes que pour les trois premiers satellites de Jupiter.

Voici les valeurs correspondantes de $S_1$, $S_2$, $S_3$ :

$$(5)\qquad \left\{\begin{array}{ll} ☾\ \text{I.} & S_1 = 0,0495\,\frac{1}{\rho} + 0,3397\,\frac{1}{\rho^2}, \\ ☾\ \text{II.} & S_2 = 0,3933\,\frac{1}{\rho} + 0,0375\,\frac{1}{\rho^2}, \\ ☾\ \text{III.} & S_3 = 0,2157\,\frac{1}{\rho} + 0,0756\,\frac{1}{\rho^2}. \end{array}\right.$$

Les valeurs des constantes A et B se rapportent à la lunette de Bailly, mesurant 24 lignes d'ouverture et grossissant à peu près 60 fois pour une hauteur de Jupiter égale à 15°, et pour la distance 5,2207 au Soleil et 4,8456 à la Terre.

De Lalande [1] est parvenu à déterminer la valeur des constantes A et B pour le quatrième satellite. Pour sa lunette de $40\frac{1}{2}$ [2] lignes d'ouverture, il a trouvé pour $S_4$ la formule

$$(6)\qquad ☾\ \text{IV.}\quad S_4 = 0,0351\,\frac{1}{\rho} + 0,01796\,\frac{1}{\rho^2}.$$

Une autre méthode pour déterminer la loi de la variation de l'éclat des satellites avec leurs distances au centre de Jupiter, due à De Barros, est exposée dans son Mémoire : *Nouvelles équations pour le perfectionnement de la théorie*

---

[1] *Hist. de l'Acad. d. Sc.*, Paris, MDCCLXXXVIII, p. 212.

[2] $9^{\text{cm}},1$.

*des satellites de Jupiter et pour la correction des longitudes terrestres déterminées par les observations des mêmes satellites* (*Histoire de l'Académie royale des Sciences et Belles Lettres de Berlin,* pour l'année 1755). Pour mesurer l'éclat apparent des satellites, De Barros se servait de lames de verre à faces parallèles d'épaisseurs différentes, dont le pouvoir absorbant avait été préalablement déterminé. En comparant les épaisseurs des lames de verre qui produisent les éclipses artificielles du satellite avant les époques de deux éclipses effectives on trouve directement le rapport entre les éclats du satellite au moment des éclipses, le rapport entre les quantités de lumière imperceptible et entre les segments invisibles.

Mais, en diminuant l'éclat du satellite jusqu'à disparition complète, comme cela se fait dans les méthodes de Bailly et de De Barros, on diminue en même temps l'éclat de Jupiter, et quand un diaphragme ou une certaine épaisseur de verre a fait disparaître le satellite, l'éclat apparent de Jupiter est tellement diminué qu'il n'a presque aucune influence sur l'éclat du satellite. D'où l'auteur conclut qu'aucune de ces deux méthodes n'atteint le but qu'il poursuit, à savoir : *Établir la loi de la diminution de l'éclat apparent du satellite avec la diminution de sa distance au centre de Jupiter*. Tout au moins, la solution qu'elles donnent est très peu satisfaisante. Par suite les expressions (5) et (6) données par Bailly et De Lalande ne peuvent, rigoureusement parlant, servir pour comparer les observations des éclipses des satellites de Jupiter, ni entre elles ni avec les Tables d'éclipses.

L'auteur remarque, en outre, que ces deux méthodes ne donnent aucun moyen de déterminer l'influence de la variation de l'éclat de Jupiter sur l'éclat apparent des satellites et il expose sa propre méthode héliométrique, laquelle, d'après lui, donne un moyen excellent pour déterminer la loi de la variation de l'éclat des satellites en fonction de leurs distances au centre de Jupiter. En voici le principe.

On sait que l'objectif de l'héliomètre est composé de deux moitiés mobiles. En faisant mouvoir les deux parties de l'objectif on peut changer la position relative des deux astres; on peut rapprocher à volonté le satellite du disque de Jupiter. Remarquons en plus que chaque moitié de l'objectif donne une image de Jupiter et de son satellite.

Désignons l'une des moitiés de l'objectif et l'image qu'elle donne par l'indice I et l'autre moitié et son image par l'indice II. En prenant des diaphragmes de diverses dimensions (comme ceux dont s'est servi Bailly) et en ne diaphragmant que l'objectif I on peut diminuer à volonté l'éclat du satellite dans l'image I sans modifier l'éclat de Jupiter et de son satellite dans l'image II. En diminuant successivement l'ouverture de l'objectif I on arrive à faire disparaître l'image du satellite dans l'image correspondante. Des expériences semblables pour différentes distances du satellite au centre de Jupiter donneront la loi de la variation de l'éclat apparent et permettront de déterminer les valeurs des coefficients A, B, C dans la formule

$$S = A + B\frac{1}{\rho} + C\frac{1}{\rho^2}, \tag{7}$$

qui, d'après M. Glasenapp, doit remplacer la formule (4), donnée par Bailly.

Un climat défavorable et surtout l'hiver de l'Europe septentrionale n'ayant pas permis à l'auteur de commencer ses observations héliométriques, il se sert des observations de Bailly et de De Lalande pour déterminer les valeurs des constantes A, B, C pour les quatre satellites. Bailly avait déterminé les coefficients A et B en employant seulement deux observations, bien qu'il en ait fait plusieurs pour chaque satellite; M. Glasenapp a profité de toutes les observations faites, pour trouver les valeurs les plus probables des coefficients A, B, C; Bailly avait réduit les observations à l'époque à laquelle Jupiter est éloigné du Soleil de 5,2207, et de la Terre de 4,8456, et situé à la distance zénithale de 75°; M. Glasenapp a réduit les observations à l'époque où Jupiter est aux distances moyennes du Soleil et de la Terre : $a$ et $a - 1$, et lorsqu'il se trouve au zénith.

On obtient ainsi les formules suivantes :

$$(8) \qquad ☾\ \text{I.} \qquad S_1 = \phantom{-}0{,}0204 - 0{,}0108\frac{1}{\rho} + 0{,}1437\frac{1}{\rho^2},$$

$$(9) \qquad ☾\ \text{II.} \qquad S_2 = -0{,}0012 + 0{,}1789\frac{1}{\rho} - 0{,}0450\frac{1}{\rho^2},$$

$$(10) \qquad ☾\ \text{III.} \qquad S_3 = -0{,}0027 + 0{,}1034\frac{1}{\rho} + 0{,}0097\frac{1}{\rho^2},$$

$$(11) \qquad ☾\ \text{IV.} \qquad S_4 = \phantom{-}0{,}0012 + 0{,}650\frac{1}{\rho} + 0{,}0513\frac{1}{\rho^2}.$$

Si l'on connaît, en outre, la loi de distribution de la lumière sur le segment invisible, les dimensions du satellite, celles de l'ombre et de la pénombre de Jupiter, on en peut déduire, à l'aide de la valeur de la quantité S, la grandeur du segment invisible et, par conséquent, la position du satellite par rapport à la surface du cône d'ombre de Jupiter.

Après la discussion des valeurs des coefficients A, B, C et après avoir trouvé leurs erreurs probables respectives, l'auteur termine ce Chapitre en observant que l'on ne doit pas regarder comme définitifs les résultats ci-dessus, parce que les expériences de Bailly et de De Lalande, qui ont servi à déterminer les coefficients de la fonction S, ne peuvent nous donner la vraie loi de la variation de l'éclat des satellites de Jupiter.

# CHAPITRE II.

*Étant donnée la quantité de lumière réfléchie par le segment invisible du satellite, déterminer la grandeur de ce segment.*

La solution de ce problème, dit l'auteur, serait tout à fait simple si l'on pouvait admettre avec Bailly qu'il y a une surface de séparation bien déterminée entre l'ombre de Jupiter et l'espace éclairé par le Soleil; c'est-à-dire si l'on pouvait considérer le Soleil comme un point lumineux d'intensité égale à l'éclat du Soleil; autrement dit, si l'on néglige la pénombre. Dans cette hypothèse la quantité de lumière, réfléchie par le segment invisible, exprimerait en même temps le rapport entre la surface du segment invisible et celle du disque entier du satellite. La surface J du segment invisible serait donnée par l'équation

$$(1)\qquad J = \left(\frac{2\varphi}{360^\circ} - \frac{1}{2\pi}\sin 2\varphi\right) - \frac{R^2}{\Upsilon^2}\left(\frac{2\psi}{360^\circ} - \frac{1}{2\pi}\sin 2\psi\right),$$

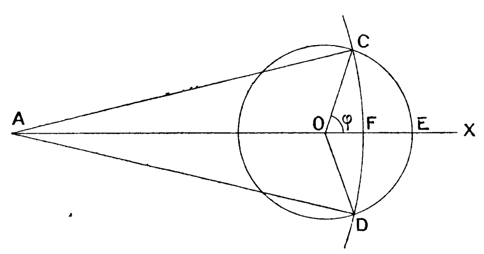
où $\varphi$ désigne l'angle COE (*fig.* 1), déterminé par la relation

$$(2)\qquad \sin\psi = \frac{\Upsilon}{R}\sin\varphi;$$

$\Upsilon$ et R sont les rayons respectifs du disque du satellite et celui du disque de Jupiter.

Mais l'hypothèse faite par Bailly, étant loin d'être vraie, n'est pas admissible,

Fig. 1.




et voici le procédé de M. Glasenapp pour trouver la quantité S de lumière imperceptible, réfléchie par le segment invisible.

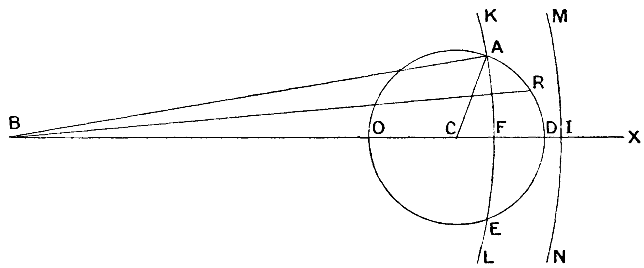
Soient :

ADEO (*fig.* 2), le disque apparent d'un des satellites de Jupiter;
$AC = \Upsilon = 1$, son rayon;
$AB = P$, le rayon de l'ombre;
$BI = P_1$, le rayon de la pénombre;
$FI = q$, la largeur de la pénombre, comptée le long du rayon BJ.

AB, BI, FI sont exprimés en prenant le rayon du satellite pour unité.

L'intensité de la lumière dans la pénombre n'est pas partout la même : à la limite KL de l'ombre il y a une absence complète de lumière; à la limite MN de

Fig. 2.




la pénombre l'intensité de la lumière est la plus grande : c'est cette intensité que l'auteur prend pour unité. Elle croît de KL à MN.

Soit $F(\Delta)$ l'intensité lumineuse d'un point quelconque, situé dans la pénombre à une distance $\Delta$ de la circonférence de l'ombre, comptée le long de la normale à la circonférence de l'ombre.

Pour $\Delta = 0$, la fonction $F(\Delta)$ devient égale à zéro; pour $\Delta = q$, elle devient égale à l'unité; pour toutes les autres valeurs de $\Delta$ comprises entre zéro et $q$ on a $0 < F(\Delta) < 1$.

$\Delta$ ne peut être ni négatif, ni plus grand que $q$.

Soient, en coordonnées polaires,

$$u = P, \tag{3}$$

l'équation du cercle d'ombre, qui a pour centre B;

$$u = P_1, \tag{4}$$

l'équation de la pénombre;

$$(u\cos\Theta - b)^2 + u^2\sin^2\Theta = \Upsilon^2, \tag{5}$$

l'équation du disque du satellite.

L'angle $\Theta$ est compté à partir de l'axe fixe BOX vers le rayon vecteur $u = BR$ dans le sens inverse du mouvement des aiguilles d'une montre; $b = BC$ est la distance du centre du cercle d'ombre au centre du satellite.

En supposant que la fonction $F(\Delta)$ exprime la loi de distribution de l'intensité lumineuse dans la pénombre, prenant pour unité l'aire du disque du satellite, et en prenant pour unité la quantité de lumière, réfléchie par le disque, la quantité de lumière S du segment ADEF aura pour valeur

$$S = \frac{2}{\pi} \int_{\Theta=0}^{\Theta=\Phi(0)} \int_{u=P}^{u=P+\Delta} F(\Delta)\, u\, d\Theta. \tag{6}$$

Introduisant dans cette formule, à la place de $u$, une nouvelle variable $\Delta$, qui satisfait aux conditions

$$\left\{ \begin{aligned} u &= P + \Delta, \\ du &= d\Delta, \end{aligned} \right. \tag{7}$$

on aura

$$S = \int_{\Theta=0}^{\Theta=\Phi(\Delta)} \int_{\Delta=0}^{\Delta=\Delta} F(\Delta) \left(1 + \frac{\Delta}{P}\right) d\Delta\, d\Theta, \tag{8}$$

où la limite supérieure de $\Theta$, $\Theta = \Phi(\Delta)$, est donnée par l'équation du disque du satellite (5)

$$\Theta = \Phi(\Delta) = \arccos\left[\frac{(P+\Delta)^2 + b^2 - 1}{2b(P+\Delta)}\right]. \tag{9}$$

Parfois l'éclipse a lieu lorsqu'une partie du disque du satellite se trouve en dehors de la pénombre et une autre dans la pénombre. La figure 3 nous représente un tel cas.

Voici comment on trouvera, dans ce cas, la quantité de lumière réfléchie par le segment IAMLDF :

*a.* La quantité de lumière, réfléchie par la surface AMLG, lorsque son intensité de lumière est égale à 1, sera

$$A = \left(\frac{2\varphi_1}{360} - \frac{1}{\pi}\sin 2\varphi_1\right) - P_1^2\left(\frac{2\Theta_1}{360} - \frac{1}{2\pi}\sin 2\Theta_1\right), \tag{10}$$

où $\varphi_1 = \widehat{ACM}$, $\Theta = \widehat{ABM}$.

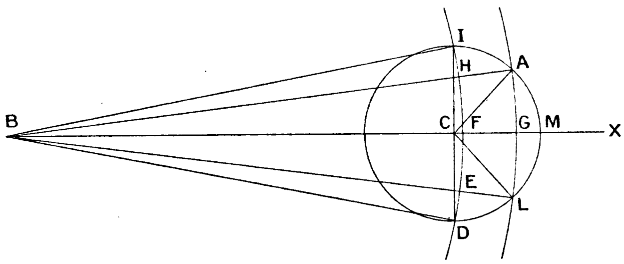
*b.* La quantité de lumière, réfléchie par la surface AGLEFH, en supposant que la distribution de l'intensité de lumière dans la pénombre soit exprimée par la fonction $F(\Delta)$, sera

$$B = \frac{2P}{\pi} \int_0^{\Theta_1} \int_0^{q} F(\Delta) \left(1 + \frac{\Delta}{P}\right) d\Delta\, d\Theta; \tag{11}$$

*c*. Enfin, la quantité de lumière, réfléchie par les deux surfaces IAH et ELD, sera

$$(12)\qquad C = \frac{2P}{\pi}\int_{\Theta=\Theta_1}^{\Theta=\Phi_0(\Delta)}\int_{\Delta=0}^{\Delta=q} F(\Delta)\left(1+\frac{\Delta}{P}\right)d\Delta\, d\Theta,$$

Fig. 3.




où la limite supérieure de $\Theta$, $\Theta = \Phi(\Delta)$ est donnée par l'équation (5) :

$$(13)\qquad \Theta = \Phi_0(\Delta) = \arccos\left[\frac{(P+\Delta)^2 + b^2 - 1}{2b(\rho+\Delta)}\right].$$

Donc la quantité de lumière, réfléchie par le segment entier, sera donnée par la somme de (10), (11) et (12)

$$(14)\qquad S = A + B + C.$$

Lorsque $\Theta_1 > \Theta_0$, il est plus commode, pour les calculs numériques, de faire un changement de limites de la façon suivante : remplaçons dans l'intégrale B (11) la limite $\Theta_1$ par la limite $\Theta_0$, on aura

$$(15)\qquad B_1 = \frac{2P}{\pi}\int_{\Theta}^{\Theta_0}\int_{0}^{q} F(\Delta)\left(1+\frac{\Delta}{P}\right)d\Delta\, d\Theta;$$

faisons dans l'intégrale C (12) les changements correspondants, à savoir : mettons $\Theta_1$ à la place de $\Theta_0$ et remplaçons $\Delta$ par $q = \Delta'$, de sorte que

$$(16)\qquad \begin{cases} F_1(\Delta') = F(q-\Delta'), \\ u = P - \Delta', \end{cases}$$

elle devient

$$(17)\qquad C_1 = \frac{2P_1}{\pi}\int_{\Theta_0}^{\Theta=\Phi_1(\Delta')}\int_{\Delta=0}^{\Delta=q} F_1(\Delta')\left(1-\frac{\Delta'}{P_0}\right)d\Delta' d\Theta,$$

dont la limite supérieure $\Theta$ est donnée par l'équation

$$\Theta = \Phi(\Delta') = \text{arc cos}\left[\frac{(P_1 - \Delta')^2 + b^2 - 1)}{2b(P_1 - \Delta')}\right], \tag{18}$$

et la quantité de lumière, réfléchie par le segment entier, sera donnée par l'expression

$$S = A + B_1 + C_1. \tag{19}$$

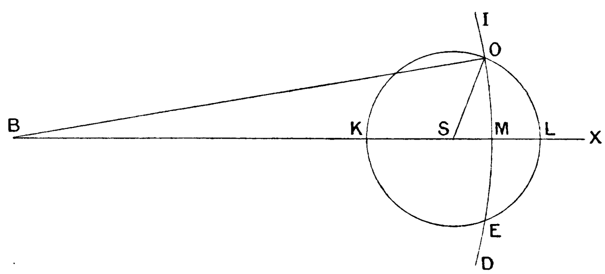
Il y a encore un cas qui peut se présenter lorsqu'on observe une éclipse : c'est le cas où le satellite tout entier est en dehors de l'ombre pure. Les observations de telles éclipses étant très incertaines, l'auteur ne s'occupe pas de ce cas. Il passe à la recherche de la loi de distribution de l'intensité de la lumière dans la pénombre comme il suit :

En admettant que l'intensité de la lumière en un point quelconque de la pénombre soit en raison directe de l'aire de la portion du Soleil visible de ce point, l'intensité de la lumière en un point de la pénombre situé à une distance $\Delta$ de la circonférence de l'ombre sera donnée par l'expression

$$J = \left(\frac{2\omega}{360} - \frac{1}{2\pi}\sin 2\omega\right) - \frac{R^2}{r^2}\left(\frac{2\psi}{360} - \frac{1}{2\pi}\sin 2\psi\right), \tag{20}$$

où (*fig.* 4) $\omega = \widehat{OSL}$ ; $\psi = \widehat{OBL}$ ; $R = BN$ étant le rayon apparent du disque de

Fig. 4.




Jupiter, visible du point considéré; et $r = QS$ le rayon apparent du Soleil visible du même point.

On a encore les relations suivantes entre les angles $\omega$, $\psi$ et $\Delta$ :

$$\sin\psi = \frac{r}{R}\sin\omega, \tag{21}$$

$$ML = \Delta = r(1 - \cos\omega) - R(1 - \cos\psi). \tag{22}$$

Au moyen des équations (21) et (22) on peut exprimer les angles $\omega$ et $\psi$ en fonction de $\Delta$. On arrive aux relations suivantes :

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned} \omega \sin 1'' &= A\,\Delta^{\frac{1}{2}} + B\,\Delta^{\frac{3}{2}} + C\,\Delta^{\frac{5}{2}} + \ldots, \\ \sin 2\omega &= A_1\Delta^{\frac{1}{2}} + B_1\Delta^{\frac{3}{2}} + C_1\Delta^{\frac{5}{2}} + \ldots, \\ \psi \sin 1'' &= \frac{r}{R}\Delta^{\frac{1}{2}}(1 + \alpha'\Delta + \beta'\Delta^2 + \gamma'\Delta^3 + \ldots), \\ \sin 2\psi &= A_2\Delta^{\frac{1}{2}} + B_2\Delta^{\frac{3}{2}} + C_2\Delta^{\frac{5}{2}} + \ldots, \end{aligned}\right.$$

où $A, B, C, \ldots;\ A_1, B_1, C_1, \ldots;\ \alpha', \beta', \gamma', \ldots;\ A_2, B_2, C_2, \ldots$ sont des coefficients constants pour chaque satellite, que l'on trouvera par des quadratures mécaniques.

En substituant ces valeurs dans l'équation (20) on exprime l'intensité J en fonction de $\Delta$. On a

$$(24)\qquad J = F(\Delta) = a\Delta^{\frac{3}{2}} + b\Delta^{\frac{5}{2}} + c\Delta^{\frac{7}{2}} + d\Delta^{\frac{9}{2}} + \ldots,$$

où $a, b, c, d, \ldots$ sont des constantes pour chaque satellite.

Voici les valeurs de la fonction $F(\Delta) = J$, pour les quatre satellites de Jupiter :

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned} J_1 &= F'(\Delta) = [0,4217]\Delta^{\frac{3}{2}} + [0,0334_n]\Delta^{\frac{5}{2}} + [\bar{1},3968_n]\Delta^{\frac{7}{2}} + [\bar{1},1471_n]\Delta^{\frac{9}{2}} + [\bar{1},0548_n]\Delta^{\frac{11}{2}} + \ldots, \\ J_2 &= F''(\Delta) = [0,0023]\Delta^{\frac{3}{2}} + [\bar{1},3373_n]\Delta^{\frac{5}{2}} + [\bar{2},4617_n]\Delta^{\frac{7}{2}} + [\bar{3},8809_n]\Delta^{\frac{9}{2}} + [\bar{3},4691_n]\Delta^{\frac{11}{2}} + \ldots, \\ J_3 &= F'''(\Delta) = [0,0692]\Delta^{\frac{3}{2}} + [\bar{1},4655_n]\Delta^{\frac{5}{2}} + [\bar{2},5415_n]\Delta^{\frac{7}{2}} + [\bar{2},0323_n]\Delta^{\frac{9}{2}} + [\bar{3},6412_n]\Delta^{\frac{11}{2}} + \ldots, \\ J_4 &= F^{\text{IV}}(\Delta) = [\bar{1},4659]\Delta^{\frac{3}{2}} + [\bar{2},4599_n]\Delta^{\frac{5}{2}} + [\bar{3},0832_n]\Delta^{\frac{7}{2}} + [\bar{4},2152_n]\Delta^{\frac{9}{2}} + [\bar{5},4054_n]\Delta^{\frac{11}{2}} + \ldots, \end{aligned}\right.$$

où $\Delta$ doit être exprimée en partie du rayon du satellite correspondant ; les coefficients étant donnés par leurs logarithmes.

Ayant trouvé la forme des fonctions $J_1$, $J_2$, $J_3$, $J_4$, M. Glasenapp résout le problème proposé comme il suit :

Pour les différentes positions du satellite par rapport à l'ombre de Jupiter, c'est-à-dire pour les différentes valeurs de $\Delta$, il calcule par les formules (14) et (19) la quantité S de lumière réfléchie par le segment. De cette façon il peut construire une Table qui donne les valeurs de S pour un argument donné $\Delta$. A l'aide de cette Table il en construit une autre ayant pour argument S.

Nous reproduisons à la fin de cet exposé les Tables de M. Glasenapp. Dans la première colonne (Table IV) se trouve l'argument S ; dans les autres colonnes, les valeurs correspondantes de $\Delta$.

A la fin de ce Chapitre l'auteur fait remarquer que les valeurs des intégrales (14) et (19) ne correspondent pas toujours aux vraies valeurs de $\Delta$, car elles ne sont exactes que dans le cas où le disque entier du satellite est éclairé : circonstance qui n'a pas toujours lieu. En effet, la phase du satellite faisant varier la grandeur du segment éclairé, elle peut faire changer la position de $\Delta$ sur le satellite et la valeur correspondante de S. Mais il prouve que les variations de $\Delta$ dues à la phase sont insignifiantes et que, par suite, on peut les négliger. Il remarque encore que la phase du satellite ne change presque pas la valeur de $\Delta$, mais elle déplace $\Delta$ sur le disque d'une distance $\alpha$, de sorte que le point extrême du segment invisible se déplace vers le centre apparent du disque du satellite.

En admettant que le déplacement de $\Delta$ s'effectue de la périphérie du disque vers le centre en suivant le rayon du disque, pour avoir la valeur de $\Delta$, qui est nécessaire pour trouver le moment de l'éclipse du centre du satellite (le moment de *l'éclipse centrale*), il faut ajouter la valeur $\alpha$ à la valeur de $\Delta$, calculée au moyen de la Table II.

L'auteur donne à la fin de son Livre la valeur de $\alpha$ pour les différentes phases des satellites.

Cette Table (II), annexée à la fin de notre travail, a pour argument la différence entre les longitudes héliocentriques et géocentriques de Jupiter.

# CHAPITRE III.

## DÉTERMINATION DE LA CORRECTION DE L'ÉCLIPSE OBSERVÉE, DÉPENDANT DE LA POSITION DU NŒUD DE L'ORBITE DU SATELLITE PAR RAPPORT A L'AXE DU CONE D'OMBRE DE JUPITER.

Pour faire mieux ressortir les deux méthodes que l'auteur emploie, pour résoudre le problème ci-dessus, nous traduisons textuellement ce Chapitre, en ne faisant seulement que de très légères omissions. Ces deux méthodes diffèrent l'une de l'autre : la première est directe, et la seconde indirecte et plus appropriée au calcul numérique.

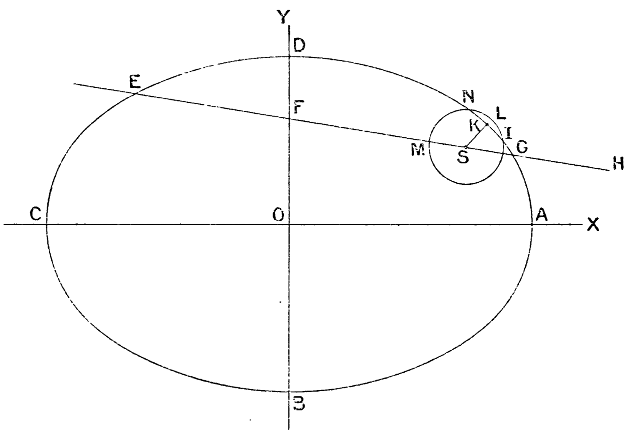
« Si le satellite en entrant dans le cône d'ombre de Jupiter suivait une direction normale à la projection de l'ombre, il suffirait, pour trouver la correction que l'on doit ajouter au moment observé pour obtenir le moment de l'éclipse centrale du satellite, d'employer la Table IV. Mais comme le plan de l'orbite du satellite ne coïncide pas avec le plan de l'orbite de Jupiter (nous parlons de ce qui se passe dans la projection) le satellite ne peut entrer normalement dans le cône d'ombre que dans des cas exceptionnels où la longitude jovicentrique du nœud ascendant ou du nœud descendant de l'orbite de Jupiter est à peu près égale à la longitude héliocentrique de Jupiter. Dans tous les autres cas on doit ajouter à la correction, tirée de la Table IV, une autre correction dépendant de l'inclinaison et des positions des nœuds de l'orbite du satellite par rapport à l'orbite de Jupiter.

» Ainsi il nous faudra résoudre le problème suivant :

» *Étant donnée la grandeur du segment invisible, trouver la correction, exprimée en temps, que l'on doit ajouter au moment observé de l'éclipse du satellite de Jupiter, pour avoir le moment de l'éclipse du centre du satellite* (*moment de l'éclipse centrale*).

» Menons un plan normal à l'axe du cône d'ombre à une distance du centre de Jupiter égale à la moyenne distance du satellite au centre de la planète, on aura comme section l'ellipse ABCD (*fig.* 5) de demi-axes : $OA = a$, $OD = b$ [1].

Fig. 5.




L'équation de cette ellipse rapportée aux axes OX, OY, coïncidant avec les axes de l'ellipse, sera

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

» Soit EH la trajectoire supposée rectiligne du centre du satellite dans le cône d'ombre ; elle aura pour équation

$$(2) \qquad Y = pX + q.$$

» Le cercle MNL représente le satellite au moment de l'éclipse observée, son

---

(1) LAPLACE, *Traité de Mécanique céleste*, p. 114.

centre est en S. La droite SK est normale à l'ellipse, et l'on détermine sa longueur d'après ce qui a été dit dans le Chapitre précédent.

» On peut maintenant énoncer le problème posé ci-dessus sous la forme suivante :

» *Étant données la longueur de la droite* SK, *normale à l'ellipse et l'équation de la trajectoire du centre du satellite et par conséquent les coordonnées du point* G($\alpha$, $\beta$), *déterminer la grandeur de la droite* SG *et l'exprimer en unités de temps.*

» Soient :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{1'}$$

$$Y = pX + q, \tag{2'}$$

les équations de l'ellipse d'ombre et de la droite EH.

» Posons

$$SK = k, \qquad SG = u;$$

supposons ensuite que

$x$ et $y$ soient les coordonnées du point K,
X et Y » » S;

on aura

$$SK^2 = k^2 = (X - x)^2 + (Y - y)^2 + \ldots, \tag{3}$$

$$SG^2 = u^2 = (X - \alpha)^2 + (Y - \beta)^2 + \ldots. \tag{4}$$

» L'équation de la normale au point K$(x, y)$ de l'ellipse passant par le point S (X, Y) sera

$$Y - y = \frac{a^2 y}{b^2 x}(X - x). \tag{5}$$

» Au moyen des quatre équations (1)', (2)', (3), (5) on peut déterminer les quatre coordonnées $x$, $y$, X, Y, et cela fait, en se servant de l'équation (4), trouver $u$.

» Cette solution directe offre beaucoup de difficultés pour le calcul numérique et la construction des Tables.

» Voilà pourquoi, pour construire les Tables V et VI, j'ai fait usage d'une autre méthode que je vais exposer ici.

» Des équations données

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

$$Y = pX + q,$$

j'ai tiré les coordonnées $\alpha$ et $\beta$ du point G; puis, les coordonnées $x$ et $y$ du point $k$ étant données, j'ai calculé les différences $X - x$ et $Y - y$ par les formules

$$(6) \qquad X - \alpha = \frac{px + q - y}{\frac{a^2 y}{b^2 x} - p},$$

$$(7) \qquad Y - y = \frac{px + q - y}{\frac{a^2 y}{b^2 x} - p} \frac{a^2 y}{b^2 x},$$

d'où l'on tire

$$(8) \qquad k = \pm\sqrt{(X - x)^2 - (Y - y)^2}.$$

» Ensuite j'ai déterminé les coordonnées X et Y par les équations (6) et (7), et j'ai fait les différences :

$$(9) \qquad X - \alpha = x - \alpha + \frac{px + q - y}{\frac{a^2 y}{b^2 x} - p},$$

$$(10) \qquad Y - \beta = y - \beta + \frac{px + q - y}{\frac{a^2 y}{b^2 x} - p} \frac{a^2 y}{b^2 x}.$$

» Enfin, j'ai calculé la valeur de $u$ par la formule

$$(11) \qquad u = \pm\sqrt{(X - \alpha)^2 + (Y - \beta)^2}.$$

» Pour l'immersion, $k$ et $u$ sont positifs sitôt que le centre du satellite est en dehors du cône d'ombre; ils deviennent négatifs, au contraire, dès que le centre du satellite se trouve dans le cône d'ombre. Dans le premier cas, on doit ajouter la valeur de $u$ au moment observé; dans le second cas, l'en retrancher. Pour l'émersion, c'est le contraire.

» En suivant cette méthode, j'ai calculé les valeurs de $k$ et de $u$ pour les positions des nœuds ascendants des satellites, situés à 0°, 10°, ..., 90° de l'axe du cône d'ombre de Jupiter et j'ai construit la Table qui a pour arguments C et $k$; où C est la différence entre les longitudes jovicentriques du Soleil et des nœuds ascendants des orbites des satellites, comptée sur l'orbite de Jupiter. Les Tables IV nous donnent la valeur de $k$.

» Prenons quelques exemples pour expliquer l'application des Tables aux réductions des immersions et des émersions observées du premier satellite au moment de l'éclipse centrale du satellite.

## Exemple I.

Le 21 novembre 1871, on a observé à Poulkovo l'immersion du premier satellite. Chaque observateur se servait d'un instrument différent :

| Observateurs. | Instruments. | Diamètre de l'objectif. | | |
|---|---|---|---|---|
| 1. Block...... | Bader. | 106 mm | 14h 25m 55s,1 | t. m. de Poulkovo |
| 2. Glasenapp.. | Merz I. | 97 | 14.25.53,6 | » |
| 3. Bonnsdorf.. | Merz III. | 97 | 14.25.51,9 | » |
| 4. Kuhlberg... | Salleron. | 85 | 14.25.44,0 | » |
| 5. Schwartz... | Plössl. | 56 | 14.25.34,7 | » |

Calculons d'abord, au moyen du *Berliner Jahrbuch,* la distance du satellite au centre de Jupiter; pour cette éclipse, elle est égale à 1,867 en parties du diamètre équatorial de Jupiter. La Table I nous donne le logarithme du segment correspondant $\overline{2},7468$. Cela fait, on doit :

1° Réduire ce segment à la distance moyenne de Jupiter au Soleil et à la Terre; le calcul donne :

$$\log \frac{r^2 \Delta^2}{a^2 (a-1)^2} = 0{,}0934\,;$$

2° Trouver la correction due à la phase; l'angle $\chi$, la différence des longitudes héliocentrique et géocentrique de Jupiter sera, dans le cas actuel, $9^\circ,5$; la correction correspondant à cet angle se trouve dans la Table II; elle est égale à

$$\log \frac{1}{1-\frac{1}{2}\alpha} = 0{,}0030\,;$$

3° Réduire le segment au cas où la distance zénithale de Jupiter serait égale à zéro; dans le cas actuel et au moment de l'immersion, Jupiter avait une distance zénithale de $43^\circ,1$; à cet angle correspond

$$\log \varphi(z) = 0{,}0233.$$

En multipliant le segment $\overline{2},7468$, trouvé plus haut, par les nombres trouvés aux n$^{os}$ 1°, 2°, 3°, on aura la grandeur $S_0$ du segment invisible, correspondant aux circonstances de l'immersion observée :

*Logarithme du segment normal.*

| | |
|---|---|
| Pour la lunette de Bailly ................ | $\bar{2},7468$ |
| $\log \dfrac{r^2\Delta^2}{a^2(a-1)^2}$ .......................... | $0,0934$ |
| $\log \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}\alpha}$ .............................. | $0,0030$ |
| $\log\varphi(z)$ ............................... | $0,0233$ |
| $\log S_0$ ................................. | $\bar{2},8665$ |

Le segment ainsi réduit varie pour chaque lunette dans le rapport $\frac{m^2}{n^2}$, où $m$ désigne l'ouverture de la lunette de Bailly, à laquelle correspond le segment trouvé $S_0$, et $n$ l'ouverture de la lunette, au moyen de laquelle on a fait l'observation. Pour les lunettes en question, $\log\frac{m^2}{n^2}$ a les valeurs correspondantes que voici :

| 1. Bader. | 2. Merz I. | 3. Merz III. | 4. Salleron. | 5. Plössl. |
|---|---|---|---|---|
| $\bar{1},4166$ | $\bar{1},4970$ | $\bar{1},4970$ | $\bar{1},6065$ | $\bar{1},9717$ |

En ajoutant ces logarithmes à la valeur de $S_0 = [\bar{2},8665]$, nous aurons les valeurs des segments, correspondant à chaque lunette au moment de l'éclipse :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| logS......... | $\bar{2},2831$ | $\bar{2},3635$ | $\bar{2},3635$ | $\bar{2},4730$ | $\bar{2},8382$ |
| S......... | 0,0192 | 0,0231 | 0,0231 | 0,0297 | 0,0689 |

La Table IV donne ensuite les valeurs suivantes de $k_0$ :

$$-73^s,7 \qquad -71^s,8 \qquad -71^s,8 \qquad -68^s,7 \qquad -56^s,2$$

qui doivent être corrigées de l'influence de la phase du satellite. La correction que l'on doit y apporter se trouve dans la deuxième colonne de la Table II, ayant pour argument l'angle $\chi$. Cette correction est $\alpha = 1^s,6$ et, par conséquent, les $k_0$ corrigés ou les $k$ prendront les valeurs suivantes :

$$-72^s,1 \qquad -70^s,2 \qquad -70^s,2 \qquad -67^s,1 \qquad -54^s,6$$

Pour trouver les valeurs définitives des $u$, il faut connaître la position du nœud par rapport à l'axe du cône d'ombre de Jupiter au moment de l'immersion.

La Table V, qui a pour arguments l'angle C et $k$, nous donne les valeurs des $u$. Dans le cas actuel, $C = 155^\circ$, et les $u$ cherchés seront

$$-74^s,8 \qquad -72^s,9 \qquad -72^s,9 \qquad -69^s,6 \qquad -56^s,7$$

En ajoutant ces valeurs aux moments observés, nous aurons les résultats suivants pour l'époque de l'éclipse centrale du premier satellite, observée en 1871, le 21 novembre, à Poulkovo :

| Observateurs. | Instruments. | Diamètre de l'objectif. | Moment observé. | Éclipse centrale. | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | mm | h m s | h m s | |
| 1. Block ..... | Bader. | 106 | 14.25.55,1 | 14.24.40,3 | t. m. de Poulkovo |
| 2. Glasenapp . | Merz I. | 97 | 14.25.53,6 | 14.24.40,7 | » |
| 3. Bonnsdorff. | Merz III. | 97 | 14.25.51,9 | 14.24.39,0 | » |
| 4. Kuhlberg.. | Salleron. | 85 | 14.25.49,0 | 14.24.34,4 | » |
| 5. Schwarz... | Plössl. | 56 | 14.25.34,7 | 14.24.38,0 | » |

### Exemple II.

En 1873, le 14 avril, fut observé à Poulkovo l'émersion du satellite de Jupiter, au moyen des instruments suivants, par les observateurs suivants :

| Observateurs. | Instruments. | Diamètre de l'objectif. | | |
|---|---|---|---|---|
| | | mm | h m s | |
| 1. Wagner.... | Le grand refr. | 379 | 9.43. 9,8 | t. m. de Poulkovo |
| 2. Tatchaloff.. | Héliomètre. | 188 | 9.43.35,5 | » |
| 3. Lindemann. | Steinheil. | 126 | 9.43.30,9 | » |
| 4. Glasenapp.. | Merz I. | 97 | 9.43.35,2 | » |
| 5. Bruns...... | Merz III. | 94 | 9.43.34,3 | » |

En procédant de la même façon que dans le premier exemple, nous obtiendrons les éléments suivants pour la réduction des moments observés aux moments de l'émersion du centre du satellite :

$$\log \frac{r^2\Delta^2}{a^2(a-1)^2} \ldots\ldots\ldots \quad 0,1558$$

$$\log \frac{1}{1-\frac{1}{2}\alpha} \ldots\ldots\ldots \quad 0,0032$$

$$\varphi(z)\log \ldots\ldots\ldots \quad 0,0376$$

$$\log \frac{r^2\Delta^2}{a^2(a-1)^2}\,\frac{1}{1-\frac{1}{2}\alpha}\,\varphi(z) \ldots\ldots\ldots \quad 0,1966$$

$$z \ldots\ldots\ldots \quad 47^\circ,9$$

$$\chi \ldots\ldots\ldots \quad 9^\circ,6$$

$$C \ldots\ldots\ldots \quad 16^\circ,0$$

$$\rho \ldots\ldots\ldots \quad 1,873$$

La distance $\rho$ du satellite au centre de Jupiter étant connue, la Table I nous donne : le logarithme du segment normal est égal à $\bar{2},7449$, il faut lui ajouter

$\log \frac{r^2 \Delta^2}{a^2(a-1)^2} \frac{1}{1-\frac{1}{2}\alpha} \varphi(z) = 0,1966$; ainsi la valeur du segment $S_0$ sera égale à $[\bar{2},9415]$, qui correspond à la lunette de Bailly et aux circonstances particulières au moment de l'émersion du satellite.

Ensuite, comme dans l'exemple précédent, on doit multiplier $S_0$ par $\frac{m^2}{n^2}$. Les logarithmes de $\frac{m^2}{n^2}$, pour les instruments dont on a fait usage sont les suivants :

| 1. Grand refr. | 2. Héliomètre. | 3. Steinheil. | 4. Merz I. | 5. Merz III. |
|---|---|---|---|---|
| $\bar{2},3084$ | $\bar{1},2200$ | $\bar{1},2264$ | $\bar{1},4970$ | $\bar{1},7288$ |

en les multipliant par $S_0 = [8,9415]$, nous aurons

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $[\bar{3},2499]$ | $[\bar{2},1615]$ | $[\bar{2},0279]$ | $[\bar{2},4385]$ | $[\bar{2},6703]$ |

c'est-à-dire

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0,00178 | 0,0145 | 0,0161 | 0,0274 | 0,0468 |

Ces derniers nombres représentent les segments correspondant aux différentes lunettes, dans les circonstances des observations.

Ayant les segments, nous trouverons, à l'aide de la Table IV, les valeurs suivantes pour $k_0$ :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $-100^s,6$ | $-76^s,2$ | $-75^s,2$ | $-69^s,7$ | $-62^s,3$ |

Ensuite nous trouverons la correction $\alpha$ à l'aide de l'argument $\chi$; la valeur de cette correction est $1^s,6$. En appliquant cette correction on obtient pour $k$ les valeurs suivantes :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $-99^s,0$ | $-74^s,6$ | $-73^s,6$ | $-68^s,1$ | $-60^s,7$ |

D'après ces données et l'angle $C = 16^o$, qui détermine la position du nœud de l'orbite du premier satellite par rapport au cône d'ombre de Jupiter, nous obtiendrons, en faisant usage de la Table V, les valeurs suivantes de $u$ :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $-100^s,9$ | $-76^s,1$ | $-75^s,1$ | $-69^s,4$ | $-61^s,8$ |

que l'on doit retrancher des moments observés, pour avoir les moments de l'émersion du centre du premier satellite de Jupiter, on aura donc :

| Observateurs. | Instruments. | Diamètre de l'objectif. | Moment observé. | Moment de l'émersion du centre du satellite. | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | mm | h m s | h m s | |
| 1. Wagner... | Le grand refr. | 379 | 9.43. 9,8 | 9.44.50,7 | t. m. de Poulkovo |
| 2. Tatchaloff. | Héliomètre. | 188 | 9.43.35,5 | 9.44.51,6 | » |
| 3. Lindemann. | Steinheil. | 126 | 9.43.30,9 | 9.44.46,0 | » |
| 4. Glasenapp. | Merz I. | 97 | 9.43.35,2 | 9.44.44,6 | » |
| 5. Bruns..... | Merz VIII. | 74 | 9.43.34,3 | 9.44.36,1 | » |

# CHAPITRE IV.

Les trois premiers Chapitres de l'Ouvrage de M. Glasenapp sont consacrés à l'étude des méthodes de réduction des observations des éclipses des satellites de Jupiter au moment de l'éclipse centrale.

Le quatrième Chapitre, qui renferme à lui seul 102 pages, est consacré à l'application des résultats, obtenus dans les trois premiers Chapitres, à la résolution des problèmes, dont nous avons déjà fait mention au début. Nous nous bornerons à donner ici un court résumé de la solution de ces questions; renvoyant, pour plus de détails, le lecteur au Mémoire même de M. Glasenapp.

### 1° *Mesure de la vitesse de la lumière.*

Pour déterminer l'équation de la lumière, l'auteur fait usage de toutes les éclipses du premier satellite de Jupiter (immersions et émersions), observées depuis l'année 1848 jusqu'à l'année 1873, dans les observatoires de Greenwich, d'Altona, de Leipzig, de Marburg, de Leyde, d'Oxford, de Windsor, des Galles du Sud, de Poulkovo, de Kieff et de Nicolaeff. Tout d'abord il réduit toutes ces observations au nombre de 387 à l'instant de l'éclipse centrale et aux circonstances normales. Puis il compare les moments des observations réduites avec les moments des éclipses correspondantes du premier satellite de Jupiter donnés par les Tables d'éclipses de Damoiseau.

Voici le procédé employé pour la formation des équations de condition :

« Désignons par $x_0$ la correction des Tables des éclipses du premier satellite de Jupiter du baron de Damoiseau, par $y$ la correction de l'équation de la lumière, d'après Delambre; c'est-à-dire prenons pour la vraie valeur de l'équation de la lumière $493^s,2 + y_1$, désignons par $\Delta$ la distance de Jupiter au centre de la Terre au moment de l'éclipse du satellite, par $T_0$ le moment réduit de l'observation, par $T_c$ le moment calculé de l'éclipse (tiré du *Naut. Alm.*). Pour déterminer $y_1$, on aura les équations de condition suivantes :

$$(1)\qquad \begin{cases} T_c + x_0 + \Delta y_1 = T_0, \\ T'_c + x_0 + \Delta' y_1 = T'_0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

» Pour n'avoir à faire qu'à de petits nombres posons $y_1 = 5^s + y$; les équations (1) prendront la forme

$$(2)\qquad \begin{cases} \mathfrak{T} + x_0 + \Delta y = T_0, \\ \mathfrak{T}' + x_0 + \Delta' y = T'_0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{cases}$$

où $\mathfrak{T} = T_c + S\Delta$, $\mathfrak{T}' = T'_c + \dot{S}\Delta'$, ....

» En comparant $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}'$, ... avec $T_0$, $T'_0$, ..., on voit de suite que $x_0$ est à peu près égal à $\pm 65^s$ en temps moyen, où le signe inférieur correspond à l'immersion, le signe supérieur à l'émersion; en vertu de quoi on peut poser $x_0 = \pm 65^s + x$. La correction et son signe montrent que l'ellipse des Tables se trouve dans l'intérieur de l'ellipse réelle, ou, autrement dit, que la surface d'ombre donnée par les Tables se trouve dans l'intérieur de la surface réelle.

» Ici, nous devons faire une supposition relativement à la courbe adoptée par De Damoiseau comme intersection de la surface d'ombre avec un plan normal à l'axe de cette surface. »

M. Glasenapp, après avoir montré qu'on peut faire à ce sujet deux hypothèses, admet qu'en construisant ses Tables d'éclipses des satellites, Damoiseau avait supposé que la courbe d'intersection de la surface d'ombre avec un plan normal à l'axe de cette surface était une ellipse; il suppose, en outre, que l'ellipse donnée par les Tables et l'ellipse effective sont semblables, et que la différence entre leurs demi-grands axes est égale à $\pm 65^s$ en temps moyen. A l'aide de ces hypothèses, il a construit la Table VII annexée à la fin de ce Mémoire. Elle servira à corriger les instants calculés $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}'$, ... de $\pm 65^s$, en tenant compte de la position des nœuds de l'orbite du satellite par rapport à l'axe de la surface d'ombre de Jupiter. L'argument C de cette Table est le même que celui des Tables V et VI.

« Ainsi, après avoir corrigé les quantités $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}'$, ..., nous obtiendrons les équations (2) sous la forme

$$(3)\qquad \begin{cases} t + x + \Delta y = T_0, \\ t' + x + \Delta' y = T'_0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{cases}$$

dans lesquelles $t = \mathfrak{T} \mp (65^s)$, $t' = \mathfrak{T}' \mp (65^s)$, ..., où $(65^s)$ signifie la correction des moments calculés $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}'$, ... de $65^s$, corrigée de la position du nœud de l'orbite du satellite.

» Les équations (3) peuvent ne pas être tout à fait exactes, parce que les réductions $u$ du moment observé ne sont pas tout à fait complètes, c'est-à-dire que tous les $T_0$ ne sont pas réduits à être homogènes. En réalité les réductions de nos observations impliquent la fonction S, dont les coefficients ont été donnés par Bailly. Donc, les erreurs des coefficients de cette fonction ne permettent pas d'éliminer tout à fait l'influence des lunettes et d'autres causes, dépendant de l'éclat du satellite pendant l'éclipse. Supposons que nous ne connaissions pas exactement la loi de la variation de l'éclat du satellite, due à la variation de la distance apparente du satellite au centre de Jupiter, introduisons dans les équations (3) un terme de la forme $\rho z$ dépendant du coefficient indéterminé $z$ et de la distance apparente $\rho$ du satellite au centre de Jupiter [1]. Dans ce cas, les équations (3) deviendront :

$$(4)\qquad \left\{\begin{array}{l} x + \Delta y + \rho z + t - T_0 = 0, \\ x + \Delta' y + \rho' z + t' - T'_0 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

L'auteur prend comme forme définitive d'équations de condition la forme (4). Il forme ces équations pour toutes les observations, leur applique la méthode des moindres carrés et obtient deux systèmes d'équations normales, un pour les immersions et un autre pour les émersions. Leur résolution lui donne les valeurs suivantes de $x$, $y$, $z$ :

(5)

a. *Pour l'immersion du premier satellite.*

$$x_0 = -60^s,6 \pm 8^s,0,$$
$$y_0 = +10,52 \pm 1,74,$$
$$z_0 = -\ 1,97 \pm 3,54.$$

L'erreur probable d'une observation de poids *un* $= \pm\, 9^s,89$.

b. *Pour l'émersion du premier satellite.*

$$x_1 = -\ 9^s,0 \pm 6^s,0,$$
$$y_1 = -\ 1,47 \pm 1,26,$$
$$z_1 = +\ 1,60 \pm 2,56.$$

L'erreur probable d'une observation de poids *un* $= \pm\, 9^s,09$.

---

(1) $z$ est la correction correspondant à la variation supposée d'éclat.

Les valeurs de $y$ trouvées des observations de l'immersion et de l'émersion du premier satellite diffèrent l'une de l'autre d'un nombre très considérable, de $11^s,99$, qui dépasse beaucoup trop la valeur de l'erreur probable d'une détermination isolée. L'auteur ne donne pas d'explication définitive de cette différence, mais il fait des hypothèses intéressantes pour l'expliquer.

Il remarque que cette discordance peut avoir trois origines :

1° Inexactitudes dans les Tables de Damoiseau.

2° Erreurs dans l'évaluation du segment invisible que les valeurs trop grossières de $z$ ne peuvent éliminer.

3° Du fait que les immersions et les émersions ne sont pas observées de la même manière.

Sans données pour se déterminer sur ces points, M. Glasenapp prend la moyenne pondérée des valeurs de $y$ et trouve

$$y = +2^s,64 \pm 1^s,02.$$

ce qui donne pour l'équation de la lumière :

$$500^s,84 \pm 1^s,02.$$

et, en traitant les valeurs de $x$ d'une manière analogue, il en tire la correction moyenne des Tables

$$-27^s,7 \pm 4^s,8.$$

Pour voir si ces corrections améliorent la valeur de l'erreur probable, il résout à nouveau les équations de condition en gardant les moments des éclipses sans y apporter de corrections. Il trouve

(6)

a. *Pour l'immersion du premier satellite.*

$$x_0 = -\ 8^s,8 \pm 9^s,0,$$
$$y_0 = +\ 1,47 \pm 1,96,$$
$$z_0 = +10,9 \pm 4,0.$$

L'erreur probable d'une observation de poids *un* $= \pm 11^s,12$.

b. *Pour l'émersion du premier satellite.*

$$x_1 = -19^s,3 \pm 7^s,3,$$
$$y_1 = +\ 5,43 \pm 1,51,$$
$$z_1 = -\ 4,1 \pm 3,1.$$

L'erreur probable d'une observation de poids *un* $= \pm 10,95$.

Combinant comme plus haut les valeurs de $y$, on trouve la valeur suivante de l'équation de la lumière :

$$497^s,15 \pm 1^s,20.$$

On en conclut donc que la méthode de M. Glassenapp n'abaisse pas d'une manière notable l'erreur probable d'une observation, déduite de la comparaison aux Tables de Damoiseau.

On obtient un meilleur résultat, dit M. Glassenapp, en traitant à part les observations faites le même jour de manière à éliminer les erreurs périodiques des Tables. Voici les résultats obtenus ainsi :

a. *Immersions.*

| | |
|---|---|
| Erreur probable d'une observation réduite.......... | $\pm\ 5^s,5$ |
| Erreur probable d'une observation non réduite ...... | $\pm 10^s,0$ |

b. *Émersions.*

| | |
|---|---|
| Erreur probable d'une observation réduite........... | $\pm 6^s,6$ |
| Erreur probable d'une observation non réduite....... | $\pm 8^s,5$ |

Nous ne devons pas oublier de mentionner la remarque faite par l'auteur, que les corrections obtenues pour les Tables et pour l'équation de la lumière ne peuvent être admises comme définitives. « Ce n'est qu'un essai, dit-il, de comparaison des observations avec les Tables; on ne pourra obtenir un résultat définitif qu'après avoir vérifié la théorie des satellites de Jupiter, calculé à nouveau leurs perturbations et construit de nouvelles Tables. »

En suivant un procédé semblable, l'auteur fait une discussion très intéressante sur l'écart qui existe entre les deux valeurs de l'équation de la lumière, trouvées par Delambre et W. Struve par deux méthodes différentes. Il détermine l'équation de la lumière d'après toutes les observations dont il a fait usage plus haut, après avoir calculé les différences calcul — observation, et sans avoir réduit les moments des observations aux moments des éclipses centrales, en mettant les équations de condition sous la forme suivante :

$$(7) \qquad \left\{ \begin{array}{l} x + \Delta y + D(C - O) = 0, \\ x + \Delta_1 y + D(C - O)_1 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{array} \right.$$

où $x$ signifie la correction des Tables, $y$ la correction de la vitesse de la lumière, d'après Delambre, $\Delta$ la distance de Jupiter à la Terre, D(C — O) la différence calcul — observation.

Appliquant la méthode des moindres carrés, il arrive à deux systèmes d'équations normales, l'une pour les immersions et l'autre pour les émersions, dont la résolution lui donne pour la valeur de l'équation de la lumière le mombre

$$497^s,46 \pm 1^s,08.$$

Ce résultat, identique à celui de Struve, lui montre que l'hypothèse du professeur Hoek [1] sur cette question n'est pas exacte, et que toutes les variations possibles dans l'intensité du premier satellite s'annulent mutuellement et qu'elles n'ont pas d'influence sur le résultat final de la détermination de l'équation de la lumière.

2° *Détermination de la longitude de Leyde au moyen de la comparaison des observations des éclipses du premier satellite de Jupiter avec les Tables de De Damoiseau.*

Nous serons très brefs sur ce point. L'auteur trouve que la différence de longitude entre Leyde et Greenwich, déduite des observations des éclipses des satellites de Jupiter faites simultanément en ces deux stations, ne concorde pas avec la différence adoptée,

$$0^h\,17^m\,56^s,2\ \mathrm{E},$$

pour la longitude de l'observatoire de Leyde.

Les observations simultanées, réduites d'après la méthode de M. Glassenapp, donnent en effet

$$0^h\,18^m\,5^s,4.$$

Les mêmes observations non réduites donnent

$$0^h\,18^m\,3^s,6.$$

Ces divergences nous montrent simplement que le mode d'observation des éclipses des satellites de Jupiter ne satisfait pas aux exigences de l'Astronomie moderne. Peut-être le mode d'observation photométrique proposé par Cornu ou celui suivi depuis plusieurs années par M. Pickering à Harvard College donnent-ils de meilleurs résultats?

3° *Constance de la vitesse du mouvement de rotation de la Terre autour de son axe.*

Ce problème me paraissant très intéressant au point de vue théorique, je ter-

---

(1) *Astr. Nachr.*, B. LXX, p. 193.

mine le présent exposé en donnant une traduction des pages de la dissertation de M. Glassenapp qui se rapportent à cette question :

« Le professeur S. Newcomb a publié dans la revue américaine *The American Journal of Sciences and Arts,* conducted by Prof. B.-Silliman and James-D. Dana, vol. L, 1870, p. 183, un article intitulé : *Considerations on the apparent inegalities of long period in the mean motion of the Moon,* dans lequel il se propose d'expliquer les inégalités à longues périodes remarquées dans le moyen mouvement de la Lune, en comparant toutes les observations de la Lune, faites à Greenwich et à Washington depuis 1850 jusqu'à 1869, aux Tables de Hansen, en admettant des variations de la vitesse du mouvement de rotation de la Terre autour de son axe.

» Admettant la possibilité d'une pareille variation, il a déterminé les écarts du midi moyen correspondant au cas de la non uniformité de rotation, par rapport au midi moyen correspondant à la rotation uniforme.

» Voici ces écarts, qui m'ont été communiqués dans une lettre du 24 octobre 1873 :

| Époque. | Correction du midi. |
|---|---|
| | s |
| 1830,5 | 0 |
| 1835,5 | 0 |
| 1840,5 | +1 |
| 1845,5 | +1 |
| 1850,5 | +2 |
| 1855,5 | +5 |
| 1860,5 | +10 |
| 1862,5 | +11 |
| 1864,5 | +10 |
| 1866,5 | +6 |
| 1868,5 | +2 |
| 1870,5 | 0 |
| 1872,5 | −2 |

» Ce sont les corrections qu'on doit ajouter au jour moyen, correspondant à la rotation uniforme, pour avoir le jour effectif. En même temps, ce sont les corrections que l'on doit ajouter au moment observé pour avoir le temps moyen en supposant que la vitesse du mouvement de rotation de la Terre autour de son axe soit constante.

» L'hypothèse de Newcomb relativement à la variation périodique de la vitesse du mouvement de rotation de la Terre autour de son axe sera certaine et authentique lorsque sa raison d'être sera prouvée d'une autre manière et par d'autres observations. Les observations des éclipses des satellites de Jupiter peuvent fournir une démonstration de cette hypothèse, démonstration tout à fait indépendante de celle de Newcomb.

» En construisant ses Tables d'éclipses du premier satellite de Jupiter, Damoiseau a admis que la vitesse du mouvement de rotation de la Terre autour de son axe était constante; de sorte que si l'on détermine les corrections des Tables d'éclipses du premier satellite de Jupiter pour différentes époques et si l'on trouve des variations périodiques, de telles variations prouvent ou : 1° l'inexactitude des Tables de Damoiseau; ou 2° que le mouvement de rotation de la Terre autour de son axe n'est pas uniforme. Mais en admettant que les Tables soient exactes, c'est-à-dire qu'en calculant les perturbations des satellites : 1° on n'a négligé aucune des inégalités périodiques importantes; 2° que les coefficients de toutes les inégalités diffèrent des coefficients vrais de nombres entièrement négligeables; et 3° que dans la construction des Tables on n'a fait aucune erreur périodique importante, nous sommes conduits à admettre la seconde hypothèse, à savoir : que la vitesse du mouvement de rotation de la Terre autour de son axe varie périodiquement.

» Pour examiner cette question nous avons pris toutes les observations des éclipses du premier satellite de Jupiter, dont nous avons fait usage dans la détermination de l'équation de la lumière. Nous avons ajouté aux moments observés les corrections du midi moyen, trouvées par Newcomb, ensuite nous avons procédé comme nous l'avions fait pour les observations sans corrections.

» Voici les résultats obtenus :

a. *Immersions du premier satellite.*

$$x_0 = -42^s,3 \pm 7^s,9$$
$$y_0 = +\ 6,83 \pm 1,72$$
$$z_0 = -\ 0,64 \pm 3,50$$
$$r_0 = \pm\ 9,77$$

b. *Émersions du premier satellite.*

$$x_1 = -8^s,7 \pm 6^s,0$$
$$y_1 = -1,12 \pm 1,24$$
$$z_1 = +1,82 \pm 2,52$$
$$r'_0 = \pm 8,97$$

» En comparant les erreurs probables ainsi trouvées : $\pm 9,77$ et $\pm 8,97$, d'une observation de poids égal à *un*, avec celles trouvées lors de la détermination de l'équation de la lumière, c'est-à-dire avec $\pm 9^s,82$ et $\pm 9^s,09$, on voit que l'application de la correction de Newcomb aux moments observés des éclipses améliore la concordance entre les observations et les Tables d'éclipses du premier satellite de Jupiter.

» Cette amélioration dans les deux cas, des immersions du premier satellite et des émersions, peut ne pas être considérée comme accidentelle, mais être attribuée à la vraisemblance de la correction de Newcomb, et par conséquent à celle de son hypothèse relativement à la variation périodique de la vitesse du mouvement de rotation de la Terre autour de son axe.

» Pour déterminer les valeurs des corrections du jour moyen à des époques différentes au moyen des observations des éclipses du premier satellite, c'est-à-dire faire ce qu'a fait Newcomb, en comparant les observations de la Lune avec les Tables, j'ai procédé comme il suit : j'ai corrigé les moments des éclipses du premier satellite, donnés par les Tables, des valeurs de $x$, $y$, $z$ trouvées précédemment, et après avoir comparé de nouveau toutes les observations avec les valeurs tabulaires corrigées, j'ai trouvé les valeurs suivantes pour C — O (calcul — observation) pour les diverses époques :

| a. *Pour les immersions.* | | | b. *Pour les émersions.* | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Époque. | C — O. | Poids. | Époque. | C — O. | Poids. |
| 1848,86 | $+6^s,9$ | 4,7 | 1848,24 | $-16^s,7$ | 7,7 |
| 1849,22 | + 6,7 | 3,4 | 1849,27 | — 4,5 | 8,5 |
| 1850,00 | +22,7 | 2,4 | 1850,32 | —15,4 | 7,6 |
| 1851,10 | + 9,2 | 5,3 | 1853,50 | —30,7 | 1,9 |
| 1852,70 | +22,2 | 1,6 | 1855,70 | —17,2 | 2,7 |
| 1855,50 | +33,2 | 2,0 | 1856,97 | —11,5 | 3,6 |
| 1856,58 | +20,9 | 4,7 | 1858,10 | —12,2 | 4,5 |
| 1857,72 | +16,3 | 22,7 | 1859,15 | — 5,9 | 9,7 |
| 1858,82 | +11,5 | 7,7 | 1860,21 | — 6,3 | 8,1 |
| 1859,90 | +22,9 | 2,0 | 1861,30 | + 4,4 | 0,9 |
| 1861,22 | +14,5 | 3,3 | 1862,32 | —12,7 | 4,4 |
| 1862,17 | +29,0 | 2,9 | 1863,37 | —28,3 | 3,6 |
| 1863,15 | +22,0 | 3,5 | 1864,60 | —11,5 | 1,6 |
| 1864,28 | + 4,7 | 7,5 | 1865,70 | —27,8 | 0,7 |
| 1866,45 | +22,6 | 1,8 | 1866,72 | —18,8 | 3,3 |
| 1867,63 | +33,9 | 2,6 | 1867,82 | —16,9 | 4,9 |
| 1868,65 | +33,8 | 2,0 | 1868,83 | —16,5 | 6,7 |
| 1869,76 | +15,2 | 12,5 | 1869,45 | —23,3 | 2,0 |
| 1870,84 | + 8,4 | 6,3 | 1870,05 | —24,2 | 1,8 |
| 1871,90 | — 2,6 | 9,6 | 1871,14 | —20,6 | 8,0 |
| 1872,50 | + 5,3 | 8,2 | 1872,21 | —17,4 | 21,9 |
| 1873,25 | +15,0 | 10,2 | 1873,24 | —16,5 | 26,4 |

qui m'ont servi à former des équations de condition de la forme

$$x + k(t - t_0) + m(t - t_0)^2 + (\mathrm{C} - \mathrm{O}) = 0, \tag{1}$$

où pour $t_0$ nous avons pris l'année 1861,00 et où $x$, $k$, $m$ doivent être déterminés d'après les valeurs de (C — O).

» Les équations de condition nous ont donné des équations normales que voici :

a. *Pour les immersions du premier satellite.*

$$+\ 126{,}9x + 259{,}3k + 8227m + 1718{,}1 = 0,$$
$$+\ 259{,}3x + 8227\ k + 35467m + 1706 = 0,$$
$$+ 8227\ x + 35467\ k + 923395m + 85480 = 0.$$

b. *Pour les émersions du premier satellite.*

$$+\ 140{,}5x + 455{,}6k + 12239m - 2111{,}8 = 0,$$
$$+\ 455{,}6x + 12239\ k + 55150m - 9823 = 0,$$
$$+ 12239\ x + 55150\ k + 1558741m - 196478 = 0.$$

» La solution de ces équations normales nous a fourni les valeurs suivantes de $x$, $k$ et $m$ pour :

a. *Immersions.* b. *Émersions.*

$$x_0 = -17^{s}{,}76 \pm 1^{s}{,}25, \qquad x_1 = +12^{s}{,}69 \pm 0^{s}{,}86,$$
$$k_0 = +\ 0{,}0832 \pm 0{,}1553, \qquad k_1 = +\ 0{,}2512 \pm 0{,}09172,$$
$$m_0 = +\ 0{,}06245 \pm 0{,}02178, \qquad m_1 = +\ 0{,}01753 \pm 0{,}01356,$$

d'où l'on tire

$$x = +\ 3^{s}{,}52 \pm 0^{s}{,}71,$$
$$k = +\ 0{,}2076 \pm 0{,}0783,$$
$$m = +\ 0{,}03006 \pm 0{,}01151.$$

» Au moyen de $x$, $k$ et $m$ j'ai trouvé les corrections du midi moyen, pour les époques considérées par Newcomb. La Table suivante contient à la fois les corrections de Newcomb et les miennes (¹).

(¹) Les nombres dans la troisième colonne (2) ont été déterminés par la formule (1), de façon que la correction du midi pour 1870,5 soit égale à celle de Newcomb pour la même date.

(2)

| Époque. | Correction de Newcomb. | Correction d'après le I ☾ ♃. |
|---|---|---|
| 1850,5 | $+2^{s}$ | $+3^{s}$ |
| 1855,5 | +5 | +4 |
| 1860,5 | +10 | +5 |
| 1862,5 | +11 | +4 |
| 1864,5 | +10 | +3 |
| 1866,5 | +6 | +2 |
| 1868,5 | +2 | +1 |
| 1870,5 | 0 | 0 |
| 1872,5 | −2 | −2 |

» Les nombres de cette Table montrent :

» 1° Que les signes des corrections du midi moyen, déterminé au moyen des observations des éclipses du premier satellite de Jupiter, ne diffèrent pas de ceux des corrections de Newcomb ;

» 2° Que les périodes de la variation des corrections coïncident dans les deux cas.

» Malgré que mes corrections et celles de Newcomb diffèrent beaucoup les unes des autres, ce qui fait que nous ne pouvons tirer aucune conclusion définitive sur la vraisemblance de l'hypothèse de Newcomb, néanmoins le fait que mes corrections ont le même signe et la même période que celles de Newcomb trouvées au moyen des observations de la Lune, nous donne le droit d'affirmer la grande probabilité de l'hypothèse de Newcomb sur la non-uniformité du mouvement de rotation de la Terre. »

# APPENDICE.

## TABLE I ([1]).

| ρ. | 0. | 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 7. | 8. | 9. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1,00 | 9,1856 | 9,1848 | 9,1840 | 9,1832 | 9,1824 | 9,1816 | 9,1808 | 9,1801 | 9,1794 | 9,1786 |
| 1,01 | 9,1778 | 9,1770 | 9,1762 | 9,1754 | 9,1747 | 9,1740 | 9,1733 | 9,1785 | 9,1717 | 9,1709 |
| 1,02 | 9,1701 | 9,1693 | 9,1686 | 9,1679 | 9,1672 | 9,1664 | 9,1656 | 9,1648 | 9,1640 | 9,1632 |
| 1,03 | 9,1625 | 9,1618 | 9,1611 | 9,1603 | 9,1595 | 9,1587 | 9,1579 | 9,1572 | 9,1565 | 9,1558 |
| 1,04 | 9,1551 | 9,1543 | 9,1535 | 9,1527 | 9,1519 | 9,1512 | 9,1505 | 9,1498 | 9,1491 | 9,1483 |
| 1,05 | 9,1475 | 9,1467 | 9,1460 | 9,1453 | 9,1446 | 9,1439 | 9,1432 | 9,1424 | 9,1416 | 9,1409 |
| 1,06 | 9,1402 | 9,1395 | 9,1388 | 9,1381 | 9,1374 | 9,1366 | 9,1358 | 9,1351 | 9,1344 | 9,1337 |
| 1,07 | 9,1330 | 9,1323 | 9,1316 | 9,1308 | 9,1301 | 9,1294 | 9,1287 | 9,1280 | 9,1273 | 9,1266 |
| 1,08 | 9,1259 | 9,1251 | 9,1244 | 9,1237 | 9,1230 | 9,1223 | 9,1216 | 9,1209 | 9,1202 | 9,1195 |
| 1,09 | 9,1188 | 9,1181 | 9,1174 | 9,1167 | 9,1160 | 9,1153 | 9,1146 | 9,1139 | 9,1132 | 9,1125 |
| 1,10 | 9,1118 | 9,1111 | 9,1104 | 9,1097 | 9,1090 | 9,1083 | 9,1076 | 9,1069 | 9,1062 | 9,1055 |
| 1,11 | 9,1048 | 9,1041 | 9,1035 | 9,1028 | 9,1021 | 9,1014 | 9,1007 | 9,1000 | 9,0993 | 9,0987 |
| 1,12 | 9,0981 | 9,0974 | 9,0967 | 9,0960 | 9,0953 | 9,0946 | 9,0939 | 9,0933 | 9,0927 | 8,0920 |
| 1,13 | 9,0913 | 9,0906 | 9,0899 | 9,0892 | 9,0886 | 9,0880 | 9,0874 | 9,0867 | 9,0860 | 9,0853 |
| 1,14 | 9,0846 | 9,0839 | 9,0833 | 9,0827 | 9,0821 | 9,0814 | 9,0807 | 9,0800 | 9,0793 | 9,0786 |
| 1,15 | 9,0780 | 9,0774 | 9,0768 | 9,0761 | 9,0751 | 9,0747 | 9,0740 | 9,0734 | 9,0728 | 9,0722 |
| 1,16 | 9,0716 | 9,0709 | 9,0702 | 9,0695 | 9,0688 | 9,0682 | 9,0676 | 9,0670 | 9,0664 | 9,0657 |
| 1,17 | 9,0650 | 9,0643 | 9,0637 | 9,0631 | 9,0625 | 9,0619 | 9,0613 | 9,0606 | 9,0599 | 9,0592 |
| 1,18 | 9,0586 | 9,0580 | 9,0574 | 9,0568 | 9,0562 | 9,0555 | 9.0548 | 9,0542 | 9,0536 | 9,0530 |
| 1,19 | 9,0524 | 9,0518 | 9,0512 | 9,0505 | 9,0498 | 9,0492 | 9,0486 | 9,0480 | 9,0474 | 9,0468 |
| 1,20 | 9,0462 | 9,0455 | 9,0449 | 9,0443 | 9,0437 | 9,0431 | 9,0425 | 9,0419 | 9,0413 | 9,0406 |
| 1,21 | 9,0400 | 9,0394 | 9,0388 | 9,0382 | 9,0376 | 9,0370 | 9,0364 | 9,0358 | 9,0352 | 9,0346 |
| 1,22 | 9,0339 | 9,0333 | 9,0327 | 9,0321 | 9,0315 | 9,0309 | 9,0303 | 9,0297 | 9,0291 | 9,0285 |
| 1,23 | 9,0279 | 9,0273 | 9,0267 | 9,0261 | 9,0255 | 9,0249 | 9,0243 | 9,0237 | 9,0231 | 9,0225 |
| 1,24 | 9,0219 | 9,0213 | 9,0207 | 9,0201 | 9,0195 | 9,0189 | 9,0183 | 9,0177 | 9,0171 | 9,0165 |
| 1,25 | 9,0159 | 9,0153 | 9,0147 | 9,0141 | 9,0135 | 9,0129 | 9,0124 | 9,0118 | 9,0112 | 9,0106 |
| 1,26 | 9,0100 | 9,0094 | 9,0088 | 9,0082 | 9,0077 | 9,0071 | 9,0065 | 9,0059 | 9,0053 | 9,0047 |
| 1,27 | 9,0041 | 9,0036 | 9,0031 | 9,0025 | 9,0019 | 9,0013. | 9,0007 | 9,0001 | 8,9995 | 8,9990 |
| 1,28 | 8,9985 | 8,9979 | 8,9973 | 8,9967 | 8,9961 | 8,9955 | 8,9950 | 8,9945 | 8,9940 | 8,9934 |
| 1,29 | 8,9928 | 8,9922 | 8,9916 | 8,9910 | 8,9905 | 8,9900 | 8,9895 | 8,9889 | 8,9883 | 8,9877 |

([1]) La caractéristique de tous les logarithmes, donnés dans la Table I, est augmentée de 10.

## TABLE I (SUITE).

| ρ. | 0. | 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 7. | 8. | 9. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1,30 | 8,9871 | 8,9866 | 8,9861 | 8,9856 | 8,9851 | 8,9845 | 8,9839 | 8,9833 | 8,9827 | 8,9822 |
| 1,31 | 8,9817 | 8,9812 | 8,9807 | 8,9801 | 8,9795 | 8,9789 | 8,9783 | 8,9778 | 8,9773 | 8,9768 |
| 1,32 | 8,9763 | 8,9757 | 8,9751 | 8,9745 | 8,9740 | 8,9735 | 8,9730 | 8,9725 | 8,9720 | 8,9714 |
| 1,33 | 8,9708 | 8,9702 | 8,9697 | 8,9692 | 8,9687 | 8,9682 | 8,9677 | 8,9671 | 8,9665 | 8,9659 |
| 1,34 | 8,9654 | 8,9649 | 8,9644 | 8,9639 | 8,9634 | 8,9628 | 8,9622 | 8,9617 | 8,9612 | 8,9607 |
| 1,35 | 8,9602 | 8,9597 | 8,9592 | 8,9586 | 8.9580 | 8,9575 | 8,9570 | 8,9565 | 8,9560 | 8,9555 |
| 1,36 | 8,9550 | 8,9544 | 8,9539 | 8,9534 | 8,9529 | 8,9524 | 8,9519 | 8,9514 | 8,9509 | 8,9503 |
| 1,37 | 8,9498 | 8,9493 | 8,9488 | 8,9483 | 8,9478 | 8,9473 | 8,9468 | 8,9462 | 8,9457 | 8,9452 |
| 1,38 | 8,9447 | 8,9442 | 8,9437 | 8,9432 | 8,9427 | 8,9121 | 8,9416 | 8,9411 | 8,9406 | 8,9401 |
| 1,39 | 8,9396 | 8,9391 | 8,9386 | 8,9381 | 8,9376 | 8,9371 | 8,9366 | 8,9361 | 8,9356 | 8,9351 |
| 1,40 | 8,9346 | 8,9341 | 8,9336 | 8,9331 | 8,9326 | 8,9321 | 8,9316 | 8,9311 | 8,9306 | 8,9301 |
| 1,41 | 8,9296 | 8,9291 | 8,9286 | 8,9281 | 8,9276 | 8,9271 | 8,9267 | 8,9262 | 8,6257 | 8,9252 |
| 1,42 | 8,9247 | 8,9242 | 8,9237 | 8,9232 | 8,9228 | 8,9223 | 8,9218 | 8,9213 | 8,9208 | 8,9203 |
| 1,43 | 8,9198 | 8,9193 | 8,9189 | 8,9184 | 8,9179 | 8,9174 | 8,9169 | 8,9164 | 8,9159 | 8,9154 |
| 1,44 | 8,9150 | 8,9145 | 8,9140 | 8,9135 | 8,9130 | 8,9125 | 8,9120 | 8,9116 | 8,9112 | 8,9107 |
| 1,45 | 8,9102 | 8,9097 | 8,9092 | 8,9087 | 8,9082 | 8,9078 | 8,9074 | 8,9069 | 8,9064 | 8,9059 |
| 1,46 | 8,9054 | 8,9049 | 8,9044 | 8,9040 | 8,9036 | 8,9031 | 8,9026 | 8,9021 | 8,9016 | 8,9012 |
| 1,47 | 8,9008 | 8,9004 | 8,8999 | 8,8994 | 8,8989 | 8,8984 | 8,8679 | 8,8974 | 8,8970 | 8,8966 |
| 1,48 | 8,8962 | 8,8957 | 8,8952 | 8,8947 | 8,8942 | 8,8937 | 8,8933 | 8,8929 | 8,8925 | 8,8920 |
| 1,49 | 8,8915 | 8,8910 | 8,8905 | 8,8901 | 8,8897 | 8,8893 | 8,8889 | 8,8884 | 8,8879 | 8,8874 |
| 1,50 | 8,8869 | 8,8864 | 8,8860 | 8,8856 | 8,8852 | 8,8847 | 8,8842 | 8,8837 | 8,8832 | 8,8828 |
| 1,51 | 8,8824 | 8,8820 | 8,8816 | 8,8811 | 8,8806 | 8,8801 | 8,8796 | 8,8792 | 8,8788 | 8,8784 |
| 1,52 | 8,8780 | 8,8775 | 8,8770 | 8,8765 | 8,8761 | 8,8757 | 8,8753 | 8,8749 | 8,8745 | 8,8740 |
| 1,53 | 8,8735 | 8,8730 | 8,8726 | 8,8722 | 8,8718 | 8,8714 | 8,8710 | 8,8705 | 8,8700 | 8,8695 |
| 1,54 | 8,8691 | 8,8687 | 8,8683 | 8,8679 | 8,8675 | 8,8670 | 8,8665 | 8,8660 | 8,8656 | 8,8652 |
| 1,55 | 8,8648 | 8,8644 | 8,8640 | 8,8635 | 8,8630 | 8,8626 | 8,8622 | 8,8618 | 8,8614 | 8,8610 |
| 1,56 | 8,8606 | 8,8601 | 8,8596 | 8,8592 | 8,8588 | 8,8584 | 8,8580 | 8,8576 | 8,8572 | 8,8567 |
| 1,57 | 8,8563 | 8,8559 | 8,8555 | 8,8551 | 8,8547 | 8,8543 | 8,8539 | 8,8534 | 8,8530 | 8,8526 |
| 1,58 | 8,8522 | 8,8518 | 8,8514 | 8,8510 | 8,8506 | 8,8501 | 8,8497 | 8,8493 | 8,8489 | 8,8485 |
| 1,59 | 8,8481 | 8,8477 | 8,8473 | 8,8468 | 8,8464 | 8,8460 | 8,8456 | 8,8452 | 8,8448 | 8,8444 |
| 1,60 | 8,8440 | 8,8435 | 8,8431 | 8,8427 | 8,8423 | 8,8419 | 8,8415 | 8,8411 | 8,8407 | 8,8402 |
| 1,61 | 8,8398 | 8,8394 | 8,8390 | 8,8386 | 8,8382 | 8,8378 | 8,8374 | 8,8370 | 8,8366 | 8,8362 |
| 1,62 | 8,8358 | 8,8354 | 8,8350 | 8,8346 | 8,8342 | 8,8338 | 8,8334 | 8,8330 | 8,8326 | 8,8322 |
| 1,63 | 8,8318 | 8,8314 | 8,8310 | 8,8306 | 8,8302 | 8,8298 | 8,8294 | 8,8290 | 8,8286 | 8,8282 |
| 1,64 | 8,8278 | 8,8274 | 8,8270 | 8,8266 | 8,8262 | 8,8258 | 8,8254 | 8,8250 | 8,8246 | 8,8242 |

## TABLE I (suite).

| ρ. | 0. | 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 7. | 8. | 9. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1,65 | 8,8238 | 8,8234 | 8,8230 | 8,8226 | 8,8222 | 8,8218 | 8,8215 | 8,8211 | 8,8207 | 8,8203 |
| 1,66 | 8,8199 | 8,9195 | 8,8191 | 8,8187 | 8,8184 | 8,8180 | 8,8176 | 8,8172 | 8,8168 | 8,8164 |
| 1,67 | 8,8160 | 8,8156 | 8,8153 | 8,8149 | 8,8145 | 8,8141 | 8,8137 | 8,8133 | 8,8129 | 8,8125 |
| 1,68 | 8,8122 | 8,8118 | 8,8114 | 8,8110 | 8,8106 | 8,8102 | 8,8098 | 8,8095 | 8,8092 | 8,8088 |
| 1,69 | 8,8084 | 8,8080 | 8,8076 | 8,8072 | 8,8068 | 8,8065 | 8,8062 | 8,8058 | 8,8054 | 8,8050 |
| 1,70 | 8,8046 | 8,8042 | 3,8038 | 8,8035 | 3,8032 | 8,8028 | 8,8024 | 8,8020 | 8,8016 | 8,8012 |
| 1,71 | 8,8008 | 8,8005 | 8,8002 | 8,7998 | 8,7994 | 8,7990 | 8,7986 | 8,7982 | 8,7979 | 8,7976 |
| 1,72 | 8,7973 | 8,7969 | 8,7965 | 8,7961 | 8,7957 | 8,7953 | 8,7950 | 8,7947 | 8,7944 | 8,7940 |
| 1,73 | 8,7936 | 8,7932 | 8,7928 | 8,7924 | 8,7921 | 8,7918 | 8,7915 | 8,7911 | 8,7907 | 8,7903 |
| 1,74 | 8,7899 | 8,7895 | 8,7892 | 8,7889 | 8,7886 | 8,7882 | 8,7878 | 8,7874 | 8,7970 | 8,7867 |
| 1,75 | 8,7864 | 8,7861 | 8,7858 | 8,7854 | 8,7850 | 8,7846 | 8,7842 | 8,7838 | 8,7835 | 8,7832 |
| 1,76 | 8,7829 | 8,7825 | 8,7821 | 8,7817 | 8,7813 | 8,7810 | 8,7807 | 8,7804 | 8,7801 | 8,7797 |
| 1,77 | 8,7793 | 8,7789 | 8,7785 | 8,7782 | 8,7779 | 8,7776 | 8,7773 | 8,7769 | 8,7765 | 8,7761 |
| 1,78 | 8,7757 | 8,7754 | 8,7751 | 8,7748 | 8,7745 | 8,7741 | 8,7737 | 8,7733 | 8,7729 | 8,7726 |
| 1,79 | 8,7723 | 8,7720 | 8,7717 | 8,7713 | 8,7709 | 8,7705 | 8,7702 | 8,7699 | 8,7696 | 8,7693 |
| 1,80 | 8,7690 | 8,7686 | 8,7682 | 8,7678 | 8,7675 | 8,7672 | 8,7669 | 8,7666 | 8,7663 | 8,7659 |
| 1,81 | 8,7655 | 8,7651 | 8,7648 | 8,7645 | 8,7642 | 8,7639 | 8,7636 | 8,7632 | 8,7628 | 8,7624 |
| 1,82 | 8.7621 | 8,7618 | 8,7615 | 8,7612 | 8,7609 | 8,7605 | 8,7601 | 8,7598 | 8,7595 | 8,7592 |
| 1,83 | 8,7589 | 8,7586 | 8,7583 | 8,7579 | 8,7575 | 8,7571 | 8,7568 | 8,7565 | 8,7562 | 8,7559 |
| 1,84 | 8,7556 | 8,7552 | 8,7549 | 8,7546 | 8,7543 | 8,7540 | 8,7537 | 8,7534 | 8,7531 | 8,7527 |
| 1,85 | 8,7523 | 8,7520 | 8,7517 | 8,7514 | 8,7511 | 8,7508 | 8,7505 | 8,7501 | 8,7497 | 8,7494 |
| 1,86 | 8,7491 | 8,7488 | 8,7485 | 8,7482 | 8,7479 | 8,7475 | 8,7471 | 8,7468 | 8,7465 | 8,7462 |
| 1,87 | 8,7459 | 8,7456 | 8,7453 | 8,7449 | 8,7446 | 8,7443 | 8,7440 | 8,7437 | 8,7434 | 8,7431 |
| 1,88 | 8,7428 | 8,7424 | 8,7421 | 8,7418 | 8,7415 | 8,7412 | 8,7409 | 8,7406 | 8,7403 | 8,7399 |
| 1,89 | 8,7396 | 8,7393 | 8,7390 | 8,7387 | 8,7384 | 8,7381 | 8,7378 | 8,7374 | 8,7371 | 8,7368 |
| 1,90 | 8,7365 | 8,7362 | 8,7359 | 8,7356 | 8,7353 | 8,7350 | 8,7347 | 8,7344 | 8,7341 | 8,7338 |
| 1,91 | 8,7335 | 8,7332 | 8,7329 | 8,7325 | 8,7322 | 8,7319 | 8,7316 | 8,7313 | 8,7310 | 8,7307 |
| 1,92 | 8,7304 | 8,7301 | 8,7298 | 8,7295 | 8,7292 | 8,7289 | 8,7286 | 8,7283 | 8,7280 | 8,7277 |
| 1,93 | 8,7274 | 8,7271 | 8,7268 | 8,7265 | 8,7262 | 8,7259 | 8,7256 | 8,7253 | 8,7250 | 8,7247 |
| 1,94 | 8,7244 | 8,7241 | 8,7238 | 8,7235 | 8,7232 | 8,7229 | 8,7226 | 8,7223 | 8,7220 | 8,7217 |
| 1,95 | 8,7214 | 8,7211 | 8,7208 | 8,7205 | 8,7202 | 8,7199 | 8,7196 | 8,7193 | 8,7190 | 8,7187 |
| 1,96 | 8,7185 | 8,7182 | 8,7179 | 8,7176 | 8,7173 | 8,7170 | 8,7167 | 8,7164 | 8,7161 | 8,7158 |
| 1,97 | 8,7155 | 8,7152 | 8,7149 | 8,7146 | 8,7143 | 8,7140 | 8,7138 | 8,7135 | 8,7132 | 8,7129 |
| 1,98 | 8,7126 | 8,7123 | 8,7120 | 8,7117 | 8,7115 | 8,7112 | 8,7109 | 8,7106 | 8,7103 | 8,7100 |
| 1,99 | 8,7096 | 8,7094 | 8,7092 | 8,7089 | 8,7086 | 8,7083 | 8,7080 | 8,7077 | 8,7074 | 8,7071 |

## TABLE I (SUITE).

| ρ. | 0. | 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 7. | 8. | 9. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2,00 | 8,7069 | 8,7066 | 8,7063 | 8,7060 | 8,7057 | 8,7054 | 8,7051 | 8,7049 | 8,7047 | 8,7044 |
| 2,01 | 8,7041 | 8,7038 | 8,7035 | 8,7032 | 8,7029 | 8,7026 | 8,7024 | 8,7021 | 8,7018 | 8,7015 |
| 2,02 | 8,7012 | 8,7009 | 8,7006 | 8,7004 | 8,7002 | 8,6999 | 8,6996 | 8,6993 | 8,6990 | 8,6987 |
| 2,03 | 8,6984 | 8,6982 | 8,6980 | 8,6977 | 8,6974 | 8,6971 | 8,6968 | 8,6965 | 8,6962 | 8,6960 |
| 2,04 | 8,6958 | 8,6955 | 8,6952 | 8,6949 | 8,6946 | 8,6943 | 8,6940 | 8,6938 | 8,6936 | 8,6933 |
| 2,05 | 8,6930 | 8,6927 | 8,6924 | 8,6921 | 8,6919 | 8,6917 | 8,6915 | 8,6912 | 8,6909 | 8,6906 |
| 2,06 | 8.6903 | 8,6900 | 8,6897 | 8,6895 | 8,6893 | 8,6890 | 8,6887 | 8,6884 | 8,6881 | 8,6878 |
| 2,07 | 8,6876 | 8,6874 | 8,6872 | 8,6869 | 8,6866 | 8,6863 | 8,6860 | 8,6857 | 8,6855 | 8,6853 |
| 2,08 | 8,6851 | 8,6848 | 8,6845 | 8,6842 | 8,6839 | 8,6836 | 8,6834 | 8,6832 | 8,6830 | 8,6827 |
| 2,09 | 8,6824 | 8,6821 | 8,6818 | 8,6815 | 8,6813 | 8,6611 | 8,6809 | 8,6806 | 8,6803 | 8,6800 |
| 2,10 | 8,6797 | 8,6795 | 8,6793 | 8,6791 | 8,6789 | 8,6786 | 8,6783 | 8,6780 | 8,6777 | 8,6775 |

## TABLE II.

| $\chi$. | $\log \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\alpha}$. | $\alpha$. |
|---|---|---|
| $0^{0}$ | 0,0000 | c. 0,0 |
| 1 | 0,0000 | 0,0 |
| 2 | 0,0001 | 0,1 |
| 3 | 0,0003 | 0,2 |
| 4 | 0,0005 | 0,3 |
| 5 | 0,0009 | 0,5 |
| 6 | 0,0012 | 0,7 |
| 7 | 0,0016 | 0,9 |
| 8 | 0,0021 | 1,1 |
| 9 | 0,0027 | 1,4 |
| 10 | 0,0033 | 1,8 |
| 11 | 0,0040 | 2,2 |
| 12 | 0,0047 | 2,6 |

## TABLE III.

| $z$. | $\log\varphi z$. | $z$. | $\log\varphi z$. | $z$. | $\log\varphi z$. | $z$. | $\log\varphi z$. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 30 | 0,007 | 50 | 0,045 | 70 | 0,191 |
| | | 31 | 0,008 | 51 | 0,049 | 71 | 0,204 |
| | | 32 | 0,009 | 52 | 0,053 | 72 | 0,218 |
| 13 | 0,000 | 33 | 0,010 | 53 | 0,057 | 73 | 0,233 |
| 14 | 0,001 | 34 | 0,011 | 54 | 0,062 | 74 | 0,249 |
| 15 | 0,001 | 35 | 0,012 | 55 | 0,067 | 75 | 0,268 |
| 16 | 0,001 | 36 | 0,013 | 56 | 0,072 | 76 | 0,288 |
| 17 | 0,001 | 37 | 0,014 | 57 | 0,077 | 77 | 0,309 |
| 18 | 0,002 | 38 | 0,015 | 58 | 0,083 | 78 | 0,333 |
| 19 | 0,003 | 39 | 0,016 | 59 | 0,090 | 79 | 0,359 |
| 20 | 0,003 | 40 | 0,017 | 60 | 0,097 | 80 | 0,388 |
| 21 | 0,003 | 41 | 0,019 | 61 | 0,104 | 81 | 0,428 |
| 22 | 0,003 | 42 | 0,021 | 62 | 0,112 | 82 | 0,484 |
| 23 | 0,004 | 43 | 0,023 | 63 | 0,121 | 83 | 0,549 |
| 24 | 0,004 | 44 | 0,026 | 64 | 1,130 | 84 | 0,616 |
| 25 | 0,005 | 45 | 0,028 | 65 | 0,140 | 85 | 0,684 |
| 26 | 0,005 | 46 | 0,031 | 66 | 0,150 | 86 | 0,754 |
| 27 | 0,006 | 47 | 0,034 | 67 | 0,160 | | |
| 28 | 0,006 | 48 | 0,038 | 68 | 0,170 | | |
| 29 | 0,007 | 49 | 0,041 | 69 | 0,180 | | |

## TABLE IV.

| S. | $k_0$. |
|---|---|
| 0,000000 | — 118,6 s |
| 0,000001 | — 117,8 |
| 0,000002 | — 117,2 |
| 0,000003 | — 116,6 |
| 0,000004 | — 116,2 |
| 0,000005 | — 115,9 |
| 0,000006 | — 115,6 |
| 0,000007 | — 115,4 |
| 0,000008 | — 115,2 |
| 0,000009 | — 115,1 |
| 0,000010 | — 115,0 |

| S. | $k_0$. |
|---|---|
| 0,00 | |
| 0,00001 | — 115,0 s |
| 0,00002 | — 114,4 |
| 0,00003 | — 114,0 |
| 0,00004 | — 113,6 |
| 0,00005 | — 113,3 |
| 0,00006 | — 113,0 |
| 0,00007 | — 112,8 |
| 0,00008 | — 112,5 |
| 0,00009 | — 112,3 |
| 0,00010 | — 112,0 |

## TABLE IV (suite).

| S. | 0. | 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 7. | 8. | 9. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | s | s | s | s | s | s | s | s | s | s |
| 0,000 | —118,6 | —112,0 | —110,8 | —109,7 | —108,7 | —107,8 | —107,0 | —106,3 | —105,7 | —105,1 |
| 0,001 | —104,5 | —104,0 | —103,5 | —103,0 | —102,5 | —102,0 | —101,6 | —101,2 | —100,7 | —100,3 |
| 0,002 | — 99,9 | — 99,5 | — 99,2 | — 98,8 | — 98,4 | — 98,0 | — 97,8 | — 97,5 | — 97,2 | — 96,9 |
| 0,003 | — 96,6 | — 96,3 | — 95,9 | — 95,6 | — 95,3 | — 95,0 | — 94,7 | — 94,4 | — 94,1 | — 93,9 |
| 0,004 | — 93,6 | — 93,3 | — 93,1 | — 92,9 | — 92,6 | — 92,4 | — 92,1 | — 91,9 | — 91,7 | — 91,5 |
| 0,005 | — 91,2 | — 91,0 | — 90,8 | — 90,5 | — 90,3 | — 90,1 | — 89,8 | — 89,6 | — 89,4 | — 89,2 |
| 0,006 | — 89,0 | — 88,8 | — 88,6 | — 88,4 | — 88,2 | — 88,0 | — 87,8 | — 87,6 | — 87,4 | — 87,2 |
| 0,007 | — 87,0 | — 86,8 | — 86,6 | — 86,4 | — 86,2 | — 86,1 | — 85,8 | — 85,6 | — 85,4 | — 85,2 |
| 0,008 | — 85,0 | — 84,8 | — 84,5 | — 84,5 | — 84,3 | — 84,1 | — 83,9 | — 83,7 | — 83,5 | — 85,2 |
| 0,009 | — 83,1 | — 82,9 | — 82,8 | — 82,6 | — 82,5 | — 82,3 | — 82,1 | — 81,9 | — 81,7 | — 81,6 |
| 0,01 | — 81,4 | — 79,9 | — 78,6 | — 77,5 | — 76,6 | — 75,9 | — 75,3 | — 74,8 | — 74,3 | — 73,8 |
| 0,02 | — 73,3 | — 72,8 | — 72,3 | — 71,8 | — 71,4 | — 70,9 | — 70,4 | — 69,9 | — 69,4 | — 69,0 |
| 0,03 | — 68,6 | — 68,1 | — 67,7 | — 67,3 | — 66,9 | — 66,6 | — 66,2 | — 65,8 | — 65,4 | — 65,0 |
| 0,04 | — 64,7 | — 64,3 | — 63,9 | — 63,6 | — 63,3 | — 62,9 | — 62,5 | — 62,2 | — 61,9 | — 61,6 |
| 0,05 | — 61,3 | — 61,0 | — 60,7 | — 60,4 | — 60,0 | — 59,7 | — 59,3 | — 58,9 | — 58,6 | — 58,3 |
| 0,06 | — 58,1 | — 57,9 | — 57,7 | — 57,5 | — 57,2 | — 56,9 | — 56,7 | — 56,4 | — 56,2 | — 56,0 |
| 0,07 | — 55,8 | — 55,5 | — 55,2 | — 54,9 | — 54,7 | — 54,4 | — 54,1 | — 53,9 | — 53,6 | — 53,3 |
| 0,08 | — 53,0 | — 52,7 | — 52,5 | — 52,3 | — 52,1 | — 51,8 | — 51,6 | — 51,4 | — 51,1 | — 50,8 |
| 0,09 | — 50,5 | — 50,2 | — 49,9 | — 49,6 | — 49,3 | — 49,0 | — 48,7 | — 48,4 | — 48,1 | — 47,8 |
| 0,10 | — 47,6 | — 47,4 | — 47,2 | — 47,0 | — 46,7 | — 46,4 | — 46,1 | — 45,9 | — 45,6 | — 45,3 |
| 0,11 | — 45,1 | — 44,9 | — 44,7 | — 44,4 | — 44,1 | — 43,9 | — 43,7 | — 43,5 | — 43,2 | — 42,9 |
| 0,12 | — 42,6 | — 42,4 | — 42,2 | — 41,9 | — 41,6 | — 41,4 | — 41,2 | — 41,0 | — 40,7 | — 40,4 |
| 0,13 | — 40,1 | — 39,9 | — 39,7 | — 39,4 | — 39,1 | — 38,9 | — 38,7 | — 38,5 | — 38,2 | — 38,0 |
| 0,14 | — 37,8 | — 37,5 | — 37,3 | — 37,0 | — 36,8 | — 36,6 | — 36,4 | — 36,2 | — 35,9 | — 35,7 |
| 0,15 | — 35,5 | — 35,2 | — 34,9 | — 34,7 | — 34,5 | — 34,3 | — 34,1 | — 33,9 | — 33,7 | — 33,4 |
| 0,16 | — 33,2 | — 33,0 | — 32,8 | — 32,5 | — 32,3 | — 32,1 | — 31,9 | — 31,7 | — 31,5 | — 31,2 |
| 0,17 | — 31,0 | — 30,8 | — 30,6 | — 30,3 | — 30,1 | — 29,9 | — 29,7 | — 29,5 | — 29,2 | — 29,0 |
| 0,18 | — 28,8 | — 28,6 | — 28,4 | — 28,1 | — 27,9 | — 27,7 | — 27,5 | — 27,3 | — 27,0 | — 26,8 |
| 0,19 | — 26,6 | — 26,4 | — 26,2 | — 25,9 | — 25,7 | — 25,5 | — 25,3 | — 25,1 | — 24,8 | — 24,6 |
| 0,20 | — 24,4 | — 24,2 | — 24,0 | — 23,7 | — 23,5 | — 23,3 | — 23,1 | — 22,9 | — 22,6 | — 22,4 |
| 0,21 | — 22,2 | — 22,0 | — 21,8 | — 21,5 | — 21,3 | — 21,1 | — 20,9 | — 20,7 | — 20,5 | — 20,3 |
| 0,22 | — 20,1 | — 19,8 | — 19,6 | — 19,4 | — 19,2 | — 19,0 | — 18,8 | — 18,6 | — 18,4 | — 18,2 |
| 0,23 | — 18,0 | — 17,7 | — 17,5 | — 17,3 | — 17,1 | — 16,9 | — 16,7 | — 16,5 | — 16,3 | — 16,1 |
| 0,24 | — 15,9 | — 15,7 | — 15,5 | — 15,3 | — 15,1 | — 14,9 | — 14,7 | — 14,5 | — 14,3 | — 14,1 |

## TABLE IV (SUITE).

| S. | 0. | 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 7. | 8. | 9. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | s | s | s | s | s | s | s | s | s | s |
| 0,25 | − 13,8 | − 13,6 | − 13,4 | − 13,2 | − 13,0 | − 12,8 | − 12,6 | − 12,4 | − 12,2 | − 12,0 |
| 0,26 | − 11,7 | − 11,5 | − 11,3 | − 11,1 | − 10,9 | − 10,7 | − 10,5 | − 10,3 | − 10,1 | − 9,9 |
| 0,27 | − 9,7 | − 9,5 | − 9,3 | − 9,1 | − 8,9 | − 8,7 | − 8,5 | − 8,3 | − 8,1 | − 7,9 |
| 0,28 | − 7,6 | − 7,4 | − 7,2 | − 7,0 | − 6,8 | − 6,6 | − 6,4 | − 6,2 | − 6,0 | − 5,8 |
| 0,29 | − 5,6 | − 5,4 | − 5,2 | − 5,0 | − 4,8 | − 4,6 | − 4,4 | − 4,2 | − 4,0 | − 3,8 |
| 0,30 | − 3,5 | − 3,3 | − 3,1 | − 2,9 | − 2,7 | − 2,5 | − 2,3 | − 2,1 | − 1,9 | − 1,7 |
| 0,31 | − 1,5 | − 1,3 | − 1,1 | − 0,9 | − 0,8 | − 0,6 | − 0,4 | − 0,2 | 0,0 | + 0,2 |
| 0,32 | + 0,4 | + 0,6 | + 0,8 | + 1,0 | + 1,2 | + 1,4 | + 1,6 | + 1,8 | + 1,9 | + 2,1 |
| 0,33 | + 2,3 | + 2,5 | + 2,7 | + 2,9 | + 3,1 | + 3,3 | + 3,5 | + 3,7 | + 3,9 | + 4,1 |
| 0,34 | + 4,3 | + 4,4 | + 4,6 | + 4,8 | + 5,0 | + 5,2 | + 5,4 | + 5,6 | + 5,8 | + 6,0 |
| 0,35 | + 6,2 | + 6,3 | + 6,5 | + 6,7 | + 6,9 | + 7,1 | + 7,3 | + 7,5 | + 7,7 | + 7,9 |
| 0,36 | + 8,1 | + 8,3 | + 8,5 | + 8,7 | + 8,9 | + 9,0 | + 9,2 | + 9,4 | + 9,6 | + 9,8 |
| 0,37 | + 10,0 | + 10,2 | + 10,4 | + 10,6 | + 10,8 | + 10,9 | + 11,1 | + 11,3 | + 11,5 | + 11,7 |
| 0,38 | + 11,9 | + 12,1 | + 12,3 | + 12,5 | + 12,6 | + 12,8 | + 13,0 | + 13,2 | + 13,4 | + 13,5 |
| 0,39 | + 13,7 | + 13,9 | + 14,1 | + 14,3 | + 14,5 | + 14,7 | + 14,8 | + 15,0 | + 15,2 | + 15,4 |
| 0,40 | + 15,7 | + 15,9 | + 16,1 | + 16,3 | + 16,5 | + 16,7 | + 16,9 | + 17,1 | + 17,2 | + 17,4 |
| 0,41 | + 17,6 | + 17,8 | + 18,0 | + 18,2 | + 18,4 | + 18,6 | + 18,8 | + 19,0 | + 19,1 | + 19,3 |
| 0,42 | + 19,5 | + 19,7 | + 19,9 | + 20,1 | + 20,3 | + 20,5 | + 20,7 | + 20,9 | + 21,0 | + 21,2 |
| 0,43 | + 21,4 | + 21,6 | + 21,8 | + 22,0 | + 22,2 | + 22,3 | + 22,5 | + 22,7 | + 22,8 | + 23,0 |
| 0,44 | + 23,2 | + 23,4 | + 23,6 | + 23,8 | + 24,0 | + 24,1 | + 24,3 | + 24,5 | + 24,7 | + 24,9 |
| 0,45 | + 25,1 | + 25,2 | + 25,4 | + 25,6 | + 25,8 | + 26,0 | + 26,2 | + 26,4 | + 26,6 | + 26,8 |
| 0,46 | + 27,0 | + 27,1 | + 27,3 | + 27,5 | + 27,7 | + 27,9 | + 28,1 | + 28,3 | + 28,5 | + 28,7 |
| 0,47 | + 28,9 | + 29,0 | + 29,2 | + 29,4 | + 29,6 | + 29,8 | + 30,0 | + 30,2 | + 30,3 | + 30,5 |
| 0,48 | + 30,7 | + 30,8 | + 31,0 | + 31,2 | + 31,4 | + 31,6 | + 31,8 | + 32,0 | + 32,1 | + 32,3 |
| 0,49 | + 32,5 | + 32,7 | + 32,8 | + 33,0 | + 33,2 | + 33,4 | + 33,6 | + 33,8 | + 34,0 | + 34,2 |
| 0,5 | + 34,4 | + 36,3 | + 38,2 | + 40,2 | + 41,9 | + 43,7 | + 45,6 | + 47,5 | + 49,4 | + 51,3 |
| 0,6 | + 53,1 | + 54,9 | + 56,8 | + 58,8 | + 60,7 | + 62,6 | + 64,5 | + 66,4 | + 68,4 | + 70,3 |
| 0,7 | + 72,3 | + 74,2 | + 76,2 | + 78,2 | + 80,3 | + 82,3 | + 84,4 | + 86,5 | + 88,5 | + 90,6 |
| 0,8 | + 92,7 | + 94,9 | + 97,1 | + 99,4 | +101,6 | +103,8 | +106,1 | +108,4 | +110,7 | +113,2 |
| 0,9 | +115,8 | +118,5 | | | | | | | | |

## TABLE V (ARGUMENT $-k$).

| $k$. | 180°. 0°. | 170°. 10°. | 160°. 20°. | 150°. 30°. | 140°. 40°. | 130°. 50°. | 120°. 60°. | 110°. 70°. | 100°. 80°. | 90°. 90°. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| s | s | s | s | s | s | s | s | s | s | s |
| — 0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 |
| — 10 | 0,0 | 0,1 | 0,2 | 0,4 | 0,8 | 1,1 | 1,4 | 1,6 | 1,7 | 1,7 |
| — 20 | 0,0 | 0,2 | 0,4 | 0,9 | 1,6 | 2,2 | 2,7 | 3,1 | 3,4 | 3,5 |
| — 30 | 0,0 | 0,3 | 0,6 | 1,5 | 2,4 | 3,3 | 4,1 | 4,7 | 5,0 | 5,2 |
| — 40 | 0,0 | 0,4 | 0,9 | 2,0 | 3,1 | 4,4 | 5,5 | 6,3 | 6,6 | 6,9 |
| — 50 | 0,0 | 0,5 | 1,2 | 2,5 | 3,9 | 5,4 | 6,8 | 7,8 | 8,3 | 8,6 |
| — 60 | 0,0 | 0,6 | 1,5 | 3,1 | 4,7 | 6,5 | 8,1 | 9,4 | 10,1 | 10,3 |
| — 70 | 0,1 | 0,8 | 1,8 | 3,6 | 5,5 | 7,5 | 9,5 | 11,0 | 11,9 | 12,1 |
| — 80 | 0,1 | 0,9 | 2,1 | 4,2 | 6,3 | 8,6 | 10,9 | 12,6 | 13,7 | 13,9 |
| — 90 | 0,1 | 1,1 | 2,3 | 4,6 | 7,0 | 9,7 | 12,3 | 14,2 | 15,5 | 15,7 |
| —100 | 0,1 | 1,2 | 2,5 | 5,1 | 7,8 | 10,7 | 13,7 | 15,8 | 17,3 | 17,5 |
| —110 | 0,1 | 1,3 | 2,8 | 5,6 | 8,5 | 11,8 | 15,1 | 17,4 | 19,1 | 19,3 |
| —120 | 0,1 | 1,4 | 3,1 | 6,1 | 9,3 | 12,9 | 16,5 | 19,1 | 20,9 | 21,1 |

## TABLE VI (ARGUMENT $+k$).

| $k$. | 180°. 0°. | 170°. 10°. | 160°. 20°. | 150°. 30°. | 140°. 40°. | 130°. 50°. | 120°. 60°. | 110°. 70°. | 100°. 80°. | 90°. 90°. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| s | s | s | s | s | s | s | s | s | s | s |
| 0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 |
| + 10 | 0,0 | 0,1 | 0,2 | 0,4 | 0,8 | 1,1 | 1,3 | 1,5 | 1,7 | 1,7 |
| + 20 | 0,0 | 0,2 | 0,4 | 0,9 | 1,5 | 2,1 | 2,7 | 3,0 | 3,2 | 3,3 |
| + 30 | 0,0 | 0,3 | 0,6 | 1,4 | 2,2 | 3,0 | 3,9 | 4,5 | 4,8 | 5,0 |
| + 40 | 0,0 | 0,4 | 0,9 | 1,9 | 2,9 | 4,0 | 5,2 | 6,0 | 6,3 | 6,7 |
| + 50 | 0,0 | 0,5 | 1,1 | 2,3 | 3,6 | 5,0 | 6,4 | 7,3 | 7,9 | 8,4 |
| + 60 | 0,0 | 0,6 | 1,4 | 2,8 | 4,3 | 6,0 | 7,6 | 8,8 | 9,4 | 10,0 |

## TABLE VII.

| C. | $h$. | $\delta h$. |
|---|---|---|
| ° | s | s |
| 0 | 64,9 | 10,0 |
| 10 | 65,0 | 10,1 |
| 20 | 65,5 | 10,2 |
| 30 | 66,3 | 10,3 |
| 40 | 67,2 | 10,4 |
| 50 | 68,4 | 10,5 |
| 60 | 69,5 | 10,6 |
| 70 | 70,4 | 10,7 |
| 80 | 71,1 | 10,8 |
| 90 | 71,3 | 10,9 |

## TABLE VIII.

| $u$. | $g$. | $u$. | $g$. |
|---|---|---|---|
| s | | s | |
| + 5 | 0,2 | 103 | 1,2 |
| + 8 | 0,3 | 109 | 1,3 |
| —12 | 0,4 | 113 | 1,4 |
| 26 | 0,5 | 116 | 1,5 |
| 40 | 0,6 | 118 | 1,6 |
| 53 | 0,7 | 120 | 1,7 |
| 65 | 0,8 | 121 | 1,8 |
| 76 | 0,9 | 122 | 1,9 |
| 86 | 1,0 | 123 | 2,0 |
| 95 | 1,1 | 124 | 2,1 |