ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

P. DUHEM

Recherches sur l'hydrodynamique

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 2e série, tome 5, nº 4 (1903), p. 353-404

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1903_2_5_4_353_0>

RECHERCHES SUR L'HYDRODYNAMIQUE,

Par M. P. DUHEM.

CINQUIÈME PARTIE.

LE THÉORÈME DE LAGRANGE ET LES CONDITIONS AUX LIMITES.

CHAPITRE I.

LE THÉORÈME DE LAGRANGE ET LES LIQUIDES VISQUEUX.

§ 1. — Extension du théorème de Lagrange aux fluides incompressibles visqueux.

On sait que Lagrange a énoncé, pour les fluides non visqueux, le théorème suivant, auquel il est d'usage de donner son nom :

Si, pour une masse matérielle élémentaire du fluide, les trois quantités

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \omega_x &= \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \\ \omega_y &= \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \\ \omega_z &= \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned}\right.$$

sont égales à o *à un instant quelconque du mouvement, elles restent égales à* o *pendant toute la durée du mouvement.*

Tout le monde connaît la belle démonstration que Cauchy a donnée de ce théorème, en prenant pour point de départ les équations hydrodynamiques de Lagrange, et la démonstration non moins élégante qu'en a donnée W. Thomson, au moyen des équations hydrodynamiques d'Euler.

Le théorème de Lagrange s'étend-il aux fluides visqueux? On a longtemps admis qu'il n'en était rien.

En 1869, de Saint-Venant [1] montra le premier que ce théorème pouvait s'étendre aux fluides visqueux; sa démonstration, qu'on pourrait peut-être souhaiter plus rigoureuse, s'étendait à tous les fluides; mais elle supposait que les rapports $\frac{\lambda(\rho, T)}{\rho}$, $\frac{\mu(\rho, T)}{\rho}$ étaient des constantes, ce qui n'est probablement vrai que dans les mouvements isothermiques des fluides incompressibles. En 1880, Bresse [2], sans connaître le travail de Saint-Venant, dont il reconnut bientôt la priorité [3], reprit une démonstration analogue. En 1893, M. H. Poincaré [4] donna, dans le même sens, de brèves indications. Enfin, en 1901, M. Hadamard publia [5] l'énoncé de ce théorème, dont il avait donné la démonstration dans son Cours du Collège de France.

Les démonstrations données par de Saint-Venant et par Bresse laissent peut-être quelque peu à désirer au point de vue de la rigueur.

Les brèves indications de M. Poincaré ne constituent pas une démonstration et M. Hadamard n'a pas publié jusqu'ici la démonstration qu'il a obtenue; nous allons donc faire connaître celle que nous avons donnée dans notre Cours, à la Faculté des Sciences de Bordeaux, pendant l'année scolaire 1900-1901.

Formons $\frac{\partial \omega_x}{\partial t}$.

Selon la première égalité (1), nous aurons

$$\frac{\partial \omega_x}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial t}.$$

Mais

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z},$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}.$$

On a donc

$$\begin{aligned}\frac{\partial \omega_x}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{dw}{dt} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{dv}{dt} - \frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right)\\ + \frac{\partial}{\partial z}\left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right)\end{aligned}$$

---

(1) De Saint-Venant, *Problème des mouvements que peuvent prendre les divers points d'une masse liquide, ou solide ductile, contenue dans un vase à parois verticales, pendant son écoulement par un orifice horizontal inférieur* (*Comptes rendus*, t. LXVIII, 1869, p. 221).

(2) Bresse, *Fonction des vitesses, extension des théorèmes de Lagrange au cas d'un fluide imparfait* (*Comptes rendus*, t. XC, 1880, p. 501).

(3) Bresse, *Réponse à une Note de M. Boussinesq* (*Comptes rendus*, t. XC, 1880, p. 857).

(4) H. Poincaré, *Théorie des tourbillons*, p. 193. Paris, 1893.

(5) J. Hadamard, *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XXIX, 1901.

ou bien, en tenant compte des égalités (1) et en posant

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$(2) \qquad \frac{\partial \omega_x}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{dw}{dt} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{dv}{dt} - \omega_x \theta + \omega_x \frac{\partial u}{\partial x} + \omega_y \frac{\partial u}{\partial y} + \omega_z \frac{\partial u}{\partial z} - u\frac{\partial \omega_x}{\partial x} - v\frac{\partial \omega_x}{\partial y} - w\frac{\partial \omega_x}{\partial z}.$$

Les quantités $\frac{\partial \omega_y}{\partial t}$, $\frac{\partial \omega_z}{\partial t}$ sont susceptibles d'expressions analogues.

Ces expressions sont d'origine purement cinématique; elles sont donc entièrement générales.

Nous allons maintenant faire appel à des considérations dynamiques qui restreindront singulièrement la portée de nos raisonnements.

Nous supposerons que le cas étudié est un des cas, définis au Chapitre III de la première Partie, où il existe une fonction $\Lambda(x, y, z, t)$. Les équations de l'hydrodynamique prendront alors la forme [Ire Partie, égalités (157)]

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \Lambda}{\partial x} + \frac{du}{dt} - \frac{q_x}{\rho} &= 0, \\ \frac{\partial \Lambda}{\partial y} + \frac{dv}{dt} - \frac{q_y}{\rho} &= 0, \\ \frac{\partial \Lambda}{\partial z} + \frac{dw}{dt} - \frac{q_z}{\rho} &= 0. \end{aligned} \right.$$

Supposons tout d'abord que le fluide soit *non visqueux;* on aura

$$q_x = 0, \qquad q_y = 0, \qquad q_z = 0,$$

et les égalités (3) donneront

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y}\frac{dw}{dt} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{dv}{dt} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial z}\frac{du}{dt} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{dw}{dt} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial x}\frac{dv}{dt} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{du}{dt} &= 0. \end{aligned} \right.$$

Supposons maintenant que le fluide soit *non visqueux* et *quelconque* ou bien qu'il soit *visqueux,* mais qu'il soit *incompressible* et que *sa température soit, à chaque instant, uniforme;* ρ et T étant, dans ce dernier cas, indépendants de x, y, z, nous aurons [Ire Partie, égalités (58)]

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{q_x}{\rho} = \dfrac{\lambda+\mu}{\rho}\dfrac{\partial\theta}{\partial x} + \dfrac{\mu}{\rho}\Delta u, \\ \dfrac{q_y}{\rho} = \dfrac{\lambda+\mu}{\rho}\dfrac{\partial\theta}{\partial y} + \dfrac{\mu}{\rho}\Delta v, \\ \dfrac{q_z}{\rho} = \dfrac{\lambda+\mu}{\rho}\dfrac{\partial\theta}{\partial z} + \dfrac{\mu}{\rho}\Delta w \end{cases}$$

et ces égalités peuvent encore s'écrire dans le premier cas, car alors les deux membres sont identiquement nuls.

Les égalités (3) et (5) donnent alors les égalités

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{dw}{dt} - \dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{\mu}{\rho}\Delta\omega_x, \\ \dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{du}{dt} - \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{dw}{dt} = \dfrac{\mu}{\rho}\Delta\omega_y, \\ \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{dv}{dt} - \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{du}{dt} = \dfrac{\mu}{\rho}\Delta\omega_z, \end{cases}$$

qui renferment les égalités (4) comme cas particuliers.

En vertu de ces égalités (6), les égalités (2) deviennent

$$(7)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\omega_x}{\partial t} = -\theta\omega_x + \dfrac{\partial u}{\partial x}\omega_x + \dfrac{\partial u}{\partial y}\omega_y + \dfrac{\partial u}{\partial z}\omega_z - u\dfrac{\partial\omega_x}{\partial x} - v\dfrac{\partial\omega_x}{\partial y} - w\dfrac{\partial\omega_x}{\partial z} + \dfrac{\mu}{\rho}\Delta\omega_x, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Ces égalités (7) conduisent immédiatement au théorème suivant :

Si l'on a, à l'instant t_0, pour tout point intérieur à un volume fini E,

$$(8)\qquad \omega_x = 0, \qquad \omega_y = 0, \qquad \omega_z = 0,$$

on aura aussi à l'instant t_0, pour tout point intérieur à ce volume E,

$$(9)\qquad \frac{\partial\omega_x}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial\omega_y}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial\omega_z}{\partial t} = 0.$$

Il est clair, d'ailleurs, qu'en tout point du domaine E, les dérivées des divers ordres par rapport à x, y, z de $\dfrac{\partial\omega_x}{\partial t}$, $\dfrac{\partial\omega_y}{\partial t}$, $\dfrac{\partial\omega_z}{\partial t}$, sont égales à 0.

Nous allons démontrer maintenant le théorème suivant :

Supposons qu'à l'instant t_0 et pour tous les points intérieurs au volume E, *les quantités*

$$\begin{matrix} \omega_x, & \dfrac{\partial \omega_x}{\partial t}, & \ldots, & \dfrac{\partial^n \omega_x}{\partial t^n}, \\ \omega_y, & \dfrac{\partial \omega_y}{\partial t}, & \ldots, & \dfrac{\partial^n \omega_y}{\partial t^n}, \\ \omega_z, & \dfrac{\partial \omega_z}{\partial t}, & \ldots, & \dfrac{\partial^n \omega_z}{\partial t^n}, \end{matrix}$$

soient toutes égales à 0, *cas auquel il en est de même des dérivées de tous ordres de ces quantités par rapport à x, y, z. Nous aurons aussi à l'instant t_0 et en tout point intérieur au volume* E,

$$(10) \qquad \frac{\partial^{n+1} \omega_x}{\partial t^{n+1}} = 0, \qquad \frac{\partial^{n+1} \omega_y}{\partial t^{n+1}} = 0, \qquad \frac{\partial^{n+1} \omega_z}{\partial t^{n+1}} = 0.$$

Pour démontrer cette proposition, il suffit de différentier n fois par rapport à t les égalités (7); tandis que les premiers membres deviennent identiques aux premiers membres des égalités (10), les seconds membres deviennent des fonctions linéaires et homogènes des diverses dérivées que nous savons être nulles.

En réunissant les deux théorèmes que nous venons de démontrer, nous parvenons à la proposition suivante :

Si l'on a, à l'instant t_0, pour tout point intérieur au volume fini E,

$$(8) \qquad \omega_x = 0, \qquad \omega_y = 0, \qquad \omega_z = 0,$$

les dérivées partielles de tous les ordres, par rapport à x, y, z, t de ω_x, ω_y, ω_z sont nulles à l'instant t_0, en tout point intérieur au volume E.

La formule

$$\frac{d\omega_x}{dt} = \frac{\partial \omega_x}{\partial t} + u\frac{\partial \omega_x}{\partial x} + v\frac{\partial \omega_x}{\partial y} + w\frac{\partial \omega_x}{\partial z}$$

nous montre que $\dfrac{d\omega_x}{dt}$ s'exprime en fonction linéaire et homogène des dérivées partielles du premier ordre de ω_x.

Nous allons maintenant démontrer le théorème suivant :

Si $\dfrac{d^n \omega_x}{dt^n}$ s'exprime en fonction linéaire et homogène des dérivées partielles des n premiers ordres de ω_x, $\dfrac{d^{n+1} \omega_x}{dt^{n+1}}$ s'exprime en fonction linéaire et homogène des dérivées partielles des $(n+1)$ premiers ordres de ω_x.

On a, en effet,

$$\frac{d^{n+1}\omega_x}{dt^{n+1}} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{d^n\omega_x}{dt^n} + u\frac{\partial}{\partial x}\frac{d^n\omega_x}{dt^n} + v\frac{\partial}{\partial y}\frac{d^n\omega_x}{dt^n} + w\frac{\partial}{\partial z}\frac{d^n\omega_x}{dt^n}.$$

Mais, par hypothèse,

$$\frac{d^n\omega_x}{dt^n} = \sum \mathrm{A}_{pqrs}\frac{\partial^{p+q+r+s}\omega_x}{\partial x^p\,\partial y^q\,\partial z^r\,\partial t^s} \qquad (p+q+r+s \leqq n).$$

On a donc

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{d^n\omega_x}{dt^n} = \sum\left(\mathrm{A}_{pqrs}\frac{\partial^{p+q+r+s+1}\omega_x}{\partial x^{p+1}\,\partial y^q\,\partial z^r\,\partial t^s} + \frac{\partial \mathrm{A}_{pqrs}}{\partial x}\frac{\partial^{p+q+r+s}\omega_x}{\partial x^p\,\partial y^q\,\partial z^r\,\partial t^s}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{d^n\omega_x}{dt^n} = \sum\left(\mathrm{A}_{pqrs}\frac{\partial^{p+q+r+s+1}\omega_x}{\partial x^p\,\partial y^{q+1}\,\partial z^r\,\partial t^s} + \frac{\partial \mathrm{A}_{pqrs}}{\partial y}\frac{\partial^{p+q+r+s}\omega_x}{\partial x^p\,\partial y^q\,\partial z^r\,\partial t^s}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{d^n\omega_x}{dt^n} = \sum\left(\mathrm{A}_{pqrs}\frac{\partial^{p+q+r+s+1}\omega_x}{\partial x^p\,\partial y^q\,\partial z^{r+1}\,\partial t^s} + \frac{\partial \mathrm{A}_{pqrs}}{\partial z}\frac{\partial^{p+q+r+s}\omega_x}{\partial x^p\,\partial y^q\,\partial z^r\,\partial t^s}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{d^n\omega_x}{dt^n} = \sum\left(\mathrm{A}_{pqrs}\frac{\partial^{p+q+r+s+1}\omega_x}{\partial x^p\,\partial y^q\,\partial z^r\,\partial t^{s+1}} + \frac{\partial \mathrm{A}_{pqrs}}{\partial t}\frac{\partial^{p+q+r+s}\omega_x}{\partial x^p\,\partial y^q\,\partial z^r\,\partial t^s}\right).$$

Le théorème énoncé est alors évident.

On en tire de suite la proposition que voici :

Les quantités $\frac{d^n\omega_x}{dt^n}$, $\frac{d^n\omega_y}{dt^n}$, $\frac{d^n\omega_z}{dt^n}$ *s'expriment, quel que soit n, en fonctions linéaires et homogènes des dérivées partielles jusqu'à l'ordre n de* ω_x, ω_y, ω_z.

Cette proposition, rapprochée de celle que nous avons précédemment démontrée, entraîne cette autre :

Si l'on a à l'instant t_0, *pour tous les points intérieurs à un certain espace* E,

$$(8) \qquad \omega_x = 0, \qquad \omega_y = 0, \qquad \omega_z = 0,$$

on a aussi au même instant, pour les mêmes points et quel que soit n,

$$(11) \qquad \frac{d^n\omega_x}{dt^n} = 0, \qquad \frac{d^n\omega_y}{dt^n} = 0, \qquad \frac{d^n\omega_z}{dt^n} = 0.$$

Passons maintenant des notations d'Euler aux notations de Lagrange. Soient a, b, c, à l'instant initial t_0, les coordonnées d'un point matériel appartenant au fluide; ses coordonnées x, y, z, à l'instant t, seront des fonctions de a, b, c, t :

$$x = x(a, b, c, t),$$
$$y = y(a, b, c, t),$$
$$z = z(a, b, c, t).$$

Considérons les points matériels qui, à l'instant t_0, se trouvent à l'intérieur du volume E; supposons que pour ces points matériels, entre les instants t_0, t_1, les fonctions $x(a, b, c, t)$, $y(a, b, c, t)$, $z(a, b, c, t)$ soient des fonctions analytiques de a, b, c, t.

Les égalités

$$u = \frac{\partial x(a, b, c, t)}{\partial t}, \qquad v = \frac{\partial y(a, b, c, t)}{\partial t}, \qquad w = \frac{\partial z(a, b, c, t)}{\partial t}$$

montrent qu'il en est de même de $u(a, b, c, t)$, $v(a, b, c, t)$, $w(a, b, c, t)$.

On a, d'ailleurs,

$$\begin{aligned}\omega_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = {} & \frac{\partial w}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial y} \\ & - \frac{\partial v}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial z}\end{aligned}$$

ou bien, selon les égalités (239) de la deuxième Partie de ces *Recherches*,

$$\begin{aligned}\omega_x = \frac{1}{\omega} \Bigg[& \frac{D(z, x)}{D(b, c)}\frac{\partial w}{\partial a} + \frac{D(z, x)}{D(c, a)}\frac{\partial w}{\partial b} + \frac{D(z, x)}{D(a, b)}\frac{\partial w}{\partial c} \\ & - \frac{D(x, y)}{D(b, c)}\frac{\partial v}{\partial a} - \frac{D(x, y)}{D(c, a)}\frac{\partial v}{\partial b} - \frac{D(x, y)}{D(a, b)}\frac{\partial v}{\partial c}\Bigg].\end{aligned}$$

De cette égalité et de deux égalités analogues relatives à ω_y, ω_z, il résulte que, pour les points considérés et pendant le temps considéré, ω_x, ω_y, ω_z sont des fonctions analytiques de a, b, c, t.

Cela posé, supposons que, pour chacun des points considérés et à l'instant t_0, nous ayons

$$(8) \qquad \omega_x = 0, \qquad \omega_y = 0, \qquad \omega_z = 0.$$

D'après ce que nous avons vu, nous aurons pour les mêmes points, au même instant et quel que soit n,

$$(11) \qquad \left\{\begin{aligned} & \frac{\partial^n}{\partial t^n}\omega_x(a, b, c, t) = 0, \\ & \frac{\partial^n}{\partial t^n}\omega_y(a, b, c, t) = 0, \\ & \frac{\partial^n}{\partial t^n}\omega_z(a, b, c, t) = 0, \end{aligned}\right.$$

en sorte que, pour ces mêmes points matériels, les égalités (8) demeureront constamment vérifiées entre les instants t_0 et t_1. D'où la proposition suivante :

Si, à un instant donné t_0, les trois rotations sont nulles pour tous les points matériels qui remplissent un certain volume fini, elles demeureront nulles pour ces mêmes points tant que les coordonnées de chacun d'eux s'exprimeront en fonctions analytiques des variables de Lagrange.

Peut-il arriver que, pour un point matériel M, pris parmi ceux que nous venons d'étudier, les quantités ω_x, ω_y, ω_z cessent d'être toutes trois égales à o à partir d'un certain instant t_1, postérieur à t_0? Il faudra pour cela qu'au moment où l'on traverse l'instant t_1, les coordonnées $x(a, b, c, t)$, $y(a, b, c, t)$, $z(a, b, c, t)$ du point M cessent de varier analytiquement avec t; il faudra donc qu'à l'instant t le mouvement de tous les points d'une masse d'étendue finie, dont fait partie le point M, cesse d'être analytique, ou bien que le point M se trouve sur une surface singulière, ou sur une ligne singulière, ou en un point singulier.

Examinons d'abord le cas où, à l'instant t, le point M se trouverait sur une surface singulière.

D'après ce que nous avons vu en la seconde Partie de ces *Recherches,* il existe deux sortes de surfaces singulières. Les surfaces de la première sorte passent sans cesse par les mêmes points matériels : elles peuvent se rencontrer en tous les fluides, sauf au sein des fluides visqueux, incompressibles et bons conducteurs de la chaleur. Les surfaces de la deuxième sorte *se propagent;* elles ne peuvent se rencontrer qu'au sein des fluides compressibles parfaits; ce sont ou bien des ondes de choc ou bien des ondes longitudinales.

Pour que le point M pût se trouver à l'instant t_1 sur une onde de la première sorte, il faudrait qu'il s'y trouvât à l'instant t_0, ce que nous ne supposerons pas; il nous reste donc à supposer que le fluide est compressible et parfait et à examiner ce qui arrive si une surface singulière, en se propageant, rencontre à l'instant t_1 le point M; *nous supposerons, d'ailleurs, qu'aucune onde de choc ne parcoure le milieu,* en sorte que la surface singulière considérée sera une onde au moins du premier ordre par rapport à u, v, w, et longitudinale.

Reprenons les notations employées aux Chapitres III et IV de la première Partie.

Lorsque le temps t s'approche de t_1 par valeurs inférieures à t_1, u, v, w tendent vers des limites u_1, v_1, w_1; ω_x, ω_y, ω_z tendent vers des limites

$$\omega_{x1} = \frac{\partial w_1}{\partial y} - \frac{\partial v_1}{\partial z}, \qquad \omega_{y1} = \frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial w_1}{\partial x}, \qquad \omega_{z1} = \frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y}.$$

Lorsque le temps t s'approche de t_1 par valeurs supérieures à t_1, u, v, w tendent vers des limites u_2, v_2, w_2; ω_x, ω_y, ω_z tendent vers des limites

$$\omega_{x2} = \frac{\partial w_2}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}, \qquad \omega_{y2} = \frac{\partial u_2}{\partial z} - \frac{\partial w_2}{\partial x}, \qquad \omega_{z2} = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial y}.$$

Mais l'onde étant au moins du premier ordre par rapport à u, v, w, il existe un vecteur (l_0, m_0, n_0) tel que l'on ait [I^re Partie, égalités (211)]

$$\frac{\partial(w_2 - w_1)}{\partial y} = \beta n_0, \qquad \frac{\partial(v_2 - v_1)}{\partial z} = \gamma m_0,$$
$$\frac{\partial(u_2 - u_1)}{\partial z} = \gamma l_0, \qquad \frac{\partial(w_2 - w_1)}{\partial x} = \alpha n_0,$$
$$\frac{\partial(v_2 - v_1)}{\partial x} = \alpha m_0, \qquad \frac{\partial(u_2 - u_1)}{\partial y} = \beta l_0$$

et, par conséquent,

$$\omega_{x2} - \omega_{x1} = \beta n_0 - \gamma m_0,$$
$$\omega_{y2} - \omega_{y1} = \gamma l_0 - \alpha n_0,$$
$$\omega_{z2} - \omega_{z1} = \alpha m_0 - \beta l_0.$$

Mais l'onde étant longitudinale, on a [*loc. cit.*, égalités (223)]

$$\frac{l_0}{\alpha} = \frac{m_0}{\beta} = \frac{n_0}{\gamma}.$$

On a donc

$$(12) \qquad \omega_{x2} = \omega_{x1}, \qquad \omega_{y2} = \omega_{y1}, \qquad \omega_{z2} = \omega_{z1}.$$

Comme on a, par hypothèse,

$$\omega_{x1} = 0, \qquad \omega_{y1} = 0, \qquad \omega_{z1} = 0,$$

on aura aussi

$$(13) \qquad \omega_{x2} = 0, \qquad \omega_{y2} = 0, \qquad \omega_{z2} = 0.$$

Selon les égalités (12), l'onde considérée est onde au moins du premier ordre pour ω_x, ω_y, ω_z; il existe donc trois quantités Ω_x, Ω_y, Ω_z telles que l'on ait

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial(\omega_{x2} - \omega_{x1})}{\partial x} = \alpha \Omega_x, \qquad \dfrac{\partial(\omega_{x2} - \omega_{x1})}{\partial y} = \beta \Omega_x, \qquad \dfrac{\partial(\omega_{x2} - \omega_{x1})}{\partial z} = \gamma \Omega_x, \\ \qquad\qquad \dfrac{\partial(\omega_{x2} - \omega_{x1})}{\partial t} + \mathfrak{N} \Omega_x = 0, \end{array} \right.$$

et deux autres groupes analogues.

D'autre part, comme le fluide considéré est un fluide parfait, l'égalité (7), vérifiée en tout point du fluide, devient simplement

$$(15)\qquad \frac{\partial\omega_x}{\partial t}+u\frac{\partial\omega_x}{\partial x}+v\frac{\partial\omega_x}{\partial y}+w\frac{\partial\omega_x}{\partial z}=-\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\omega_x+\frac{\partial u}{\partial y}\omega_y+\frac{\partial u}{\partial z}\omega_z.$$

Les égalités (14) et (15) montrent sans peine que l'on a, en tout point de l'onde,

$$\begin{aligned}&(\alpha u+\beta v+\gamma w-\mathfrak{N})\Omega_x\\&\quad=-\left[\frac{\partial(v_2-v_1)}{\partial y}+\frac{\partial(w_2-w_1)}{\partial z}\right]\omega_x+\frac{\partial(u_2-u_1)}{\partial y}\omega_y+\frac{\partial(u_2-u_1)}{\partial z}\omega_z.\end{aligned}$$

Jointe aux égalités (13), cette égalité donne

$$(\alpha u+\beta v+\gamma w-\mathfrak{N})\Omega_x=0.$$

Or, l'onde considérée se propage, en sorte que $(\alpha u+\beta v+\gamma w-\mathfrak{N})$ est assurément différent de 0; on a donc

$$\Omega_x=0$$

ou bien, en vertu des égalités (14),

$$(16)\qquad \frac{\partial\omega_{x2}}{\partial x}=\frac{\partial\omega_{x1}}{\partial x},\qquad \frac{\partial\omega_{x2}}{\partial y}=\frac{\partial\omega_{x1}}{\partial y},\qquad \frac{\partial\omega_{x2}}{\partial z}=\frac{\partial\omega_{x1}}{\partial z},\qquad \frac{\partial\omega_{x2}}{\partial t}=\frac{\partial\omega_{x1}}{\partial t},$$

et comme on a, par hypothèse,

$$\frac{\partial\omega_{x1}}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial\omega_{x1}}{\partial y}=0,\qquad \frac{\partial\omega_{x1}}{\partial z}=0,\qquad \frac{\partial\omega_{x1}}{\partial t}=0,$$

on obtient le premier groupe d'égalités

$$(17)\qquad \left\{\begin{array}{llll}\dfrac{\partial\omega_{x2}}{\partial x}=0, & \dfrac{\partial\omega_{x2}}{\partial y}=0, & \dfrac{\partial\omega_{x2}}{\partial z}=0, & \dfrac{\partial\omega_{x2}}{\partial t}=0,\\[2ex] \dfrac{\partial\omega_{y2}}{\partial x}=0, & \dfrac{\partial\omega_{y2}}{\partial y}=0, & \dfrac{\partial\omega_{y2}}{\partial z}=0, & \dfrac{\partial\omega_{y2}}{\partial t}=0,\\[2ex] \dfrac{\partial\omega_{z2}}{\partial x}=0, & \dfrac{\partial\omega_{z2}}{\partial y}=0, & \dfrac{\partial\omega_{z2}}{\partial z}=0, & \dfrac{\partial\omega_{z2}}{\partial t}=0.\end{array}\right.$$

Les deux autres groupes se démontrent d'une manière analogue.

Nous allons étendre ces égalités aux valeurs prises, à l'instant t_1 et au point M, par les dérivées partielles d'ordre quelconque de ω_x, ω_y, ω_z.

Supposons, en effet, qu'elles soient démontrées pour les dérivées partielles de ω_x, ω_y, ω_z jusqu'à l'ordre n inclusivement, et proposons-nous de les étendre aux dérivées partielles d'ordre $(n+1)$ des mêmes quantités.

Considérons l'équation (15), qui est vérifiée en tout point du milieu, et différentions-la P fois par rapport à x, Q fois par rapport à y, R fois par rapport à z, P, Q, R vérifiant l'égalité

$$\mathrm{P}+\mathrm{Q}+\mathrm{R}=n.$$

Elle nous donnera une égalité de la forme

$$\frac{\partial^{n+1}\omega_x}{\partial t\,\partial x^{\mathrm{P}}\,\partial y^{\mathrm{Q}}\,\partial z^{\mathrm{R}}}+u\frac{\partial^{n+1}\omega_x}{\partial x^{\mathrm{P}+1}\,\partial y^{\mathrm{Q}}\,\partial z^{\mathrm{R}}}+v\frac{\partial^{n+1}\omega_x}{\partial x^{\mathrm{P}}\,\partial y^{\mathrm{Q}+1}\,\partial z^{\mathrm{R}}}+w\frac{\partial^{n+1}\omega_x}{\partial x^{\mathrm{P}}\,\partial y^{\mathrm{Q}}\,\partial z^{\mathrm{R}+1}}=f,$$

f étant une fonction linéaire et homogène de ω_x, ω_y, ω_z et de leurs dérivées partielles jusqu'à l'ordre n inclusivement; d'après ce que nous supposons démontré, la valeur de f au point M tend vers o lorsque le temps t s'approche de t_1 soit par valeurs inférieures à t_1, soit par valeurs supérieures à t_1.

Nous aurons donc, au point M et à l'instant t_1,

$$(18)\quad \frac{\partial^{n+1}(\omega_{x2}-\omega_{x1})}{\partial t\,\partial x^{\mathrm{P}}\,\partial y^{\mathrm{Q}}\,\partial z^{\mathrm{R}}}+u\frac{\partial^{n+1}(\omega_{x2}-\omega_{x1})}{\partial x^{\mathrm{P}+1}\,\partial y^{\mathrm{Q}}\,\partial z^{\mathrm{R}}}+v\frac{\partial^{n+1}(\omega_{x2}-\omega_{x1})}{\partial x^{\mathrm{P}}\,\partial y^{\mathrm{Q}+1}\,\partial z^{\mathrm{R}}}+w\frac{\partial^{n+1}(\omega_{x2}-\omega_{x1})}{\partial x^{\mathrm{P}}\,\partial y^{\mathrm{Q}}\,\partial z^{\mathrm{R}+1}}=0.$$

Mais, d'autre part, d'après ce que nous supposons démontré, l'onde qui passe au point M à l'instant t est une onde persistante dont l'ordre par rapport à ω_x n'est pas inférieur à $(n+1)$. Il existe donc une grandeur Ω_x telle que toutes les dérivées d'ordre $(n+1)$ de $(\omega_{x2}-\omega_{x1})$ soient données, au point M et à l'instant t_1, par la formule

$$(19)\qquad \frac{\partial^{n+1}(\omega_{x2}-\omega_{x1})}{\partial x^p\,\partial y^q\,\partial z^r\,\partial t^s}=\alpha^p\beta^q\gamma^r(-\mathfrak{N})^s\Omega_x\qquad (p+q+r+s=n+1).$$

Selon cette formule, l'égalité (18) devient

$$(\alpha u+\beta v+\gamma w-\mathfrak{N})\alpha^{\mathrm{P}}\beta^{\mathrm{Q}}\gamma^{\mathrm{R}}\Omega_x=0.$$

L'onde étant une onde qui se propage, $(\alpha u+\beta v+\gamma w-\mathfrak{N})$ n'est pas égal à o; l'égalité précédente exige donc que l'on ait

$$\Omega_x=0,$$

en sorte que l'égalité (19) devient

$$\frac{\partial^{n+1}\omega_{x2}}{\partial x^p\,\partial y^q\,\partial z^r\,\partial t^s}=\frac{\partial^{n+1}\omega_{x1}}{\partial x^p\,\partial y^q\,\partial z^r\,\partial t^s}.$$

Mais, selon l'hypothèse faite, toutes les dérivées partielles de ω_{x1} sont nulles au point M et à l'instant t_1; on a donc, en ce point et à cet instant,

$$\frac{\partial^{n+1}\omega_{x2}}{\partial x^p\,\partial y^q\,\partial z^r\,\partial t^s}=0\qquad (p+q+r+s=n+1).$$

On démontrerait des égalités analogues pour ω_{y2} et ω_{z2}.

Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

Au point M, *lorsque le temps t tend vers t_1 par valeurs supérieures à t_1, les dérivées partielles d'ordre quelconque de ω_x, ω_y, ω_z tendent toutes vers* o.

Dès lors, en vertu d'un lemme précédemment démontré, *il en est de même, quel que soit n, des quantités*

$$\frac{d^n \omega_x}{dt^n}, \quad \frac{d^n \omega_y}{dt^n}, \quad \frac{d^n \omega_z}{dt^n}.$$

Depuis l'instant t_1 jusqu'à un instant postérieur t_2, les coordonnées $x(a, b, c, t)$, $y(a, b, c, t)$, $z(a, b, c, t)$ du point M redeviendront fonctions analytiques de t. Dès lors, entre les instants t_1, t_2, les trois rotations ω_x, ω_y, ω_z relatives au point M resteront égales à zéro.

Lors donc qu'au sein d'un fluide parfait, une onde longitudinale interrompt le caractère analytique du mouvement, elle n'empêche point le théorème précédemment démontré de demeurer exact.

Dès lors, *considérons un fluide pris dans les conditions qui ont été énumérées au début de ce Paragraphe, et exempt d'onde de choc.*

Mettons à part :

1° *Les points matériels qui forment des surfaces singulières exemptes de propagation;*

2° *Les points matériels qui, pendant la durée du mouvement, seront rencontrés par des lignes singulières; en général, ces points formeront certaines surfaces;*

3° *Les points matériels qui, à un instant quelconque du mouvement, deviendront points singuliers; en général, ces points se succéderont sur certaines lignes.*

Pour tout autre point matériel, si les quantités ω_x, ω_y, ω_z sont égales à zéro au début du mouvement, elles sont égales à zéro pendant toute la durée du mouvement.

Dans un fluide en repos, ω_x, ω_y, ω_z sont nuls en tout point; dès lors, le théorème précédent entraîne le corollaire que voici :

Supposons qu'un fluide, pris dans les conditions qui ont été définies au début de ce paragraphe, et partant du repos, soit mis en mouvement sans qu'à aucun moment la vitesse d'aucun point matériel soit discontinue. A aucun instant du mouvement, on ne pourra trouver dans le fluide un volume *d'étendue finie en tout point duquel l'une des trois rotations ω_x, ω_y, ω_z soit différente de zéro.*

Les deux propositions que nous venons d'énoncer sont subordonnées à une supposition fondamentale, hors de laquelle elles pourraient être fausses; elles supposent qu'AU COURS DU LAPS DE TEMPS AUQUEL ON LES APPLIQUE, IL N'EXISTE AUCUN INSTANT t POUR LEQUEL LES COORDONNÉES $x(a, b, c, t)$, $y(a, b, c, t)$, $z(a, b, c, t)$ DE TOUS LES POINTS MATÉRIELS QUI COMPOSENT UNE MASSE FINIE CESSERAIENT D'ÊTRE DES FONCTIONS ANALYTIQUES DE t.

Nous verrons dans la suite l'importance de cette restriction.

Cette restriction ne pèse pas sur le théorème de Lagrange lorsqu'on se borne à l'appliquer aux fluides parfaits; dans ce cas, en effet, la démonstration de Cauchy, aussi bien que la démonstration de W. Thomson sont applicables, et ces démonstrations supposent seulement que les dérivées partielles du second ordre de $x(a, b, c, t)$, $y(a, b, c, t)$, $z(a, b, c, t)$ existent et sont finies pour le laps de temps et pour la masse fluide auxquels on applique le théorème.

§ 2. — FORME DES ACTIONS DE VISCOSITÉ LORSQUE LES ROTATIONS SONT NULLES.

Imaginons un milieu ayant en tout point même densité et même température. Les composantes du champ de viscosité, données par les égalités (58) de la première Partie, deviendront

$$q_x = (\lambda + \mu)\frac{\partial \theta}{dx} + \mu\,\Delta u,$$

$$q_y = (\lambda + \mu)\frac{\partial \theta}{\partial y} + \mu\,\Delta v,$$

$$q_z = (\lambda + \mu)\frac{\partial \theta}{\partial z} + \mu\,\Delta w,$$

tandis que les composantes, en chaque point de la surface, de la pression de viscosité seront données par les égalités (57) de la première Partie :

$$p_x = \lambda\theta\cos(n_i, x) + \mu\frac{\partial u}{\partial n_i} + \mu\left[\frac{\partial u}{\partial x}\cos(n_i, x) + \frac{\partial v}{\partial x}\cos(n_i, y) + \frac{\partial w}{\partial x}\cos(n_i, z)\right],$$

$$p_y = \lambda\theta\cos(n_i, y) + \mu\frac{dv}{\partial n_i} + \mu\left[\frac{\partial u}{\partial y}\cos(n_i, x) + \frac{\partial v}{\partial y}\cos(n_i, y) + \frac{\partial w}{\partial y}\cos(n_i, z)\right],$$

$$p_z = \lambda\theta\cos(n_i, z) + \mu\frac{\partial w}{\partial n_i} + \mu\left[\frac{\partial u}{\partial z}\cos(n_i, x) + \frac{\partial v}{\partial z}\cos(n_i, y) + \frac{\partial w}{\partial z}\cos(n_i, z)\right].$$

Visiblement, ces six égalités peuvent être remplacées par les suivantes :

$$q_x = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial\theta}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial\omega_y}{\partial z} - \frac{\partial\omega_z}{\partial y}\right),$$

$$q_y = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial\theta}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial\omega_z}{\partial x} - \frac{\partial\omega_x}{\partial z}\right),$$

$$q_z = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial\theta}{\partial z} + \mu\left(\frac{\partial\omega_x}{\partial y} - \frac{\partial\omega_y}{\partial x}\right),$$

$$p_x = \lambda\theta\cos(n_i, x) + \mu[\omega_z\cos(n_i, y) - \omega_y\cos(n_i, z)] + 2\mu\frac{\partial u}{\partial n_i},$$

$$p_y = \lambda\theta\cos(n_i, y) + \mu[\omega_x\cos(n_i, z) - \omega_z\cos(n_i, x)] + 2\mu\frac{\partial v}{\partial n_i},$$

$$p_z = \lambda\theta\cos(n_i, z) + \mu[\omega_y\cos(n_i, x) - \omega_x\cos(n_i, y)] + 2\mu\frac{\partial w}{\partial n_i}.$$

Si nous considérons maintenant le fluide visqueux étudié au Paragraphe précédent, nous aurons, en tout point de ce fluide et à tout instant,

$$\theta = 0$$

par hypothèse, et

$$\omega_x = 0, \qquad \omega_y = 0, \qquad \omega_z = 0$$

par démonstration. Alors les égalités précédentes deviendront

$$(20) \qquad q_x = 0, \qquad q_y = 0, \qquad q_z = 0$$

et

$$(21) \qquad p_x = 2\mu\frac{\partial u}{\partial n_i}, \qquad p_y = 2\mu\frac{\partial v}{\partial n_i}, \qquad p_z = 2\mu\frac{\partial w}{\partial n_i}.$$

Les égalités (20) nous montrent qu'*au sein d'un fluide visqueux, incompressible, dont tous les points sont à la même température et où les rotations sont nulles, les équations indéfinies du mouvement sont les mêmes que si le fluide était non visqueux.*

CHAPITRE II.

LE THÉORÈME DE LAGRANGE ET LES CONDITIONS AUX LIMITES.

§ 1. — Un fluide animé d'un mouvement sans rotation peut-il adhérer a la surface d'un solide qu'il baigne?

Au sein d'une masse fluide traçons une certaine aire limite A dont L est le contour; supposons que les composantes u, v, w de la vitesse soient finies en tous les points de l'aire A. Si nous désignons par dS un élément de l'aire A, par n la normale à cet élément menée dans un sens convenable, la formule d'Ampère et de Stokes nous permettra décrire

$$\int_A [\omega_x \cos(n,x) + \omega_y \cos(n,y) + \omega_z \cos(n,z)]\, dS = \int_L (u\,dx + v\,dy + w\,dz).$$

Si le mouvement du fluide est sans rotation,

$$\omega_x = 0, \qquad \omega_y = 0, \qquad \omega_z = 0$$

et l'égalité précédente devient

$$\int_L (u\,dx + v\,dy + w\,dz) = 0. \tag{22}$$

En faisant usage d'une dénomination empruntée à W. Thomson, on peut l'énoncer ainsi :

La *circulation* le long de la ligne fermée L est égale à zéro.

Supposons que le fluide baigne un certain solide en mouvement et qu'il adhère à sa surface. Supposons, en outre, que la vitesse d'un point quelconque du solide demeure constamment finie.

Dire que le fluide adhère au solide le long de leur commune surface, c'est-à-dire que si l'on prend deux points matériels infiniment voisins l'un de l'autre, l'un appartenant au fluide et l'autre au solide, les vitesses de ces points diffèrent infiniment peu en grandeur et en direction.

Il en résulte, en premier lieu, qu'en tout point du fluide, infiniment voisin de la surface du solide, les composantes u, v, w de la vitesse sont finies, en sorte que l'égalité (22) s'applique à toute ligne fermée tracée dans le fluide au voisinage de la surface du solide.

Il en résulte, en second lieu, que cette même égalité doit s'appliquer à une ligne fermée quelconque, tracée à la surface du solide, en supposant que u, v, w soient les composantes de la vitesse d'un point matériel appartenant au solide. Voyons si ce dernier résultat est, en général, acceptable.

L'expression $(u\,dx + v\,dy + w\,dz)$ représente le produit de l'élément dL, appartenant à la courbe L, par la projection sur cet élément de la vitesse d'un point qui en fait partie. Pour obtenir ce produit, on peut décomposer comme l'on veut la vitesse du point M, former pour chacune de ses composantes le produit analogue et ajouter ensemble tous ces produits.

Or, la vitesse de tout point M du solide est la résultante des vitesses du même point en deux autres mouvements du même solide : un mouvement de rotation qui, dans le temps dt, fait tourner le solide d'un angle $\theta\,dt$ autour d'une certaine droite D, et un mouvement de translation par lequel, dans le temps dt, tous les points du solide se déplacent d'une longueur $\lambda\,dt$ parallèlement à la droite D.

Comme courbe fermée L, prenons l'intersection de la surface du solide par un plan perpendiculaire à la droite D. Soient O l'intersection de ce plan avec la droite D; r la distance du point O au point M, origine de l'élément dL; $d\psi$ l'angle sous lequel, du point O, on voit l'élément dL.

Le produit géométrique de l'élément dL et de la vitesse du point M dans le premier mouvement est $\theta r^2\,d\psi$; quant au produit géométrique de l'élément dL et de la vitesse du point M dans le second mouvement, il est nul, car cette vitesse est perpendiculaire au plan de la courbe L.

Nous aurons donc

$$\int_L (u\,dx + v\,dy + w\,dz) = \theta \int_L r^2\,d\psi = 2\mathcal{A}\theta.$$

$\mathcal{A}$ étant l'aire plane à laquelle la courbe L sert de contour.

Si θ n'est pas nul, l'égalité (22) ne peut être vraie pour la courbe L.

Donc, en général, un fluide dont le mouvement est exempt de rotations et qui baigne un solide en mouvement ne peut adhérer à la surface de ce solide.

§ 2. — Conséquences relatives aux fluides parfaits.

Considérons, en premier lieu, un fluide entièrement dénué de viscosité.

Pour que ce fluide n'adhère pas à un solide qu'il baigne, il faut que le frottement au contact du solide et du fluide soit nul et qu'il en soit de même de la viscosité au contact de ces deux corps. Si ce frottement et cette viscosité ne sont pas nuls tous deux, le fluide adhère certainement au solide, en toutes circonstances, le long de leur commune surface.

Supposons, d'autre part, que le fluide étudié soit un fluide compressible ou non compressible, mais qui se meut dans des conditions telles qu'il existe une fonction $\Lambda(x, y, z, t)$ (*Recherches sur l'Hydrodynamique,* Ire Partie, Chap. III, § 2).

Supposons, enfin, qu'à l'instant initial, le fluide et le solide immergé soient en repos et qu'à partir de cet état de repos, ils se mettent en mouvement sans que la vitesse d'aucun point éprouve de variation brusque. Selon les démonstrations que Cauchy ou W. Thomson ont données du théorème de Lagrange, le fluide prendra un mouvement sans rotation. Donc, d'après le théorème démontré au Paragraphe 1, il ne pourra, en général, adhérer à la surface du solide.

Nous sommes ainsi conduits à la conclusion suivante :

Si un fluide, compressible ou non compressible, mais entièrement dénué de viscosité, se meut de telle sorte qu'il existe une fonction $\Lambda(x, y, z, t)$, *on ne peut admettre, en général, qu'il existe soit un frottement, soit une viscosité au contact de ce fluide et d'un solide qu'il baigne.*

Pour un système formé de pareils fluides, la seule forme logique que l'on puisse donner au problème hydrodynamique consiste à admettre que l'on a simplement, le long de la surface de contact d'un solide et du fluide, ou de deux fluides différents, la relation

$$(u_1 - u_2)\cos(N, x) + (v_1 - v_2)\cos(N, y) + (w_1 - w_2)\cos(N, z) = 0,$$

dont l'origine est purement cinématique.

C'est, en effet, sur ces fondements, logiquement irréprochables, mais souvent incapables de supporter une analyse ayant avec les faits d'expérience une suffisante affinité, que reposent la plupart des écrits classiques relatifs à l'Hydrodynamique.

§ 3. — Les liquides visqueux et l'existence du frottement aux surfaces limites.

Considérons maintenant un fluide visqueux incompressible et assujetti à garder, au cours de ses mouvements, une température invariable. Imaginons que ce fluide baigne certains solides mobiles.

Mettons le système en mouvement sans secousse brusque, de telle sorte que la vitesse de chaque point matériel varie d'une manière continue.

Les quantités p_{1x}, p_{1y}, p_{1z}, en chaque point de la surface de contact S du solide et du fluide, partent de o et varient d'une manière continue avec t; il en est de même de la projection du vecteur p_1 sur la surface S.

Si le frottement au contact du solide et du fluide n'est pas nul, cas auquel

$\Gamma(\rho_1, \rho_2, \varpi, T)$ est assurément négatif, la projection du vecteur p_1 sur la surface S demeure assurément inférieure à $-\Gamma(\rho_1, \rho_2, \varpi, T)$, tant que t ne surpasse pas une certaine limite θ. Donc, *tant que t ne surpasse pas une certaine limite* θ, *le liquide demeure soudé au solide le long de leur commune surface.*

Supposons, d'autre part, *que les coordonnées des divers points matériels qui constituent le fluide varient analytiquement avec t depuis l'instant initial* $t = t_0$ *jusqu'à l'instant* $t = \tau$, *la différence* $(\tau - t_0)$ *étant finie.* D'après ce qui a été démontré au Paragraphe 1, le théorème de Lagrange s'appliquerait à notre liquide visqueux de l'instant $t = t_0$ à l'instant $t = \tau$; pendant ce temps, le fluide serait sans rotation.

Donc *on pourrait, à partir de l'instant initial* t_0, *déterminer un laps de temps fini pendant lequel le fluide serait dépourvu de rotation et adhérerait aux solides mobiles; en général, ces deux propositions sont contradictoires,* comme nous l'avons vu au Paragraphe 1.

On ne peut lever cette contradiction qu'en admettant l'une au moins des deux hypothèses suivantes :

1° *Il n'y a pas de frottement le long des surfaces de contact du solide et du fluide.*

2° *Pour* $t = t_0$, *les coordonnées des points du fluide ne sont pas fonctions analytiques de t.*

§ 4. — Les liquides visqueux et la viscosité le long des surfaces de contact avec les solides immergés.

Supposons que le liquide visqueux n'exerce aucun frottement à la surface des solides qu'il baigne; nous aurons alors, en tout point de la surface de contact du solide et du fluide,

$$\Gamma = 0, \qquad \mathfrak{G} = 0. \tag{23}$$

Supposons, d'ailleurs, que la surface de contact ne soit pas exempte de viscosité, en sorte que l'on ait

$$f < 0. \tag{24}$$

Dans ce cas, le fluide ne demeure plus, en général, soudé au solide et la difficulté que nous avons rencontrée au Paragraphe précédent ne se rencontrera plus. Mais nous allons rencontrer une autre difficulté analogue, en traitant certains problèmes, le suivant par exemple :

Considérons un solide de révolution immergé dans un fluide visqueux *indéfini. Imaginons que le système tout entier soit primitivement au repos, puis que, sans secousse, de manière que les vitesses de tous les points demeurent fonctions continues de t, le solide se mette à tourner autour de son axe de révolution.*

Peut-il arriver que le liquide demeure immobile?

Dans ce cas, les actions de viscosité demeureraient nulles en tout point de ce corps; en tout point de la surface de contact du solide et du fluide, on aurait

$$p_{1x} = 0, \qquad p_{1y} = 0, \qquad p_{1z} = 0.$$

Comme on aurait également

$$u_1 = 0, \qquad v_1 = 0, \qquad w_1 = 0, \tag{25}$$

en tenant compte de l'égalité (23), on transformerait les égalités (80) de la troisième Partie en

$$(\Pi_1 - \varpi)\cos(n_1, x) = -f u_2,$$
$$(\Pi_1 - \varpi)\cos(n_1, y) = -f v_2,$$
$$(\Pi_1 - \varpi)\cos(n_1, z) = -f w_2.$$

Multiplions respectivement ces égalités par u_2, v_2, w_2 et ajoutons membre à membre les résultats obtenus; en tenant compte des égalités (40 *bis*) de la troisième Partie, (24) et (25), nous trouverons l'égalité

$$u_2^2 + v_2^2 + w_2^2 = 0,$$

qui est absurde, puisque le solide n'est pas immobile.

Le fluide se mettra donc en mouvement et ce mouvement sera forcément symétrique autour de l'axe de révolution du solide pris pour axe des z.

Rapportons un point quelconque du système à des coordonnées cylindriques r, θ, z.

Continuons à désigner par w la composante parallèle à Oz de la vitesse; soit R la composante centrifuge de la vitesse; soit Θ la composante perpendiculaire aux deux précédentes. Nous aurons évidemment

$$u = \mathrm{R}\cos\theta - \Theta\sin\theta,$$
$$v = \mathrm{R}\sin\theta + \Theta\cos\theta.$$

Les trois quantités R, Θ, w peuvent dépendre de r et de z, mais point de θ.

Nous aurons alors

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\mathrm{R}\sin\theta + \Theta\cos\theta}{r}\sin\theta + \left(\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial r}\cos\theta - \frac{\partial\Theta}{\partial r}\sin\theta\right)\cos\theta,\\
\frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\mathrm{R}\sin\theta + \Theta\cos\theta}{r}\cos\theta + \left(\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial r}\cos\theta - \frac{\partial\Theta}{\partial r}\sin\theta\right)\sin\theta,\\
\frac{\partial u}{\partial v} &= \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial z}\cos\theta - \frac{\partial\Theta}{\partial z}\sin\theta,\\
\frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\mathrm{R}\cos\theta - \Theta\sin\theta}{r}\sin\theta + \left(\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial r}\sin\theta + \frac{\partial\Theta}{\partial r}\cos\theta\right)\cos\theta,\\
\frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\mathrm{R}\cos\theta - \Theta\sin\theta}{r}\cos\theta + \left(\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial r}\sin\theta + \frac{\partial\Theta}{\partial r}\cos\theta\right)\sin\theta,\\
\frac{\partial v}{\partial z} &= \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial z}\sin\theta + \frac{\partial\Theta}{dz}\cos\theta,\\
\frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{\partial w}{\partial r}\cos\theta,\\
\frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{\partial w}{\partial r}\sin\theta,\\
\frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{\partial w}{\partial z}.
\end{aligned}\right.$$

Ces relations permettraient d'obtenir les équations du mouvement du fluide.

Proposons-nous simplement de calculer, en chaque point de la surface de contact du solide et du fluide, la composante $p_{1\theta}$ du vecteur p_1 dans la direction de la vitesse Θ.

Comme cette composante a évidemment une valeur indépendante de θ, il suffira de la calculer pour $\theta = 0$, c'est-à-dire en un point du plan zOx; elle se réduit alors à p_{1y} ou bien, selon les égalités (21), à

$$2\mu\frac{\partial v}{\partial n_i} = 2\mu\left[\frac{\partial v}{\partial x}\sin(n_i, z) + \frac{\partial v}{\partial z}\cos(n_i, z)\right].$$

Les égalités (26), où l'on doit faire $\theta = 0$, transformant l'expression précédente en

$$2\mu\left[\frac{\partial\Theta}{\partial r}\sin(n_i, z) + \frac{\partial\Theta}{\partial r}\cos(n_i, z)\right] = 2\mu\frac{\partial\Theta}{\partial r_i}.$$

On a donc

$$(27)\qquad p_{i\theta} = 2\mu\frac{\partial\Theta}{\partial n_i}.$$

Peut-il arriver que Θ soit nul en tous les points du fluide? S'il en était ainsi, l'équation (27) que nous venons d'obtenir donnerait, en tout point de la surface de contact du solide et du fluide,

$$p_{i\theta} = 0,$$

et, par conséquent, en tout point de cette même surface, la vitesse relative du solide et du fluide serait située dans le méridien; mais ceci exigerait, contrairement à l'hypothèse faite, que Θ fût, en chaque point de cette surface, égal à la vitesse avec laquelle le solide tourne autour de Oz.

Θ n'est donc pas nul, en général, au sein du fluide; si nous traçons une circonférence de rayon r ayant son centre sur Oz, Θ aura la même valeur en tous les points de cette circonférence et la circulation le long de cette circonférence aura pour valeur

$$C = 2\pi r\Theta.$$

Supposons maintenant qu'à partir de l'instant initial t_0 et tant que t ne surpasse pas une certaine limite, le fluide se meuve de telle sorte que les coordonnées de chaque point matériel soient des fonctions analytiques de t; nous pourrons faire usage du théorème démontré au Chapitre I, Paragraphe 1, les composantes ω_x, ω_y, ω_z de la rotation seront nulles en tout point du fluide pour toute valeur de t inférieure à la limite considérée.

Les quantités ω_x, ω_y, ω_z étant nulles dans tout le fluide, la circulation C ne peut être différente de o le long d'une courbe fermée que s'il existe une ligne singulière empêchant cette courbe fermée de se réduire à un point. Par raison de symétrie, il ne peut exister ici de ligne singulière aboutissant à la surface du solide autre que l'axe des z. On voit alors sans peine que la circulation le long d'une circonférence ayant son centre sur l'axe des z doit avoir pour valeur

$$C = K(t),$$

$K(t)$ ayant, à un même instant, la même valeur pour toutes les circonférences de ce genre que l'on peut tracer au sein du fluide, au voisinage de la surface du solide. On aurait donc, en tout point pris au sein du fluide,

$$\Theta = \frac{K(t)}{2\pi r}. \tag{28}$$

Considérons un point de la surface de contact du liquide et du solide; en ce point, l'égalité (7) serait applicable au liquide, tandis que la vitesse de rotation du solide serait $\Omega(t)r$, en désignant par $\Omega(t)$ sa vitesse angulaire de rotation à l'instant t; dès lors, les égalités (80) de la quatrième Partie, jointes aux égalités (2) et (7), donneraient, en tout point de la surface de contact du solide et du liquide, l'égalité

$$2\mu\frac{\partial\Theta}{\partial n_i} = -f[\Theta - \Omega(t)r]$$

que l'égalité (28) transforme en

$$\frac{\mu}{\pi}\frac{K(t)}{r^2}\cos(n_i, r) - f\frac{K(t)}{2\pi r} + f\,\Omega(t)r = 0. \tag{29}$$

Il est clair qu'une telle égalité ne saurait être, en général, vérifiée en tous les points du solide; voici, entre autres, un moyen de faire éclater aux yeux cette impossibilité :

Supposons que le solide présente plusieurs parallèles de rayon maximum ou minimum; soient $r_1, r_2, r_3, \ldots$, les rayons de ces parallèles, rayons que l'on peut se donner arbitrairement; en tout point d'un tel parallèle, on aurait $\cos(n_i, r) = 1$, et l'égalité (29) donnerait les égalités

$$\begin{gathered}
\left(\frac{\mu}{\pi r_1^2} - \frac{f}{2\pi r_1}\right)\frac{K(t)}{\Omega(t)} + f r_1 = 0,\\
\left(\frac{\mu}{\pi r_2^2} - \frac{f}{2\pi r_2}\right)\frac{K(t)}{\Omega(t)} + f r_2 = 0,\\
\left(\frac{\mu}{\pi r_3^2} - \frac{f}{2\pi r_3}\right)\frac{K(t)}{\Omega(t)} + f r_3 = 0,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{gathered}$$

auxquelles, en général, il est impossible de satisfaire en disposant du seul rapport $\frac{K(t)}{\Omega(t)}$.

La difficulté que nous venons de rencontrer en étudiant le mouvement d'un liquide visqueux exempt de frottement à la surface des solides qu'il baigne ne peut admettre que deux solutions :

1° *Ou bien les surfaces de contact du liquide et des solides sont exemptes de viscosité :*

$$f = 0. \tag{30}$$

2° *Ou bien les coordonnées des points matériels qui constituent le fluide ne peuvent, à partir de l'instant initial t_0 du mouvement, s'exprimer en fonctions analytiques de t.*

§ 5. — Examen des résultats obtenus aux deux paragraphes précédents.

Si nous réunissons les résultats obtenus au Paragraphe 3 et au Paragraphe 4, nous pouvons énoncer la proposition que voici:

Lorsqu'un système formé de solides mobiles et d'un liquide visqueux, de *température uniforme et invariable, part du repos et se met en mouvement sans secousse brusque, les lois de ce mouvement prêtent à contradiction, à moins que l'on admette l'une ou l'autre des hypothèses suivantes:*

1° *Les surfaces de contact des solides et du liquide ne sont affectées ni de viscosité, ni de frottement;*

2° *Il est impossible, à partir de l'instant initial t_0 du mouvement, d'exprimer les coordonnées de chacun des points matériels qui composent le fluide en fonction analytique de t.*

Examinons successivement ces deux hypothèses.

Si nous admettons la première hypothèse, nous devrons imaginer que le mouvement d'un liquide visqueux est assujetti, le long des parois fixes ou mobiles auxquelles il confine, à la seule condition

$$(u_1 - u_2)\cos(N, x) + (v_1 - v_2)\cos(N, y) + (w_1 - w_2)\cos(N, z) = 0, \tag{31}$$

qui est d'origine purement cinématique.

Mais un autre point est également hors de doute. La considération de la viscosité intrinsèque des liquides serait impuissante à fournir des équations comparables aux faits d'expérience les mieux constatés si l'on se bornait à l'emploi, le long des surfaces terminales, de la condition (31). Il pourrait même arriver que la solution de certains problèmes essentiels devînt alors indéterminée.

Examinons, par exemple, le célèbre problème de Poiseuille :

Un liquide, parvenu à l'état de régime permanent, s'écoule par filets parallèles à l'intérieur d'un conduit cylindrique (*Recherches,* IV^e Partie, Chap. III, § 4).

Nous pourrons encore établir que la vitesse w vérifie l'équation aux dérivées partielles [*loc. cit.*, équation (132 *bis*)]

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = K^2. \tag{32}$$

Mais la vitesse w étant, en chaque point, tangente à la paroi solide, la condition (31) sera vérifiée d'elle-même; nous n'aurons donc, pour déterminer w, que l'équation (32), qui ne saurait suffire à cette objet.

La première des deux hypothèses énoncées doit donc être rejetée et nous sommes contraints d'adopter la seconde, qui peut, plus explicitement, être formulée de la manière suivante :

Au sein d'un liquide visqueux, en contact avec des solides fixes ou mobiles, il existe un domaine fini, contigu aux parois solides, où les coordonnées des *divers points matériels ne sont pas exprimables en fonctions analytiques du temps à partir de l'instant initial du mouvement. Ce domaine peut comprendre tout le fluide. S'il comprend seulement une partie du fluide, cette partie se compose des mêmes masses pendant toute la durée du mouvement.*

Cette proposition fondamentale a été découverte par M. Boussinesq [1]; dans un cas très simple, M. Boussinesq a pu donner, sous forme finie, les lois du mouvement d'un liquide qui part du repos et qui demeure adhérent à une paroi solide; la solution obtenue est, en effet, non analytique pour la valeur de t qui correspond au début du mouvement.

Il est permis de remarquer qu'aux difficultés que nous avons signalées une solution, différente de celle qu'a proposée M. Boussinesq, aurait pu se présenter comme acceptable. On aurait pu imaginer que les coordonnées de chacun des points matériels du fluide situés à distance finie des parois solides s'expriment en fonctions analytiques de t, à partir de l'instant initial du mouvement, et jusqu'à un certain instant; mais qu'en même temps, à l'instant initial du mouvement, une onde se détache de la paroi solide et se propage dans le fluide. Les rotations seraient alors, à un instant donné, nulles pour les points matériels que l'onde n'a pas encore atteints, et différentes de zéro pour les points matériels qu'elle a dépassés. En prouvant, dans la seconde Partie de ces *Recherches,* qu'une onde ne pouvait se propager au sein d'un fluide visqueux, nous avons rendu cette opinion inacceptable et, partant, mis hors de doute l'interprétation proposée par M. Boussinesq.

Mais une grave question se présente maintenant. Sera-t-il toujours possible de trouver, pour les équations du mouvement d'un fluide visqueux qui part du repos, des intégrales non analytiques à l'instant initial? Le problème que M. Boussinesq a pu résoudre dans un cas particulier admettra-t-il une solution en général? Il semble malaisé de répondre à cette question. Il est permis de se demander si l'étude du mouvement des fluides visqueux ne conduira pas, dans certains cas, à d'insurmontables contradictions.

---

(1) J. Boussinesq, *Sur la manière dont les frottements entrent en jeu dans un fluide qui sort de l'état de repos, et sur leur effet pour empêcher l'existence d'une fonction des vitesses* (*Comptes rendus,* t. XC, 1880, p. 736). — *Quelques considérations à l'appui d'une Note du 29 mars sur l'impossibilité d'admettre, en général, une fonction des vitesses dans toute question d'Hydrodynamique où les frottements ont un rôle notable* (*Comptes rendus,* t. XC, 1880, p. 967).

SIXIÈME PARTIE.

SUR LES DEUX COEFFICIENTS DE VISCOSITÉ ET LA VISCOSITÉ AU VOISINAGE DE L'ÉTAT CRITIQUE.

CHAPITRE I.

DES DEUX COEFFICIENTS DE VISCOSITÉ $\lambda(\rho, T)$, $\mu(\rho, T)$.

---

§ 1. — Examen des diverses hypothèses qui ont été faites touchant les coefficients de viscosité $\lambda(\rho, T)$, $\mu(\rho, T)$.

Au cours des *Recherches sur l'Hydrodynamique des fluides visqueux*, que nous avons développées dans les précédentes Parties, nous avons toujours traité les deux fonctions $\lambda(\rho, T)$, $\mu(\rho, T)$ qui déterminent la viscosité d'un fluide comme n'ayant entre elles aucune relation forcée, et comme assujetties seulement aux deux conditions

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} \mu(\rho, T) &\geqq 0, \\ 3\lambda(\rho, T) + 2\mu(\rho, T) &\geqq 0, \end{aligned} \right.$$

hors desquelles la fonction dissipative pourrait devenir négative.

Or, certains auteurs, en traitant de la viscosité des fluides, ont fait des suppositions qui restreignent l'indétermination des deux fonctions $\lambda(\rho, T)$, $\mu(\rho, T)$; entre ces deux fonctions, ils ont admis qu'il existait une relation nécessaire; d'ailleurs, comme nous l'avons déjà remarqué (*Recherches sur l'Hydrodynamique*, Ire Partie, Chap. I, § 3), cette relation varie suivant les auteurs, qui ont hésité entre les trois formes suivantes :

$$(2) \qquad \lambda(\rho, T) = \mu(\rho, T),$$

$$(3) \qquad \lambda(\rho, T) = 0,$$

$$(4) \qquad 3\lambda(\rho, T) + 2\mu(\rho, T) = 0.$$

Il importe que nous passions en revue les raisons invoquées en faveur de chacune de ces trois relations, afin de nous assurer qu'aucune de ces raisons n'est assez forte pour entraîner notre adhésion.

On dit souvent, dans les Traités, que la théorie de Navier est indépendante de toute hypothèse sur la valeur du coefficient $\lambda(\rho, T)$, car elle traite des fluides incompressibles, en sorte que le coefficient λ disparaît des équations. Une telle opinion découle d'une lecture superficielle de l'œuvre de Navier.

Il est exact qu'à la fin de son Mémoire, Navier, traitant seulement des fluides incompressibles, simplifie ses équations en biffant tous les termes qui contiennent en facteur la dilatation en volume ou ses dérivées partielles; mais cette opération a été précédée d'une analyse générale, qui ne suppose pas le fluide incompressible; cette analyse conduit à une expression du travail virtuel de la viscosité (1) et, avec nos notations, cette expression s'écrit de la manière suivante :

$$
\begin{aligned}
d\xi_v = & \int \mu(\rho, \mathrm{T}) \left[\left(2\frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \Delta u \right) \delta x + \left(2\frac{\partial \vartheta}{\partial y} + \Delta v \right) \delta y + \left(2\frac{\partial \vartheta}{\partial z} + \Delta w \right) \delta z \right] d\varpi \\
& + \int \mu(\rho, \mathrm{T}) \Bigg\{ \quad \left[\left(\theta + 2\frac{\partial u}{\partial x} \right) \cos(n_i, x) + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \cos(n_i, y) + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \cos(n_i, z) \right] \delta x \\
& \qquad + \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \cos(n_i, x) + \left(\theta + 2\frac{\partial v}{\partial y} \right) \cos(n_i, y) + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \cos(n_i, z) \right] \delta y \\
& \qquad + \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \cos(n_i, x) + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \cos(n_i, y) + \left(\theta + 2\frac{\partial w}{\partial z} \right) \cos(n_i, z) \right] \delta z \Bigg\} dS.
\end{aligned}
$$

Cette expression coïncide avec celle que donnent les égalités (47) et (51) de la première Partie, pourvu que l'on fasse, en ces dernières,

$$
\lambda(\rho, \mathrm{T}) = \mu(\rho, \mathrm{T}). \tag{2}
$$

On doit donc regarder cette dernière relation comme exprimant l'opinion de Navier.

C'est au moyen d'hypothèses sur les actions moléculaires, assimilées à des forces centrales, que Navier est parvenu à la relation (3).

On sait du reste que l'hypothèse des forces centrales, introduite par Poisson dans l'étude de l'élasticité des corps solides, conduit à poser, entre les deux coefficients d'élasticité des corps isotropes, une relation semblable à l'égalité (2).

La relation ainsi introduite par Poisson dans l'étude de l'élasticité des corps isotropes n'est point, tant s'en faut, confirmée par l'expérience; de plus, elle est visiblement inapplicable aux liquides (2), alors que rien, dans le développement des théories élastiques, ne permet d'exclure logiquement les liquides du nombre des corps isotropes. Aussi la nécessité d'éviter cette relation inacceptable est-elle

(1) *Mémoire sur les lois du mouvement des fluides*, par M. NAVIER, lu à l'Académie des Sciences le 18 mars 1822 (*Mémoires de l'Académie des Sciences*, 2e série, t. VI, 1823, p. 389).

(2) P. DUHEM, *Hydrodynamique, Élasticité, Acoustique*, t. II, p. 241. Paris, 1891.

une des raisons qui ont amené le rejet de l'hypothèse des forces centrales. Ainsi convaincue d'erreur et rejetée de l'étude de l'élasticité, cette hypothèse semble singulièrement aventureuse dans le domaine de la viscosité; et s'il est une de ses conséquences que l'on doive révoquer en doute, c'est bien la relation (2), homologue, en cette théorie, de l'égalité condamnée par la théorie de l'élasticité.

Cette égalité (2), on la retrouve d'ailleurs d'une manière nécessaire toutes les fois qu'on fait usage de l'hypothèse des forces centrales pour traiter de la viscosité; c'est ainsi qu'elle a été obtenue de nouveau par M. O.-E. Meyer [1].

Dans le Mémoire de M. O.-E. Meyer, l'analogie entre l'égalité (2) et l'égalité qui, selon Poisson, caractérise les corps élastiques isotropes est d'autant plus évidente que l'auteur y traite de la viscosité non pas au sein des milieux fluides, mais au sein des milieux élastiques isotropes et peu déformés; le même calcul lui donne alors, pour les actions élastiques, la relation de Poisson et, pour les actions de viscosité, la relation (2).

Cette relation (2), M. O.-E. Meyer l'a retrouvée plus tard [2] en se fondant sur la théorie cinétique des gaz, alors que, de cette théorie, d'autres auteurs ont, comme nous le verrons, tiré d'autres relations.

La relation

$$\lambda(\rho, T) = 0 \tag{3}$$

se trouve seulement dans un Mémoire inédit que Cauchy avait présenté à l'Académie des Sciences en 1822 et dont il a reproduit les résultats, en 1828, dans les *Anciens Exercices de Mathématiques* [3]; mais, aussitôt après avoir reproduit ces résultats, Cauchy remarque qu'on peut leur en substituer d'autres, plus généraux, où les coefficients $\lambda(\rho, T)$, $\mu(\rho, T)$ ont des valeurs quelconques; l'illustre analyste n'attache donc aucune importance à la relation (3).

L'existence de deux coefficients de viscosité, indépendants l'un de l'autre, résulte également de la très curieuse théorie de la viscosité développée par Poisson en 1829 [4]; les deux coefficients qu'il considère et qu'il désigne par β et β' sont

---

(1) O.-E. Meyer, *Zur Theorie der inneren Reibung* (*Journal für reine und angewandte Mathematik*, Bd. LXXVIII, 1874, p. 130).

(2) O.-E. Meyer, *Die kinetische Theorie der Gase*, p. 325. Breslau, 1877.

(3) Cauchy, *Sur les équations qui expriment les conditions d'équilibre, ou les lois du mouvement intérieur d'un corps solide, élastique ou non élastique*, § 3. *Sur le mouvement intérieur d'un corps solide non élastique* (*Exercices de Mathématiques*, IIIe année, p. 183. Paris, 1828).

(4) Poisson, *Mémoire sur les équations générales de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques et des fluides*, lu à l'Académie des Sciences le 12 octobre 1829 (*Journal de l'École Polytechnique*, XXe Cahier, t. XIII, 1831, p. 1-174).

liés à nos coefficients λ et μ par les relations

$$\lambda(\rho, T) = -\beta',$$
$$\mu(\rho, T) = -\beta.$$

Poisson laisse entièrement quelconques les deux coefficients β et β'.

Cette opinion est aussi celle de Barré de Saint-Venant, bien que sa courte Note sur ce sujet (¹) ait parfois été regardée comme favorable à la relation (4). Cette Note, en effet, prouve simplement qu'il doit exister une grandeur ϖ, définie en chaque point du fluide en mouvement, telle que l'on ait

$$\nu_x = -\varpi - 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \nu_y = -\varpi - 2\mu\frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \nu_z = -\varpi - 2\mu\frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\tau_x = -\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right), \qquad \tau_y = -\mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right), \qquad \tau_z = -\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right).$$

En terminant, Saint-Venant fait remarquer que ces formules conviennent aussi bien à la théorie de Navier qu'à la théorie de Poisson.

C'est Stokes (²) qui, le premier, a proposé la relation

$$3\lambda(\rho, T) + 2\mu(\rho, T) = 0. \tag{4}$$

Cette relation signifie, comme nous l'avons vu (Ire Partie, Chap. I, § 2) que le travail des actions de viscosité serait nul si chacun des éléments du fluide se dilatait en restant semblable à lui-même. Voici les brèves considérations par lesquelles Stokes la justifie :

« Il nous reste, dit-il, à considérer l'effet de la dilatation. Supposons, tout d'abord, qu'aucune déformation n'accompagne cette dilatation ; il est aisé de voir que le mouvement relatif du fluide au point considéré sera le même en toute direction. Par conséquent, une telle dilatation ne peut avoir pour effet que d'ajouter à la pression que produisent les actions des molécules, supposées dans leur position d'équilibre relatif, une autre pression normale p', la même en tout sens. Mais cette pression p' provient uniquement de l'ensemble des actions moléculaires mises en jeu par les déplacements que les molécules ont subi par rapport à leur position d'équilibre relatif; comme d'ailleurs, en moyenne, ces déplacements

(¹) Barré de Saint-Venant, *Note à joindre au Mémoire sur la dynamique des fluides, présenté à l'Académie des Sciences le 14 avril 1834* (*Comptes rendus*, t. XVII, 1843, p. 1240).

(²) Stokes, *On the theories of the internal friction of fluids in motion, and of the equilibrium and motion of elastic solids*, n° 3, lu le 14 avril 1845 à la Société philosophique de Cambridge (*Transactions of the Cambridge philosophical Society*, Vol. VIII, p. 287. — *Mathematical and physical Papers*, Vol. I, p. 87).

se produisent indifféremment en toute direction, il en résulte que les actions qui concourent à former p' se neutralisent les unes les autres et que $p' = 0$. On tirerait la même conclusion de l'hypothèse cinétique, en regardant, comme il est naturel de le faire, chaque secousse mise en action comme liée à un accroissement de pression en certaines directions et à une diminution de pression dans d'autres directions. »

Il est à peine besoin de faire remarquer l'insuffisance d'un tel raisonnement, dont un calcul plus complet eût démenti les conclusions. D'ailleurs, Stokes lui-même paraît avoir attaché à la conclusion ainsi obtenue une médiocre confiance; voici, en effet, ce qu'il écrit quelques lignes plus loin : « On peut poser $3\lambda + 2\mu = 0$ si l'on suppose que, dans le cas d'un mouvement de dilatation uniforme, la pression à chaque instant dépend exclusivement de la densité et de la température à cet instant et nullement de la vitesse avec laquelle la première varie d'un instant à l'autre. Dans la plupart des cas auxquels il est intéressant d'appliquer la théorie de la viscosité, ou bien la densité du fluide est constante, ou bien l'on peut, sans erreur sensible, la regarder comme constante; elle change lentement de valeur. Les résultats sont exactement les mêmes dans le premier cas, et sensiblement les mêmes dans le second cas, que $(3\lambda + 2\mu)$ soit ou non égal à zéro. Par conséquent, bien que la théorie et l'expérience soient d'accord en ces divers cas, on ne saurait regarder l'expérience comme vérifiant la partie de la théorie qui a trait à l'hypothèse $3\lambda + 2\mu = 0$. »

La relation (4) a été retrouvée par Maxwell (¹) en faisant usage de la théorie cinétique des gaz et en assimilant les molécules gazeuses à des points dont la répulsion est inversement proportionnelle à la cinquième puissance de la distance; son analyse a été ensuite exposée plus rigoureusement par G. Kirchhoff (²) et par M. Boltzmann (³). Mais, alors même que l'on n'opposerait pas une fin de non recevoir aux hypothèses sur lesquelles repose la théorie cinétique des gaz, il est permis de faire observer :

1° Que les mêmes calculs qui fournissent les équations du mouvement d'un fluide visqueux, complétées par la relation (4), exigent que le gaz suive les lois de Mariotte et de Gay-Lussac, ce qui restreint aux gaz parfaits la portée des résultats obtenus;

(¹) MAXWELL, *The Bakerian Lecture : On the viscosity or internal friction of air and other gases,* lu le 8 février 1868 à la Société Royale de Londres. (*Philosophical Transactions,* vol. CLVI. — *Scientific Papers*, vol. II, p. 69.)

(²) G. KIRCHHOFF, *Vorlesungen über die Theorie der Wärme,* p. 193. Leipzig, 1894.

(³) L. BOLTZMANN, *Vorlesungen über Gastheorie,* I. Theil, p. 169 et p. 180. Leipzig, 1896. — *Leçons sur la Théorie des gaz,* traduites par A. GALLOTTI, Iʳᵉ Partie, p. 159 et p. 171. Paris, 1902. Dans le dernier des deux passages cités, M. Boltzmann signale le caractère arbitraire de plusieurs des hypothèses faites.

2° Que, selon ces mêmes calculs (¹), le rapport de la chaleur spécifique C sous pression constante à la chaleur spécifique c sous volume constant a pour valeur

$$\frac{C}{c}=\frac{5}{3}=1,666, \qquad \ldots,$$

conclusion manifestement fausse puisque, pour tous les gaz parfaits bien étudiés, le rapport $\frac{C}{c}$ a une valeur voisine de 1,40.

Si la théorie dont nous parlons fournit une valeur assurément fausse pour le rapport $\frac{C}{c}$, pourquoi fournirait-elle une valeur assurément juste pour la quantité $(3\lambda+2\mu)$?

Or, G. Kirchhoff ne trouve [2], à la relation (4), aucun fondement en dehors de la théorie cinétique des gaz.

Enfin, M. L. Natanson, qui a donné récemment une théorie fort originale de la viscosité, termine son exposé par cette déclaration [3] : « En conclusion, nous dirons que la relation de Stokes, $\lambda=-\frac{2}{3}\mu$, s'accorde parfaitement avec l'ensemble de nos hypothèses; mais rien ne nous oblige à les considérer comme un corollaire qui découlerait avec nécessité de notre théorie. »

Il ressort clairement de cet exposé historique qu'aucune raison péremptoire n'impose une relation particulière entre les deux quantités $\lambda(\rho, T)$, $\mu(\rho, T)$; tout au plus, les physiciens qui regardent comme légitime la théorie cinétique des gaz pourraient-ils, en vertu de cette théorie, regarder la relation (4), proposée par M. Stokes, comme exacte pour les gaz parfaits monoatomiques et, *peut-être,* pour les autres gaz parfaits; ils ne sauraient, en tous cas, la regarder comme établie pour les fluides en général.

Nous allons voir que si l'on avait tenu, dans l'étude de la viscosité, à être rigoureusement conséquent avec la définition du mot *fluide,* on aurait été amené à assujettir les fonctions $\lambda(\rho, T)$, $\mu(\rho, T)$ à des conditions toutes différentes de celles qui ont été proposées jusqu'ici.

---

[1] G. Kirchhoff, *loc. cit.*, p. 196. — L. Boltzmann, *loc. cit.* (trad. Gallotti), p. 170 et p. 179.

[2] G. Kirchhoff, *loc. cit.*, p. 116.

[3] L. Natanson, *Sur les lois de la viscosité* (*Bulletin de l'Académie des Sciences de Cracovie : Classe des Sciences mathématiques et naturelles,* février 1901, p. 110).

§ 2. — Forme nécessaire des actions de viscosité au sein d'un fluide proprement dit. Impossibilité des liquides visqueux.

Revenons à la définition du mot *fluide*.

Un milieu continu est dit *fluide* si l'état de chaque élément est entièrement défini par la connaissance des coordonnées x, y, z d'un point de chaque élément, par la densité ρ de cet élément et par la température T qui y règne. Pour déterminer entièrement la modification réelle ou virtuelle éprouvée par un tel élément, il suffit de connaître le changement réel ou virtuel de la position qu'il occupe dans l'espace, et les variations virtuelles de la température et de la densité; il est totalement inutile de connaître la déformation que cet élément a pu subir durant la modification considérée.

Du moment que l'on convient de tenir compte, pour définir la modification subie par un élément d'un certain milieu, non seulement du changement de densité de cet élément, mais encore des déformations qu'il a éprouvées; du moment que deux états où l'élément a même densité, même température, mais des formes différentes, sont regardés non comme deux états identiques, mais comme deux états distincts, on ne doit plus dire que le milieu considéré est un *milieu fluide;* on doit dire que l'on étudie les propriétés d'un *milieu élastique* (1).

Dès lors, il est facile de déterminer la forme que doivent avoir les actions de viscosité au sein d'un corps fluide si l'on veut, dans la détermination de cette forme, rester rigoureusement conséquent avec la définition précédente.

Les composantes u, v, w de la vitesse sont supposées fonctions continues de x, y, z; les divers éléments qui composent le fluide sont donc soudés entre eux; dès lors, le travail virtuel $d\mathfrak{T}_v$ des actions de viscosité au sein de la masse fluide est la somme des travaux virtuels des viscosités intrinsèques de chaque élément fluide. Si donc on désigne par $d\tau_v\, d\varpi$ le travail virtuel des viscosités intrinsèques à l'élément de volume $d\varpi$, on aura [Ire Partie, égalité (41)]

$$d\mathfrak{T}_v = \int d\tau_v\, d\varpi, \tag{4 bis}$$

l'intégrale s'étendant à tous les éléments $d\varpi$ du volume occupé par le fluide.

Quant à la forme de $d\tau_v\, d\varpi$, elle est bien aisée à déterminer. Indépendamment de sa position absolue dans l'espace et de sa température absolue T, l'élément $d\varpi$ est entièrement déterminé par une seule variable normale, sa densité ρ; dès lors,

(1) Nous avons déjà insisté sur cette définition dans les feuilles autographiées de notre Cours : *Hydrodynamique, Élasticité, Acoustique* (t. II, p. 205), professé à Lille en 1890-1891.

si l'on fait usage des principes posés au Chapitre I, § 1, de la première Partie de ces *Recherches*, on voit que

$$(5) \qquad d\tau_v\, d\varpi = \int f\left(\rho, \mathrm{T}, \frac{d\rho}{dt}\right) \frac{d\rho}{dt}\, \delta\rho\, d\varpi,$$

$f\left(\rho, \mathrm{T}, \frac{d\rho}{dt}\right)$ étant une quantité essentiellement négative. Si l'on admet, en outre, la supposition que nous avons appelée l'*hypothèse approximative*, on devra regarder f comme indépendant de $\frac{d\rho}{dt}$, ce qui donnera

$$(6) \qquad d\tau_v\, d\varpi = \int f(\rho, \mathrm{T}) \frac{d\rho}{dt}\, \delta\rho\, d\varpi.$$

Mais on a

$$(7) \qquad \begin{cases} \dfrac{d\rho}{dt} = -\rho\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z}\right), \\[2ex] \delta\rho = -\rho\left(\dfrac{\partial\, \delta x}{\partial x} + \dfrac{\partial\, \delta y}{\partial y} + \dfrac{\partial\, \delta z}{\partial z}\right). \end{cases}$$

Si donc on pose

$$\rho^2 f(\rho, \mathrm{T}) = -\lambda(\rho, \mathrm{T}),$$

cas auquel, puisque $f(\rho, \mathrm{T})$ est essentiellement négatif, $\lambda(\rho, \mathrm{T})$ est essentiellement positif :

$$(8) \qquad \lambda(\rho, \mathrm{T}) > 0,$$

on aura, en vertu des égalités (4) à (7),

$$(9) \qquad d\mathfrak{T}_v = -\int \lambda(\rho, \mathrm{T}) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial\, \delta x}{\partial x} + \frac{\partial\, \delta y}{\partial y} + \frac{\partial\, \delta z}{\partial z}\right) d\varpi.$$

Telle est la forme nécessaire du travail virtuel de la viscosité en un milieu fluide.

Mais, s'il s'agit d'un fluide incompressible, on a constamment, en vertu des égalités (7),

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial\, \delta x}{\partial x} + \frac{\partial\, \delta y}{\partial y} + \frac{\partial\, \delta z}{\partial z} = 0,$$

en sorte que l'égalité (136) devient

$$d\mathfrak{T}_v = 0$$

Le travail virtuel des actions de viscosité, au sein d'un fluide incompressible, est identiquement nul; en d'autres termes, LA SUPPOSITION D'UN LIQUIDE VISQUEUX EST CONTRADICTOIRE AVEC LA DÉFINITION DU MOT FLUIDE.

Dès lors, les difficultés auxquelles nous a conduits l'étude des liquides visqueux cessent d'être surprenantes.

§ 3. — Propriétés des fluides compressibles visqueux.

Mais si la définition du mot *fluide* nous empêche de considérer des fluides incompressibles visqueux, elle nous permet de traiter des *fluides compressibles visqueux* et, par l'égalité (10), elle nous fait connaître la forme qu'affecte nécessairement, en de pareils fluides, le travail virtuel de viscosité.

Si, selon l'usage, nous posons

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z},$$

l'égalité (9) pourra s'écrire

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} d\mathfrak{T}_v = & \int \left[\frac{\partial(\lambda\theta)}{\partial x}\delta x + \frac{\partial(\lambda\theta)}{\partial y}\delta y + \frac{\partial(\lambda\theta)}{\partial z}\delta z \right] d\varpi \\ & + \int \lambda\theta[\cos(n_i, x)\,\delta x + \cos(n_i, y)\,\delta y + \cos(n_i, z)\,\delta z]\, dS, \end{aligned} \right.$$

la première intégrale s'étendant au volume occupé par le fluide et la seconde à la surface qui le limite. Cette forme rentre, comme cas particulier, dans celle qui a été donnée en l'égalité (47) de la première Partie, à la condition de faire

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} & \nu_x = \nu_y = \nu_z = -\lambda(\rho, \mathrm{T})\,\theta, \\ & \tau_x = \tau_y = \tau_z = 0. \end{aligned} \right.$$

Or, si l'on compare ces égalités aux égalités (51) de la première Partie, on voit qu'elles découlent de ces dernières pourvu que l'on y fasse

$$(12) \qquad \mu(\rho, \mathrm{T}) = 0.$$

Donc, *la seule théorie des fluides visqueux qui soit compatible avec la définition du mot* fluide *est un cas particulier de la théorie habituellement admise; ce cas particulier est celui où le coefficient* $\mu(\rho, \mathrm{T})$ *est égal à* 0.

Les propriétés de ces fluides sont alors aisées à établir; pour les obtenir, il suffit d'égaler à 0 le coefficient $\mu(\rho, \mathrm{T})$ dans les équations de la théorie classique.

Dès lors, les équations (58), (74) et (75) de la première Partie de ces *Recherches* nous montrent que l'on a, en tout point de la masse fluide,

$$
(13)\qquad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial \Pi}{\partial x} - \rho(X_i + X_e - \gamma_x) - \frac{\partial}{\partial x}[\lambda(\rho, T)\theta] = 0,\\
&\frac{\partial \Pi}{\partial y} - \rho(Y_i + Y_e - \gamma_y) - \frac{\partial}{\partial y}[\lambda(\rho, T)\theta] = 0,\\
&\frac{\partial \Pi}{\partial z} - \rho(Z_i + Z_e - \gamma_z) - \frac{\partial}{\partial z}[\lambda(\rho, T)\theta] = 0,
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(14)\qquad \Pi + \rho^2(A_i + A_e) - \rho^2 \frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial \rho} = 0.
$$

Selon les égalités (57) de la première Partie, les grandeurs p_x, p_y, p_z se réduiront à

$$
(15)\qquad \left\{
\begin{aligned}
p_x &= \lambda(\rho, T)\theta \cos(n_i, x),\\
p_y &= \lambda(\rho, T)\theta \cos(n_i, y),\\
p_z &= \lambda(\rho, T)\theta \cos(n_i, z).
\end{aligned}
\right.
$$

Si un élément dS de la surface qui limite le fluide est soumis à une force dont les composantes sont $P_x\,dS$, $P_y\,dS$, $P_z\,dS$, on devra avoir, en vertu de ces égalités (15) et des égalités (76) de la première Partie,

$$
(16)\qquad \left\{
\begin{aligned}
\Pi \cos(n_i, x) &= P_x + \lambda(\rho, T)\cos(n_i, x),\\
\Pi \cos(n_i, y) &= P_y + \lambda(\rho, T)\cos(n_i, y),\\
\Pi \cos(n_i, z) &= P_z + \lambda(\rho, T)\cos(n_i, z),
\end{aligned}
\right.
$$

ce qui nous apprend que le vecteur P_x, P_y, P_z doit être normal à la surface S.

Enfin, les égalités (15) nous enseignent que le vecteur p_x, p_y, p_z doit être, en tout point, normal à la surface qui limite le fluide; cette proposition simplifie singulièrement la discussion de ce qui se passe à la surface de contact d'un solide et d'un fluide ou à la surface de contact de deux fluides. Il est inutile d'examiner si, le long d'une telle surface, il se produit une viscosité ($f < 0$), mais point de frottement ($\mathfrak{G} = 0$) ou bien, au contraire, si les deux corps au contact frottent l'un sur l'autre ($\mathfrak{G} < 0$). Ce que nous avons vu au Chapitre II de la quatrième Partie nous enseigne que, quelle que soit l'hypothèse faite, les deux corps resteront soudés l'un à l'autre le long de leur surface de contact. Si u_1, v_1, w_1 sont les composantes de la vitesse en un point de l'un des deux corps et u_2, v_2, w_2 les composantes de la vitesse en un point de l'autre corps, on aura, en tout point de leur surface de contact,

$$
(17)\qquad u_1 = u_2, \qquad v_1 = v_2, \qquad w_1 = w_2.
$$

Les résultats auxquels nous venons de parvenir peuvent se mettre sous une forme peu différente, mais susceptible d'une interprétation intéressante.

Posons

$$P = \Pi - \lambda(\rho, T)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right). \tag{18}$$

Les équations (13) deviendront

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial P}{\partial x} - \rho(X_i + X_e - \gamma_x) = 0, \\ &\frac{\partial P}{\partial y} - \rho(X_i + X_e - \gamma_y) = 0, \\ &\frac{\partial P}{\partial z} - \rho(X_i + X_e - \gamma_z) = 0. \end{aligned}\right. \tag{19}$$

Les équations (16) deviendront

$$P_x = P\cos(n_i, x), \qquad P_y = P\cos(n_i, y), \qquad P_z = P\cos(n_i, z). \tag{20}$$

Enfin, l'équation (14) deviendra

$$P + \rho^2(A_i + A_e) - \rho^2\frac{\partial\zeta(\rho, T)}{\partial\rho} + \lambda(\rho, T)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0$$

ou bien, en vertu de la première égalité (7),

$$P + \rho^2(A_i + A_e) - \rho^2\frac{\partial\zeta(\rho, T)}{\partial\rho} - \frac{\lambda(\rho, T)}{\rho}\frac{d\rho}{dt} = 0. \tag{21}$$

Les relations (19) et (20) ont exactement la même forme qu'en un fluide parfait où P serait la pression. Seule l'égalité (21) a une forme différente de celle qu'elle aurait en un tel fluide parfait; elle en diffère par la présence, au premier membre, du terme $-\frac{\lambda(\rho, T)}{\rho}\frac{d\rho}{dt}$. On peut donc, si l'on veut, énoncer la proposition suivante :

Les équations du mouvement d'un fluide visqueux ne diffèrent des équations du mouvement d'un fluide parfait que par la forme de l'équation dite de compressibilité et de dilatation; *l'équation relative aux fluides visqueux se tire de l'équation relative aux fluides parfaits en retranchant de la pression le terme* $\frac{\lambda(\rho, T)}{\rho}\frac{d\rho}{dt}$.

Bornons-nous à considérer le cas où les actions qui s'exercent sur le fluide sont newtoniennes; on a alors

$$A_i = 0, \qquad A_e = 0,$$

et l'équation (21) se réduit à la forme

$$(22)\qquad P - \rho^2 \frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial \rho} - \frac{\lambda(\rho, T)}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = 0.$$

Les lois du mouvement d'un fluide compressible, visqueux, soumis à des actions newtoniennes, ne diffèrent qu'en un point des lois du mouvement d'un fluide compressible, parfait, soumis aux mêmes actions; il n'existe plus de relation en termes finis entre la densité ρ, *la pression* P *et la température* T; *cette relation est remplacée par une équation différentielle qui, à la densité* ρ, *à la pression* P *et à la température* T, *relie la vitesse* $\frac{d\rho}{dt}$ *avec laquelle varie la densité.*

A cette manière de concevoir les fluides visqueux nous étions parvenus dès 1898 [1].

Discutons l'égalité (22).

Soit ρ_0 la densité qu'aurait le fluide sous la pression P, à la température T, si la viscosité n'existait pas; cette densité ρ_0, donnée par l'égalité

$$(23)\qquad P - \rho_0^2 \frac{\partial \zeta(\rho_0, T)}{\partial \rho_0} = 0,$$

est la densité que prendrait le fluide *en équilibre* sous la pression P, à la température T.

En désignant par ρ' une certaine valeur de ρ comprise entre ρ et ρ_0, on peut écrire, en vertu des égalités (22) et (23),

$$(24)\qquad (\rho_0 - \rho) \frac{\partial}{\partial \rho'} \left[\rho'^2 \frac{\partial \zeta(\rho', T)}{\partial \rho'} \right] - \frac{\lambda(\rho, T)}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = 0.$$

Pour maintenir le fluide en équilibre à la température T et avec la densité ρ', il faut le soumettre à une pression Π que donne l'égalité

$$\Pi = \rho'^2 \frac{\partial \zeta(\rho', T)}{\partial \rho'}.$$

Cette égalité peut être considérée comme une équation définissant ρ' en fonction de Π et de T; si, sans faire varier T, on fait croître Π de $d\Pi$, cette fonction croît de $\left(\frac{d\rho'}{d\Pi}\right)_T d\Pi$, et l'on a

$$(25)\qquad \left(\frac{d\rho'}{d\Pi}\right)_T = \frac{1}{\frac{\partial}{\partial \rho'} \left[\rho'^2 \frac{\partial \zeta(\rho', T)}{\partial \rho'} \right]} = F(\rho', T).$$

---

(1) *Traité élémentaire de Mécanique chimique fondée sur la Thermodynamique*, Livre IV, Chap. I, § 7, t. II, p. 163. Paris, 1898.

Selon l'égalité (25), l'égalité (24) devient

$$(26) \qquad \frac{d\rho}{dt} = -\frac{\rho}{\lambda(\rho, T)F(\rho', T)}(\rho - \rho_0).$$

L'inégalité (18) nous enseigne que $\lambda(\rho, T)$ est essentiellement positif; d'autre part, nous savons que, pour un fluide susceptible d'équilibres stables, la quantité

$$\left(\frac{d\rho}{d\Pi}\right)_T = F(\rho, T)$$

doit être essentiellement positive (¹).

L'égalité (26) nous enseigne donc que $\frac{d\rho}{dt}$ est constamment de signe contraire à $(\rho - \rho_0)$; d'où la proposition suivante :

En chaque point d'un fluide compressible parfait, où la température est T *et la pression* P, *la densité* ρ *a, à chaque instant du mouvement, la valeur* ρ_0 *qu'elle aurait au sein d'un fluide homogène, en équilibre à la température* T *et sous la pression uniforme* P. *Il n'en est plus de même au sein d'un fluide visqueux en mouvement; mais, pour chaque point matériel et à chaque instant, la vitesse de variation de la densité est d'un sens tel qu'elle tende à rapprocher la densité* ρ *de la valeur de* ρ_0 *qui convient à ce point et à cet instant.*

Supposons que la compressibilité du fluide, mesurée par la fonction $F(\rho, T)$, ne soit pas extrêmement grande dans les conditions où se trouve le fluide étudié et que le coefficient de viscosité $\lambda(\rho, T)$ ait une très petite valeur. Si $(\rho - \rho_0)$ n'a pas une très petite valeur absolue, l'équation (26) donnera pour $\frac{d\rho}{dt}$ une très grande valeur absolue; mais la première égalité (7) montre qu'il n'en peut être ainsi, dans le cas où les composantes u, v, w de la vitesse ne varient pas très rapidement d'un point au point voisin. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Au sein d'un fluide peu visqueux où la vitesse n'éprouve pas de très grandes variations lorsque l'on passe d'un point au point voisin, la densité ρ, *en chaque point et à chaque instant, diffère très peu de la valeur* ρ_0 *qui correspond au même point et au même instant.*

On voit bien ainsi comment les fluides parfaits sont la forme limite des fluides peu visqueux.

Pour établir plus simplement les diverses propositions que nous venons

---

(¹) *Sur la stabilité de l'équilibre d'une masse fluide dont les éléments sont soumis à leurs actions mutuelles* [*Journal de Mathématiques pures et appliquées,* 5ᵉ série, t. III, p. 174, condition (63); 1897].

d'énoncer, nous avons supposé que le fluide était soumis à des actions newtoniennes; mais cette restriction n'est pas essentielle et nous pouvons ne pas la faire.

Considérons les fonctions $\mathcal{A}_i(\mathrm{R}, x, y, z, t)$, $\mathcal{A}_e(\mathrm{R}, x, y, z, t)$ (I^re Partie, Chap. I, § 4) dans lesquelles il suffit de faire

$$\mathrm{R} = \rho(x, y, z, t)$$

pour obtenir les fonctions $\mathrm{A}_i(x, y, z, t)$, $\mathrm{A}_e(x, y, z, t)$.

L'égalité (148) peut s'écrire

$$\mathrm{P} + \rho^2[\mathcal{A}_i(\rho, x, y, z, t) + \mathcal{A}_e(\rho, x, y, z, t)] - \rho^2 \frac{\partial \zeta(\rho, \mathrm{T})}{\partial \rho} - \frac{\lambda(\rho, \mathrm{T})}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = 0.$$

Considérons, d'autre part, la fonction $\rho_0(x, y, z, t)$ que définit l'équation

$$\mathrm{P} + \rho_0^2[\mathcal{A}_i(\rho_0, x, y, z, t) + \mathcal{A}_e(\rho_0, x, y, z, t)] - \rho_0^2 \frac{\partial \zeta(\rho_0, \mathrm{T})}{\partial \rho_0} = 0,$$

lorsqu'on y remplace P et T par leurs expressions en fonctions de x, y, z, t. Retranchons ces deux équations membre à membre. Si nous désignons par $\rho'(x, y, z, t)$ une valeur comprise entre $\rho(x, y, z, t)$ et $\rho_0(x, y, z, t)$, le résultat obtenu pourra s'écrire

$$(27) \quad \left\{ \begin{aligned} & 2\rho' \left[\mathcal{A}_i(\rho', x, y, z, t) + \mathcal{A}_e(\rho', x, y, z, t) - \frac{\partial \zeta(\rho', \mathrm{T})}{\partial \rho'} \right] \\ & + \rho'^2 \left[\frac{\partial \mathcal{A}_i(\rho', x, y, z, t)}{\partial \rho'} + \frac{\partial \mathcal{A}_e(\rho', x, y, z, t)}{\partial \rho'} - \frac{\partial^2 \zeta(\rho', \mathrm{T})}{\partial \rho'^2} \right] \right\} (\rho - \rho_0) - \frac{\lambda(\rho, \mathrm{T})}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = 0. \end{aligned} \right.$$

Mais nous avons admis, à plusieurs reprises (I^re Partie, Chap. I, § 11), que, pour toute valeur de ρ' comprise parmi celles que peut atteindre la densité du fluide, on avait l'inégalité

$$\begin{aligned} & 2\rho' \left[\mathcal{A}_i(\rho', x, y, z, t) + \mathcal{A}_e(\rho', x, y, z, t) - \frac{\partial \zeta(\rho', \mathrm{T})}{\partial \rho'} \right] \\ & + \rho'^2 \left[\frac{\partial \mathcal{A}_i(\rho', x, y, z, t)}{\partial \rho'} + \frac{\partial \mathcal{A}_e(\rho', x, y, z, t)}{\partial \rho'} - \frac{\partial^2 \zeta(\rho', \mathrm{T})}{\partial \rho'^2} \right] < 0. \end{aligned}$$

Dès lors, il est aisé de déduire de l'égalité (27) des conclusions semblables à celles que nous avons déduites de l'égalité (26).

§ 4. — Retour aux formules générales de la viscosité. Combinaison des considérations précédentes et de l'hypothèse de Stokes.

Selon ce que nous avons vu au Paragraphe 2, le physicien qui, dans ses raisonnements, demeurerait fermement attaché à la définition du mot *fluide* serait conduit à cette conséquence : un fluide incompressible ne peut pas être visqueux.

Cette conséquence suffit à prouver que les propriétés des corps que l'expérimentateur nomme *fluides visqueux* ne peuvent être représentées par une théorie où l'on regarderait ces corps comme étant rigoureusement fluides. Force nous est de traiter les fluides visqueux comme des milieux élastiques, mais comme des milieux élastiques très aisément déformables.

Sans approfondir ici cette notion, que nous retrouvons en un autre travail, nous remarquerons que l'on peut, sans absurdité, regarder le potentiel interne du système comme différant très peu du potentiel interne d'un fluide proprement dit, tandis que le calcul du travail de viscosité exigerait que l'on tînt compte des déformations de chaque élément. On est alors conduit aux équations qui ont été développées au Chapitre I de la première Partie de ces *Recherches;* mais ces équations apparaissent comme des formules approchées, et non plus comme des lois rigoureuses. Ce caractère entraîne l'illégitimité de certaines déductions, par exemple de la démonstration du théorème de Lagrange donnée en la cinquième Partie de ces *Recherches,* au Paragraphe 1 du Chapitre I.

Ces remarques, qui nous ramènent aux équations générales de la viscosité, ne font cependant pas disparaître l'intérêt des considérations qui ont été développées au Paragraphe précédent.

Posons

$$P = \Pi - \frac{3\lambda(\rho, T) + 2\mu(\rho, T)}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \tag{28}$$

et les lois du mouvement des fluides visqueux, développées au Chapitre I de la première Partie de nos *Recherches,* pourront être présentées sous la forme suivante :

1° En tout point de la surface qui limite le fluide, on a [*loc. cit.,* égalités (57) et (76)]

$$(29)\quad \begin{cases} P_x = P\cos(n,x) - \mu\left[2\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\theta}{3}\right)\cos(n,x) + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\cos(n,y) + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\cos(n,z)\right], \\ P_y = P\cos(n,y) - \mu\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\cos(n,x) + 2\left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\theta}{3}\right)\cos(n,y) + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)\cos(n,z)\right], \\ P_z = P\cos(n,z) - \mu\left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\cos(n,x) + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\cos(n,y) + 2\left(\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\theta}{3}\right)\cos(n,z)\right]; \end{cases}$$

2° En tout point du fluide, on a [*loc. cit.,* égalités (49), (51) et (74)]

$$(30)\quad \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} - \rho(X_i + X_e - \gamma_x) - 2\frac{\partial}{\partial x}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\theta}{3}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) = 0, \\ \frac{\partial P}{\partial y} - \rho(Y_i + Y_e - \gamma_y) - \frac{\partial}{\partial x}\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) - 2\frac{\partial}{\partial y}\mu\left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\theta}{3}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\mu\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) = 0, \\ \frac{\partial P}{\partial z} - \rho(Z_i + Z_e - \gamma_z) - \frac{\partial}{\partial x}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\mu\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) - 2\frac{\partial}{\partial z}\mu\left(\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\theta}{3}\right) = 0; \end{cases}$$

3° En tout point du fluide, également, en vertu de l'égalité (75) de la première Partie de ces *Recherches* et de l'égalité (28) de la présente Partie, on a

$$\mathrm{P} + \rho^2(\mathrm{A}_i + \mathrm{A}_e) - \rho^2 \frac{\partial \zeta(\rho, \mathrm{T})}{\partial \rho} + \frac{3\lambda(\rho, \mathrm{T}) + 2\mu(\rho, \mathrm{T})}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0$$

ou bien, en vertu de l'égalité (7),

$$\mathrm{P} + \rho^2(\mathrm{A}_i + \mathrm{A}_e) - \rho^2 \frac{\partial \zeta(\rho, \mathrm{T})}{\partial \rho} - \frac{3\lambda(\rho, \mathrm{T}) + 2\mu(\rho, \mathrm{T})}{3\rho}\frac{d\rho}{dt} = 0. \tag{31}$$

Pour un instant, faisons abstraction de l'égalité (31) et ne considérons que les égalités (29) et (30); ces égalités sont précisément celles que nous aurions obtenues si nous avions étudié un fluide visqueux pour lequel la fonction $\mu(\rho, \mathrm{T})$ aurait la même valeur que pour le fluide dont nous nous occupons, mais au sein duquel l'hypothèse de Stokes, exprimée par l'égalité (4), serait vérifiée; la pression serait seulement représentée par la lettre P dans nos dernières formules, au lieu d'y être représentée par la lettre Π.

En chaque point de la surface de contact du fluide qui nous occupe et d'une paroi solide nous avons

$$(32)\quad \left\{\begin{aligned}
p_x &= \frac{3\lambda + 2\mu}{3}\theta\cos(n,x) + \mu\left[2\left(\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\theta}{3}\right)\cos(n,x) + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\cos(n,y) + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\cos(n,z)\right],\\
p_y &= \frac{3\lambda + 2\mu}{3}\theta\cos(n,y) + \mu\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\cos(n,x) + 2\left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\theta}{3}\right)\cos(n,y) + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)\cos(n,z)\right],\\
p_z &= \frac{3\lambda + 2\mu}{3}\theta\cos(n,z) + \mu\left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\cos(n,x) + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)\cos(n,y) + 2\left(\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\theta}{3}\right)\cos(n,z)\right].
\end{aligned}\right.$$

Que si l'on propose de calculer la projection du vecteur (p_x, p_y, p_z) sur la surface, on obtiendra le même résultat que si l'on avait pris simplement

$$(33)\quad \left\{\begin{aligned}
p_x &= \mu\left[2\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\theta}{3}\right)\cos(n,x) + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\cos(n,y) + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\cos(n,z)\right],\\
p_y &= \mu\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\cos(n,x) + 2\left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\theta}{3}\right)\cos(n,y) + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)\cos(n,z)\right],\\
p_z &= \mu\left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\cos(n,x) + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)\cos(n,y) + 2\left(\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\theta}{3}\right)\cos(n,z)\right].
\end{aligned}\right.$$

Or ces dernières égalités sont celles que l'on obtiendrait si l'on admettait l'hypothèse de Stokes. D'ailleurs l'étude de l'adhérence ou du glissement du fluide sur la paroi solide dépend uniquement de la projection du vecteur (p_x, p_y, p_z) sur cette paroi; cette étude est donc la même en nos deux problèmes.

Ainsi, *un fluide visqueux quelconque est, de tout point, comparable à un* *fluide au sein duquel la relation de Stokes*

$$3\lambda(\rho, \mathrm{T}) + 2\mu(\rho, \mathrm{T}) = 0 \tag{4}$$

serait vérifiée, mais où la densité en chaque point, au lieu de dépendre uniquement de la pression P *et de la température* T *en ce point, et d'en dépendre par la même relation*

$$\mathrm{P} + \rho^2(\mathrm{A}_i + \mathrm{A}_e) - \rho^2 \frac{\partial \zeta(\rho, \mathrm{T})}{\partial \rho} = 0 \tag{14 bis}$$

que si le fluide était en équilibre, doit vérifier à chaque instant la relation

$$\mathrm{P} + \rho^2(\mathrm{A}_i + \mathrm{A}_e) - \rho^2 \frac{\partial \zeta(\rho, \mathrm{T})}{\partial \rho} - \frac{3\lambda(\rho, \mathrm{T}) + 2\mu(\rho, \mathrm{T})}{3\rho} \frac{d\rho}{dt} = 0. \tag{31}$$

Cette relation (31) prête évidemment à toutes les considérations qui ont été développées au sujet de la relation (21).

CHAPITRE II.

LES PHÉNOMÈNES DE VISCOSITÉ AU VOISINAGE DE L'ÉTAT CRITIQUE.

§ 1. — Les effets de la viscosité, au voisinage du point critique, en un corps rigoureusement fluide.

La discussion, donnée au Paragraphe 3 du Chapitre précédent, de la relation (21) et des relations (22), (24) et (26) qui s'y rattachent, est liée à cette hypothèse : La quantité $\left(\frac{d\rho'}{d\Pi}\right)_{\mathrm{T}}$ ne prend pas des valeurs extrêmement grandes. La même restriction pèserait évidemment sur la discussion de l'égalité (31), laquelle devrait être menée exactement comme la discussion de l'égalité (21). Or cette hypothèse n'est pas vérifiée en toutes circonstances; *lorsque la température* T *et la densité* ρ' *du fluide tendent vers la température critique et la densité critique du fluide, la quantité* $\left(\frac{d\rho'}{d\Pi}\right)_{\mathrm{T}}$ *croît au delà de toute limite.*

Nous sommes donc amenés à compléter l'étude faite au Chapitre précédent en examinant les propriétés d'un corps compressible visqueux où

$$\left(\frac{d\rho'}{d\Pi}\right)_T = F(\rho', T)$$

a de très grandes valeurs.

Comme au Chapitre précédent, pour rendre cette discussion plus claire, nous imaginerons tout d'abord que le corps étudié se conforme rigoureusement à la définition du mot *fluide,* qui entraîne l'égalité

$$\mu(\rho, T) = 0. \tag{12}$$

Nous étendrons ensuite les résultats obtenus aux corps que l'on traite habituellement comme fluides visqueux.

Dans ce qui va suivre, nous supposerons qu'en tout point du fluide et à tout instant :

La température T *soit assez voisine de la température critique,*

Les densités ρ, ρ_0 *et, partant, la densité intermédiaire* ρ' *assez voisines de la densité critique,*

Pour que la fonction $F(\rho', T)$ *soit, en chaque point du fluide et à chaque instant, très grande par rapport à* $\frac{1}{\lambda(\rho, T)}$.

Dès lors, le produit $F(\rho', T)\lambda(\rho, T)$ ayant une très grande valeur, à une valeur finie de la différence $(\rho - \rho_0)$ l'égalité (26) fera correspondre une valeur extrêmement petite de $\frac{d\rho}{dt}$.

Ainsi donc, moyennant les suppositions indiquées, *la densité d'un élément fluide varie avec une extrême lenteur bien que sa valeur diffère notablement de la valeur qui conviendrait à l'équilibre dans les conditions de température et de pression où se trouve cet élément.*

Dès lors, rien n'empêche que l'on observe au sein du fluide des ÉTATS DE QUASI-ÉQUILIBRE ; *en un tel état, les trois composantes de la vitesse sont très petites en chaque point et à chaque instant; cependant la densité en ce point et à cet instant diffère notablement de celle que l'équation d'équilibre ferait correspondre à la température et à la pression qui règnent en ce point et à cet instant.*

En un tel état, on a approximativement

$$\gamma_x = 0, \qquad \gamma_y = 0, \qquad \gamma_z = 0.$$

D'ailleurs, comme les forces agissantes sont supposées newtoniennes, il existe deux fonctions $V_i(x, y, z, t)$, $V_e(x, y, z, t)$ telles que

$$X_i = -\frac{\partial V_i}{\partial x}, \qquad Y_i = -\frac{\partial V_i}{\partial y}, \qquad Z_i = -\frac{\partial V_i}{\partial z},$$

$$X_e = -\frac{\partial V_e}{\partial x}, \qquad Y_e = -\frac{\partial V_e}{\partial y}, \qquad Z_e = -\frac{\partial V_e}{\partial z}.$$

Les équations (146) se résument alors dans l'égalité approximative

$$dP + \rho\, d(V_i + V_e) = 0.$$

Cette égalité nous montre que l'on a approximativement

$$\rho = f(V_i + V_e).$$

Dans un état de quasi-équilibre, la distribution des densités au sein du fluide est telle que les points situés sur une même surface de niveau aient sensiblement la même densité.

En particulier, si les forces agissantes se réduisent à la pesanteur, le fluide en quasi-équilibre sera formé de couches horizontales dont chacune aura sensiblement la même densité en tout point.

Un tel état ne sera pas un état permanent; la densité qui correspond à chaque élément fluide variera très lentement jusqu'au moment où la densité aura, en chaque point, la valeur ρ_0 que l'équation

$$(23) \qquad P - \rho_0^2 \frac{\partial \zeta(\rho_0)}{\partial \rho_0} = 0$$

fait correspondre à la pression P et à la température T qui règnent en ce point.

Au lieu d'observer le système à l'état de quasi-équilibre, on peut l'observer animé d'un mouvement sensible; les composantes γ_x, γ_y, γ_z de l'accélération doivent alors figurer dans les équations (19), car elles ont des valeurs notables. La densité de chaque élément matériel varie avec une extrême lenteur; si l'on considère deux instants, t_0, t, qui ne sont pas très éloignés l'un de l'autre, un même élément matériel a sensiblement même densité à l'instant t_0 et à l'instant t.

Considérons l'état du fluide à un instant t_0 et, selon le procédé de Lagrange, caractérisons chaque point matériel par ses coordonnées a, b, c à cet instant; à ce même instant, la distribution des densités au sein du fluide est quelconque; $r(a, b, c)$ est la densité du point matériel (a, b, c).

Proposons-nous d'étudier le mouvement du fluide à partir de l'instant t_0, et pendant un laps de temps qui ne soit pas très long. Pour déterminer ce mouvement, nous devons faire usage des équations (19), que nous pourrons mettre sous la forme employée par Lagrange :

$$\frac{\partial P}{\partial a} + \rho\left(\frac{\partial V_i}{\partial a} + \frac{\partial V_e}{\partial a}\right) + \rho\left(\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial z}{\partial a}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial P}{\partial b} + \rho\left(\frac{\partial V_i}{\partial b} + \frac{\partial V_e}{\partial b}\right) + \rho\left(\frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial z}{\partial b}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial P}{\partial c} + \rho\left(\frac{\partial V_i}{\partial c} + \frac{\partial V_e}{\partial c}\right) + \rho\left(\frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{\partial y}{\partial c}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial z}{\partial c}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right) = 0.$$

En outre, nous devrons considérer l'équation de continuité, mise également sous la forme de Lagrange,

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho D = 0.$$

Enfin, tant que la différence $(t - t_0)$ n'excédera pas une certaine limite, nous aurons sensiblement

$$\rho(a, b, c, t) = r(a, b, c).$$

Cette égalité jouera le rôle d'équation supplémentaire et ramènera l'équation de continuité à la forme

$$\frac{\partial D}{\partial t} = 0.$$

Il est un problème, très différent du précédent au point de vue de la Physique, mais qui se traduit exactement par des équations de même forme; ce dernier problème peut donc servir à *illustrer* le premier; voici ce problème :

Dans un fluide incompressible, un corps est dissous; la concentration a, pour les divers éléments matériels, des valeurs très différentes et, comme la densité est fonction de la concentration, il en est de même de la densité.

On suppose que le corps dissous se diffuse dans le dissolvant avec une extrême lenteur; si l'on désigne par s la concentration qui correspond à un élément déterminé du dissolvant, $\frac{ds}{dt}$ aura, pour cet élément, une très petite valeur; il en sera de même de $\frac{d\rho}{dt}$.

Considérons le fluide à un instant t_0; soient, à cet instant, a, b, c les coordonnées d'un élément du dissolvant, coordonnées dont la connaissance permettra à tout instant de reconnaître cet élément; la densité, au sein de cet élément, est $r(a, b, c)$ à l'instant t_0 et $\rho(a, b, c, t)$ à l'instant t; si le laps de temps $(t - t_0)$ n'est pas extrêmement grand, $\rho(a, b, c, t)$ diffère très peu de $r(a, b, c)$, et le mouvement au sein de la dissolution est régi par les équations précédemment écrites.

Tous ceux qui ont observé, au sein d'un fluide, les stries et les traînées qui se manifestent au voisinage du point critique; qui ont observé également les mouvements qui se produisent au sein d'une dissolution de concentration très peu uniforme, ont pu remarquer l'extrême ressemblance de ces phénomènes. L'analyse précédente précise cette analogie.

La variation de la densité ρ d'un fluide dont l'état avoisine l'état critique, ordinairement très lente, prend une vitesse notable si l'on agite vivement le liquide. Les considérations précédentes permettent encore de rendre compte de ce fait.

Un certain espace contient un fluide que nous supposons dans un état de quasi-équilibre, en sorte que nous avons sensiblement

$$\gamma_x = 0, \qquad \gamma_y = 0, \qquad \gamma_z = 0.$$

Les équations (19) se réduisent alors à

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \rho(X_i + x_e), \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = \rho(Y_i + Y_e), \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = \rho(Z_i + Z_e).$$

Supposons les sommes $(X_i + X_e)$, $(Y_i + Y_e)$, $(Z_i + Z_e)$ assez petites pour que les variations de P, d'un point à l'autre de l'espace considéré, soient très petites; cela aura lieu, en particulier, si l'espace considéré a les dimensions généralement employées dans les recherches sur le point critique et si le champ agissant se réduit à celui de la pesanteur. Toutes les valeurs de P sont supposées voisines de la pression critique.

La température est également supposée presque uniforme dans l'espace considéré et, partout, très voisine de la température critique.

La densité ρ_0, donnée par l'égalité (23), n'en présente pas moins, au sein de l'espace considéré, des variations notables; mais, visiblement, toutes les valeurs de ρ_0 au sein de cet espace demeurent au nombre de celles pour lesquelles $F(\rho_0, T)$ a une valeur extrêmement grande.

Pour que notre état de quasi-équilibre soit possible il faut que les valeurs de ρ, aux divers points de l'espace considéré, soient aussi telles que $F(\rho, T)$ ait une valeur extrêmement grande; nous supposerons qu'il en soit ainsi.

Si l'on désigne par ε la valeur très petite que prend le produit $\frac{\lambda(\rho, T)}{\rho}\frac{d\rho}{dt}$, pour un élément matériel donné, en cet état d'équilibre, on a, selon l'égalité (22),

$$P - \rho^2 \frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial \rho} = \varepsilon. \tag{34}$$

Supposons qu'on laisse cet état de quasi-équilibre non troublé jusqu'à l'instant t. A partir de ce moment, on produit dans l'espace considéré une vive agitation.

Considérons un instant t', postérieur à t, et tel que la différence $(t'-t)$ ne soit pas très grande.

A l'instant t', les composantes $\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$ ont, en général, aux divers points du fluide, des valeurs notables que nous supposerons grandes par rapport aux X, Y, Z; si, par exemple, la seule force agissante est la pesanteur, $\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$ seront supposés grands par l'intensité de la pesanteur; selon les égalités (19), il en sera de même de $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial P}{\partial z}$; P subira donc, d'un point à l'autre de l'espace, des variations notables; sa valeur ne pourra être partout très voisine de la pression critique.

Dès lors, à l'instant t', pour un élément matériel donné, P a, en général, une valeur P' notablement différente de la valeur prise par la même grandeur, pour le même élément, à l'instant t, cette dernière différant très peu de la pression critique.

Quant à la température T' au sein de l'élément considéré, à l'instant t', nous supposerons qu'elle continue à différer très peu de la température critique et, partant, de T.

S'il en est ainsi, on voit sans peine que $\frac{d\rho}{dt}$ n'a pu, pour l'élément considéré, demeurer sans cesse très petit de l'instant t à l'instant t'.

En effet, nous avons à l'instant t', pour l'élément considéré,

$$P' - \rho'^2 \frac{\partial \zeta(\rho', T')}{\partial \rho'} = \frac{\lambda(\rho', T')}{\rho'} \frac{d\rho'}{dt'}. \tag{22 bis}$$

Si, à l'instant t', $\frac{d\rho'}{dt'}$ a une valeur notable, la proposition est démontrée, il nous reste donc à examiner le cas où $\frac{d\rho'}{dt'}$ a une très petite valeur, cas auquel $\frac{\lambda(\rho', T')}{\rho'} \frac{d\rho'}{dt'}$ a aussi une très petite valeur que nous désignerons par ε'.

Les égalités (22 *bis*) et (34) nous donnent

$$P' - P + \rho'^2 \frac{\partial \zeta(\rho', T')}{\partial \rho'} - \rho^2 \frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial \rho} = \varepsilon' - \varepsilon.$$

D'ailleurs, T' différant très peu de T, et $\frac{\partial^2 \zeta(\rho, T)}{\partial \rho\, \partial T}$ n'étant jamais extrêmement grand, $\rho'^2 \frac{\partial \zeta(\rho', T')}{\partial \rho'}$ diffère extrêmement peu de $\rho'^2 \frac{\partial \zeta(\rho', T)}{\partial \rho'}$. Si donc nous désignons par η une très petite grandeur, l'égalité précédente devient

$$P' - P + \rho'^2 \frac{\partial \zeta(\rho', T)}{\partial \rho'} - \rho^2 \frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial \rho} = \eta$$

ou bien

$$P' - P + \int_t^{t'} \frac{\partial}{\partial \rho}\left[\rho^2 \frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial \rho}\right] \frac{d\rho}{dt} dt = \eta.$$

η a une valeur très petite;

$(P' - P)$ a une valeur notable;

$\frac{\partial}{\partial \rho}\left[\rho^2 \frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial \rho}\right]$ n'a une valeur très grande que pour un fluide très peu compressible, ce qui n'a pas lieu dans le cas étudié;

par hypothèse, $(t' - t)$ n'est pas extrêmement grand;

l'égalité précédente ne saurait avoir lieu si, entre les instants t et t', $\frac{d\rho}{dt}$ était demeuré toujours très petit.

Notre théorème est donc établi.

§ 2. — Extension des résultats précédents aux corps habituellement nommés fluides visqueux. — Comparaison avec les faits d'expérience.

Il n'est pas malaisé d'étendre les considérations précédentes aux corps que l'on nomme habituellement *fluides visqueux;* il suffit, en effet, de suivre la voie qui a été indiquée au Paragraphe 4 du Chapitre précédent. A l'égalité (22) nous devrons substituer l'égalité

$$P - \rho^2 \frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial \rho} - \frac{3\lambda(\rho, T) + 2\mu(\rho, T)}{3\rho} \frac{d\rho}{dt} = 0 \tag{35}$$

qui est la forme prise par l'égalité (31) lorsque les actions sont newtoniennes; cette égalité (35) se discutera d'ailleurs comme l'égalité (22); elle nous montrera encore que, en un fluide dont l'état diffère très peu de l'état critique, la densité de chaque masse élémentaire ne varie qu'avec une extrême lenteur.

Si donc on étudie le mouvement du fluide pendant un laps de temps de peu de durée, on pourra regarder la densité de chacune des masses élémentaires comme sensiblement constante; le fluide se mouvra à peu près comme un fluide hétérogène et incompressible; mais ce dernier fluide, au lieu d'être dénué de viscosité comme il arrivait au Paragraphe précédent, sera ici un fluide visqueux; il sera inutile d'ajouter que les actions de viscosité vérifient, au sein de ce dernier fluide, l'hypothèse de Stokes, car en un fluide incompressible les équations de la viscosité sont indépendantes de la relation qui peut exister entre les fonctions $\lambda(\rho, T)$, $\mu(\rho, T)$.

Le *modèle* qui nous a servi à *illustrer* le mouvement d'un fluide compressible dont l'état avoisine l'état critique peut encore être employé, mais il doit être complété; nous devons supposer que notre dissolution mal mélangée et à diffusion lente est, en outre, une dissolution visqueuse. Ainsi complété, ce modèle fournit une image saisissante des stries et des traînées qui apparaissent, en un fluide, au voisinage de l'état critique.

De nombreux observateurs ont remarqué ces stries et ces traînées, ont étudié les états de quasi-équilibre que manifeste un fluide placé en des circonstances peu différentes des conditions critiques, ont remarqué l'extrême lenteur avec laquelle s'établissait l'équilibre proprement dit. Sans détailler tous les faits d'expérience qui ont été signalés, bornons nous à citer ceux qui les ont le plus soigneusement notés : ce sont MM. Cailletet et Colardeau (1), M. de Heen (2); le prince Boris Galitzine, soit seul (3), soit en collaboration avec M. J. Wilip (4); M. Gouy (5), M. F.-V. Dwelshauvers-Déry (6), M. Traube (7). Parmi ces nombreux travaux, ceux de M. Gouy méritent une mention spéciale; seuls, ils ont nettement mis en évidence la notion de *quasi-équilibre*.

Ces phénomènes ont donné lieu à des interprétations diverses et parfois assez étranges. Dès 1898 (8), nous avions indiqué sommairement les principes que nous venons de développer et qui nous paraissent rendre un compte satisfaisant des particularités que présente un fluide au voisinage de l'état critique; mais nous avions cru nécessaire de supposer que $\lambda(\rho, T)$ devenait infini au point critique; on voit, par ce qui précède, que cette supposition est inutile; pour que nos raisonnements vaillent, il suffit que $\lambda(\rho, T)$ (au § 1) ou que $[3\lambda(\rho, T)+2\mu(\rho, T)]$ (au § 2) ne s'annule pas au point critique.

---

(1) CAILLETET et COLARDEAU, *Journal de Physique*, 2e série, t. VIII, 1889, p. 389. — *Annales de Chimie et de Physique*, 6e série, t. XVIII, 1889, p. 269.

(2) DE HEEN, *Bulletin de l'Académie Royale de Belgique*, 3e série, t. XXIV, 1892, p. 267. — *Les légendes du point critique*, Liége, 1901. — *Les dernières mésaventures du point critique*, Liége, 1901.

(3) BORIS GALITZINE, *Wiedemann's Annalen*, Bd. L, 1893, p. 251.

(4) BORIS GALITZINE et J. WILIP, *Bulletin de l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg*, t. XI, n° 3. — *Rapports présentés au Congrès international de Physique*, t. I, Paris, 1900, p. 668.

(5) GOUY, *Comptes rendus*, t. CXVI, 1893, p. 1289.

(6) F.-V. DWELSHAUVERS-DÉRY, *Bulletin de l'Académie Royale de Belgique*, 3e série, t. XXX, 1895, p. 570.

(7) TRAUBE, *Drude's Annalen*, Bd. VIII, 1902, p. 267. — On trouvera un exposé très complet de ces recherches et des théories, distinctes de la présente explication, auxquelles elles ont donné lieu dans : E. MATHIAS, *Le point critique des corps purs*, Paris, 1904. Chapitre X.

(8) *Traité élémentaire de Mécanique chimique fondée sur la Thermodynamique*, t. II, 1898, p. 163.

Il ne paraît pas que notre explication ait été remarquée de la plupart des physiciens; ceux, en petit nombre, qui l'ont remarquée, ne semblent pas l'avoir comprise; ils ont cru y voir une *viscosité d'un nouveau genre* et l'ont considérée comme étant en désaccord avec la théorie générale de la viscosité; bien au contraire, elle est une conséquence nécessaire de cette théorie; elle ne heurte même pas l'opinion des physiciens qui, sur la foi de la théorie cinétique des gaz, regarderaient la relation de Stokes

$$3\lambda(\rho, T) + 2\mu(\rho, T) = 0 \tag{4}$$

comme exacte pour les gaz parfaits.

NOTE.

SUR LA VISCOSITÉ ET LE FROTTEMENT AU CONTACT DE DEUX LIQUIDES PARFAITS [1].

Au Paragraphe 2 du Chapitre II de la cinquième Partie, nous avons établi le théorème suivant :

Un fluide parfait, c'est-à-dire dénué de toute viscosité interne, ne peut, en général, être affecté ni de viscosité, ni de frottement au contact d'une paroi solide.

Nous nous proposons de montrer ici que, *au contact de deux liquides parfaits, il ne peut, en général, se manifester ni viscosité, ni frottement.*

En effet, si la viscosité et le frottement n'étaient pas nuls tous deux le long de la surface par laquelle un fluide parfait confine à un autre fluide, visqueux ou parfait, les deux fluides seraient *soudés* l'un à l'autre le long de la surface de contact (*Recherches,* IV[e] Partie, Chap. II, § 2); chacune des trois composantes de la vitesse demeurerait continue au travers de cette surface.

Cela posé, considérons deux fluides parfaits et incompressibles 1 et 2, se touchant le long de la surface S; supposons que, jusqu'à l'instant $t = 0$, ces deux fluides soient en équilibre sous l'action de certaines forces extérieures dérivant d'une fonction potentielle; la surface S coïncide alors avec une certaine surface d'égal niveau potentiel.

[1] *Procès-verbaux des Séances de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux,* séance du 19 février 1903.

A l'instant $t = 0$, mettons le système en mouvement sans imprimer à aucun élément matériel une variation brusque de vitesse. Le théorème de Lagrange s'appliquera à chacun de nos deux liquides; chacun d'eux admettra une fonction potentielle des vitesses, que nous désignerons par φ_1 pour le fluide 1, et par φ_2 pour le fluide 2. Les composantes de la vitesse seront, au sein du fluide 1,

$$(1) \qquad u_1 = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}, \qquad v_1 = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}, \qquad w_1 = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}$$

et, au sein du fluide 2,

$$(1\ bis) \qquad u_2 = -\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}, \qquad v_2 = -\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}, \qquad w_2 = -\frac{\partial \varphi_2}{\partial z}.$$

Au sein du fluide 1, la fonction φ_1 vérifiera la condition

$$(2) \qquad \Delta \varphi_1 = 0,$$

tandis que, au sein du fluide 2, la fonction φ_2 vérifiera la condition

$$(2\ bis) \qquad \Delta \varphi_2 = 0.$$

Les deux fluides ne devant, le long de la surface S, ni se compénétrer, ni se séparer l'un de l'autre, on devra avoir, en tout point de cette surface et à tout instant,

$$(3) \qquad \frac{\partial \varphi_1}{\partial n_1} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial n_2} = 0,$$

n_1, n_2 étant les deux demi-normales à la surface S, respectivement dirigées vers l'intérieur des fluides 1 et 2.

Soit θ une direction quelconque tangente, à l'instant t, à la surface S. La condition nécessaire et suffisante pour que, à cet instant, les deux fluides ne glissent pas l'un sur l'autre, s'exprime par l'égalité

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta} = 0.$$

Cette égalité exprime que, à l'instant considéré t, la différence $(\varphi_2 - \varphi_1)$ a même valeur en tout point de la surface S. En d'autres termes, le long de la surface de contact des deux fluides, la différence $(\varphi_2 - \varphi_1)$ a une valeur qui dépend seulement de t :

$$(4) \qquad \varphi_2 - \varphi_1 = f(t).$$

Mais, à la fonction φ_1, je puis, comme fonction potentielle des vitesses du fluide 1, substituer la fonction $\varphi_1 + f(t)$, que je désignerai maintenant par φ_1. Les égalités (1), (1 *bis*), (2), (2 *bis*) et (3) subsistent, tandis que l'égalité (4) devient

$$\varphi_1 = \varphi_2. \tag{5}$$

Les égalités (2), (2 *bis*), (3) et (5) nous enseignent, selon un théorème bien connu, que *les deux fonctions potentielles* φ_1, φ_2 *forment une fonction analytique unique* φ *dans toute l'étendue du volume occupé par les deux fluides* 1 *et* 2. En d'autres termes, *le mouvement du système sera le même que si ce volume était occupé par un fluide unique ayant partout même densité.*

Il est clair, sans aucun calcul, que cette conclusion est inadmissible. Nous en serons encore mieux convaincus par un exemple.

Supposons que les deux fluides remplissent en entier un vase clos; soient U, V, W les composantes de la vitesse d'un point M, pris sur la surface interne de la paroi; soit n la normale à cette surface dirigée vers l'intérieur du fluide. Nous aurons, en tout point de la paroi,

$$U\cos(n, x) + V\cos(n, y) + W\cos(n, z) + \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0, \tag{6}$$

en même temps que nous aurons, en tout point de l'espace que cette paroi circonscrit,

$$\Delta\varphi = 0. \tag{7}$$

Si, pour tout point M de la surface de la paroi et pour tout instant t, on se donne U, V, W, les égalités (6) et (7) déterminent la fonction φ à une fonction près de t et, par conséquent, déterminent complètement le mouvement des deux fluides.

Supposons que le mouvement imprimé au vase se réduise à une translation, d'ailleurs quelconque :

$$U = \xi(t), \qquad V = \eta(t), \qquad W = \zeta(t).$$

Les égalités (6) et (7) nous donneraient

$$\varphi = -[\xi(t)x + \eta(t)y + \zeta(t)z] + \psi(t),$$

$\psi(t)$ étant une fonction arbitraire de t, et ce serait la seule forme possible de φ, en sorte que toutes les parties du fluide subiraient la même translation que la paroi.

Or, on peut choisir les fonctions $\xi(t)$, $\eta(t)$, $\zeta(t)$ qui sont, jusqu'ici, entièrement arbitraires, de telle sorte que, tout en demeurant continues, elles s'annulent à partir de l'instant $t = t_1$, tandis que les trois quantités

$$A = \int_{t_0}^{t_1} \xi(t)\,dt, \qquad B = \int_{t_0}^{t_1} \eta(t)\,dt, \qquad C = \int_{t_0}^{t_1} \zeta(t)\,dt$$

auront telles valeurs que l'on voudra. A partir de cet instant t_1, le fluide sera en équilibre; la surface S, qui aura subi une simple translation de composantes A, B, C, devra, à l'instant $t = t_1$, coïncider avec une surface d'égal niveau potentiel.

On parviendrait donc à la conclusion suivante : *Si des forces dérivent d'une fonction potentielle, une portion quelconque d'une surface d'égal niveau potentiel se trouve encore, après une translation quelconque, sur une surface d'égal niveau potentiel.*

Visiblement, cette conclusion est absurde.