ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

K.M. PETERSON

Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 2e série, tome 7, nº 2 (1905), p. 217-263
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1905_2_7_2_217_0>

© Université Paul Sabatier, 1905, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (http://picard.ups-tlse.fr/~annales/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUR L'INTÉGRATION

DES

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES,

PAR K. M. PETERSON.

TROISIÈME MÉMOIRE.

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES A UN NOMBRE QUELCONQUE DE VARIABLES INDÉPENDANTES.

Traduit du russe par M. Édouard DAVAUX,

Ingénieur de la Marine, à Toulon [1].

I. — ÉQUATIONS LINÉAIRES AUX DÉRIVÉES PARTIELLES A UN NOMBRE QUELCONQUE DE VARIABLES INDÉPENDANTES.

Toute équation différentielle

$$\text{(1)} \qquad E = d\omega + X\,dx + Y\,dy + Z\,dz + \ldots = 0$$

entre des variables ω, x, y, z, ..., dans laquelle X, Y, Z, ... désignent des fonctions arbitrairement données de ces variables, exprime une dépendance entre l'une des variables ω et les m autres variables qui sont indépendantes. En désignant par ξ, η, ζ, ... les dérivées partielles de ω par rapport à x, y, z, ..., nous

(1) Le troisième Mémoire de K. M. Peterson, Объ интегрированіи уравненій съ частными производными, a paru dans le Tome X (p. 169-223) du *Recueil mathématique* (Математическій сборникъ), publié par la Société mathématique de Moscou; il a été lu le 20 avril 1879.

aurons

$$(2)\qquad d\omega = \xi\, dx + \eta\, dy + \zeta\, dz + \ldots.$$

Si, dans l'équation différentielle $E = 0$, nous faisons varier arbitrairement x seulement, en définissant les accroissements dy, dz, ..., des $m - 1$ autres variables indépendantes, par les $m - 1$ équations

$$(3)\qquad dy = u\, dx, \qquad dz = v\, dx, \qquad \ldots,$$

où u, v, ... sont des fonctions de toutes les variables, choisies arbitrairement, alors, par suite de ces équations (3) et de l'équation (2), l'équation différentielle donnée $E = 0$ prend la forme

$$E = (\xi + u\eta + v\zeta + \ldots + k)\, dx = 0,$$

où $k = X + uY + vZ + \ldots$, et, pour dx arbitraire, se change, par conséquent, en une équation linéaire aux dérivées partielles de ω, par rapport à x, y, z, ..., de la forme générale

$$(4)\qquad F = \xi + u\eta + v\zeta + \ldots + k = 0.$$

Ainsi, la dépendance entre les variables ω, x, y, z, ... qu'exprime l'équation aux dérivées partielles $F = 0$, est la même que celle qu'exprime l'équation différentielle $E = 0$, quand existent les $m - 1$ équations (3). Nous nommerons ces équations (3), les hypothèses ou les conditions, et nous les représenterons, pour simplifier, par

$$A = dy - u\, dx = 0, \qquad B = 0, \qquad C = 0, \qquad \ldots.$$

Si l'équation différentielle $E = 0$ s'intègre sous ces conditions, c'est-à-dire si la dépendance entre les variables, définie par cette équation sous ces conditions, s'exprime sous une forme finie, nous avons alors l'équation de l'intégrale linéaire aux dérivées partielles arbitrairement donnée

$$F = \xi + u\eta + v\zeta + \ldots + k = 0;$$

cette dernière, en effet, après multiplication par dx, se change, par suite des conditions $dy - u\, dx = 0$, $dz - v\, dx = 0$, ..., en l'équation différentielle

$$E = F\, dx = \xi\, dx + \eta\, dy + \zeta\, dz + \ldots + k\, dx = d\omega + k\, dx = 0,$$

entre ω, x, y, z, ..., le terme $k\, dx$ se ramenant, d'après les conditions, à différentes expressions de la forme

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz + \ldots$$

qui ont, par suite de ces conditions, une seule et même signification $k\,dx$.

Équations conditionnelles.

Une équation différentielle $E = 0$, qui nous est donnée entre des variables quelconques $\omega, x, y, z, \ldots$, sous les conditions $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, ..., où A, B, C, ... sont, d'une manière générale, des expressions différentielles telles que E, s'appellera une *équation conditionnelle*, et nous la représenterons par

$$(5) \qquad E = 0 \quad \text{si} \quad A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0, \quad \ldots.$$

L'équation conditionnelle $E = 0$ a un sens plus général que l'équation non conditionnelle $E = 0$; en disant que l'expression E s'annule seulement, quand les expressions A, B, C, ... sont égales à 0, nous définissons moins la dépendance entre les variables que par l'équation $E = 0$, donnée en dehors de toute hypothèse.

Lorsque toutes les équations différentielles $E = 0$, $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, ... s'intègrent, il entre, dans leurs intégrales $\mathbf{E} = 0$, $\mathbf{A} = 0$, $\mathbf{B} = 0$, $\mathbf{C} = 0$, ..., des constantes d'intégration $e, a, b, c, \ldots$, qui seraient des quantités constantes, si E, A, B, C, ... s'annulaient. Mais comme, d'après la signification de l'équation (5), E n'est nul que quand A, B, C, ... s'annulent, e ne sera donc une constante que quand $a, b, c, \ldots$ seront des constantes, et c'est, par conséquent, une quantité variable, dépendant de $a, b, c, \ldots$. Nous exprimerons entièrement cette dépendance, que rien ne définit plus complètement, en considérant e comme une fonction arbitraire des variables $a, b, c, \ldots$, que nous appellerons les *arguments* des conditions $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, ... De là résulte que la constante d'intégration, dans l'intégrale de toute équation différentielle $E = 0$, est une fonction arbitraire de tous les arguments des conditions, sous lesquelles cette équation est donnée, et ne dépend pas des variables données, seulement quand l'équation $E = 0$ est donnée non conditionnelle.

L'intégrale de l'équation conditionnelle

$$E = 0 \quad \text{si} \quad A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0, \quad \ldots$$

s'exprime par les équations finies

$$\mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{A} = 0, \quad \mathbf{B} = 0, \quad \mathbf{C} = 0, \quad \ldots,$$

dans lesquelles, outre les variables données $\omega, x, y, z, \ldots$, entrent les arguments

$a, b, c, \ldots$ et une fonction arbitraire de ces arguments $e = \varphi(a, b, c, \ldots)$. Nous pouvons exprimer cette intégrale par une équation $f = 0$ entre les variables principales, si nous définissons les arguments $a, b, c, \ldots$ au moyen des intégrales $\mathbf{A} = 0$, $\mathbf{B} = 0$, $\mathbf{C} = 0$, ... des conditions, et si nous portons leurs valeurs dans l'intégrale $\mathbf{E} = 0$ de l'équation $\mathrm{E} = 0$ à laquelle des conditions sont imposées.

Intégrale d'une équation linéaire aux dérivées partielles du premier ordre.

Il résulte de ce qui précède que l'intégrale d'une équation linéaire aux dérivées partielles du premier ordre, par rapport à m variables indépendantes,

$$\mathrm{F} = \xi + u\eta + v\zeta + \ldots + k = 0, \tag{4}$$

qui est identique à l'intégrale de l'équation différentielle $\mathrm{E} = 0$, donnée sous $m - 1$ conditions, s'exprime par l'équation finie $f = 0$, dans laquelle entre une fonction arbitraire de $m - 1$ arguments. Quand l'équation conditionnelle $\mathrm{E} = 0$ ne s'intègre pas, l'intégrale $f = 0$ n'existe pas.

Intégrale d'une équation linéaire aux dérivées partielles du $n^{\text{ième}}$ ordre.

Quand, dans l'équation différentielle donnée

$$\mathrm{E} = d\omega + \mathrm{X}\,dx + \mathrm{Y}\,dy + \mathrm{Z}\,dz + \ldots + \mathrm{P}\,dp + \mathrm{Q}\,dq + \ldots = 0 \tag{6}$$

entrent des variables auxiliaires $p, q, \ldots$, dont la dépendance avec ω et les variables indépendantes $x, y, z, \ldots$ est définie par des équations non conditionnelles, les accroissements $dp, dq, \ldots$ de ces variables auxiliaires peuvent être éliminées de l'équation $\mathrm{E} = 0$.

Supposons que $p, q, \ldots$ désignent les dérivées partielles de ω par rapport à $x, y, z, \ldots$, jusqu'au $(n-1)^{\text{ième}}$ ordre inclusivement. L'équation donnée $\mathrm{E} = 0$ a alors la forme d'une équation différentielle d'ordre $n - 1$, si, d'une façon générale, on prend pour ordre d'une expression l'ordre le plus élevé des dérivées partielles qui y entrent.

Les équations non conditionnelles, par lesquelles s'expriment les valeurs de toutes les dérivées partielles, ont la forme générale

$$dp = \frac{dp}{dx}dx + \frac{dp}{dy}dy + \frac{dp}{dz}dz + \ldots, \tag{7}$$

où $\frac{dp}{dx}, \frac{dp}{dy}, \frac{dp}{dz}, \cdots$ sont des dérivées partielles d'ordre $r + 1$, quand p est une dérivée partielle d'ordre r. En exprimant, au moyen de l'équation (7), toutes les différentielles $d\omega$, dp, dq, par dx, dy, dz, ..., nous mettons l'équation $E=0$ sous la forme

$$E = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz + \ldots = 0, \tag{8}$$

où X, Y, Z, ... sont des expressions linéaires d'ordre n. Si m est le nombre des variables indépendantes x, y, z, ..., alors, sous les $m-1$ conditions

$$dy - u\,dx = 0, \qquad dz - v\,dx = 0, \qquad \ldots, \tag{9}$$

l'équation différentielle $E=0$ prend la forme

$$E = (X + uY + vZ + \ldots)\,dx = 0,$$

et, pour dx arbitraire, se change en l'équation linéaire aux dérivées partielles d'ordre n, par rapport à m variables indépendantes,

$$F = X + uY + vZ + \ldots = 0, \tag{10}$$

dont l'intégrale sera, par conséquent, l'intégrale de l'équation différentielle $E=0$, donnée sous $m-1$ conditions, c'est-à-dire de l'équation d'ordre $n-1$, $f=0$, avec une fonction arbitraire de $m-1$ arguments.

Toute équation linéaire d'ordre n à m variables indépendantes a la forme générale

$$F = Rr + Ss + \ldots + K = 0, \tag{11}$$

où R, S, ..., K sont des expressions d'ordre $n-1$, ou d'un ordre inférieur, et où r, s, ... sont les dérivées partielles d'ordre n, dont le nombre est

$$N_n^m = \frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+m-1)}{1.2\ldots(m-1)}. \tag{12}$$

Toute équation différentielle d'ordre $n-1$ à m variables indépendantes a la forme générale

$$E = P\,dp + Q\,dq + \ldots + X\,dx + Y\,dy + Z\,dz + \ldots = 0, \tag{13}$$

où P, Q, ..., X, Y, Z, ... sont aussi des expressions d'ordre $n-1$, ou d'un ordre inférieur, mais où p, q, ... sont les dérivées partielles d'ordre $n-1$ dont le nombre est N_{n-1}^m.

Toute équation différentielle d'ordre $n-1$ de cette forme générale prend, par suite des équations non conditionnelles (7), la forme

$$E = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz + \ldots = 0.$$

Sous les $m-1$ conditions, $dy = u\,dx$, $dz = v\,dx$, ..., où u, v, ... sont des expressions arbitraires d'ordre $n-1$, ou d'un ordre inférieur, elle se change en une équation de la forme

$$E = F\,dx = 0,$$

et, par conséquent, après division par l'accroissement arbitraire dx, en une équation linéaire d'ordre n, $F = 0$. Si cette équation avait la forme générale exprimée par l'équation (11), ceci conduirait à la conclusion que toute équation linéaire d'ordre n, après multiplication par dx, se change en une équation conditionnelle d'ordre $n-1$,

$$E = F\,dx = 0,$$

obtenue sous $m-1$ conditions.

Pour résoudre la question de savoir si l'équation $F = 0$ a ou non la forme générale, nous remarquerons que l'expression $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz + \ldots$, dans l'équation (13), se transforme, pour les conditions définies $dy = u\,dx$, $dz = v\,dx$, ..., en une expression arbitraire de la forme $K\,dx$. L'expression $P\,dp + Q\,dq + \ldots$, dans la même équation (13), contient N^m_{n-1} coefficients arbitraires P, Q, ... et renferme, par suite des $m-1$ conditions arbitraires, $N^m_{n-1} + m - 1$ expressions arbitraires d'ordre $n-1$, ou d'un ordre inférieur, P, Q, ..., u, v, ... L'équation obtenue $F = 0$ aura la forme générale représentée par l'équation (11), si le nombre de ces expressions arbitraires n'est pas inférieur au nombre N^m_n des coefficients arbitraires, dans la forme générale d'une équation linéaire d'ordre n.

L'inégalité

$$N^m_{n-1} + m - 1 \geqq N^m_n, \tag{14}$$

que nous tirons de là, n'a que deux solutions :

1° $n = 1$, pour m arbitraire; 2° $m = 2$, pour n arbitraire, et elle se change en une égalité pour les deux solutions.

Par ces deux solutions de l'inégalité (14), toutes les équations linéaires (et, comme nous le verrons plus tard, toutes les équations aux dérivées partielles) se partagent en trois classes :

1° Les équations aux dérivées partielles du premier ordre, à autant de variables indépendantes qu'on veut, forment la première classe, qui correspond à la solution $n = 1$ pour m arbitraire;

2° Les équations aux dérivées partielles d'ordre arbitraire à deux variables indépendantes forment la seconde classe, qui correspond à la solution $m = 2$ pour n arbitraire;

3° Les équations aux dérivées partielles du second ordre ou d'un ordre supérieur, à trois variables indépendantes ou plus, forment la troisième classe, dans laquelle $n > 1$ et $m > 2$.

Une équation linéaire $F = 0$, de première ou de deuxième classe, se change toujours en l'équation conditionnelle $F\,dx = 0$; une équation linéaire de troisième classe, seulement dans un cas particulier.

Si cette équation conditionnelle $F\,dx = 0$ s'intègre, nous avons l'intégrale $f = 0$ de l'équation linéaire donnée $F = 0$.

Si l'équation $F = 0$ est de la première classe, l'intégrale $f = 0$ sera l'intégrale générale et ne contiendra qu'une fonction arbitraire de plusieurs arguments.

Si $F = 0$ est une équation de seconde classe, l'intégrale $f = 0$ sera une équation aux dérivées partielles; l'intégrale générale contiendra, par conséquent, plusieurs fonctions arbitraires; mais chacune de ces fonctions dépendra d'un argument seulement.

Si $F = 0$ est une équation de la troisième classe, l'intégrale générale contiendra plusieurs fonctions arbitraires de plusieurs arguments.

Le mécanisme d'intégration sépare d'une manière tranchée ces trois classes d'équations aux dérivées partielles, car il se simplifie dans la première classe, parce qu'il n'y entre qu'une fonction arbitraire, et dans la deuxième, parce que chaque fonction ne dépend que d'un argument.

II. — Intégration des équations différentielles compatibles.

L'intégration d'une équation aux dérivées partielles se ramène, en général, à l'intégration d'un système d'équations différentielles conditionnelles et non conditionnelles, que nous appellerons *équations différentielles compatibles*.

Quand nous avons entre les variables x, x_1, ... une équation conditionnelle sous m conditions

$$(1) \qquad A = 0 \quad \text{si} \quad A_1 = 0, \quad \ldots, \quad A_m = 0,$$

alors, en désignant par a, a_1, ..., a_m les constantes d'intégration, dans les intégrales de toutes les équations différentielles $A = 0$, $A_1 = 0$, ..., $A_m = 0$, nous pouvons exprimer, d'après le paragraphe I, l'intégrale de l'équation conditionnelle (1), sous la forme $a = f(a_1, \ldots, a_m)$, ou sous la forme plus générale

$$(2) \qquad f(a, a_1, \ldots, a_m) = 0,$$

f désignant une fonction arbitraire des $m+1$ expressions auxquelles sont égales a, a_1, ..., a_m.

Si, dans l'équation conditionnelle (1), nous prenons pour équation, à laquelle sont imposées des conditions, l'une quelconque des équations différentielles

$A_1 = o, \ldots, A_m = o$, au lieu de $A = o$, nous obtenons la même intégrale

$$f(a, a_1, \ldots, a_m) = o.$$

Si nous joignons les équations différentielles $A = o$ et $A_1 = o$ à l'équation différentielle $A_2 = o$, pour l'intégration de cette dernière, la constante d'intégration b, dans l'intégrale obtenue, sera une fonction arbitraire $b = \varphi(a, a_1, a_2)$ des trois arguments a, a_1, a_2, parce qu'elle ne varie pas, si $A = o$, $A_1 = o$, $A_2 = o$; mais en remplaçant a_2 par $\varphi(a, a_1, a_2)$ dans l'intégrale $f = o$, nous obtenons la même intégrale.

Si, au moyen des intégrales trouvées pour les équations $A = o$ et $A_1 = o$, nous éliminons deux variables de l'équation $A_2 = o$, en y introduisant a et a_1 comme constantes, et si nous intégrons ainsi l'équation $A_2 = o$, la constante d'intégration sera de nouveau une constante arbitraire des trois arguments a, a_1 et a_2, mais pourra être prise pour argument de la condition $A_2 = o$, à la place de a_2, parce que cela ne change pas l'intégrale $f = o$.

Il en résulte que nous pouvons intégrer toutes les équations différentielles d'une équation conditionnelle, comme des équations différentielles ordinaires, en les combinant à volonté et en considérant leurs constantes d'intégration comme des quantités constantes.

Au moyen de l'intégrale $f = o$ trouvée pour l'équation conditionnelle (1), nous pouvons éliminer, de chacune des équations différentielles compatibles restantes, une variable seulement, en général, c'est-à-dire éliminer $m + 1$ variables au moyen des $(m + 1)$ intégrales trouvées, en introduisant les m nouvelles variables $a_1, \ldots, a_m$ dont dépend la fonction arbitraire a.

Si, par suite de cette diminution du nombre des variables, une équation différentielle $l = o$ s'intègre, la constante d'intégration c, dans l'intégrale obtenue, sera l'argument de la condition, si $l = o$ exprime la condition; elle sera une fonction arbitraire des arguments déjà trouvés, si $l = o$ exprime une équation à laquelle sont imposées des conditions, et elle sera une constante, si $l = o$ exprime une équation non conditionnelle. Mais il n'est pas nécessaire de faire figurer cette constante, dans l'intégrale d'une équation non conditionnelle, parce que l'intégrale d'une équation non conditionnelle contient au moins une fonction arbitraire sous le signe $\int$, et, dans ce signe indéfini, est comprise la constante d'intégration. Nous pouvons lier l'équation $l = o$ aux équations différentielles $A = o, \ldots, A_m = o$, pour la recherche de son intégrale, et la transformer au moyen des intégrales de ces équations différentielles, pour une valeur constante des variables $a_1, \ldots, a_m$; mais la constante d'intégration c sera alors une fonction indéterminée, et, tant qu'on n'aura pas effectué sa détermination, l'intégrale trouvée n'aura aucune signification.

Si, dans ce cas, $l = 0$ est une équation non conditionnelle, c dépend seulement des arguments $a_1, \ldots, a_m$ et doit, en général, être déterminé comme une nouvelle forme de la fonction arbitraire a, qui dépend aussi de ces arguments. Mais, quand nous n'avons pas encore cette fonction arbitraire, nous pouvons considérer c comme une fonction arbitraire, au lieu de a.

Nous avons ainsi une règle générale, d'après laquelle une des équations différentielles compatibles s'intègre au moyen des autres intégrales trouvées.

Forme normale et forme pure des intégrales des équations compatibles.

Toute intégrale $f = 0$ d'une équation conditionnelle ou non conditionnelle contient une ou plusieurs fonctions arbitraires, dont les arguments sont déterminés par des équations particulières, que nous appellerons *intégrales des conditions*. Nous dirons que la forme de cette intégrale $f = 0$ est normale par rapport à un argument a, si cet argument est déterminé par l'équation dérivée $\frac{df}{da} = 0$ de $f = 0$ par rapport à a.

Si nous pouvons déterminer un argument a comme fonction des variables principales, et, par conséquent, l'éliminer de l'intégrale $f = 0$, nous dirons que la forme de cette intégrale est pure par rapport à cet argument. La forme pure est évidemment un cas particulier de la forme normale, parce qu'après avoir éliminé a de $f = 0$, nous obtenons $\frac{df}{da} = 0$ identiquement.

Nous appellerons *normale* la forme de l'intégrale $f = 0$, si tous les arguments qui y entrent sont déterminés par les équations dérivées de $f = 0$, par rapport à ces arguments; *pure*, si tous les arguments en sont éliminés, et, pour cela, il faut que dans l'intégrale des conditions, par laquelle est déterminé un argument, n'entrent pas de fonctions arbitraires de cet argument.

1. L'intégrale d'une équation non conditionnelle a la forme normale par rapport à tous les arguments qui y entrent.

2. L'intégrale d'une équation conditionnelle, donnée sous des conditions dont les arguments sont $a, a_1, \ldots$, a la forme normale par rapport à tous les arguments qui y entrent, sauf $a, a_1, \ldots$.

3. L'intégrale d'une condition, dont l'argument est a, a la forme normale par rapport à tous les arguments, en excluant l'argument a.

En effet, si $D = 0$ désigne l'une des équations différentielles compatibles, dans l'intégrale $f = 0$ de laquelle entrent les arguments $a, a_1, a_2, \ldots, \alpha, \alpha_1, \ldots$, l'équation différentielle $D = 0$, où entrent seulement les accroissements des variables principales dx, dx_1, ..., doit être identique à la différentielle totale

$$df = d(f) + \frac{df}{da}da + \frac{df}{da_1}da_1 + \ldots + \frac{df}{d\alpha}d\alpha + \frac{df}{d\alpha_1}d\alpha_1 + \ldots,$$

où entrent dans $d(f)$ les accroissements dx, dx_1, ...

1. Quand $D = 0$ est une équation non conditionnelle, qui doit, par conséquent, être satisfaite pour da, da_1, ..., $d\alpha$, $d\alpha_1$, ... arbitraires, nous en déduisons

$$\frac{df}{da} = 0, \qquad \frac{df}{da_1} = 0, \qquad \ldots, \qquad \frac{df}{d\alpha} = 0, \qquad \frac{df}{d\alpha_1} = 0, \qquad \ldots,$$

et nous concluons que l'intégrale $f = 0$ a la forme normale par rapport à tous les arguments.

2. Quand $D = 0$ est l'équation conditionnelle donnée, sous des conditions dont les arguments sont a, a_1, ..., nous obtenons $\frac{df}{dx} = 0$, $\frac{df}{dx_1} = 0$, ..., au moyen de l'identité des équations $D = 0$ et $df = 0$, et nous en concluons que l'équation $D = 0$, conditionnelle par rapport aux arguments a, a_1, ..., peut avoir et a la forme normale par rapport à tous les autres arguments α, α_1, ...

3. Quand l'équation différentielle $D = 0$ désigne une condition dont l'argument est a, elle doit être satisfaite par l'intégrale $f = 0$, pour $da = 0$ seulement, et il en résulte que l'intégrale $f = 0$ a la forme normale par rapport à tous les arguments, mais non par rapport à a.

Nous ne pouvons appliquer ces trois propositions aux intégrales des équations différentielles compatibles que quand ces intégrales ne sont pas liées entre elles, c'est-à-dire quand elles satisfont immédiatement aux équations différentielles données.

Nous pouvons mettre les intégrales de toutes les équations différentielles compatibles sous la forme normale, par rapport à tous les arguments, à l'exception des intégrales des conditions, qui ne prennent pas la forme normale, par rapport à leurs arguments seulement.

En effet, soit $f = 0$ une intégrale de forme arbitraire, contenant n arguments; qui sont déterminés par les intégrales des conditions $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, ..., $f_n = 0$. En prenant les dérivées des $n+1$ expressions f, f_1, ..., f_n, par rapport aux arguments, et en désignant par D_m le déterminant de ces dérivées de toutes les expressions f, ..., f_n, à l'exclusion de l'expression f_m, nous obtenons l'intégrale $f = 0$, sous la forme normale

$$Df + D_1 f_1 + D_2 f_2 + \ldots + D_n f_n = 0,$$

car F s'annule en vertu de $f = 0$, $f_1 = 0$, ..., $f_n = 0$, et, d'après une propriété connue des déterminants, les dérivées de F, par rapport à tous les arguments, seront également nulles.

Quand $f = 0$ est l'intégrale d'une condition, et, par conséquent, est identique à l'une des équations $f_1 = 0$, ..., $f_n = 0$, la forme normale cherchée de $F = 0$ se transforme dans l'identité $0 = 0$.

Forme composée des intégrales des équations différentielles compatibles.

Convenons de désigner par $\int (U\,du + V\,dv + \ldots)$ une expression dont la différentielle totale est $U\,du + V\,dv + \ldots$; nous pouvons alors mettre toute intégrale $f = 0$ sous la forme

$$f = \varphi + \int \left(\frac{df}{da} da + \frac{df}{da_1} da_1 + \ldots \right) = 0, \tag{3}$$

que nous appellerons *forme composée de l'intégrale* $f = 0$, par rapport aux arguments a, a_1, ...

Quand l'intégrale $f = 0$ est mise sous la forme composée relative à tous les arguments, l'expression φ contient seulement les variables principales.

Quand $f = 0$ est une intégrale de forme normale, nous avons les équations $\frac{df}{da} = 0$, $\frac{df}{da_1} = 0$, ..., et il résulte de ces équations que nous pouvons prendre la dérivée totale de f, par rapport à l'une des variables indépendantes x,

$$\frac{df}{dx} = \frac{d\varphi}{dx} + \int \left(\frac{d^2 f}{dx\,da} da + \frac{d^2 f}{dx\,da_1} da_1 + \ldots \right),$$

sans différentier, par rapport aux arguments, et sans faire attention aux limites du signe $\int$. Par suite, nous pourrons effectuer seulement, par rapport aux variables principales, une quadrature par rapport aux variables indépendantes, pourvu que le résultat de la quadrature soit une expression normale (*voir* § XV).

Pour simplifier les opérations nous ramènerons quelquefois, à la forme composée, les intégrales des équations différentielles compatibles que nous n'aurons pas obtenues sous cette forme.

III. — Intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre.

Équations linéaires du premier ordre.

Soit donnée une équation linéaire aux dérivées partielles $p, p_1, \ldots, p_m$ de y par rapport aux $m+1$ variables indépendantes $x, x_1, \ldots, x_m$ dont la forme générale est

$$(1) \qquad F = p + A_1 p_1 + A_2 p_2 + \ldots + A_m p_m + K = 0,$$

où $A_1, \ldots, A_m$, K sont des fonctions données de $y, x, \ldots, x_m$; sous les conditions

$$(2) \qquad dx_1 = A_1\,dx, \qquad dx_2 = A_2\,dx, \qquad \ldots, \qquad dx_m = A_m\,dx,$$

l'équation donnée $F = 0$, après multiplication par dx, prend la forme

$$F\,dx = p\,dx + p_1\,dx_1 + \ldots + p_m\,dx_m + K\,dx = dy + K\,dx = 0$$

et se change, par conséquent, en l'équation conditionnelle

$$(3) \qquad dy + K\,dx = 0 \quad \text{si} \quad dx_1 = A_1\,dx, \quad \ldots, \quad dx_m = A_m\,dx.$$

Quand les $m+1$ équations différentielles, par lesquelles s'exprime cette équation conditionnelle, s'intègrent, alors, en désignant par $b, a_1, \ldots, a_m$ les constantes d'intégration, dans leurs intégrales

$$Y = 0, \qquad Y_1 = 0, \qquad \ldots, \qquad Y_m = 0,$$

nous obtenons, d'après le paragraphe II, l'intégrale de l'équation conditionnelle (3), c'est-à-dire l'intégrale de l'équation donnée $F = 0$, sous la forme

$$(4) \qquad f(b, a, a_1, \ldots, a_m) = 0$$

où f est une fonction arbitraire des $m+1$ expressions auxquelles $b, a_1, \ldots, a_m$ sont égales, d'après les intégrales trouvées.

Cette intégrale est l'intégrale générale de l'équation linéaire du premier ordre donnée $F = 0$, et elle a une forme pure, puisque les arguments sont éliminés.

Équations non linéaires du premier ordre.

Soit donnée une équation quelconque

$$(5) \qquad F(y, x, x_1, \ldots, x_m, p, p_1, \ldots, p_m) = 0$$

aux dérivées partielles $p, p_1, \ldots, p_m$ de y par rapport à $x, x_1, \ldots, x_m$; l'équation dérivée totale par rapport à l'une des variables indépendantes x a la forme

$$\frac{dF}{dx} = \frac{dF}{dp}P + \frac{dF}{dp_1}P_1 + \ldots + \frac{dF}{dp_m}P_m + \left(\frac{dF}{dx}\right) = 0 \tag{6}$$

où $P, P_1, \ldots, P_m$ désignent les dérivées partielles de $p, p_1, \ldots, p_m$ par rapport à x, ou, ce qui revient au même, les dérivées partielles de p par rapport à x, $x_1, \ldots, x_m$, et sont les dérivées partielles du second ordre de y, par rapport à x, $x_1, \ldots, x_m$.

L'équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre (6) après division par $\frac{dF}{dp}$, prend la forme

$$\Phi = P + A_1P_1 + A_2P_2 + \ldots + A_mP_m + K = 0 \tag{7}$$

où

$$A_1 = \frac{dF}{dp_1} : \frac{dF}{dp}, \qquad \ldots, \qquad A_m = \frac{dF}{dp_m} : \frac{dF}{dp}, \qquad K = \left(\frac{dF}{dx}\right) : \frac{dF}{dp}. \tag{8}$$

Sous les m conditions

$$dx_1 = A_1\,dx, \qquad dx_2 = A_2\,dx, \qquad \ldots, \qquad dx_m = A_m\,dx, \tag{9}$$

et, après multiplication par dx, elle se change en l'équation différentielle conditionnelle

$$E = \Phi\,dx = P\,dx + P_1\,dx_1 + \ldots + P_m\,dx_m + K\,dx = dp + K\,dx = 0,$$

qui, après introduction des valeurs (8) de $A_1, \ldots, A_m$, K, prend la forme

$$\frac{dF}{dp}dp + \left(\frac{dF}{dx}\right)dx = 0 \tag{10}$$

si

$$\frac{dF}{dp}dx_1 - \frac{dF}{dp_1}dx = 0, \qquad \ldots, \qquad \frac{dF}{dp}dx_m - \frac{dF}{dp_m}dx = 0. \tag{11}$$

Nous avons obtenu cette équation conditionnelle au moyen de l'équation dérivée $\frac{dF}{dx}$. En remplaçant successivement x par $x_1, x_2, \ldots. x_m$, nous obtenons, sous les mêmes conditions (11), encore m autres formes de cette équation conditionnelle

$$\frac{dF}{dp_1}dp_1 + \left(\frac{dF}{dx_1}\right)dx_1 = 0, \qquad \ldots, \qquad \frac{dF}{dp_m}dp_m + \left(\frac{dF}{dx_m}\right)dx_m = 0, \tag{12}$$

déduites des équations $\frac{dF}{dx_1} = 0, \ldots, \frac{dF}{dx_m} = 0$, qui, toutes ensemble, définissent évidemment la même dépendance entre les variables $y, x_1, \ldots, x_m$ que celle qui est définie par l'équation donnée $F = 0$.

Outre cette équation conditionnelle, qui s'exprime par $2m+1$ équations différentielles, à savoir les m conditions (11) et les $m+1$ formes différentes (10) et (12) de l'équation à laquelle sont imposées des conditions, nous avons encore l'équation non conditionnelle

$$dy = p\,dx + p_1\,dx_1 + \ldots + p_m\,dx_m. \tag{13}$$

Quand toutes les formes de l'équation conditionnelle s'intègrent, nous avons $2m+1$ intégrales, avec $2m+1$ constantes d'intégration. Chacune de ces intégrales contient une constante d'intégration, parce que nous pouvons éliminer les constantes d'intégration introduites.

En déterminant les $m+1$ dérivées partielles $p_1, \ldots, p_m$, au moyen de $m+1$ intégrales, et en portant leurs valeurs dans l'équation donnée $F = 0$, nous obtenons une équation entre les $m+1$ constantes d'intégration, par laquelle l'une de ces constantes est définie. En portant les valeurs des dérivées partielles dans l'équation non conditionnelle (13), nous obtenons une équation non conditionnelle d'ordre nul, avec m constantes d'intégration que nous pouvons prendre pour arguments de m conditions. En intégrant cette équation non conditionnelle, nous obtenons une intégrale de la forme normale $f = 0$, dans laquelle entrent tous les m arguments, et une nouvelle constante d'intégration b, que nous pouvons, d'après le paragraphe II, prendre pour fonction arbitraire de tous les arguments, l'autre fonction arbitraire n'entrant pas dans l'intégrale. Cette intégrale $f = 0$, dans laquelle entrent tous les arguments et la fonction arbitraire $b = \varphi(a_1, \ldots, a_m)$, s'appelle l'intégrale générale de l'équation du premier ordre donnée $F = 0$, et, comme elle est normale, s'exprime sous la forme

$$f = 0, \qquad \frac{df}{da_1} = 0, \qquad \ldots, \qquad \frac{df}{da_m} = 0. \tag{14}$$

Les équations dérivées $\frac{df}{da_1} = 0, \ldots, \frac{df}{da_m} = 0$, par lesquelles se déterminent les arguments $a_1, \ldots, a_m$, sont les intégrales des conditions (11). Nous intégrons les conditions seulement, quand, au moyen de leurs intégrales, nous obtenons les intégrales des autres équations différentielles, résultat auquel nous pouvons cependant toujours arriver immédiatement. L'équation donnée est l'intégrale de l'une de ces équations restantes.

Après introduction des valeurs des dérivées partielles $p, p_1, \ldots, p_m$, l'équation non conditionnelle $dy = p\,dx + p_1\,dx_1 + \ldots + p_m\,dx_m$ s'intègre toujours, car les conditions d'intégrabilité $\frac{dp}{dx_1} = \frac{dp_1}{dx}, \ldots$ sont satisfaites par les valeurs des dérivées partielles $p, p_1, \ldots, p_m$.

Intégrale complète et propriétés des équations de première classe.

Les équations aux dérivées partielles du premier ordre forment la première classe des équations aux dérivées partielles et se distinguent par les propriétés suivantes :

1. Dans les équations différentielles compatibles de la première classe, il y a, pour $m-1$ variables indépendantes, seulement une équation conditionnelle donnée sous m conditions. Nous avons vu que, pour l'intégration de cette équation conditionnelle et de l'équation non conditionnelle (13), nous pouvons prendre les m arguments comme des constantes. De là résulte que l'intégrale générale d'une équation de la première classe est obtenue en intégrant pour des valeurs constantes de tous les arguments, ce qui est impossible dans les autres classes, où entrent plusieurs équations conditionnelles. Si, outre les m arguments d'une équation conditionnelle, nous prenons encore un argument comme une constante, les $m+1$ variables indépendantes se transforment en constantes, et toutes les équations différentielles deviennent des identités $0=0$.

2. Dans une intégrale, nous pouvons remplacer toute fonction arbitraire par autant de constantes arbitraires que nous voulons, en développant cette fonction suivant les puissances des arguments, avec des coefficients constants arbitraires, et en éliminant ensuite ces arguments. De là l'intégrale de première classe

$$f=0, \qquad \frac{df}{da_1}=0, \qquad \ldots, \qquad \frac{df}{da_m}=0, \tag{14}$$

nous déduisons une telle intégrale particulière avec des constantes arbitraires, sous la forme $f=0$, en donnant aux m arguments $a_1, \ldots, a_m$ des valeurs constantes dans l'équation $f=0$, par quoi la fonction arbitraire $b=\varphi(a_1, \ldots, a_m)$, qui entre dans cette équation, se transforme en une nouvelle constante arbitraire.

Cette intégrale particulière, qui renferme $m+1$ constantes arbitraires b, $a_1, \ldots, a_m$, s'appelle une *intégrale complète de l'équation du premier ordre donnée* $F=0$, et elle peut s'obtenir non seulement par intégration, mais aussi par des considérations étrangères.

D'après le sens d'une telle intégrale $f=0$, l'équation donnée $F=0$ doit être le résultat de l'élimination des $m+1$ constantes $b, a_1, \ldots, a_m$ entre les $m+2$ équations

$$f=0, \qquad \left(\frac{df}{dx}\right)=0, \qquad \ldots, \qquad \left(\frac{df}{dx_m}\right)=0.$$

Si nous prenons $a_1, \ldots, a_m$ pour variables, et b pour fonction arbitraire de ces variables, alors, après élimination des variables $b, a_1, \ldots, a_m$ entre les équations

$$f=0, \qquad \frac{df}{dx}=0, \qquad \ldots, \qquad \frac{df}{dx_m}=0,$$

où

$$\frac{df}{dx}=\left(\frac{df}{dx}\right)+\frac{df}{da_1}\frac{da_1}{dx}+\ldots+\frac{df}{da_m}\frac{da_m}{dx},$$

nous obtenons évidemment la même équation $F=0$, en déterminant les arguments $a_1, \ldots, a_m$ par les équations $\frac{df}{da_1}=0, \ldots, \frac{df}{da_m}=0$, car, par suite de ces équations, $\frac{df}{dx}$ et $\left(\frac{df}{dx}\right)$ sont identiques.

Il en résulte que l'intégrale complète de l'équation de première classe donnée est l'intégrale générale de la forme normale de cette équation, si nous prenons une des constantes arbitraires pour fonction des autres. Quelques équations d'ordre supérieur seulement ont une intégrale particulière avec constantes arbitraires de propriété analogue.

3. Les équations conditionnelles de tous les ordres jusqu'à l'infini, au moyen desquelles s'intègrent les équations de la deuxième et de la troisième classes, sont superflues dans la première classe. L'intégrale générale, si elle existe, d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre s'obtient toujours par intégration d'équations différentielles du premier ordre.

En effet, quand nous avons l'intégrale générale de l'équation d'ordre n donnée $F=0$, alors, de toutes les équations dérivées jusqu'à l'ordre n inclusivement, que nous obtenons au moyen de cette intégrale générale, seront toujours exclues toutes les variables introduites, c'est-à-dire toutes les fonctions arbitraires, leurs différentes formes et arguments, et le résultat de l'élimination sera l'équation d'ordre n donnée $F=0$. Ces équations dérivées sont les intégrales des équations différentielles compatibles, jusqu'à l'ordre n inclusivement.

L'intégrale d'une équation différentielle qui s'intègre immédiatement contient une constante d'intégration seulement; mais nous ne trouvons pas toujours, parmi les équations dérivées jusqu'à l'ordre n inclusivement, une équation introduisant seulement une variable. Pour le démontrer, il suffit de citer un exemple.

L'intégrale générale de l'équation du second ordre

$$s(x+y)=m(p+q),$$

où m est un nombre entier quelconque (*voir* premier Mémoire, exemple VIII), contient deux fonctions arbitraires fx et φy dans différentes formes. Ces formes sont toutes exclues des équations dérivées du second ordre; mais, pour obtenir une équation avec une forme seulement d'une fonction, nous devons prendre toutes les équations dérivées jusqu'à l'ordre $m+1$ inclusivement, et il en résulte que l'équation différentielle d'ordre inférieur ne s'intègre pas d'elle-même.

D'après le paragraphe II, l'intégrale générale se ramène à la forme normale, qui passe, dans un cas particulier, à la forme pure.

Supposons que $f=0$ désigne l'intégrale générale de la forme normale de l'équation donnée du premier ordre $F=0$, aux dérivées partielles $p, p_1, \ldots, p_m$ de y par rapport à $x, x_1, \ldots, x_m$. Comme, après élimination de toutes les variables introduites, entre les $m+2$ équations

$$f=0, \qquad \frac{df}{dx}=0, \qquad \ldots, \qquad \frac{df}{dx_m}=0,$$

nous n'obtenons qu'une équation du premier ordre donnée $F=0$, nous concluons que, dans l'intégrale de la forme normale $f=0$, il y a $m+1$ variables introduites, et que l'équation donnée $F=0$ est satisfaite par la dépendance la plus générale entre ces variables introduites, c'est-à-dire si l'une d'elles dépend arbitrairement de toutes les autres. L'intégrale générale de l'équation du premier ordre donnée n'a donc que la forme que nous avons déjà obtenue [équation (14)], par intégration des équations différentielles du premier ordre.

Exemple I.

Supposons donnée une équation aux dérivées partielles $p_1, \ldots, p_m$ de y par rapport aux $m+1$ variables indépendantes $x, x_1, \ldots, x_m$, de forme linéaire

$$p+\beta_1 p_1+\beta_2 p_2+\ldots+\beta_m p_m+\beta=0, \tag{1}$$

$$x+\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+\ldots+\alpha_m x_m+\alpha=0, \tag{2}$$

où toutes les variables $\beta, \ldots, \beta_m, \alpha, \ldots, \alpha_m$ sont des fonctions arbitrairement données de l'une d'entre elles, α par exemple, de sorte que, ayant déterminé α par l'équation (1), et ayant porté sa valeur dans l'équation (2), nous obtenons, avec $2m+1$ fonctions arbitraires, une équation linéaire du premier ordre qu'il faut intégrer.

Pour cela, nous avons, d'après le paragraphe III, équation (3), l'équation conditionnelle

$$dy+\beta\,dx=0 \tag{3}$$

si

$$dx_1-\beta_1\,dx=0, \qquad dx_2-\beta_2\,dx=0, \qquad \ldots, \qquad dx_m-\beta_m\,dx=0. \tag{4}$$

L'intégration de ces $m+1$ équations différentielles se ramène à la détermination des $m+1$ constantes d'intégration $b, a_1, \ldots, a_m$ entrant dans leurs intégrales, c'est-à-dire à la recherche de $m+1$ variables $b, a_1, \ldots, a_m$, dont les différentielles $db, da_1, \ldots$ s'annulent en vertu des équations (3) et (4).

Désignons par γ une fonction inconnue de α, et par k l'expression

$$k = \int (x + \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_m x_m + \alpha)\, d\gamma, \tag{5}$$

que nous obtenons, en multipliant le premier membre de l'équation (2) par $d\gamma$ et en effectuant la quadrature par rapport à α.

La différentielle totale de l'équation (5) prend, en vertu de l'équation (2), la forme

$$dk = \gamma\, dx + \int \alpha_1\, d\gamma\, dx_1 + \ldots + \int \alpha_m\, d\gamma\, dx_m,$$

et nous en déduisons, en vertu des m conditions (4),

$$dk = \left(\gamma + \beta_1 \int \alpha_1\, d\gamma + \ldots + \beta_m \int \alpha_m\, d\gamma\right) dx.$$

Il en résulte que, d'après les conditions (4), k sera une constante, si nous déterminons γ par l'équation

$$\gamma + \beta_1 \int \alpha_1\, d\gamma + \ldots + \beta_m \int \alpha_m\, d\gamma = 0.$$

En déterminant, par conséquent, les m fonctions $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ de la variable α, au moyen des m équations,

$$\tag{6} \left\{ \begin{array}{l} \gamma_1 + \beta_1 \int \alpha_1\, d\gamma_1 + \ldots + \beta_m \int \alpha_m\, d\gamma_1 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \gamma_m + \beta_1 \int \alpha_1\, d\gamma_m + \ldots + \beta_m \int \alpha_m\, d\gamma_m = 0, \end{array} \right.$$

et en posant

$$\tag{7} \left\{ \begin{array}{l} \int (x + \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_m x_m + \alpha)\, d\gamma_1 = a_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \int (x + \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_m x_m + \alpha)\, d\gamma_m = a_m, \end{array} \right.$$

nous concluons que $a_1, \ldots, a_m$ sont des constantes, en vertu des conditions (6), et ceci montre que, par les équations (7), les intégrales des m conditions s'expriment avec les constantes d'intégration $a_1, \ldots, a_m$.

En déterminant encore la fonction γ par l'équation

$$(8)\qquad \gamma+\beta_1\int\alpha_1\,d\gamma+\ldots+\beta_m\int\alpha_m\,d\gamma+\beta=0,$$

et en désignant $\int(x+\alpha_1x_1+\ldots+\alpha_mx_m+\alpha)\,d\gamma$ par h, nous obtenons, en tenant compte de l'équation (2), la différentielle totale

$$dh=\gamma\,dx+\int\alpha_1\,d\gamma\,dx_1+\ldots+\int\alpha_m\,d\gamma\,dx_m$$

qui, par suite des conditions (4) et de l'équation (8), prend la forme $dh=-\beta\,dx$.

A l'aide de cette équation, l'équation (3) $dy+\beta\,dx=0$, à laquelle sont imposées des conditions, se ramène à la forme $dh-dy=0$, et nous en déduisons l'intégrale $h-y=b$ qui, après introduction de la valeur de h, prend la forme

$$(9)\qquad \int(x+\alpha_1x_1+\ldots+\alpha_mx_m)\,d\gamma-y=b.$$

L'intégrale générale s'exprime par l'équation

$$f(b,a_1,\ldots,a_m)=0,$$

où f est une fonction arbitraire des $m+1$ expressions auxquelles sont égales b, $a_1,\ldots,a_m$, d'après les équations (7) et (9).

La détermination des inconnues $\gamma_1,\ldots,\gamma_m$, à l'aide des équations (6), se ramène à l'intégration d'une équation différentielle du $m^{\text{ième}}$ ordre. Mais si $\beta,\ldots,\beta_m$ sont des fonctions indéterminées, nous pouvons considérer $\gamma,\gamma_1,\ldots,\gamma_m$ comme des fonctions arbitraires. Les fonctions $\beta,\beta_1,\ldots,\beta_m$ se déterminent alors par les équations algébriques (6) et (8).

Exemple II.

Supposons donnée une équation non linéaire du premier ordre

$$(1)\qquad fp+f_1p_1+\ldots+f_mp_m=\varphi x+\varphi_1x_1+\ldots+\varphi_mx_m,$$

où $f,f_1,\ldots,f_m,\varphi,\ldots,\varphi_m$ représentent $2m+2$ fonctions arbitrairement données.

D'après le paragraphe III, équations (10), (11), (12) et (13), nous avons l'équation non conditionnelle

$$(2)\qquad dy=p\,dx+p_1\,dx_1+\ldots+p_m\,dx_m$$

et l'équation conditionnelle, sous $m+1$ formes différentes,

$$(3)\quad f'p\,dp=\varphi'x\,dx,\qquad f'_1p_1\,dp_1=\varphi'_1x_1\,dx_1,\qquad \ldots,\qquad f'_mp_m\,dp_m=\varphi'_mx_m\,dx_m$$

si

$$(4)\qquad f'p\,dx_1=f'_1p_1\,dx,\qquad \ldots,\qquad f'p\,dx_m=f'_mp_m\,dx.$$

Il n'est pas besoin d'intégrer les conditions (4). Nous obtenons, par l'intégration des équations (3), les $m+1$ intégrales suivantes

$$(5)\qquad fp=\varphi x+a,\qquad f_1p_1=\varphi_1x_1+a_1,\qquad \ldots,\qquad f_mp_m=\varphi_mx_m+a_m.$$

En portant ces valeurs dans l'équation donnée, nous obtenons, entre les constantes d'intégration, l'équation

$$(6)\qquad a+a_1+\ldots+a_m=0.$$

Si nous désignons par $F, F_1, \ldots, F_m$ les fonctions inverses des fonctions données que nous avons appelées $f, f_1, \ldots, f_m$, nous obtenons, au moyen des intégrales (5),

$$p=F(\varphi x+a),\qquad p_1=F_1(\varphi_1x_1+a_1),\qquad \ldots,\qquad p_m=F_m(\varphi_mx_m+a_m).$$

En portant ces valeurs de $p, p_1, \ldots, p_m$ dans l'équation non conditionnelle

$$(2)\qquad dy=p\,dx+p_1\,dx_1+\ldots+p_m\,dx_m,$$

et en intégrant, nous obtenons l'intégrale générale sous la forme normale

$$(7)\quad y=\int F(\varphi x+a)\,dx+\int F_1(\varphi_1x_1+a_1)\,dx_1+\ldots+\int F_m(\varphi_mx_m+a_m)\,dx_m+b.$$

où b désigne une fonction arbitraire des m arguments $a_1, a_2, \ldots, a_m$.

a est éliminé au moyen de l'équation (6).

Exemple III.

$$f(p, p_1, \ldots, p_m)=0.$$

Les équations auxquelles sont imposées des conditions [équations (10) et (12) du paragraphe III] prennent la forme

$$dp=0,\qquad dp_1=0,\qquad \ldots,\qquad dp_m=0.$$

Au moyen de leurs intégrales

$$p = a, \qquad p_1 = a_1, \qquad \ldots, \qquad p_m = a_m,$$

nous obtenons l'intégrale de l'équation non conditionnelle

$$dy = p\,dx + p_1\,dx_1 + \ldots + p_m\,dx_m$$

sous la forme

$$(1) \qquad y = ax + a_1 x_1 + \ldots + a_m x_m + b.$$

Si nous déterminons une des variables $a, a_1, \ldots, a_m$ en fonction des autres, en portant les valeurs de $p, p_1, \ldots, p_m$ dans l'équation donnée $f = 0$, et si nous prenons pour b une fonction arbitraire des variables restantes, nous avons l'intégrale générale de forme normale.

Exemple IV.

$$f(p, p_1, \ldots, p_m) = y.$$

En posant $F = f - y = 0$, nous obtenons, d'après le paragraphe III, équations (10), (11) et (12), l'équation conditionnelle suivante

$$(1) \qquad \frac{df}{dp}dp - p\,dx = 0, \qquad \frac{df}{dp_1}dp_1 - p_1\,dx_1 = 0, \qquad \ldots, \qquad \frac{df}{dp_m}dp_m - p_m\,dx_m = 0,$$

si

$$(2) \qquad \frac{df}{dp}dx_1 - \frac{df}{dp_1}dx = 0, \qquad \ldots, \qquad \frac{df}{dp}dx_m - \frac{df}{dp_m}dx = 0.$$

Nous en déduisons les m équations

$$\frac{dp_1}{p_1} = \frac{dp}{p}, \qquad \frac{dp_2}{p_2} = \frac{dp}{p}, \qquad \ldots, \qquad \frac{dp_m}{p_m} = \frac{dp}{p}$$

dont les intégrales sont

$$(3) \qquad p_1 = a_1 p, \qquad p_2 = a_2 p, \qquad \ldots, \qquad p_m = a_m p.$$

La dernière intégrale nécessaire, la $(m+1)^{\text{ième}}$, est l'équation donnée, qui prend la forme

$$(4) \qquad f(p, a_1 p, \ldots, a_m p) = y.$$

Au moyen des intégrales (3), l'équation non conditionnelle

$$dy = p\,dx + p_1\,dx_1 + \ldots + p_m\,dx_m$$

prend la forme

$$\frac{dy}{p} = dx + a_1\,dx_1 + a_2\,dx_2 + \ldots + a_m\,dx_m.$$

En exprimant p par y, au moyen de l'intégrale (4), et en intégrant pour $a_1, \ldots, a_m$ constants, nous obtenons une intégrale générale de forme normale

$$\int \frac{dy}{p} = x + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_m x_m + \varphi(a_1, \ldots, a_m).$$

IV. — Équations aux dérivées partielles a deux variables indépendantes.

Les équations aux dérivées partielles d'ordre quelconque à deux variables indépendantes forment la seconde classe des équations aux dérivées partielles. Nous avons exposé en détail, dans deux Mémoires du *Recueil mathématique* (¹), un moyen de les intégrer; nous le considérerons comme un cas particulier du procédé suivant lequel nous intégrons les autres équations aux dérivées partielles.

(α) *Équations linéaires de la seconde classe.*

Une équation linéaire, aux dérivées partielles d'ordre n de z par rapport à x et à y, a la forme générale

(1) $$F = z^{(n)} + A_1 z_1^{(n-1)} + \ldots + A_n z_n + K = 0;$$

$A_1, \ldots, A_n$, K, et, dans les équations suivantes, $B_1, \ldots, B_{n-1}$, X, Y, u, désignent des expressions arbitraires d'ordre $n-1$ ou d'un ordre inférieur.

L'équation différentielle d'ordre $n-1$, dont la forme générale est

(2) $$E = dz^{(n-1)} + B_1\,dz_1^{(n-2)} + \ldots + B_{n-1}\,dz_{n-1} + X\,dx + Y\,dy = 0,$$

se ramène, à l'aide des équations non conditionnelles

$$dz^{(n-1)} = z^{(n)}\,dx + z_1^{(n-1)}\,dy + \ldots + dz_{n-1} = z'_{n-1}\,dx + z_n\,dy,$$

à la forme

$$E = (z^{(n)} + B_1 z_1^{(n-1)} + \ldots + X)\,dx + (z_1^{(n-1)} + \ldots + B_{n-1} z_n + Y)\,dy.$$

Sous une condition $dy + u\,dx = 0$, nous en déduisons une équation de la forme

$$E = \Phi\,dx = 0,$$

(¹) Tome VIII, page 291 et Tome IX, p. 137 (*voir* les traductions pages 109-165 et pages 167-216 du Tome VII, 2ᵉ série, de ces *Annales*).

qui, pour dx arbitraire, se change dans l'équation linéaire d'ordre n

$$(3) \qquad \Phi = z^{(n)} + (\mathrm{B}_1 - u) z_1^{(n-1)} + \ldots - u \mathrm{B}_{n-1} z_n + \mathrm{X} - u \mathrm{Y} = 0.$$

Cette équation linéaire $\Phi = 0$, qui, sous la condition $dy + u\,dx = 0$, après multiplication par dx, se transforme évidemment à nouveau dans l'équation différentielle d'ordre $n - 1$

$$\mathrm{E} = \Phi\,dx = 0,$$

a la forme générale d'une équation linéaire d'ordre n.

Pour la détermination de l'inconnue u et de l'équation différentielle

$$\mathrm{E} = \mathrm{F}\,dx = 0,$$

en laquelle se transforme l'équation linéaire d'ordre n donnée

$$(1) \qquad \mathrm{F} = z^{(n)} + \mathrm{A}_1 z_1^{(n-1)} + \ldots + \mathrm{A}_n z_n + \mathrm{K} = 0,$$

nous obtenons, en égalant les expressions **F** et **Φ**, les équations suivantes

$$(5) \qquad \mathrm{A}_1 = \mathrm{B}_1 - u, \qquad \mathrm{A}_2 = \mathrm{B}_2 - \mathrm{B}_1 u, \qquad \ldots, \qquad \mathrm{A}_n = - u \mathrm{B}_{n-1},$$

$$(6) \qquad \mathrm{K} = \mathrm{X} - u\mathrm{Y}.$$

Au moyen des n équations (5), nous obtenons, après élimination des $n - 1$ inconnues $\mathrm{B}_1, \ldots, \mathrm{B}_{n-1}$, une équation de degré n

$$(7) \qquad u^n + \mathrm{A}_1 u^{n-1} + \mathrm{A}_2 u^{n-2} + \ldots + \mathrm{A}_n = 0,$$

que nous appellerons *équation aux racines,* et par laquelle sont déterminées les n valeurs $u_1, \ldots, u_n$ de l'inconnue u. A chacune de ces n valeurs, que nous appellerons *racines de l'équation donnée* $\mathrm{F} = 0$, correspond une condition $dy + u_r\,dx = 0$, sous laquelle l'équation donnée $\mathrm{F} = 0$, après multiplication par dx, se transforme en une équation différentielle d'ordre $n - 1$,

$$\mathrm{E}_r = \mathrm{F}\,dx = 0.$$

En déterminant $\mathrm{B}_1, \ldots, \mathrm{B}_{n-1}$ par les équations (5), nous obtenons ainsi n équations conditionnelles d'ordre $n - 1$, de la forme

$$(8) \quad \mathrm{E}_r = dz_1^{(n-1)} + (\mathrm{A}_1 + u_r)\,dz_2^{(n-2)} + (\mathrm{A}_2 + \mathrm{A}_1 u_r + u_r^2)\,dz_2^{(n-3)} + \ldots + \mathrm{K}\,dx = 0$$

si

$$dy + u_r\,dx = 0.$$

Quand les n équations conditionnelles (8) s'intègrent, les arguments sont déterminés par les intégrales des n conditions $dy + u_r\,dx = 0$; de chaque argument, dépend une fonction arbitraire qui entre dans les intégrales des équations $E_r = 0$ auxquelles sont imposées des conditions. Par ces intégrales des n équations d'ordre $n-1$, $E_r = 0$, auxquelles sont imposées des conditions, les n dérivées partielles d'ordre $n-1$, $z^{(n-1)}$, ..., z_{n-1}, sont déterminées. En portant leurs valeurs dans les équations non conditionnelles

$$(9) \qquad dz^{(n-2)} = z^{(n-1)}\,dx + z_1^{(n-2)}\,dy + \ldots + dz_{n-2} = z_{n-2}\,dx + z_{n-1}\,dy,$$

nous obtenons $n-1$ équations non conditionnelles d'ordre $n-2$, dont les intégrales déterminent les $n-1$ dérivées partielles d'ordre $n-2$, et ainsi de suite. De cette manière sont intégrées les équations non conditionnelles de tous les ordres inférieurs, jusqu'à ce que nous obtenions l'intégrale de l'équation non conditionnelle d'ordre nul $dz = z'\,dx + z_1\,dy$, en y portant z' et z_1. Cette intégrale se nomme l'*intégrale générale de l'équation linéaire d'ordre n donnée* $F = 0$, et contient n fonctions arbitraires, dont chacune dépend d'un argument.

(β) *Équations non linéaires de la seconde classe.*

Soit donnée une équation aux dérivées partielles d'ordre n de z par rapport à x et à y, de la forme générale $F = 0$; les deux équations dérivées du $(n+1)^{\text{ième}}$ ordre $\frac{dF}{dx} = 0$ et $\frac{dF}{dy} = 0$ ont la forme linéaire et les mêmes coefficients pour les dérivées partielles $z^{(n+1)}$, ..., z_{n+1}. Il en résulte, d'après l'équation (8), que les deux équations linéaires $\frac{dF}{dx} = 0$ et $\frac{dF}{dy} = 0$ ont les mêmes n racines, que nous appellerons *racines de l'équation donnée* $F = 0$. Ces n racines sont des expressions d'ordre n, et s'obtiennent évidemment au moyen de l'équation du $n^{\text{ième}}$ degré

$$(10) \qquad \frac{dF}{dz^{(n)}}u^n + \frac{dF}{dz_1^{(n-1)}}u^{n-1} + \ldots + \frac{dF}{dz_n} = 0,$$

que nous appellerons *équation aux racines* relative à l'équation donnée $F = 0$.

A chacune de ces n racines u_1, ..., u_n correspond une condition $dy + u_r\,dx = 0$, sous laquelle les deux équations linéaires d'ordre $n+1$, $\frac{dF}{dx} = 0$ et $\frac{dF}{dy} = 0$, après multiplication par dx, se transforment en deux équations différentielles d'ordre n, $\frac{dF}{dx}dx = 0$ et $\frac{dF}{dy}dx = 0$, qui sont identiques entre elles en vertu de $dF = 0$. Nous déduisons de là n équations du $n^{\text{ième}}$ ordre auxquelles sont imposées des conditions

$$(11)\qquad \frac{dF}{dx}\,dx = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{dF}{dy}\,dx = 0 \qquad \text{si} \qquad dy + u_r\,dx = 0,$$

dont chacune a deux formes.

Quand ces n équations conditionnelles du $n^{\text{ième}}$ ordre s'intègrent, nous pouvons, au moyen de leurs n intégrales et à l'aide de l'équation donnée $F = 0$, déterminer les $n+1$ dérivées partielles du $n^{\text{ième}}$ ordre $z^{(n)}, \ldots, z_n$, qui permettent, comme nous l'avons déjà vu, d'intégrer successivement toutes les équations non conditionnelles d'ordre inférieur, jusqu'à ce que nous obtenions l'intégrale de l'équation non conditionnelle d'ordre nul, qui est l'intégrale générale de l'équation d'ordre n donnée $F = 0$.

(γ) *Équations bilinéaires de la seconde classe.*

Nous avons obtenu les n équations conditionnelles d'ordre $n-1$, au moyen de l'équation linéaire d'ordre n donnée $F = 0$, sous la forme

$$E = 0 \qquad \text{si} \qquad dy + u\,dx = 0,$$

où $E = 0$ est une équation différentielle d'ordre $n-1$, u une expression d'ordre $n-1$ ou d'ordre inférieur.

En exprimant, au moyen des équations non conditionnelles, toutes les différentielles $dz^{(n-1)}, \ldots, dz_{n-1}$ dans E, par dx et dy, nous amenons l'équation différentielle $E = 0$ à la forme $M\,dx + N\,dy = 0$, et par suite, après division par N, nous obtenons l'équation conditionnelle sous la forme

$$(12)\qquad dy + v\,dx = 0 \qquad \text{si} \qquad dy + u\,dx = 0,$$

où nous appelons u racine, v racine complémentaire de cette équation conditionnelle. La racine u est l'expression d'ordre $n-1$ ou d'ordre inférieur que nous obtenons par la résolution de l'équation aux racines; mais la racine complémentaire $v = \frac{M}{N}$ est une expression d'ordre n de la forme particulière

$$(13)\qquad v = \frac{M}{N} = \frac{e z^{(n)} + e_1 z_1^{(n-1)} + \ldots + e_n z_{n-1} + X}{e z_1^{(n-1)} + e_1 z_2^{(n-2)} + \ldots + e_n z_n + Y},$$

où $e, e_1, \ldots, e_n$, X, Y sont des expressions d'ordre $n-1$ ou d'ordre inférieur. Nous appellerons une expression v de cette forme, *une expression bilinéaire d'ordre n*. Sa propriété consiste en ce que toute équation de la forme $dy + v\,dx = 0$ se transforme en une équation différentielle d'ordre $n-1$

$$e\,dz^{(n-1)} + e_1\,dz_1^{(n-2)} + \ldots + e_n\,dz_{n-1} + X\,dx + Y\,dy = 0$$

et qu'inversement, toute équation différentielle d'ordre $n-1$ se ramène à la forme

$$dy + v\,dx = 0.$$

L'équation conditionnelle d'ordre $n-1$

$$\mathrm{E} = 0 \quad \text{si} \quad dy + u\,dx = 0,$$

que nous obtenons au moyen de l'équation linéaire d'ordre n, $\mathrm{F} = 0$, s'exprime seulement par une équation différentielle d'ordre $n-1$, $\mathrm{E} = 0$, et de là résulte qu'une équation d'ordre n, qui a une équation conditionnelle d'ordre $n-1$, $\mathrm{E} = 0$ si $\mathrm{E}_1 = 0$, exprimée par deux équations différentielles d'ordre $n-1$, ne peut être de forme linéaire.

En effet, au moyen de l'équation conditionnelle $\mathrm{E} = 0$ si $\mathrm{E}_1 = 0$, qui se ramène à la forme

$$dy + v\,dx = 0 \quad \text{si} \quad dy + u\,dx = 0,$$

où $v = \frac{\mathbf{M}}{\mathbf{N}}$, $u = \frac{\mathbf{M}_1}{\mathbf{N}_1}$ sont des expressions bilinéaires d'ordre n, nous obtenons, après élimination de $\frac{dy}{dx}$, une équation d'ordre n

$$v = u \quad \text{ou} \quad \frac{\mathbf{M}}{\mathbf{N}} = \frac{\mathbf{M}_1}{\mathbf{N}_1}, \tag{14}$$

qui doit être identique à l'équation d'ordre n donnée $\mathrm{F} = 0$, parce qu'il n'existe qu'une équation d'ordre n.

Si u est une expression d'ordre $n-1$ ou d'ordre inférieur, comme cela a lieu pour une équation linéaire, l'équation (14) prend en effet la forme d'une équation linéaire d'ordre n

$$\mathbf{F} = \mathbf{M} - u\mathbf{N} = 0.$$

Mais, si v et u sont des expressions bilinéaires d'ordre n, l'équation d'ordre n donnée $\mathrm{F} = 0$ se ramène à l'égalité $v = u$ de deux expressions bilinéaires d'ordre n, ou se présente sous la forme de la proportion $\frac{\mathbf{M}}{\mathbf{N}} = \frac{\mathbf{M}_1}{\mathbf{N}_1}$ entre quatre expressions linéaires d'ordre n (*voir* deuxième Mémoire), et nous appellerons une telle équation, une *équation bilinéaire d'ordre n*.

L'équation bilinéaire d'ordre n, $\frac{\mathbf{M}}{\mathbf{N}} = \frac{\mathbf{M}_1}{\mathbf{N}_1}$, se ramène à la forme

$$\mathbf{F} = \mathbf{M}\mathbf{N}_1 - \mathbf{M}_1\mathbf{N} = 0, \tag{15}$$

dont les termes ne contiennent pas seulement les premières puissances de toutes les dérivées partielles d'ordre n, $z^{(n)}, \ldots, z_n$, mais aussi leurs produits deux à deux. Ces produits ont deux à deux un seul et même coefficient, et se réunissent en un seul terme que nous appellerons un *terme bilinéaire d'ordre n*.

Au moyen de l'équation bilinéaire d'ordre n,

$$F = MN_1 - M_1N = 0,$$

nous obtenons en général seulement une égalité $\frac{M}{N} = \frac{M_1}{N_1}$ entre deux expressions bilinéaires, et par suite seulement une équation conditionnelle d'ordre $n+1$,

$$M\,dx + N\,dy = 0 \quad \text{si} \quad M_1\,dx + N_1\,dy = 0.$$

Mais si les expressions linéaires M et N_1, ou M_1 et N ont les mêmes termes de degré n, de sorte que l'ordre de l'expression $M - N_1$ est inférieur à n, nous déduisons encore de l'équation $F = 0$ la seconde égalité $\frac{M}{M_1} = \frac{N}{N_1}$ de deux expressions bilinéaires d'ordre n, à laquelle correspond la seconde équation conditionnelle d'ordre $n-1$,

$$M\,dx + M_1\,dy = 0 \quad \text{si} \quad N\,dx + N_1\,dy = 0.$$

Si l'équation conditionnelle d'ordre $n-1$ de l'équation bilinéaire d'ordre n donnée $F = 0$ s'intègre, l'intégrale trouvée sera une équation aux dérivées partielles d'ordre $n-1$, que nous pourrons intégrer d'après ce qui précède.

Comme toute équation conditionnelle d'ordre $n-1$ se ramène à une équation linéaire ou bilinéaire d'ordre n, nous en concluons qu'une équation non linéaire d'ordre n n'a pas d'équations conditionnelles d'ordre $n-1$. Une équation bilinéaire d'ordre n en a une ou deux; une équation linéaire d'ordre n a n équations conditionnelles d'ordre $n-1$. Nous avons vu que les racines d'une équation linéaire d'ordre n sont des expressions arbitraires d'ordre $n-1$, les racines complémentaires, des expressions bilinéaires d'ordre n.

Comme nous obtenons les équations conditionnelles d'une équation non linéaire d'ordre n, $F = 0$, au moyen des équations linéaires d'ordre $n+1$, $\frac{dF}{dx} = 0$ ou $\frac{dF}{dy} = 0$, nous en concluons que les racines de cette équation sont des expressions arbitraires d'ordre n, les racines complémentaires, des expressions bilinéaires d'ordre $n+1$.

Une équation bilinéaire d'ordre n a, comme une équation non linéaire d'ordre n, de telles racines et racines complémentaires; mais, parmi elles, se trouvent une ou deux racines qui sont des expressions bilinéaires d'ordre n et dont les complémentaires sont aussi des expressions bilinéaires d'ordre n.

Équations conditionnelles d'ordres superieurs.

Soit donnée une équation aux dérivées partielles d'ordre n, $F = 0$; toutes les équations dérivées, dont la forme générale est

$$\Phi_\nu^\mu = \frac{d^{\mu+\nu} F}{dx^\mu\, dy^\nu} = 0$$

ont la forme linéaire et les mêmes $n + 1$ coefficients pour les dérivées partielles supérieures.

Il en résulte que toutes ces équations linéaires $\Phi_\nu^\mu = 0$ ont les mêmes n racines $u_1, \ldots, u_n$, qui seront les racines de l'équation donnée $F = 0$, parce que nous avons

$$\Phi_0^0 = F,$$

si $F = 0$ est de forme linéaire, et

$$\Phi_0^1 = \frac{dF}{dx}, \qquad \Phi_1^0 = \frac{dF}{dy},$$

si $F = 0$ est de forme non linéaire.

Nous en concluons que, sous chaque condition $dy + u\,dx = 0$, correspondant à une des racines $u_1, \ldots, u_n$ de l'équation donnée $F = 0$, l'équation linéaire $\Phi_\nu^\mu = 0$ d'ordre $\mu + \nu + n$ se transforme en l'équation conditionnelle d'ordre $\mu + \nu + n - 1$

$$\Phi_\nu^\mu\, dx = 0 \quad \text{si} \quad dy + u\,dx = 0, \tag{16}$$

laquelle, pour le même ordre, a $\mu + \nu + 1$ formes différentes obtenues au moyen des $\mu + \nu + 1$ équations dérivées

$$\Phi_{\mu+\nu}^0 = 0, \qquad \ldots, \qquad \Phi_\nu^\mu = 0, \qquad \ldots, \qquad \Phi_0^{\mu+\nu} = 0$$

d'un seul et même ordre $\mu + \nu + n$.

L'ordre de toutes ces équations conditionnelles (16) est supérieur à $n - 1$; mais, parmi elles, pour $\mu = 0$, $\nu = 0$, se trouvent les n équations conditionnelles d'ordre $n - 1$, que nous obtenons au moyen de l'équation donnée $F = 0$, si elle a la forme linéaire.

Les racines de toutes ces équations conditionnelles, c'est-à-dire les racines de l'équation donnée $F = 0$, sont des expressions arbitraires d'ordre n ou $n - 1$; mais les racines complémentaires sont des expressions bilinéaires de tous les ordres de n à l'infini.

Si sous chacune des n conditions

$$dy + u_1\,dx = 0, \qquad \ldots, \qquad dy + u_n\,dx = 0,$$

de l'équation aux dérivées partielles d'ordre n donnée $F = 0$, s'intègre une équation conditionnelle d'ordre et de forme choisis à volonté, l'intégrale générale existe, et sa découverte est ramenée à l'intégration d'équations non conditionnelles satisfaisant aux conditions d'intégrabilité. En effet, si nous avons n intégrales, qui ne sont pas identiques et qui contiennent toutes les n fonctions arbitraires, alors, en les amenant, au moyen d'une différentiation, à un ordre supérieur, $n + m$ par exemple, et en leur ajoutant les $m+1$ équations dérivées $\Phi_0^m = 0$, ..., $\Phi_m^0 = 0$, nous aurons les $m+n+1$ équations d'ordre $m+n$, au moyen desquelles nous pourrons déterminer les $m+n+1$ dérivées partielles $z^{(m+n)}, \ldots, z_{m+n}$ d'ordre $m+n$. Nous obtenons, par suite, successivement les intégrales des équations non conditionnelles de tous les ordres inférieurs, jusqu'à l'intégrale générale inclusivement.

Les équations non conditionnelles ont la forme générale

$$dp = \frac{dp}{dx} dx + \frac{dp}{dy} dy,$$

où $\frac{dp}{dx}$ et $\frac{dp}{dy}$ sont des dérivées partielles d'ordre m, quand p est d'ordre $m - 1$. Quand nous avons déterminé toutes les équations d'ordre m et $\frac{dp}{dx}, \frac{dp}{dy}$, la condition d'intégrabilité $\frac{d^2p}{dx\,dy} = \frac{d^2p}{dy\,dx}$ de l'équation $dp = \frac{dp}{dx} dx + \frac{dp}{dy} dy$ s'exprime ou par une identité, ou par l'équation d'ordre m que nous avons déjà.

Équations conditionnelles avec des fonctions arbitraires.

Soit donnée une équation aux dérivées partielles d'ordre n, $F = 0$; alors, outre les équations conditionnelles de tous les ordres, depuis $n - 1$ jusqu'à l'infini, que nous obtenons au moyen des équations dérivées, existent encore des équations conditionnelles de tous les ordres, depuis zéro jusqu'à l'infini, que nous obtenons au moyen des intégrales trouvées. Ces équations conditionnelles contiennent des fonctions arbitraires et servent pour la simplification de l'intégration. En effet, chaque intégrale d'ordre m, $\Phi = 0$, de l'équation donnée d'ordre n, $F = 0$, est une équation aux dérivées partielles, par l'intégration de laquelle nous pouvons obtenir l'intégration générale de l'équation donnée $F = 0$.

Si la fonction dérivée, entrant dans l'intégrale générale $f = 0$, n'entre pas dans l'équation d'ordre m, $\Phi = 0$, la racine u de la condition, par laquelle s'exprime l'argument de cette fonction, doit être une racine commune des équations $\Phi = 0$ et $F = 0$. Nous obtenons donc l'équation conditionnelle d'ordre $n - 1$,

$$\Phi\,dx = 0 \qquad \text{si} \qquad dy + u\,dx = 0,$$

pour la forme linéaire de l'équation $\Phi = 0$, et l'équation conditionnelle d'ordre n,

$$\frac{d\Phi}{dx}dx = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{d\Phi}{dy}dx = 0,$$

pour la forme non linéaire de l'équation $\Phi = 0$. Ces équations conditionnelles contiennent les mêmes fonctions arbitraires que celles qui entrent dans l'intégrale $\Phi = 0$.

V. — Équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre a trois variables indépendantes.

Nous ne considérerons pas, sous leur forme générale, les équations aux dérivées partielles d'ordre n à m variables indépendantes, qui forment la troisième classe des équations aux dérivées partielles, parce que nous trouverons les propriétés générales de toute cette classe dans des groupes de forme particulière.

Nous prendrons, pour premier groupe, les équations du second ordre à trois variables indépendantes, et, dans ce paragraphe, nous considérerons les équations linéaires du premier groupe.

Une équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre

$$p'' = \frac{d^2p}{dx^2}, \quad p_{''} = \frac{d^2p}{dy^2}, \quad {}''p = \frac{d^2p}{dz^2}, \quad p'_{,} = \frac{d^2p}{dx\,dy}, \quad {}'p' = \frac{d^2p}{dx\,dz}, \quad {}'p_{,} = \frac{d^2p}{dy\,dz}$$

de p par rapport aux variables indépendantes x, y, z, a la forme générale

$$\mathrm{F} = p'' + \mathrm{A}'_{,}p'_{,} + {}'\mathrm{A}'\,{}'p' + \mathrm{A}_{''}\,p_{''} + {}'\mathrm{A}_{,}\,{}'p_{,} + {}''\mathrm{A}\,{}''p + \mathrm{K} = 0; \tag{1}$$

$\mathrm{A}'_{,}, \ldots, {}''\mathrm{A}$, K, et, dans les équations suivantes B, C, X, Y, Z, u, v désignent des expressions du premier ordre ou d'ordre nul, dans lesquelles, en général, entrent les dérivées partielles du premier ordre

$$\frac{dp}{dx} = p', \qquad \frac{dp}{dy} = p_{,}, \qquad \frac{dp}{dz} = {}'p.$$

L'équation différentielle du premier ordre, dont la forme générale est

$$\mathrm{E} = dp' + \mathrm{B}\,dp_{,} + \mathrm{C}\,d'p + \mathrm{X}\,dx + \mathrm{Y}\,dy + \mathrm{Z}\,dz = 0, \tag{2}$$

se transforme, en vertu des équations conditionnelles

$$\left\{\begin{aligned} dp' &= p''\,dx + p'_{,}\,dy + {}'p'\,dz, \\ dp_{,} &= p'_{,}\,dx + p_{''}\,dy + {}'p_{,}\,dz, \\ d'p &= {}'p'\,dx + {}'p_{,}\,dy + {}''p\,dz, \end{aligned}\right. \tag{3}$$

dans l'équation

$$(p'' + Bp'_{,} + C'p' + X)\,dx + (p'_{,} + Bp_{,,} + C'p_{,} + Y)\,dy + ('p' + B'p_{,} + C''p + Z)\,dz = 0.$$

Par suite, sous les deux conditions

$$(4) \qquad dy = u\,dx \quad \text{et} \quad dz = v\,dx,$$

nous obtenons une équation de la forme $\Phi\,dx = 0$, qui, pour dx arbitraire, donne l'équation linéaire du second ordre

$$(5) \qquad \begin{aligned} \Phi = p'' + (B + u)p'_{,} + (C + v)'p' + B\,up_{,,} \\ + (Cu + Bv)'p_{,} + Cv''p + X + uY + vZ = 0. \end{aligned}$$

Cette équation linéaire du second ordre $\Phi = 0$ se transforme, après multiplication par dx, sous les hypothèses déterminées

$$dy = u\,dx, \qquad dz = v\,dx,$$

dans l'équation différentielle du premier ordre

$$E = \Phi\,dx = 0.$$

Pour la détermination de cette équation différentielle du premier ordre $E = F\,dx = 0$, en laquelle, après multiplication par dx, se transforme l'équation linéaire du second ordre donnée, de forme générale (1) $F = 0$, nous obtenons, en égalant F et Φ, les équations suivantes :

$$(6) \quad B + u = A'_{,}, \qquad C + v = 'A', \qquad Bu = A_{,}, \qquad Cu + Bv = 'A_{,}, \qquad Cv = ''A,$$

$$(7) \qquad X + uY + vZ = K.$$

Au moyen des équations (6), nous obtenons, après élimination de B et C, pour la détermination des deux inconnues u et v, trois équations du second degré

$$(8) \quad u^2 - A'_{,}u + A_{,,} = 0, \qquad v^2 - 'A'\,v + ''A = 0, \qquad ''A\,u^2 - 'A_{,}\,uv + A_{,,}\,v^2 = 0$$

et nous concluons de là que l'équation linéaire du second ordre arbitrairement donnée ne se change pas en équation différentielle du premier ordre. D'après le paragraphe I, toutes les équations linéaires de la troisième classe diffèrent, par cette propriété, des équations linéaires de la première et de la deuxième classes.

Ayant éliminé u et v des équations (8), nous obtenons l'équation

$$(10) \qquad 'A_{,}^{2} + 'A'^{2}A_{,,} + A'^{2}_{,}\,''A = ''AA_{,,} + A'_{,}\,'A'\,'A_{,}$$

entre les coefficients de l'équation donnée $F = 0$. Ce n'est que lorsque cette équation est satisfaite qu'existent les conditions sous lesquelles, au moyen de $F = 0$, nous obtenons l'équation différentielle $E = 0$, et dans ce cas, par les équations (8), sont déterminées deux valeurs u_1 et u_2 de l'inconnue u, auxquelles correspondent, d'une manière définie, deux valeurs v_1 et v_2 de l'inconnue v.

En déterminant B et C au moyen des équations (6) :

$$B + u = A'_{,}, \qquad C + v = {}'A',$$

et, en remarquant que le terme $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$, dans l'équation (2), prend la forme $K\,dx$ dans l'équation

$$E = F\,dx = 0,$$

nous obtenons au moyen de l'équation linéaire du second ordre donnée

$$F = p'' + A'_{,}p'_{,} + {}'A'{}'p' + A_{,,}p_{,,} + {}'A_{,}{}'p_{,} + {}''A{}''p + K = 0, \tag{1}$$

deux équations conditionnelles du premier ordre

$$E_1 = F\,dx = dp' + (A'_{,} - u_1)\,dp_{,} + ({}'A' - v_1)\,d'p + K\,dx = 0 \tag{11}$$

si

$$dy = u_1\,dx, \qquad dy = v_1\,dx$$

et

$$E_2 = F\,dx = dp' + (A'_{,} - u_2)\,dp_{,} + ({}'A' - v_2)\,d'p + K\,dx = 0 \tag{12}$$

si

$$dy = u_2\,dx, \qquad dz = v_2\,dx.$$

Nous appellerons les expressions du premier ordre u_1 et v_1, racines de la première équation conditionnelle, u_2 et v_2 racines de la seconde, et les trois équations

$$u^2 - A'_{,}u + A_{,,} = 0, \qquad v^2 - {}'A'v + {}''A = 0, \qquad {}''A\,u^2 - {}'A_{,}uv + A_{,,}v^2 = 0, \tag{8}$$

au moyen desquelles nous obtenons ces racines, les équations aux racines.

L'intégrale de chacune de ces équations conditionnelles s'exprime par trois équations, avec trois constantes d'intégration dont une est fonction arbitraire des deux autres.

En désignant ces constantes d'intégration par b, a, a_1; β, α, α_1, nous pouvons exprimer les deux intégrales par les deux équations

$$b = f(a, a_1), \qquad \beta = \varphi(\alpha, \alpha_1) \tag{13}$$

entre les expressions auxquelles les constantes d'intégration sont égales, d'après les intégrales trouvées.

Dans l'intégration des équations de la première classe, d'après le paragraphe III, et de la deuxième classe, d'après le paragraphe IV, toutes les dérivées partielles de même ordre sont déterminées par les intégrales des équations conditionnelles de cet ordre, et nous obtenons, par suite, l'intégrale générale, par l'intégration des équations non conditionnelles d'ordre inférieur. Les équations compatibles de la troisième classe ne possèdent pas cette propriété, car déjà, dans le premier groupe de la troisième classe, les trois dérivées partielles du premier ordre p', $p_{,}$, $'p$ ne sont pas déterminées par les deux intégrales (13) des équations conditionnelles du premier ordre.

Les équations conditionnelles qui manquent, contiennent des fonctions arbitraires et s'obtiennent seulement au moyen des intégrales déjà trouvées.

Dans la deuxième classe, nous pouvons, d'après le paragraphe IV, employer de telles équations conditionnelles pour la simplification de l'intégration.

Toutes les dérivées partielles du premier ordre p', $p_{,}$, $'p$ ne sont pas déterminées par les deux intégrales (13), et de là résulte que, déjà dans le premier groupe de la troisième classe, les dérivées partielles d'un même ordre ne sont pas déterminées par les intégrales de toutes les équations conditionnelles de cet ordre. Le mécanisme d'intégration, qui est basé sur cette propriété des équations différentielles compatibles de la première et de la deuxième classes, n'est pas applicable, par conséquent, dans la troisième classe, mais se simplifie pour les équations linéaires du premier groupe.

En effet, nous pouvons considérer chacune des intégrales (13), comme une équation aux dérivées partielles du premier ordre, dans laquelle entre une fonction arbitraire de deux arguments. En intégrant cette équation, d'après le paragraphe III, nous obtenons l'intégrale générale, dans laquelle entre encore une seconde fonction arbitraire de deux arguments.

Si l'intégrale $b = f(a, a_1)$ de l'équation conditionnelle (11) a la forme linéaire, alors, d'après le paragraphe III, nous déduisons de là une équation conditionnelle d'ordre nul, dont l'intégrale sera l'intégrale générale cherchée. Dans ce cas, l'équation conditionnelle (12) et l'équation non conditionnelle

$$dp = p'\,dx + p_{,}\,dy + {}'p\,dz$$

sont superflues; mais, dans l'équation conditionnelle intégrée, entre une fonction arbitraire.

Si l'intégrale $b = f(a, a_1)$ n'a pas la forme linéaire, alors, d'après le paragraphe III, nous en déduisons trois équations conditionnelles du premier ordre, parmi lesquelles, après élimination de la fonction arbitraire, nous trouvons l'équation conditionnelle (12). L'équation non conditionnelle

$$dp = p'\,dx + p_{,}\,dy + {}'p\,dz$$

s'intègre au moyen des trois intégrales de ces équations, et nous en déduisons l'intégrale générale de forme normale.

Exemple.

$$p'' = p_{\prime\prime} + 2\,'p_{\prime} + {''p}.$$

Les équations aux racines (8) prennent la forme

$$u^2 - 1 = 0, \qquad v^2 - 1 = 0, \qquad u^2 - 2uv + v^2 = 0$$

et nous en tirons les racines

$$u_1 = 1, \qquad v_1 = 1, \qquad u_2 = -1, \qquad v_2 = -1.$$

Les deux équations conditionnelles (11) et (12) prennent la forme

$$dp' - dp_{\prime} - d'p = 0 \quad \text{si} \quad dy - dx = 0, \quad dz - dx = 0,$$
$$dp' + dp_{\prime} + d'p = 0 \quad \text{si} \quad dy + dx = 0, \quad dz + dx = 0$$

et nous en déduisons les deux intégrales de forme linéaire

$$p' - p_{\prime} - {'p} = f[(y-x), (z-x)], \qquad p' + p_{\prime} + {'p} = \varphi[(y+x), (z+x)].$$

La première intégrale, après multiplication par dx, sous les conditions

$$dy + dx = 0, \qquad dz + dx = 0,$$

se change dans l'équation conditionnelle

$$dp = f\,dx,$$

et nous en déduisons, en désignant $\int f\,dx$ par φ, une intégrale générale de la forme

$$p = \varphi[(y-x), (z-x)] + \psi[(y+x), (z+x)].$$

Nous obtenons de la même manière l'intégrale générale

$$p = xf\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) + \varphi(yx, zx)$$

pour l'équation

$$x^2p'' = y^2p_{\prime\prime} + 2xy'p_{\prime} + y^2p_{\prime\prime}.$$

Exemple.

$$p'(p'_{\prime\prime}p^2 - {}''pp_{\prime}^2) = 2\,{}'pp_{\prime}({}'pp'_{\prime} - p'_{\prime}p').$$

Les équations aux racines prennent la forme

$$2p_{\prime}u + p' = 0, \qquad 2\,{}'pv + p' = 0, \qquad p_{\prime}^2u^2 - {}'p^2v^2 = 0$$

et nous en tirons les racines

$$u_1 = -\frac{p'}{2p'}, \qquad v_1 = -\frac{p'}{2\,{}'p}, \qquad u_2 = \infty, \qquad v_2 = \infty, \qquad p_{\prime}u_2 + {}'pv_2 = 0.$$

Après multiplication de l'équation donnée par dx, nous obtenons, sous les conditions

$$dy - u_1\,dx = 0, \qquad dz - v_1\,dx = 0,$$

la première équation conditionnelle

$${}'p\,dp_{\prime} - p_{\prime}\,d'p = 0 \qquad \text{si} \qquad 2\,dy + \frac{p'}{p_{\prime}}dx = 0, \qquad 2\,dz + \frac{p'}{{}'p}dx = 0,$$

ou si

$$p'\,dx + p_{\prime}\,dy + {}'p\,dz = 0, \qquad dy - \frac{{}'p}{p_{\prime}}dz = 0.$$

L'intégrale de cette équation conditionnelle

$$\frac{p_{\prime}}{{}'p} = a^2, \qquad p = \alpha, \qquad y - \frac{z}{a^2} = \varphi(a, \alpha)$$

a la forme linéaire

$$p_{\prime} - a^2\,{}'p = 0.$$

Les conditions

$$dy - u_2\,dx = 0, \qquad dz - v_2\,dx = 0,$$

après introduction des valeurs de u_2 et v_2, prennent la forme

$$dx = 0, \qquad p'\,dx + p_{\prime}\,dy + {}'p\,dz = 0,$$

et il en résulte que les arguments de la seconde équation conditionnelle sont x et p.

L'équation donnée, après multiplication par dy ou par dz, sous les conditions

$$dx = 0, \qquad p_{\prime}\,dy + {}'p\,dz = 0,$$

se change en la seconde équation conditionnelle

$$d\frac{\omega'^2}{{}'\omega\omega_{\prime}} = 0 \qquad \text{si} \qquad dx = 0, \qquad dp = 0,$$

dont l'intégrale

$$\omega'^2 = {}'\omega\omega_{,} f(x, p)$$

n'a pas la forme linéaire.

En considérant l'intégrale $p_{,} - a^2\,'p = 0$, $y - \frac{z}{a^2} = \varphi(p, a)$ de la première équation conditionnelle, comme une équation du premier ordre, nous obtenons, après multiplication par dy, l'équation conditionnelle

$$(p_{,} - a^2\,'p)\,dy = dp = 0 \quad \text{si} \quad dx = 0, \quad dz + a^2\,dy = 0.$$

En remarquant que

$$d\left(ay + \frac{z}{a}\right) = \left(y - \frac{z}{a^2}\right) da + a\,dy + \frac{dz}{a} = \varphi(p, a)\,da,$$

nous obtenons l'intégrale générale

$$f(p, x) + \psi(p, a) = ay + \frac{z}{a},$$

qui, relativement à l'argument a, a une forme normale, puisque

$$\frac{d\psi(p, a)}{da} = \varphi(p, a) = y - \frac{z}{a^2}.$$

VI. — Équations non linéaires aux dérivées partielles du second ordre a trois variables indépendantes.

Soit donnée une équation aux dérivées partielles du second ordre de p par rapport à x, y, z, de la forme générale $F = 0$; son équation dérivée

$$(1) \quad \frac{dF}{dx} = \frac{dF}{dp''}\omega''' + \frac{dF}{dp'_{,}}\omega''_{,} + \frac{dF}{d'p'}\,'\omega'' + \frac{dF}{dp_{''}}\omega'_{''} + \frac{dF}{d'p_{,}}\,'\omega'_{,} + \frac{dF}{d''p}\,''\omega' + \left(\frac{dF}{dx}\right) = 0$$

a la forme d'une équation linéaire du troisième ordre, et, d'après le paragraphe I, sous les deux conditions du deuxième ordre

$$(2) \qquad dy - u\,dx = 0, \qquad dz - v\,dx = 0,$$

se transforme, après multiplication par dx, en une équation différentielle conditionnelle du deuxième ordre.

Cette équation différentielle $\frac{dF}{dx}dx = 0$ a la forme

$$(3) \qquad \frac{dF}{dp''}dp'' + A\,dp'_{,} + B\,d'p' + \left(\frac{dF}{dx}\right)dx = 0,$$

car $dp_{''}$, $d'p_{,}$, $d''p$ ne peuvent entrer dans l'équation.

Pour la détermination des inconnues A, B, u, v, mettons l'équation (3) sous la forme $\Phi\,dx = 0$, en exprimant dp'', $d'p_{,}$, $d'p'$ au moyen de dx, dy, dz et en posant

$$dy = u\,dz, \qquad dz = v\,dx.$$

En égalant les deux expressions $\frac{dF}{dx}$ et Φ, nous obtenons

$$\text{(4)} \qquad A = \frac{dF}{dp'_{,}} - u\frac{dF}{dp''}, \qquad B = \frac{dF}{d'p'} - v\frac{dF}{dp_{\prime\prime}},$$

mais les inconnues u et v doivent être déterminées par les trois équations

$$\text{(5)} \qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{dF}{dp''}u^2 - \frac{dF}{dp'_{,}}u + \frac{dF}{dp_{\prime\prime}} = 0, \\ &\frac{dF}{dp''}v^2 - \frac{dF}{d'p'}v + \frac{dF}{d''p} = 0, \\ &\frac{dF}{d''p}u^2 - \frac{dF}{d'p_{,}}uv + \frac{dF}{dp_{\prime\prime}}v^2 = 0 \end{aligned}\right.$$

que nous appellerons *équations aux racines*. Nous en concluons que l'équation conditionnelle du second ordre cherchée n'existe pas pour une forme arbitraire de l'équation donnée $F = 0$. En éliminant u et v des trois équations (5), nous obtenons une équation entre les dérivées $\frac{dF}{dp''}, \dots, \frac{dF}{dp_{\prime\prime}}$. Si cette équation est satisfaite, nous obtenons, au moyen des équations (3), deux valeurs u_1, u_2 de l'inconnue u, auxquelles correspondent, d'une manière déterminée, deux valeurs v_1, v_2 de l'inconnue v. Par ces valeurs des inconnues u et v sont déterminées, d'après l'équation (3), deux équations conditionnelles, chacune sous deux conditions. Chacune de ces deux équations conditionnelles a trois formes différentes, parmi lesquelles nous n'en obtenons qu'une, au moyen de l'équation dérivée $\frac{dF}{dx} = 0$; les deux autres formes s'obtiennent de la même manière, au moyen des équations dérivées

$$\frac{dF}{dy} = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{dF}{dz} = 0.$$

Si dans les équations aux racines (5), nous remplaçons x par y ou z, nous obtenons évidemment les mêmes équations aux racines, et nous en concluons que les trois équations dérivées

$$\frac{dF}{dx} = 0, \qquad \frac{dF}{dy} = 0, \qquad \frac{dF}{dz} = 0$$

se transforment, sous les mêmes conditions

$$dy - u_1\,dx = 0, \qquad dz - v_1\,dx = 0 \qquad \text{ou} \qquad dy - u_2\,dx = 0, \qquad dz - v_2\,dx = 0,$$

dans des équations conditionnelles du deuxième ordre.

En introduisant les valeurs de A et B tirées des équations (4), et en remplaçant x par y et z, nous obtiendrons toutes les équations auxquelles sont imposées des conditions

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{d\mathrm{F}}{dp''}\,dp'' + \left(\frac{d\mathrm{F}}{dp'_{,}} - u\frac{d\mathrm{F}}{dp''}\right)dp'_{,} + \left(\frac{d\mathrm{F}}{d'p'} - v\frac{d\mathrm{F}}{dp''}\right)d'p' + \left(\frac{d\mathrm{F}}{dx}\right)dx = 0,\\
&\frac{d\mathrm{F}}{dp_{,,}}\,dp_{,,} + \left(\frac{d\mathrm{F}}{dp'_{,}} - \frac{d\mathrm{F}}{u\,dp_{,,}}\right)dp'_{,} + \left(\frac{d\mathrm{F}}{d'p_{,}} - \frac{v}{u}\frac{d\mathrm{F}}{dp_{,,}}\right)d'p_{,} + \left(\frac{d\mathrm{F}}{dy}\right)dy = 0,\\
&\frac{d\mathrm{F}}{d''p}\,d''p - \left(\frac{d\mathrm{F}}{dp'_{,}} - \frac{d\mathrm{F}}{v\,d''p}\right)d'p' + \left(\frac{d\mathrm{F}}{d'p_{,}} - \frac{u}{v}\frac{d\mathrm{F}}{d''p}\right)d'p_{,} + \left(\frac{d\mathrm{F}}{dz}\right)dz = 0.
\end{aligned}\right.$$

Nous obtenons les valeurs conjuguées u_1, v_1 ou u_2, v_2 des inconnues u, v par la résolution des équations aux racines (5). D'après leur origine, nous pouvons désigner les équations (6), auxquelles sont imposées des conditions, par $\frac{d\mathrm{F}}{dx}dx = 0$, $\frac{d\mathrm{F}}{dy}dy = 0$, $\frac{d\mathrm{F}}{dz}dz = 0$.

Outre les deux équations conditionnelles du second ordre

$$(7)\qquad \frac{d\mathrm{F}}{dx}dx = 0, \qquad \frac{d\mathrm{F}}{dy}dy = 0, \qquad \frac{d\mathrm{F}}{dz}dz = 0$$

si

$$dy - u_1\,dx = 0, \qquad dz - v_1\,dx = 0$$

et

$$(8)\qquad \frac{d\mathrm{F}}{dx}dx = 0, \qquad \frac{d\mathrm{F}}{dy}dy = 0, \qquad \frac{d\mathrm{F}}{dz}dz = 0$$

si

$$dy - u_2\,dx = 0, \qquad dz - v_2\,dx = 0,$$

dont chacune a trois formes, nous avons encore les équations non conditionnelles du deuxième ordre

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned}
dp' &= p''\,dx + p'_{,}\,dy + {}'p'\,dz,\\
dp_{,} &= p'_{,}\,dx + p_{,,}\,dy + {}'p'\,dz,\\
d'p &= {}'p'\,dx + {}'p_{,}\,dy + {}''p\,dz,
\end{aligned}\right.$$

qui, après élimination de p'', ..., $''p$, se transforment dans des équations différentielles du premier ordre, et l'équation non conditionnelle du premier ordre

$$(10)\qquad dp = p'\,dx + p_{,}\,dy + {}'p\,dz.$$

Toutes les équations non conditionnelles (7) ont pour somme $dF = 0$, et nous en concluons que si elles s'intègrent, parmi les trois constantes d'intégration qui entrent dans leurs intégrales, l'une d'elles est déterminée au moyen de l'équation donnée $F = 0$. Nous pouvons considérer les deux autres constantes d'intégration a et a_1 comme les arguments des conditions

$$dy - u_1\,dx = 0, \qquad dz - v_1\,dx = 0,$$

dont les intégrales nous sont inconnues.

Si, au moyen des trois intégrales trouvées, dont l'une sera l'équation donnée $F = 0$, une des équations non conditionnelles (9) s'intègre pour a et a_1 constants, nous obtenons l'intégrale intermédiaire du premier ordre $f = 0$, qui, d'après le paragraphe II, a la forme normale. Nous pouvons, d'après le paragraphe II, prendre sa constante d'intégration b pour fonction arbitraire $b = \varphi(a, a_1)$ des arguments a et a_1, et nous obtenons, par suite, les intégrales $\dfrac{df}{da} = 0$, $\dfrac{df}{da_1} = 0$ des deux conditions $dy - u_1\,dx = 0$, $dz - v_1\,dx = 0$. Nous pouvons, d'après le paragraphe III, au moyen de cette intégrale intermédiaire du premier ordre $f = 0$, dans laquelle entre la fonction arbitraire $b = \varphi(a, a_1)$, trouver l'intégrale générale, contenant encore une seconde fonction arbitraire $\beta = \psi(\alpha, \alpha_1)$ de deux nouveaux arguments α et α_1.

Les deux conditions $dy - u_1\,dx = 0$, $dz - v_1\,dx = 0$, dont nous avons déduit les intégrales $\dfrac{df}{da} = 0$, $\dfrac{df}{da_1} = 0$ de l'intégrale $f = 0$ de l'équation non conditionnelle, s'intègrent immédiatement dans ce cas; mais les deux constantes d'intégration, qui entrent alors dans leurs intégrales, sont deux formes inconnues d'une fonction arbitraire, et, tant que leurs valeurs ne sont pas déterminées, ne peuvent être introduites.

Les intégrales des équations (7) et (8), auxquelles sont imposées des conditions, se ramènent à l'équation $F = 0$, qui entre deux fois parmi elles, et aux quatre intégrales $A = 0$, $A_1 = 0$, $\mathbf{A} = 0$, $\mathbf{A}_1 = 0$, avec les constantes d'intégration a, a_1, α, α_1.

Les intégrales $B = 0$, $C = 0$, $\mathbf{B} = 0$, $\mathbf{C} = 0$ des quatre conditions $dy = u_1\,dx$, $dz = v_1\,dx$, $dy = u_2\,dx$, $dz = v_2\,dx$ contiennent quatre constantes d'intégration b, c, β, γ; b et c sont fonctions des arguments a, a_1 et β, γ fonctions des arguments α, α_1.

Toutes ces intégrales représentent quatre équations du second ordre

$$b = \varphi(a, a_1), \qquad c = \varphi_1(a, a_1), \qquad \beta = \psi(\alpha, \alpha_1), \qquad \gamma = \psi_1(\alpha, \alpha_1),$$

entre les expressions auxquelles les constantes d'intégration a, a_1, b, ..., γ sont égales.

En ajoutant encore l'équation donnée $F = 0$, nous n'avons que cinq équations du second ordre, au moyen desquelles nous ne pouvons déterminer toutes les dérivées partielles du second ordre p'', ..., $'p_{\prime}$, et de là résulte la nécessité de l'introduction d'une nouvelle équation conditionnelle du second ordre. Mais, en outre, d'après ce qui précède, nous ne pouvons introduire les fonctions inconnues c et γ, si nous considérons b et γ comme des fonctions arbitraires. Le procédé d'intégration, qui écarte ces difficultés, est le suivant :

Si nous avons une intégrale $b = \varphi(a, a_1)$ d'une équation conditionnelle, qui s'exprime par les intégrales

$$\mathbf{A} = 0, \qquad \mathbf{A}_1 = 0, \qquad \mathrm{B} = 0,$$

et qui correspond aux conditions

$$dy = u_1\, dx, \qquad dz = v_1\, dx;$$

alors, sous les conditions

$$dy = u_2\, dx, \qquad dz = v_2\, dx,$$

nous obtenons, au moyen de cette intégrale, de la même manière qu'au moyen de l'équation donnée $F = 0$, trois formes d'équation conditionnelle du second ordre.

Si, parmi ces six formes, trois formes non identiques s'intègrent, nous pouvons prendre une des trois constantes d'intégration ε, α, α_1, entrant dans les trois intégrales trouvées $\mathbf{E} = 0$, $\mathbf{A} = 0$, $\mathbf{A}_1 = 0$, pour fonction arbitraire $\varepsilon = f(\alpha, \alpha_1)$ des deux autres.

Parmi les six intégrales

$$\mathrm{B} = 0, \qquad \mathrm{A} = 0, \qquad \mathrm{A}_1 = 0,$$
$$\mathbf{E} = 0, \qquad \mathbf{A} = 0, \qquad \mathbf{A}_1 = 0,$$

une seulement, $\mathrm{B} = 0$, comme intégrale de condition, ne contient pas de dérivées partielles du second ordre. Au moyen des cinq autres intégrales et à l'aide de l'équation donnée $F = 0$, nous pouvons déterminer les six dérivées partielles du second ordre p'', ..., $'p_{\prime}$. Après introduction de leurs valeurs, les trois équations non conditionnelles (9) s'intègrent. Les intégrales ainsi obtenues ont, d'après le paragraphe II, la forme normale et déterminent les trois dérivées partielles du premier ordre p', $p_{\prime}$, $'p$. Après avoir porté les valeurs de ces dernières dans l'équation non conditionnelle (10), nous obtenons une équation différentielle d'ordre nul, dont l'intégrale sera l'intégrale générale cherchée, avec deux fonctions arbitraires

$$b = \varphi(a, a_1) \qquad \text{et} \qquad \beta = f(\alpha, \alpha_1).$$

Les arguments de ces fonctions se déterminent par les équations dérivées d'une intégrale normale arbitraire, par rapport aux arguments qui y entrent. Ces équations dérivées sont les intégrales des quatre conditions.

VII. — Équations de degré m aux dérivées partielles d'ordre n.

Nous avons vu au paragraphe I qu'une équation linéaire aux dérivées partielles d'ordre n, à m variables indépendantes $x_1, \ldots, x_m$, se transforme en général, sous $m-1$ conditions, en une équation conditionnelle d'ordre $n-1$

$$(1) \qquad E = 0 \quad \text{si} \quad dx_1 - u_1\,dx = 0, \quad \ldots, \quad dx_{m-1} - u_{m-1}\,dx = 0.$$

Mais une équation aux dérivées partielles d'ordre n ne se change pas toujours en une équation non conditionnelle, quand elle a la forme linéaire, et n'a pas toujours la forme linéaire, quand elle se change en une équation conditionnelle d'ordre $n-1$.

En effet, une équation différentielle d'ordre $n-1$ a la forme générale

$$(2) \qquad E = R\,dr + S\,ds + T\,dt + \ldots + X\,dx + X_1\,dx_1 + \ldots,$$

où $x, x_1, \ldots$ sont les variables indépendantes, $r, s, t, \ldots$ les dérivées par rapport à ces variables d'ordre $n-1$, R, S, T, ..., X, X_1, ... des expressions d'ordre $n-1$ ou d'ordre inférieur.

Si les coefficients R, S, T, ... de toutes les différentielles $dr, ds, dt, \ldots$ sont nuls, l'équation différentielle $E = 0$ prend la forme particulière

$$(3) \qquad E = X\,dx + X_1\,dx_1 + \ldots = 0$$

que nous appellerons *forme incomplète* d'une équation différentielle d'ordre $n-1$.

L'équation conditionnelle d'ordre $n-1$

$$(4) \qquad E = 0 \quad \text{si} \quad E_1 = 0, \quad E_2 = 0, \quad \ldots$$

s'exprime par des équations différentielles d'ordre $n-1$, $E = 0$, $E_1 = 0$, ...

Pour m variables indépendantes, nous avons, d'après le paragraphe I, $m-1$ conditions. Si toutes ces conditions ont la forme incomplète (3), elles se ramènent par voie algébrique à la forme

$$dx_1 - u_1\,dx = 0, \quad \ldots, \quad dx_{m-1} - u_{m-1}\,dx = 0,$$

et, dans ce cas seulement, l'équation conditionnelle d'ordre $n-1$ de la forme générale (4) se change en une équation conditionnelle de la forme particulière (1), que nous obtenons, d'après le paragraphe I, au moyen de l'équation linéaire aux dérivées partielles d'ordre n. Mais, si les $m-1$ conditions ont la forme générale (2), alors, en exprimant, d'après la formule

$$dr = \frac{dr}{dx}dx + \frac{dr}{dx_1}dx_1 + \ldots,$$

toutes les différentielles dr, ds, dt, ... par dx, dx_1, ..., nous amenons les m équations différentielles

$$E = 0, \quad \ldots, \quad E_{m-1} = 0$$

à la forme

$$(5) \qquad E = U\,dx + U_1\,dx_1 + \ldots + U_{m-1}\,dx_{m-1}, \qquad E_1 = U'dx + U'_1\,dx_1 + \ldots,$$

où U, U_1, U'_1, ... sont des expressions linéaires d'ordre n de la forme suivante :

$$(6) \qquad \left\{\begin{aligned} U &= R\frac{dr}{dx} + S\frac{ds}{dx} + \ldots, \\ U_1 &= R\frac{dr}{dx_1} + S\frac{ds}{dx_1} + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ U' &= R_1\frac{dr}{dx} + S_1\frac{ds}{dx} + \ldots, \end{aligned}\right.$$

et $\frac{dr}{dx}$, $\frac{dr}{dx_1}$, $\frac{ds}{dx}$, ... des dérivées partielles d'ordre n.

En éliminant les $m-1$ rapports $\frac{dx_1}{dx}$, ..., $\frac{dx_{m-1}}{dx}$ des m équations différentielles

$$E = 0, \quad \ldots, \quad E_{m-1} = 0$$

de la forme (5), nous obtenons l'équation aux dérivées partielles d'ordre n, $F = 0$, en laquelle se transforme l'équation conditionnelle d'ordre $n-1$

$$E = 0 \quad \text{si} \quad E_1 = 0, \quad \ldots, \quad E_{m-1} = 0.$$

L'expression F, dans l'équation $F = 0$ d'ordre n, est le déterminant

$$(7) \qquad F = \left\{\begin{matrix} U & U_1 & \ldots & U_{m-1} \\ U' & U'_1 & \ldots & U'_{m-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ U^{m-1} & U_1^{m-1} & \ldots & U_{m-1}^{m-1} \end{matrix}\right\}$$

formé de m^2 expressions linéaires d'ordre n de la forme (6).

Nous en concluons que l'équation d'ordre n, $F = 0$, qui a une équation conditionnelle d'ordre $n-1$, se compose en général des produits m à m d'expressions linéaires d'ordre n, et nous appellerons une telle équation aux dérivées partielles, une *équation de degré* m, d'ordre n.

Quand, parmi les équations différentielles

$$E=0, \quad \ldots, \quad E_{m-1}=0,$$

par lesquelles s'exprime l'équation conditionnelle d'ordre $n-1$

$$E=0 \quad \text{si} \quad E_1=0, \quad \ldots, \quad E_{m-1}=0,$$

ν équations différentielles prennent la forme incomplète (3), alors le degré de l'équation d'ordre n, $F=0$, sera $m-\nu$, car, dans chaque produit, ν expressions linéaires d'ordre n se changent en expressions d'ordre inférieur. Une équation du premier degré s'appelle une *équation linéaire;* nous appellerons une équation du deuxième degré une *équation bilinéaire* (deuxième Mémoire, § XII), et une équation du troisième degré une *équation trilinéaire*.

Si nous désignons par r, s, t, ... les dérivées partielles d'ordre $n-1$ de p, par rapport à ν variables indépendantes $x_1, \ldots, x_\nu$, les dérivées partielles d'ordre n seront les dérivées

$$\frac{dr}{dx_1}, \quad \frac{dr}{dx_2}, \quad \frac{ds}{dx_1}, \quad \ldots, \quad \text{de} \quad r, \quad s, \quad t, \quad \ldots$$

par rapport à $x_1, \ldots, x_\nu$.

Le déterminant formé de m^2 dérivées partielles d'ordre n, que nous obtenons en prenant les dérivées de m des quantités r, s, t, ... par rapport à m des variables $x_1, \ldots, x_\nu$, sera appelé un *déterminant d'ordre n de degré m*.

Le déterminant d'ordre n de degré nul est 1, un déterminant du premier degré est une dérivée partielle d'ordre n, un déterminant du second degré est un terme bilinéaire (deuxième Mémoire, § XII).

Une équation d'ordre n de degré m, $F=0$, qui a une équation conditionnelle d'ordre $n-1$, se change, après qu'on a effectué les produits d'expressions linéaires qui y entrent, en un polynome d'ordre n égalé à zéro. Ce polynome se compose d'une somme de déterminants d'ordre n, multipliés par des coefficients d'ordre $n-1$ ou d'ordre inférieur, et contient en général des déterminants de tous les degrés, depuis zéro jusqu'à m inclusivement.

Soit donnée une équation d'ordre n d'une telle forme; au moyen d'opérations algébriques, que nous effectuerons pour un cas particulier au paragraphe suivant, nous pouvons obtenir l'équation conditionnelle d'ordre $n-1$ en laquelle elle se transforme, et, si cette équation conditionnelle s'intègre, nous aurons une intégrale intermédiaire d'ordre $n-1$ de l'équation d'ordre n et de degré m donnée.

VIII. — Équations bilinéaires et trilinéaires aux dérivées partielles du second ordre a trois variables indépendantes.

Si p dépend de x, y, z, nous avons six dérivées partielles du second ordre de p par rapport à x, y, z, savoir

$$p'',\quad p_{\prime\prime},\quad {}''p,\quad p'_{\prime},\quad {}'p',\quad {}'p_{\prime}.$$

Nous obtenons par suite six déterminants du second ordre et du second degré, que nous désignerons de la manière suivante :

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{lll} p''p_{\prime\prime} - {}'p_{\prime}\,{}'p_{\prime} = q'', & {}''p\,p'' - {}'p'\,{}'p' = q_{\prime\prime}, & p_{\prime\prime}\,{}''p - p'_{\prime}p_{\prime\prime} = {}''q, \\ p'_{\prime}\,{}'p' - p''\,{}'p_{\prime} = {}'q_{\prime}, & p'_{\prime}\,{}'p_{\prime} - p_{\prime\prime}\,{}'p' = {}'q', & {}'p_{\prime}\,{}'p' - {}''p\,p'_{\prime} = q'_{\prime}, \end{array}\right.$$

et un déterminant du second ordre et du troisième degré

$$(2)\qquad \begin{aligned} \mathrm{D} &= p''q'' + p'_{\prime}q' + {}'p''q' = p_{\prime\prime}q_{\prime\prime} + p'_{\prime}q'_{\prime} + {}'p_{\prime}\,{}'q_{\prime} = {}''p\,{}''q + {}'p'\,{}'q' + {}'p_{\prime}\,{}'q_{\prime} \\ &= p''p_{\prime\prime}\,{}''p + 2p'_{\prime}\,{}'p'\,{}'p_{\prime} - p''\,{}'p_{\prime}\,{}'p_{\prime} - p_{\prime\prime}\,{}'p'\,{}'p' - {}''p\,p'_{\prime}p'_{\prime}. \end{aligned}$$

L'équation conditionnelle d'ordre $n-1$, pour trois variables indépendantes,

$$\mathrm{E} = 0 \quad \text{si} \quad \mathrm{E}_1 = 0, \quad \mathrm{E}_2 = 0$$

s'exprime par trois équations différentielles, dont la forme complète est

$$(3)\qquad \mathrm{E} = \mathrm{A}\,dp' + \mathrm{B}\,dp_{\prime} + \mathrm{C}\,d'p + \mathrm{X}\,dx + \mathrm{Y}\,dy + \mathrm{Z}\,dz = 0,$$

où A, B, C, X, Y, Z sont des expressions du premier ordre.

(α) *Équation trilinéaire du second ordre.*

Si les trois équations différentielles ont toutes la forme complète, alors, par une transformation algébrique, l'équation conditionnelle du premier ordre se ramène à la forme

$$(4)\qquad \mathrm{E} = dp' + \mathrm{X}\,dx + \mathrm{Y}\,dy + \mathrm{Z}\,dz = 0,$$

si

$$\begin{aligned} \mathrm{E}_1 &= dp_{\prime} + \mathrm{X}_1\,dx + \mathrm{Y}_1\,dy + \mathrm{Z}_1\,dz = 0, \\ \mathrm{E}_2 &= d'p + \mathrm{X}_2\,dx + \mathrm{Y}_2\,dy + \mathrm{Z}_2\,dz = 0. \end{aligned}$$

En exprimant dp', $dp_{\prime}$, $d'p$ par dx, dy, dz, et en éliminant ensuite les deux rapports $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{dz}{dx}$ des trois équations (4), nous obtenons une équation trilinéaire du second ordre

$$\begin{aligned}(5)\quad F = D &+ q''X + q_{''}Y_1 + {}''qZ_2 + q'_{,}(X_1 + Y) + {}'q'(Z + X_2) + {}'q_{,}(Y_2 + Z_1)\\ &+ p''(Y_1Z_2 - Y_2Z_1) + p_{''}(Z_2X - ZX_2) + {}''p(XY_1 - X_1Y)\\ &+ p'_{,}(Y_2Z - YZ_2 + Z_1X_2 - Z_2X_1) + {}'p'(X_1Y_2 - X_2Y_1 + YZ_1 - Y_1Z)\\ &\qquad + {}'p_{,}(ZX_1 - Z_1X + X_2Y - XY_2)\\ &+ (Y_1Z_2 - Y_2Z_1)X + (Y_2Z - YZ_2)X_1 + (YZ_1 - Y_1Z)X_2 = 0,\end{aligned}$$

dont les treize coefficients sont formés au moyen des neuf coefficients de l'équation conditionnelle (4). Il en résulte que si l'on donne une équation aux dérivées partielles du second ordre d'une telle forme

$$(6)\qquad F = D + q''Q'' + \ldots + p''P'' + \ldots + K = 0,$$

quatre équations entre ses treize coefficients Q'', ..., P'', ..., K doivent être satisfaites pour que l'équation donnée soit une équation trilinéaire. Si elles sont satisfaites, alors, en égalant les neuf premiers coefficients des deux équations (5) et (6), nous déterminerons les neuf coefficients inconnus X, ..., Z_2 de l'équation conditionnelle du premier ordre (4) cherchée.

Quand cette équation conditionnelle s'intègre, nous avons une intégrale intermédiaire du premier ordre, avec une fonction arbitraire de deux arguments, d'où nous pouvons déduire, d'après le paragraphe III, l'intégrale générale, avec deux fonctions arbitraires, de l'équation linéaire du second ordre (6) donnée.

(β) *Équation bilinéaire du second ordre.*

Quand, parmi les trois équations différentielles du premier ordre, par lesquelles s'exprime l'équation conditionnelle du premier ordre

$$E = 0 \quad \text{si} \quad E_1 = 0, \quad E_2 = 0,$$

une équation différentielle a la forme incomplète

$$E_2 = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0,$$

cette équation conditionnelle ne se ramène pas à la forme (4), mais, en général, se ramène à la forme

$$(7)\qquad dx + A\,dp' + B\,dp_{,} + C\,d'p = 0$$

si

$$dy + A_1\,dp' + B_1\,dp_{,} + C_1\,d'p = 0, \qquad dz + U\,dx + V\,dy = 0$$

et contient huit coefficients arbitraires du premier ordre.

En exprimant dp', $dp_{,}$, $d'p$ par dx, dy, dz, et en éliminant de ces trois équations les deux rapports $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{dz}{dx}$, nous obtenons une équation bilinéaire de la forme

$$(8) \qquad Q''q'' + Q_{''}q_{''} + \ldots + P''p'' + \ldots + 1 = 0$$

avec douze coefficients, qui satisfont à quatre équations, puisqu'ils sont formés avec les huit coefficients de l'équation conditionnelle (7).

Soit donnée une telle équation bilinéaire du second ordre; en l'égalant à l'équation (8), nous déterminons les huit coefficients inconnus de l'équation conditionnelle (7) cherchée. Si cette équation conditionnelle s'intègre, nous avons une intégrale du premier ordre, et nous en déduisons, d'après le paragraphe III, l'intégrale générale de l'équation bilinéaire du second ordre donnée.

IX. — Équations linéaires aux dérivées partielles du troisième ordre à trois variables indépendantes.

Quand p dépend de x, y, z, nous avons six dérivées partielles du second ordre et dix dérivées partielles du troisième ordre de p par rapport à x, y, z. Une équation linéaire du troisième ordre, dont la forme générale est

$$(1) \qquad p''' + A''_{,}p''_{,} + \ldots + {}'''A'''p + K = 0$$

contient neuf coefficients arbitraires du second ordre A.

Si ces neuf coefficients A satisfont à deux équations, alors, sous les deux conditions

$$dy = u\,dx, \qquad dz = v\,dx,$$

l'équation linéaire (1), après multiplication par dx, se transforme en une équation conditionnelle du second ordre,

$$(2) \qquad dp'' + B'_{,}\,dp'_{,} + \ldots + {}''B\,d''p + K\,dx = 0$$

qui contient cinq coefficients inconnus du second ordre B.

En effet, en exprimant les différentielles dp'', $dp'_{,}$, ... par dx, dy, dz, et en posant

$$dy = u\,dx, \qquad dz = v\,dx,$$

nous amenons l'équation (2) à la forme

$$\Phi\, dx = 0,$$

et, par suite de l'identité des expressions Φ et F, nous obtenons neuf équations

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{lll} u + B'_{,} = A''_{,}, & v + {}'B' = {}'A'', & B'_{,}u + B_{,,} = A'_{,,}, \\ B'_{,}v + {}'B'u + {}'B_{,} = {}'A'_{,}, & {}'B'v + {}''B = {}''A', & B_{,,}u = A_{,,,}, \\ B_{,,}v + {}'B_{,}u = {}'A_{,,}, & {}'B_{,}v + {}''B u = {}''A_{,}, & {}''B v = {}'''A, \end{array}\right.$$

qui, après élimination des sept inconnues u, v, $B'_{,}$, ..., $''B$, se réduisent à deux équations entre les coefficients A.

Pour la détermination des inconnues u et v, nous obtenons, après élimination des cinq inconnues B, quatre équations, dont trois

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{l} u^3 - A''_{,} u^2 + A'_{,,} u - A_{,,,} = 0, \\ v^3 - {}'A'' v^2 + {}''A' v - {}'''A = 0, \\ {}'''A u^3 - {}''A_{,} u^2 v + {}'A_{,,} u v^2 - A_{,,,} v^3 = 0, \end{array}\right.$$

s'appelleront *équations aux racines*. Par les équations aux racines sont déterminées trois valeurs de l'inconnue u, et à chacune d'elles correspond une valeur de l'inconnue v.

Il en résulte que, quand une équation linéaire du troisième ordre (1) est donnée, nous en déduisons trois équations conditionnelles, exprimées par l'équation (2), sous les deux conditions

$$dy = u\,dx, \qquad dz = v\,dx.$$

Les coefficients inconnus B ont les valeurs suivantes :

$$(5)\quad B'_{,} = A''_{,} - u, \qquad {}'B' = v - {}'A'', \qquad B_{,,} = \frac{A_{,,,}}{u}, \qquad {}''B = \frac{{}'''A}{v}, \qquad {}'B_{,} = \frac{{}'A_{,,}u - A_{,,,}v}{u^2}.$$

Quand une des trois équations conditionnelles du second ordre s'intègre, nous avons une intégrale du second ordre avec une fonction arbitraire de deux arguments et, par suite, d'après le paragraphe précédent, nous pouvons trouver l'intégrale générale, avec trois fonctions arbitraires, de l'équation linéaire aux dérivées partielles du troisième ordre à trois variables indépendantes donnée.