ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

GEORGES REMOUNDOS

Sur les zéros d'une classe de fonctions transcendantes

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 2e série, tome 8 (1906), p. 1-72
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1906_2_8__1_0>

ANNALES

DE LA

FACULTÉ DES SCIENCES

DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE.

SUR LES ZÉROS

D'UNE

CLASSE DE FONCTIONS TRANSCENDANTES,

PAR M. GEORGES REMOUNDOS,

Διδάκτορος de l'Université d'Athènes,
Ancien Élève (étranger) de l'École Normale supérieure.

INTRODUCTION.

1. Le célèbre théorème, découvert par M. Picard en 1880, est aujourd'hui assez classique pour me dispenser de la nécessité d'en signaler l'importance dans la théorie des fonctions analytiques. Son auteur l'a établi à l'aide de la théorie des fonctions modulaires et il concerne les valeurs d'une fonction analytique uniforme dans le voisinage d'un point singulier essentiel isolé.

C'est M. Borel qui a, le premier, donné une démonstration directe, en se bornant aux fonctions entières, et signalé son importance toute remarquable dans la théorie des fonctions entières. M. Borel a donné des généralisations importantes du théorème de M. Picard en montrant que le *cas d'exception* a un sens plus large, si l'on tient compte du mode, dont le module des zéros croît indéfiniment avec leur rang.

Dans son Mémoire *Sur les zéros des fonctions entières* (*Acta mathematica*, t. XX), M. Borel a utilisé sa théorie des fonctions croissantes pour établir la généralisation la plus étendue, que l'on puisse exiger, du théorème de M. Picard pour les fonctions entières ou méromorphes (1).

(1) Nous avons obtenu, M. Wiman et moi, des généralisations plus précises de la notion du *cas d'exception* concernant les fonctions uniformes elles-mêmes; mais j'exposerai ces résultats ultérieurs dans d'autres Mémoires qui paraîtront prochainement. *Voir* mes Notes (*Comptes rendus*, 20 juin 1904, 8 mai 1905).

A cette occasion, il a démontré l'impossibilité de certaines identités, où il figure un nombre fini d'exponentielles (Mémoire cité, p. 387).

M. Borel, en énonçant cette proposition, s'exprime ainsi :

« C'est là, semble-t-il, la généralisation proprement dite la plus étendue que l'on puisse exiger pour le théorème de M. Picard. »

Or, parmi les identités de M. Borel, il n'y a que celles qui contiennent deux exponentielles qui ont servi pour établir les généralisations du théorème de M. Picard, concernant les fonctions *uniformes*. Donc, la proposition fondamentale disait quelque chose de plus.

Je démontre dans ce Mémoire que cette généralisation ne concerne pas seulement les fonctions uniformes; dans le cas où le nombre des exponentielles, figurant dans les identités de M. Borel, est supérieur à deux, sa proposition fondamentale se traduit par l'extension du théorème de M. Picard aux fonctions *multiformes*.

Ce fait justifie d'une façon remarquable l'assertion, plus haut citée, de M. Borel.

Ce Mémoire est divisé en trois Parties :

Dans la première Partie, j'étudie les zéros des fonctions analytiques ayant un nombre fini de branches dans le voisinage d'un point singulier essentiel isolé.

Le théorème fondamental de M. Borel, dont nous venons de parler, y sert de base.

Dans la deuxième Partie, je traite le même sujet pour une classe étendue de fonctions multiformes, ayant un nombre infini de branches dans le voisinage d'un point singulier essentiel isolé. C'est toujours au point de vue de l'extension du théorème de M. Picard. J'y établis des théorèmes généraux qui comprennent comme cas particuliers ceux qui ont été démontrés dans la première Partie.

Dans le Chapitre I de la première Partie, je me borne au cas où le point essentiel est à l'infini et unique, de sorte que la fonction multiforme considérée n'a d'autres singularités à distance finie que des pôles et des points critiques algébriques. Ce sont les fonctions que j'ai appelées *transcendantes algébroïdes* et qui comprennent comme cas particuliers les fonctions entières et méromorphes. Il est clair que ces transcendantes sont les plus simples parmi les transcendantes multiformes et leur étude doit être précédée de celle des autres.

Dans le Chapitre II de la même Partie, je passe au cas général que je traite en m'appuyant sur les résultats récents de M. Maillet [*Sur les fonctions monodromes à point singulier essentiel isolé* (*Bulletin de la Société mathématique,* 1903, fasc. I)]. On sait que l'origine de ces résultats se trouve dans une lettre de M. Hadamard adressée à M. Picard en 1896 et insérée dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* t. CXXII.

La deuxième Partie est subdivisée en trois Chapitres. Dans le premier, j'étudie certaines classes de fonctions multiformes qui jouissent de propriétés remarquables. Je signale, en particulier, des fonctions d'un nombre infini de branches pour lesquelles le nombre des valeurs exceptionnelles est limité et je donne le moyen de les reconnaître.

Dans le Chapitre II, je tâche d'étendre les résultats précédents aux fonctions définies par une équation telle que

$$F(z, u) = 0,$$

$F(z, u)$ étant une fonction entière des z et u, absolument quelconque. J'établis un théorème général au sujet de la nature de l'ensemble des valeurs exceptionnelles.

A cette occasion, j'aborde le problème intéressant de l'extension de la proposition fondamentale de M. Borel au cas où le nombre des exponentielles, figurant dans ses identités, est infini, et j'indique un artifice qui me paraît destiné à surmonter les difficultés.

Je me suis toujours borné, pour fixer les idées, au cas où les coefficients de $F(z, u)$ sont des fonctions entières. Les remarques de MM. Hadamard et Maillet suffisent pour étendre les résultats au cas d'un point singulier essentiel quelconque.

Dans le Chapitre III, j'expose quelques applications à la théorie des équations différentielles en rattachant ces considérations avec les points singuliers *d'indétermination incomplète,* signalés par M. Painlevé.

Enfin, dans une troisième Partie, je me propose la tâche de compléter les théorèmes donnés par M. E. Borel sur les fonctions entières à *croissance régulière* et je fais une étude systématique de ces fonctions, en établissant des théorèmes intéressants. J'y signale les problèmes importants, qui se rattachent au but que nous nous sommes proposé.

J'entrevois, dans cette étude, la nécessité de considérer les arguments des zéros dans le cas où l'ordre ρ est un nombre entier.

2. Ce travail est le développement de trois Notes, dont deux ont été insérées dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris* (20 avril 1903, *Une nouvelle généralisation du théorème de M. Picard sur les fonctions entières,* et 8 février 1904, *Sur les zéros d'une classe de transcendantes multiformes*).

La troisième Note a été publiée dans le *Bulletin de la Société mathématique de France,* 1904, fasc. I, sous le titre : *Sur les zéros d'une classe de fonctions transcendantes.*

Voici les Ouvrages principaux qui ont traité du théorème de M. Picard et de ses généralisations :

E. Picard, *Mémoire sur les fonctions entières* (*Annales de l'École normale,* 1880).

E. Picard, *Traité d'Analyse*, t. II, p. 231, et t. III, p. 347.

J. Hadamard, Mémoire couronné en 1892 par l'Académie des Sciences et publié en 1893 dans le *Journal de Mathématiques*.

J. Hadamard, *Sur les fonctions entières* (*Comptes rendus,* extrait d'une lettre adressée à M. Picard, t. CXXII, 1896).

E. Borel, *Mémoire sur les zéros des fonctions entières* (*Acta mathematica,* t. XX, 1897).

E. Borel, *Nouvelles leçons sur la théorie des fonctions* (*Leçons sur les fonctions entières* et *Leçons sur les fonctions méromorphes*).

E. Borel, *Contribution à l'étude des fonctions méromorphes* (*Annales de l'École normale,* 1902).

E. Maillet, *Mémoire sur les fonctions entières et quasi-entières* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées,* 1902, fasc. IV).

E. Maillet, *Sur les fonctions monodromes à point singulier essentiel isolé* (*Bulletin de la Société mathématique,* 1903, fasc. I).

A. Kraft, *Ueber ganze transcendante Functionen von unendlicher Ordnung. Inaugural Dissertation* (Universität zu Göttingen, 1903) (¹).

3. Il est nécessaire, avant tout, de présenter au lecteur cette proposition fondamentale de M. Borel, qui est la base de la plus grande partie de notre travail.

Soient deux séries de n fonctions entières $G_1(z)$, $G_2(z)$, ..., $G_n(z)$; $H_1(z)$, $H_2(z)$, ..., $H_n(z)$, et supposons que le module maximum des $G_i(z)$ pour $(z) = r$ croît moins vite que $e^{\mu(r)}$, tandis que le module maximum des différences $H_i(z) - H_k(z)$ croît plus vite que $[\mu(r)]^{1+\alpha}$, $\mu(r)$ désignant une fonction croissante quelconque et α un nombre positif, aussi petit que l'on voudra, mais fini.

Le théorème de M. Borel consiste en ce que l'identité

$$G_1(z)\,e^{H_1(z)} + G_2(z)\,e^{H_2(z)} + \ldots + G_n(z)\,e^{H_n(z)} = 0$$

entraîne nécessairement

$$G_1(z) = 0, \qquad G_2(z) = 0, \qquad \ldots, \qquad G_n(z) = 0.$$

Dans sa démonstration, M. Borel distingue deux cas. Le premier cas s'applique toutes les fois où les différences $H_i - H_k$ n'ont pas des ordres de croissance très différents; dans ce cas, la démonstration est plus simple. Nous verrons que c'est le cas qui nous intéresse ici, puisque dans toutes les identités de M. Borel, que nous allons rencontrer dans ce travail, les $H_i(z) - H_k(z)$ croissent de la même façon; j'entends par là que, si $e^{M_1(r)}$ et $e^{M_2(r)}$ désignent le module maximum de

(¹) Il y a aussi d'autres travaux plus récents, que je citerai au cours du travail.

deux fonctions $H_i - H_k$, on a

$$e^{[M_2(r)]^{1-\varepsilon}} < e^{M_1(r)} < e^{[M_2(r)]^{1+\varepsilon}},$$

aussi petit que soit ε, à partir d'une certaine valeur de r.

On se trouve dans le second cas, lorsque l'une des différences $H_i(z) - H_k(z)$ croît plus vite que toute puissance des autres (1).

4. J'ai été amené à entreprendre ces recherches par suite d'une remarque faite par M. Painlevé dans son cours à l'École normale sur les fonctions abéliennes (année 1902-1903), auquel j'avais l'honneur d'assister. M. Painlevé a énoncé comme vraisemblable la proposition suivante :

Une fonction ayant ν branches dans le voisinage d'un point singulier essentiel isolé (on entend par là qu'il n'y a pas d'autres singularités essentielles dans un cercle assez petit décrit autour de ce point $z = \alpha$) prend dans le voisinage de ce point toutes les valeurs, sauf 2ν au plus.

Il a même ajouté que parmi les deux voies qui pourraient nous y conduire : la voie de M. Picard et la voie de M. Borel, c'est la première qui est plus aisée. Suivant cette indication de mon maître, j'ai commencé par la voie de M. Picard, mais, les résultats n'étant pas satisfaisants, j'ai dû entrer dans la voie de M. Borel, ce qui devait réussir.

Je suis heureux de pouvoir ici rendre publiquement témoignage de la profonde reconnaissance que je dois à la France, à ses savants, à la science desquels j'ai eu l'honneur de puiser.

Si j'ai pu accomplir jusqu'au bout la tâche que je me suis proposée, c'est surtout grâce à l'*École Normale supérieure* qui m'a fourni une excellente hospitalité et ses avantages scientifiques bien connus.

J'adresse ici mes remercîments respectueux au directeur de l'École, M. Perrot, dont le philhellénisme a développé une sollicitude constante à l'égard des élèves hellènes de l'École; au directeur de la Section scientifique, M. Jules Tannery, et à tous mes maîtres de l'École.

En particulier, j'adresse mes vifs remercîments à MM. P. Painlevé et Émile Borel pour leurs conseils et pour l'accueil excellent qu'ils ont bien voulu faire à mes recherches.

---

(1) Il est, d'ailleurs aisé de voir que ce cas se laisse ramener immédiatement au précédent par la décomposition de l'identité en plusieurs autres appartenant au premier cas.

PREMIÈRE PARTIE.

CHAPITRE I.

EXTENSION DU THÉORÈME DE M. PICARD AUX FONCTIONS A UN NOMBRE FINI DE BRANCHES.

1. Une fonction u de z, ayant un nombre ν de branches, satisfait à une équation de la forme

$$(1)\qquad f(z, u) = u^\nu + A_1(z)\,u^{\nu-1} + A_2(z)\,u^{\nu-2} + \ldots + A_{\nu-1}(z)\,u + A_\nu(z) = 0,$$

où $A_1(z)$, $A_2(z)$, $\ldots$, $A_\nu(z)$ désignent des fonctions entières ou méromorphes de z.

Suivant une expression déjà employée (*voir,* par exemple, les *Leçons de M. Borel sur les fonctions entières et méromorphes*) appelons [1] *valeur exceptionnelle* de la fonction $u = \varphi(z)$ à ν branches, définie par l'équation (1), toute valeur $u = u_1$ telle que l'équation

$$\varphi(z) = u_1$$

n'admette qu'un nombre fini de racines; il est clair que, alors, il en est de même de l'équation

$$f(z, u_1) = 0.$$

Nous allons démontrer ici que le nombre de ces valeurs est *fini* et jamais supérieur à 2ν.

2. Nous nous bornerons d'abord à un cas particulier où la démonstration est très élémentaire, c'est celui où l'*ordre* (ou le genre) des $A_1(z)$, $\ldots$, $A_\nu(z)$ est

---

(1) D'une façon plus précise nous démontrerons qu'une telle valeur de u doit être considérée comme exceptionnelle.

fini. Nous adoptons la définition bien naturelle donnée par M. Borel pour l'*ordre* d'une fonction méromorphe [1].

Nous appelons, avec M. Borel, *ordre* d'une fonction méromorphe $\frac{G_1(z)}{G_2(z)}$ le plus grand des ordres de $G_1(z)$ et $G_2(z)$, et nous démontrons aisément que l'ordre ainsi défini reste invariable par les substitutions de la forme

$$\left[f(z), \frac{M_1 f(z) + N_1}{M_2 f(z) + N_2}\right], \qquad f(z) = \frac{G_1(z)}{G_2(z)},$$

où M_1, N_1, M_2, N_2 désignent des fonctions entières d'ordre inférieur.

M. Borel, par la considération de l'ensemble de telles transformées d'une fonction méromorphe, a présenté le théorème de M. Picard (étendu aux fonctions méromorphes) sous une forme bien élégante (Mémoire cité, *Annales de l'École normale,* 1901), ainsi que ses généralisations.

Nous pensons qu'il est bien commode d'appeler *transcendantes algébroïdes à ν branches d'ordre* ρ toutes les fonctions $u(z)$ définies par une équation de la forme (1), ρ étant le plus grand des *ordres* des coefficients $A(z)$. En admettant cette définition, il est facile de prouver que l'ordre ainsi défini reste invariable lorsqu'on effectue sur u une transformation homographique. Si nous posons, en effet,

$$u = \frac{\alpha w + \beta}{\gamma w + \delta}, \qquad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0,$$

$w(z)$ vérifiera une équation de la forme

$$w^\nu + a_1(z)\, w^{\nu-1} + a_2(z)\, w^{\nu-2} + \ldots + a_{\nu-1}(z)\, w + a_\nu(z) = 0,$$

où les $a_i(z)$ sont des expressions linéaires des $A_i(z)$ très faciles à obtenir. Les deux termes des fonctions méromorphes $a_i(z)$ sont au plus d'*ordre* ρ et, par conséquent, la transformation homographique n'a pas élevé l'ordre. Elle ne peut non plus l'abaisser, car alors la transformation inverse, qui est de même nature, l'élèverait.

La propriété d'invariance subsiste si l'on suppose que α, β, γ, δ désignent, au lieu des constantes, des fonctions entières d'*ordre* inférieur à ρ.

3. Après cette digression, revenons à notre sujet.

Nous remarquons d'abord que nous pouvons nous borner, sans restreindre la généralité de la question, au cas où les $A_i(z)$ sont toutes des fonctions entières,

---

(1) Voir *Contribution à l'étude des fonctions méromorphes* (*Annales de l'École normale,* 1901) et ses *Leçons sur les fonctions méromorphes.*

car une valeur exceptionnelle (u_0) nous suffit pour ramener à ce cas le cas contraire, en faisant la transformation

$$u - u_0 = \frac{1}{w} \quad (^1).$$

Plaçons-nous donc dans ce cas et remarquons que l'infini et toutes les valeurs de u, pour lesquelles $f(z, u)$ est une constante ou un polynome, sont bien des *valeurs exceptionnelles*. Ces valeurs, quand elles existent, se calculent algébriquement, parce qu'elles ne dépendent pas du tout de la nature des transcendantes qui figurent dans l'équation (1). Il est donc tout naturel de les distinguer des autres, qui sont pour ainsi dire *intrinsèques*. Les premières pourraient être appelées *formelles*.

Nous appellerons (E) l'ensemble des valeurs de u pour lesquelles $f(z, u)$ soit une constante ou un polynome et nous démontrerons que le nombre de toutes les autres valeurs exceptionnelles ne dépasse jamais le nombre ν, lorsque toutes les $A_i(z)$ ne sont pas des polynomes.

Soient, en effet, $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_\nu$, $\nu + 1$ telles valeurs : on aura

$$(2) \qquad \begin{cases} f(z, u_0) = P_0(z)\, e^{Q_0(z)}, \\ f(z, u_1) = P_1(z)\, e^{Q_1(z)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f(z, u_\nu) = P_\nu(z)\, e^{Q_\nu(z)}, \end{cases}$$

$Q_0(z), Q_1(z), \ldots, Q_\nu(z)$ et $P_0(z), P_1(z), \ldots, P_\nu(z)$ désignant des polynomes, les premiers de degré au plus égal à ρ.

En éliminant $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ entre ces $\nu + 1$ équations (ce qui est toujours possible), on arrivera à la relation

$$(3) \qquad \alpha_0 P_0(z)\, e^{Q_0(z)} + \alpha_1 P_1(z)\, e^{Q_1(z)} + \ldots + \alpha_\nu P_\nu(z)\, e^{Q_\nu(z)} = \alpha,$$

où l'on a

$$\alpha_i = \begin{vmatrix} 1 & u_0 & u_0^2 & \ldots & u_0^{\nu-1} \\ 1 & u_1 & u_1^2 & \ldots & u_1^{\nu-1} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdots & \cdots \\ 1 & u_{i-1} & u_{i-1}^2 & \ldots & u_{i-1}^{\nu-1} \\ 1 & u_{i+1} & u_{i+1}^2 & \ldots & u_{i+1}^{\nu-1} \\ \cdot & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & u_\nu & u_\nu^2 & \ldots & u_\nu^{\nu-1} \end{vmatrix}, \qquad \alpha = \begin{vmatrix} 1 & u_0 & u_0^2 & \ldots & u_0^\nu \\ 1 & u_1 & u_1^2 & \ldots & u_1^\nu \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdots & \cdot\cdot \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdots & \cdot\cdot \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdots & \cdot\cdot \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdots & \cdot\cdot \\ 1 & u_\nu & u_\nu^2 & \ldots & u_\nu^\nu \end{vmatrix}.$$

---

(1) Après cette transformation, les coefficients n'auront pas des pôles dans le domaine de l'infini; pour qu'ils deviennent des fonctions entières proprement dites, il faut faire encore la

Nous distinguons deux cas :

1° Aucun des polynomes $Q(z)$ n'est une constante; alors, quelle que soit la réduction qui puisse avoir lieu dans les termes du premier membre de (3), le terme algébrique (qui n'a pas d'exponentielle) sera toujours égal à α, quantité essentiellement différente de zéro. Quant à la réduction dont je viens de parler, elle arrive dans le cas où il y a des exponentielles dont le rapport est un polynome; cela est évidemment impossible lorsque les fonctions $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ sont linéairement distinctes, j'entends par là qu'il n'y a entre elles aucune relation linéaire à coefficients polynomes.

2° Il y a des polynomes $Q(z)$ qui sont des constantes; il est clair que cela ne se présentera pas, puisque aucune des valeurs $u_0, u_1, \ldots, u_\nu$ n'appartient, par hypothèse, à l'ensemble (E).

On arrive donc, dans tous les cas, à une relation de la forme

$$(4)\quad q_0(z)e^{Q_0(z)}+q_1(z)e^{Q_1(z)}+q_2(z)e^{Q_2(z)}+\ldots+q_n(z)e^{Q_n(z)}=q(z)\qquad (n\leqq\nu),$$

les $q_i(z)$ et $Q_i(z)$ étant des polynomes, dans laquelle $q(z)$ n'est pas identiquement nul. Une telle relation est impossible; son impossibilité est un cas particulier de la *proposition fondamentale de M. Borel* et se démontre par une voie élémentaire, sans qu'on ait à faire usage de la théorie générale des fonctions croissantes.

L'impossibilité en question est évidente dans le cas de $n=0$; pour la démontrer en général, il nous suffit donc de montrer que l'identité (4) entraîne une identité analogue ayant un terme de moins et dont les coefficients (ainsi que le second membre) ne peuvent être nuls que si ceux de l'identité (4) le sont. Pour montrer cela, il suffit de diviser les deux membres par $q(z)$ et prendre la dérivée du premier membre ainsi obtenu. On aura

$$(5)\quad \left[\left(\frac{q_0}{q}\right)'+\frac{q_0}{q}Q'_0\right]e^{Q_0-Q_n}+\left[\left(\frac{q_1}{q}\right)'+\frac{q_1}{q}Q'_1\right]e^{Q_1-Q_n}+\ldots+\left[\left(\frac{q_n}{q}\right)'+\frac{q_n}{q}Q'_n\right]=0.$$

Or, l'identité

$$\left(\frac{q_0}{q}\right)'+\frac{q_0}{q}Q'_0=0$$

entraîne

$$\frac{q_0}{q}=Ce^{-Q_0}\qquad (C=\text{const.}),$$

ce qui est évidemment impossible si q_0 et q ne sont pas identiquement nuls.

---

transformation $w=\dfrac{\omega}{E(z)}$, $E(z)$ désignant un polynome. Mais cette dernière transformation n'est pas tout à fait nécessaire; on pourrait bien s'en dispenser et alors les $P_i(z)$ des formules (2) désigneraient des fonctions rationnelles au lieu de polynomes.

Ainsi, l'identité (4) entraîne

$$q_0 = q_1 = \ldots = q_n = q = 0,$$

ce qui n'est pas, et, par conséquent, notre théorème est bien démontré.

4. Des raisonnements analogues nous permettent d'établir l'impossibilité de (4), dans le cas où les $Q_i(z)$ sont des fonctions entières de genre (ou d'ordre) fini. Il suffit d'appliquer la propriété bien connue d'une fonction $Q(z)$ d'ordre fini ρ, d'après laquelle, quel que soit ε donné à l'avance, il existe un nombre R tel que l'inégalité

$$r > R$$

entraîne

$$|Q(z)| < e^{r^{\rho+\varepsilon}},$$

tandis que l'inégalité

$$M(r) > e^{r^{\rho-\varepsilon}}$$

est vérifiée pour une infinité de valeurs de r croissant indéfiniment. Aussi le théorème de M. Hadamard (¹) exprimé par l'inégalité

$$|Q(z)| > e^{-r^{\rho+\varepsilon}},$$

vérifiée sur une infinité de cercles de rayons indéfiniment croissants.

En effet, dans l'identité (5), le module des coefficients, à partir d'une certaine valeur de r, sera plus petit que $e^{r^{\rho+\varepsilon}}$, tandis que les exponentielles $e^{Q_i(z)}$ croissent aussi vite que $e^{e^{r^\rho}}$; d'une façon plus précise, on peut trouver une infinité de valeurs de r, remplissant des intervalles d'étendue assez grande, telles que le module maximum de toutes les exponentielles en question soit supérieur à $e^{e^{r^{\rho-\varepsilon}}}$, ε étant une quantité assez petite (²).

Si l'on effectue, sur l'identité (5), les mêmes opérations que sur (4), on arrivera à une autre de la même nature, et ainsi de suite. Supposons donc que l'on ait démontré que l'inégalité (5) entraîne la nullité de tous les coefficients; il en résultera encore de la même façon que ceux de l'identité (4) seront aussi nuls.

Cela posé, on voit immédiatement que notre théorème s'étend à une classe de transcendantes algébroïdes d'ordre infini; ce sont celles pour lesquelles les coefficients $A_i(z)$ de l'équation (1) vérifient, à partir d'une certaine valeur de r,

---

(¹) Complété par M. Borel dans son Mémoire déjà cité des *Acta mathematica*, t. XX.

(²) Nous avons, par conséquent, une identité qui réalise bien les conditions exigées par le théorème fondamental de M. Borel.

l'inégalité [1]

$$|A_i(z)| < e^{e^{r^{\rho+\varepsilon}}},$$

ε étant assez petit.

5. On peut donner à notre théorème des généralisations analogues à celles que M. Borel a données pour les fonctions entières ou méromorphes, en indiquant ainsi la relation qui existe entre l'ordre de la transcendante algébroïde considérée $u = \varphi(z)$ et l'exposant de convergence de la suite des zéros de l'équation

$$\varphi(z) = a, \tag{6}$$

où a n'est pas une valeur exceptionnelle.

Ainsi, *il n'y a pas plus de* 2ν *valeurs de* u, *pour lesquelles l'ordre réel de* $f(z, u)$ *soit inférieur au plus grand des ordres apparents des* $A_i(z)$ [c'est-à-dire à l'ordre de $u = \varphi(z)$, conformément à notre définition]. Ou encore : *L'exposant de convergence de la suite des zéros de l'équation* (6) *ne saurait être inférieur à l'ordre de la transcendante algébroïde* $u = \varphi(z)$ *pour plus de* 2ν *valeurs de la constante* a.

En effet, si j'appelle (E_1) l'ensemble des valeurs de u pour lesquelles $f(z, u)$ ait un ordre apparent inférieur à celui de $u = \varphi(z)$, je peux démontrer que le nombre des valeurs exceptionnelles, qui n'appartiennent pas à (E_1), est inférieur à $\nu + 1$. Nous serons encore ramenés à un cas particulier de la proposition fondamentale de M. Borel, celui où les $H_i - H_k$ sont des polynomes de degré ρ, tandis que les coefficients $G(z)$ sont des fonctions entières d'ordre inférieur à ρ (j'emploie les notations de M. Borel, *voir* l'Introduction).

Par suite, le théorème précité est établi, en tenant compte du fait que le nombre des (E_1) est au plus égal à ν, l'infini compris.

De même, *la densité des racines de l'équation*

$$\varphi(z) = Q(z), \tag{7}$$

$Q(z)$ *étant une fonction entière d'ordre inférieur à* ρ, *est conforme à l'ordre de* $u = \varphi(z)$; *il peut y avoir des équations exceptionnelles* (7), *mais leur nombre ne dépasse jamais* 2ν.

Je n'insiste pas sur la démonstration, qui se fait toujours par la méthode de l'élimination; on arrivera encore à une identité de la forme (3), dans laquelle les $p_i(z)$ ne sont plus des polynomes, mais des produits canoniques de facteurs

---

(1) *Cf.* MAILLET, *Sur les fonctions monodromes ou à* ν *branches* (*Comptes rendus*, 11 mai 1903).

primaires d'ordre inférieur à ρ, et il en est de même des $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_\nu$, α, qui ne sont plus des constantes. On aura

$$\alpha = \begin{vmatrix} 1 & Q_0(z) & \ldots & [Q_0(z)]^\nu \\ 1 & Q_1(z) & \ldots & [Q_1(z)]^\nu \\ \cdot & \cdots\cdots & \ldots & \cdots\cdots\cdots \\ 1 & Q_\nu(z) & \ldots & [Q_\nu(z)]^\nu \end{vmatrix},$$

expression qui ne peut être identiquement nulle, lorsque les fonctions entières Q_0, $Q_1, \ldots, Q_\nu$ sont distinctes.

6. M. Borel a établi sa *proposition fondamentale* en s'appuyant sur les propriétés suivantes des fonctions entières :

1° Les plus grandes valeurs et l'inverse des plus petites du module d'une fonction entière $G(z)$, pour $|z| = r$ assez grand, sont du même ordre de grandeur.

2° La dérivée $G'(z)$ d'une fonction entière croît comme la fonction elle-même; d'une façon plus précise, si $\mu(r)$ et $\mu_1(r)$ désignent les ordres de grandeur de $G(z)$ et $G'(z)$, les inégalités

$$[\mu(r)]^{1-\alpha} < \mu_1(r) < [\mu(r)]^{1+\alpha} \tag{8}$$

(α un nombre positif quelconque) sont vérifiées sur une infinité de cercles, dont les rayons remplissent des intervalles d'étendue totale assez grande; tels, par exemple, que ceux d'entre eux qui sont compris dans un intervalle donné, dépassent par leur étendue une fraction déterminée de cet intervalle.

Jusqu'ici nous n'avons utilisé que des cas particuliers de la proposition de M. Borel, où les $G^{(z)}$ et $H_i - H_k$ étaient des polynomes ou des fonctions entières d'ordre fini. Grâce à son théorème général, toutes les propositions que nous avons établies s'étendent au cas le plus général d'une transcendante algébroïde quelconque d'ordre fini ou *infini*.

Il en découle aussi le théorème suivant, qui comprend comme cas particuliers tous les précédents.

Théorème I. — *u_i étant une certaine valeur de u, posons*

$$f(z, u_i) = Q_i(z)\, e^{H(z)}. \tag{9}$$

Si les modules de l'un au moins des coefficients $A_1(z), A_2(z), \ldots, A_\nu(z)$ *sont supérieurs à la fonction croissante* $e^{\mu(r)}$, *il n'y a pas plus de* 2ν *valeurs de u, pour lesquelles* $Q_i(z)$ *croisse moins vite que* $e^{[\mu(r)]^{\frac{1}{2}}}$ *ou plus généralement* $e^{\mu(r)^{1-\alpha}}$, *α étant une quantité positive quelconque.*

Ici l'ensemble (E) est formé de toutes les valeurs de u, pour lesquelles $f(z, u)$

n'ait pas la propriété de croître plus vite que $e^{\mu(r)}$, et dont le nombre est au plus égal à ν, l'infini compris.

Je tiens à signaler le cas simple, qui nous intéresse surtout, et qui s'énonce de la façon suivante :

Théorème II. — *Une transcendante algébroïde quelconque à ν branches prend dans le domaine de l'infini (qui est le point essentiel) toutes les valeurs, sauf, peut-être, 2ν au plus. Si le nombre de ces valeurs exceptionnelles est supérieur à 2ν, la fonction n'est pas transcendante, elle est algébrique.*

Faisons quelques remarques au sujet de ce théorème, qui d'ailleurs s'étendraient à ses généralisations.

1° Lorsqu'il n'y a aucune relation linéaire à coefficients constants ou polynomes entre les $A_1(z)$, $A_2(z)$, ..., $A_\nu(z)$, il n'y a aucune valeur finie (E) et par conséquent le nombre des valeurs exceptionnelles finies est inférieur à $\nu+1$.

2° Lorsque le nombre de ces valeurs atteint son maximum, les coefficients A_1, A_2, ..., A_ν de $f(z, u)$ se caractérisent par le fait qu'ils n'admettent aucune valeur exceptionnelle. Si un au moins d'entre eux est de la forme $a+p(z)e^{H(z)}$, où a est une constante et $p(z)$ un polynome, le nombre des valeurs exceptionnelles de $u=\varphi(z)$ est inférieur à ν. Cela tient à ce que, lorsque N [1] atteint son maximum ν, les coefficients sont des sommes d'exponentielles multipliées par des polynomes.

3° Envisageons l'équation

$$u^\nu + x_1 u^{\nu-1} + x_2 u^{\nu-2} + \ldots + x_{\nu-1} u + x_\nu = 0 \tag{10}$$

où u est considéré comme un paramètre. Désignons par C le continuum formé par tous les systèmes de valeurs des x_1, x_2, ..., x_ν qui satisfont à cette équation et appelons *point du continuum* un tel système de valeurs. Ainsi l'équation (10) représente une famille de continuums G.

Donnons-nous maintenant ν fonctions entières quelconques $A_1(z)$, $A_2(z)$, ..., $A_\nu(z)$. Le théorème II peut s'énoncer sous la forme suivante utile dans plusieurs circonstances.

Théorème III. — *Chaque continuum C de la famille considérée (à chaque valeur de u correspond un tel continuum) possède un point, au moins,*

$$x_1 = x_1^0, \qquad x_2 = x_2^0, \qquad \ldots, \qquad x_\nu = x_\nu^0$$

---

(1) Pour abréger, j'appellerai toujours N le nombre des valeurs exceptionnelles de la fonction $u=\varphi(z)$, autres que (E).

tel que les équations

$$A_1(z) = x_1^0, \quad A_2(z) = x_2^0, \quad \ldots, \quad A_\nu(z) = x_\nu^0$$

admettent une, au moins, racine commune, et même ces points doivent être tels que le nombre total des racines communes de ces ν *équations soit infini. Il peut y avoir exception pour* ν, *au plus, continuums* C *de la famille. Il est évident que je ne tiens pas compte ici des valeurs de* u, *auxquelles ne correspond aucun continuum; ce sont les valeurs* (E).

7. Je me propose maintenant de montrer comment l'application de la *proposition fondamentale* de M. Borel, prise dans toute sa généralité, nous permet de préciser les théorèmes, que nous avons établis dans les numéros précédents, et d'abaisser la limite supérieure de N, que nous avons déterminée jusqu'ici. Je vais considérer une série de cas bien didactiques.

1° Supposons que dans l'équation (1) tous les coefficients $A_i(z)$ soient des polynomes, sauf $A_\rho(z)$; alors N [1] est nécessairement inférieur à 2. Pour voir cela, il suffit d'éliminer $A_\rho(z)$ seulement, entre les équations

$$\begin{aligned} f(z, u_1) &= p_1(z)\, e^{H_1(z)} \\ f(z, u_2) &= p_2(z)\, e^{H_2(z)} \end{aligned} \qquad (\rho \neq \nu);$$

on aura

$$u_2^\rho\, p_1(z)\, e^{H_1(z)} - u_1^\rho\, p_2(z)\, e^{H_2(z)} = q(z)$$

$q(z)$ étant un polynome. Cette identité entraîne $u_1 = u_2 = 0$.

2° Supposons encore que $A_\rho(z)$ soit d'ordre supérieur aux autres $A_i(z)$, mais que tous ces coefficients $A_1(z), A_2(z), \ldots, A_\nu(z)$ sont des transcendantes distinctes (linéairement). Alors il n'y a pas des valeurs équivalentes, ni des valeurs (E), et la méthode que je viens de citer nous permet d'affirmer que le nombre des valeurs exceptionnelles finies est inférieur à 2.

3° D'une façon générale, si $A_{k_1}(z), A_{k_2}(z), \ldots, A_{k_\sigma}(z)$ $(\sigma \leqq r)$ sont d'ordre supérieur à tous les autres coefficients, on peut affirmer que N est inférieur au plus grand des nombres $\sigma + 1$ et $K_\sigma - K_1 + 3$. S'il y en a davantage, c'est que toutes les valeurs exceptionnelles autres que (E) sont équivalentes.

La démonstration est facile; il suffit d'éliminer $A_{k_1}(z), A_{k_2}(z), \ldots, A_{k_\sigma}(z)$ entre

---

[1] Ici je ne considère pas comme distinctes deux valeurs de u, u_1 et u_2 pour lesquelles le rapport $\dfrac{f(z, u_1)}{f(z, u_2)}$ est une constante; j'appelle *équivalentes* deux telles valeurs de u, car, lorsque l'une est exceptionnelle, l'autre l'est aussi.

les $\sigma + 1$ équations

$$\begin{aligned} f(z, u_1) &= p_1\ (z)\, e^{H_1(z)}, \\ f(z, u_2) &= p_2\ (z)\, e^{H_2(z)}, \\ &\dots\dots\dots, \\ f(z, u_{\sigma+1}) &= p_{\sigma+1}(z)\, e^{H_{\sigma+1}(z)}. \end{aligned}$$

On arrivera à une équation de la forme

$$\lambda_1 p_1(z)\, e^{H_1(z)} + \lambda_2 p_2(z)\, e^{H_2(z)} + \ldots + \lambda_{\sigma+1} p_{\sigma+1}(z)\, e^{H_{\sigma+1}(z)} = G(z),$$

où $G(z)$ est une fonction entière d'ordre inférieur à celui des exponentielles, et λ_1 (par exemple) est égal à l'expression suivante :

$$\begin{vmatrix} u_2^{\nu-k_1} & u_2^{\nu-k_2} & \ldots & u_2^{\nu-k_\sigma} \\ u_3^{\nu-k_1} & u_3^{\nu-k_2} & \ldots & u_3^{\nu-k_\sigma} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{\sigma+1}^{\nu-k_1} & u_{\sigma+1}^{\nu-k_2} & \ldots & u_{\sigma+1}^{\nu-k_\sigma} \end{vmatrix} = u_2^{\nu-k_\sigma} u_3^{\nu-k_\sigma} \ldots u_{\sigma+1}^{\nu-k_\sigma} \begin{vmatrix} u_2^{k_\sigma-k_1} & u_2^{k_\sigma-k_2} & \ldots & 1 \\ u_3^{k_\sigma-k_1} & u_3^{k_\sigma-k_2} & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{\sigma+1}^{k_\sigma-k_1} & u_{\sigma+1}^{k_\sigma-k_2} & \ldots & u_{\sigma+1} \end{vmatrix}.$$

J'ai supposé

$$k_1 < k_2 < k_3 < \ldots < k_\sigma.$$

Si les valeurs $u_1, u_2, \ldots, u_\sigma, u_{\sigma+1}$ ne sont pas toutes équivalentes (¹), après toutes les réductions possibles du premier membre, il y aura un terme dont le coefficient est tout à fait étranger à $f(z, u_{\sigma+1})$. Par suite, l'annulation de ce coefficient (d'après le théorème de M. Borel) entraînera au moins une équation algébrique

$$a(u_{\sigma+1}) = 0$$

de degré $K_\sigma - K_1$ (²) au plus et dont les coefficients ne dépendent que de u_1, $u_2, \ldots, u_\sigma$. On en conclut immédiatement la proposition ci-dessus énoncée.

4° De même, dans le cas où la transcendante algébroïde est de genre infini, les mêmes raisonnements nous montrent que les valeurs exceptionnelles dépendent surtout des termes qui sont d'ordre de grandeur notablement supérieur à celui des autres. Ainsi, si les coefficients $A_{k_1}, A_{k_2}, \ldots, A_{k_\sigma}$ croissent plus vite que $e^{[\mu(r)]^{1+\alpha}}$, tandis que tous les autres croissent moins vite que $e^{\mu(r)}$, le théorème précité subsiste et N est au plus égal au plus grand des nombres σ et $k_\sigma - k_1 + 2$, sauf le cas où toutes les valeurs exceptionnelles sont équivalentes.

(¹) J'entends par là que parmi ces valeurs il y en a une, u_0 par exemple, qui n'est équivalente à aucune des autres.

(²) Après la suppression de la racine $u_{\sigma+1} = 0$ multiple d'ordre $\nu - K_1$.

On voit que l'abaissement de la limite supérieure de N, donnée par le théorème général, est possible dans le cas très étendu où existe une petite différence entre les ordres de grandeur des coefficients $A_i(z)$.

En terminant ces considérations, faisons remarquer que cette méthode est très utile dans la pratique, et peut nous fournir, dans des exemples particuliers, des résultats plus complets au point de vue du nombre et de la nature des valeurs exceptionnelles.

Exemple. — Soit l'équation

$$u^2 + e^{z^2} u + \sin z = 0.$$

Des valeurs (E) n'existent pas, ainsi que des équivalentes; N est au plus égal à 1 et il n'y a qu'une valeur exceptionnelle possible, c'est zéro; mais on voit immédiatement qu'elle ne l'est pas. Elle sera exceptionnelle, si l'on fait usage du sens large du mot, en remarquant que l'ordre de $\sin z$ est inférieur à l'ordre de e^{z^2}.

8. Dans le n° 2, nous avons appelé ordre de $u = \varphi(z)$ le plus grand des ordres des coefficients $A_i(z)$.

Cette définition est justifiée aussi par le fait que l'une, au moins, des branches d'une transcendante algébroïde d'ordre ρ croît comme une fonction entière du même ordre.

Supposons, en effet, que les branches de $u = \varphi(z)$ croissent comme $e^{r^{\rho'}}$. Si ρ' était plus grand que ρ, le premier membre de l'équation

$$A_\nu(z) = - u A_{\nu-1}(z) - u^2 A_{\nu-2}(z) - \ldots - u^\nu$$

croîtrait moins vite que le second.

Si, au contraire, ρ' était plus petit que ρ pour toutes les branches, il en serait de même de deux membres de l'équation

$$u^\nu = -[u^{\nu-1} A_1(z) + u^{\nu-2} A_2(z) + \ldots + u A_{\nu-1}(z) + A_\nu(z)];$$

donc

$$\rho' = \rho \quad (^1),$$

cette égalité étant vraie pour une, au moins, des branches.

---

(1) D'une façon plus précise, ρ' ne sera pas inférieur à ρ pour toutes les branches de la fonction multiforme; car, s'il en était ainsi, tous les coefficients $A_i(z)$ seraient d'ordre inférieur à ρ, ce qui est contraire à notre hypothèse.

CHAPITRE II.

EXTENSION DU THÉORÈME DE M. PICARD AUX FONCTIONS A ν BRANCHES DANS LE VOISINAGE D'UN POINT SINGULIER ESSENTIEL.

---

1. Soit $F(z)$ une fonction uniforme dans le voisinage d'un point singulier essentiel isolé $z=\alpha$. D'après le théorème de M. Picard, $F(z)$ prend dans le voisinage de $z=\alpha$ toutes les valeurs, sauf, peut-être, *deux* au plus, d'une façon précise; étant donné un cercle C de centre α, aussi petit que l'on voudra, il existe à son intérieur une infinité de racines de l'équation

$$F(z)=a,$$

quel que soit le nombre a; il peut y avoir exception pour deux, au plus, valeurs de a, que l'on appelle *exceptionnelles*.

Si l'∞ est une telle valeur, c'est-à-dire si $F(z)$ n'a pas des pôles dans le voisinage de $z=\alpha$, le théorème de Laurent nous donne le développement suivant de $F(z)$

$$F(z)=S(z)+\varphi\left(\frac{1}{z-\alpha}\right), \tag{11}$$

$$S(z)=b_0+b_1(z-\alpha)+b_2(z-\alpha)^2+\ldots+b_n(z-\alpha)^n+\ldots,$$

$$\varphi\left(\frac{1}{z-\alpha}\right)=\frac{a_0}{z-\alpha}+\frac{a_1}{(z-\alpha)^2}+\ldots+\frac{a_n}{(z-\alpha)^2}+\ldots.$$

La série $\varphi(\zeta)$ a un rayon de convergence infini et représente une fonction entière, tandis que la série $S(z)$ ne converge en général qu'à l'intérieur d'un certain cercle décrit du point $z=\alpha$ comme centre. C'est M. Hadamard [1] qui a fait, le premier, la remarque capitale que, lorsque z s'approche de α, le module maximum de $F(z)$ croît comme la fonction entière $\varphi(\zeta)$, lorsque le module de ζ croît indéfiniment. On s'en rend compte par l'équation (11) où $S(z)$ tend vers une valeur déterminée b_0, lorsque le module de $z-\alpha$ tend vers zéro.

La transformation $z-\alpha=\frac{1}{Z}$ nous permet de nous borner au cas où le point essentiel en question est à l'infini.

M. Ed. Maillet a développé et complété ce principe dans sa Note intéressante

---

(1) *Sur les fonctions entières* (*Comptes rendus*, 1896).

déjà citée : *Sur les fonctions monodromes à point singulier essentiel isolé* (*Bull. de la Société mathématique,* 1902, fasc. I). Cette théorie, qui lui a permis de donner une démonstration directe du théorème de M. Picard, nous permettra aussi d'étendre les théorèmes du Chapitre précédent au voisinage d'un point essentiel.

Le lemme suivant sera fondamental pour notre but.

Lemme. — *Toute fonction* $F(z)$ *uniforme dans le domaine de l'infini* (*qui est pour elle un point isolé*) *peut se mettre sous la forme*

$$F(z) = z^{\mu} G(z) e^{F_1(z)} = Q(z) e^{F_1(z)} = \frac{1}{z^{K}} E(z) e^{\psi\left(\frac{1}{z}\right)},$$

où μ est un entier positif ou négatif, $G(z)$ une fonction entière $F_1(z)$ une fonction de même nature que $F(z)$, K un entier positif ou nul, $E(z)$ une fonction entière et $\psi\left(\frac{1}{z}\right)$ régulière dans le domaine de l'∞.

$F(z)$ croît comme la fonction entière $E(z)$.

On dira que $F(z)$ est d'ordre fini ou infini, suivant qu'il en est ainsi de $E(z)$. (*Voir*, pour tout cela, la Note plus haut citée de M. Maillet.)

2. Cela posé, envisageons une identité telle que

$$G_1(z) e^{H_1(z)} + G_2(z) e^{H_2(z)} + \ldots + G_n(z) e^{H_n(z)} = 0, \tag{12}$$

où les $H_i(z)$ désignent des fonctions entières ou bien des fonctions uniformes dans le domaine de l'infini, étant une singularité essentielle isolée (M. Maillet les appelle *quasi entières à l'∞*) et d'ordre de grandeur supérieur à $[\mu(r)]^2$, tandis que les $G_i(z)$ désignent des fonctions aussi quasi entières à l'infini mais croissant moins vite que $e^{\mu(r)}$ (du moins dans une série d'intervalles d'étendue assez grande).

Des raisonnements tout à fait analogues à ceux de M. Borel nous permettent d'établir l'impossibilité d'une telle identité. (*Voir,* à ce sujet, une note en bas des pages 14 et 15 du travail susdit de M. Maillet.)

Dès lors, tous les théorèmes et toutes nos considérations du Chapitre précédent s'étendent immédiatement aux fonctions ayant ν branches dans le voisinage d'un point singulier essentiel, que nous pouvons appeler *transcendantes algébroïdes dans le voisinage d'un point singulier essentiel,* parce que la même méthode de l'élimination nous ramène à prouver l'impossibilité d'une identité, telle que (12).

Nous pouvons toujours envoyer à l'infini le point essentiel $z = \alpha$ par la transformation $z - \alpha = \frac{1}{Z}$.

Les transcendantes définies par l'équation (1), où les $A_i(z)$ désignent des fonctions *quasi entières* ou *quasi méromorphes* [1] (d'après la terminologie de M. Maillet) ne sont qu'un cas particulier de celles que nous venons de traiter et, par conséquent, il est inutile d'en faire une étude spéciale.

Ce sont les fonctions uniformes dans tout le plan qui possèdent un nombre fini de points essentiels. Elles sont de la forme

$$F(z) = \varphi_1\left(\frac{1}{z-\alpha_1}\right) + \varphi_2\left(\frac{1}{z-\alpha_2}\right) + \ldots + \varphi_n\left(\frac{1}{z-\alpha_n}\right),$$

et le lemme cité dans le n° 1 s'exprime par l'identité remarquable

$$\begin{aligned} F(z) &= \varphi_1\left(\frac{1}{z-\alpha_1}\right) + \varphi_2\left(\frac{1}{z-\alpha_2}\right) + \ldots + \varphi_n\left(\frac{1}{z-\alpha_n}\right) \\ &= \psi_1\left(\frac{1}{z-\alpha_1}\right) \psi_2\left(\frac{1}{z-\alpha_2}\right) \ldots \psi_n\left(\frac{1}{z-\alpha_n}\right), \end{aligned}$$

$\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\ldots$, $\varphi_n(t)$ et $\psi_1(t)$, $\ldots$, $\psi_n(t)$ étant des fonctions entières.

---

(1) *Voir* E. MAILLET, *Mémoire sur les fonctions entières et quasi entières* (*Journal de M. Jordan,* 1902).

DEUXIÈME PARTIE.

CHAPITRE I.

SUR UNE CLASSE DE FONCTIONS A UN NOMBRE INFINI DE BRANCHES.

1. Dans ce Chapitre, nous établirons des théorèmes remarquables concernant une classe très étendue de fonctions d'un nombre infini de branches. Envisageons l'équation

$$(13) \qquad \sigma_1(u)\,A_1(z)+\sigma_2(u)\,A_2(z)+\ldots+\sigma_\nu(u)\,A_\nu(z)=0=F(z,u),$$

où les $\sigma_i(u)$ désignent des fonctions entières de u et les $A_i(z)$ désignent des fonctions uniformes dans le voisinage d'un point singulier essentiel $z=\alpha$. Nous pouvons supposer que ces dernières fonctions soient quasi entières dans le domaine de $z=\alpha$, c'est-à-dire qu'elles n'y admettent pas des pôles; cela tient à ce qu'une fonction *quasi méromorphe* dans le voisinage de $z=\alpha$ est le quotient de deux fonctions *quasi entières*.

Pour fixer les idées, plaçons-nous dans le cas où le point α est à l'infini et supposons que les $A_i(z)$ sont des fonctions entières.

Nos raisonnements s'étendront d'eux-mêmes aux autres cas.

D'après le théorème bien connu de Weierstrass (1), l'équation (13) définit u comme fonction de z n'ayant d'autres points singuliers essentiels que le point $z=\infty$ et d'un nombre infini de branches [si une au moins des fonctions entières $A_i(z)$ est transcendante].

Une valeur u_0 de u sera dite *encore exceptionnelle,* si $F(z, u_0)$ n'admet qu'un nombre fini de zéros, et deux valeurs u_1 et u_2 seront dites *équivalentes,* si le rapport $F(z, u_1):F(z, u_2)$ est une fonction rationnelle de z. Si l'une est exceptionnelle, l'autre l'est aussi. On verra que cette *notion* est utile dans ce qui va suivre.

Supposons d'abord qu'il n'y ait aucune relation linéaire à coefficients polynomes entre $A_1(z)$, $A_2(z)$, ..., $A_\nu(z)$. Si u_0, u_1, u_2, ..., u_ν sont $\nu+1$ valeurs non

(1) Voir *Traité d'Analyse* de M. Picard, t. II, p. 244.

équivalentes, l'élimination nous conduira à une relation de la forme

$$(14)\qquad \lambda_0\, p_0(z)\, e^{H_0(z)} + \lambda_1\, p_1(z)\, e^{H_1(z)} + \ldots + \lambda_\nu\, p_\nu(z)\, e^{H_\nu(z)} = 0,$$

avec

$$(15)\qquad \lambda_i = \begin{vmatrix} \sigma_1(u_0) & \sigma_2(u_0) & \ldots & \sigma_\nu(u_0) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sigma_1(u_{i-1}) & \sigma_2(u_{i-1}) & \ldots & \sigma_\nu(u_{i-1}) \\ \sigma_1(u_{i+1}) & \sigma_2(u_{i+1}) & \ldots & \sigma_\nu(u_{i+1}) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sigma_1(u_\nu) & \sigma_2(u_\nu) & \ldots & \sigma_\nu(u_\nu) \end{vmatrix},$$

les $P_j(z)$ étant des polynomes et les $H_j(z)$ des fonctions entières.

Aucune réduction n'est possible au premier membre de cette relation, à cause de la non-équivalence des $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_\nu$.

Grâce à la proposition fondamentale de M. Borel, on aura

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_\nu = 0.$$

Soit maintenant u'_0 une valeur équivalente à u_0, on aura

$$\frac{F(z, u_0)}{F(z, u'_0)} = K,$$

K étant un polynome; ou bien

$$[\sigma_1(u_0) - K\sigma_1(u'_0)]A_1(z) + [\sigma_2(u_0) - K\sigma_2(u'_0)]\,A_2(z) + \ldots$$
$$+ [\sigma_\nu(u_0) - K\sigma_\nu(u'_0)]\,A_\nu(z) = 0.$$

Or, nous avons supposé qu'aucune relation de cette forme n'est possible entre les $A_i(z)$; il en résulte donc

$$(16)\qquad K = \frac{\sigma_1(u_0)}{\sigma_1(u'_0)} = \frac{\sigma_2(u_0)}{\sigma_2(u'_0)} = \ldots = \frac{\sigma_\nu(u_0)}{\sigma_\nu(u'_0)};$$

par suite, K est une constante.

Conclusion. — $u_0, u_1, \ldots, u_{\nu-1}$ étant ν valeurs exceptionnelles quelconques, toute autre U doit satisfaire à l'équation

$$(17)\qquad \Delta(U) = \begin{vmatrix} \sigma_1(u_0) & \sigma_2(u_0) & \ldots & \sigma_\nu(u_0) \\ \sigma_1(u_1) & \sigma_2(u_1) & \ldots & \sigma_\nu(u_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sigma_1(u_{\nu-1}) & \sigma_2(u_{\nu-1}) & \ldots & \sigma_\nu(u_{\nu-1}) \\ \sigma_1(U) & \sigma_2(U) & \ldots & \sigma_\nu(U) \end{vmatrix} = 0,$$

il ne doit pas y avoir des équivalentes parmi les valeurs $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_{\nu-1}$, si l'on veut que $\Delta(U)$ ne se réduise pas à zéro.

Dans le cas où toutes les valeurs sont équivalentes, u_0 étant l'une d'entre elles, toutes les autres U seront données par une des équations

$$\begin{gathered}
\sigma_1(u_0)\sigma_2(U)-\sigma_2(u_0)\sigma_1(U)=0,\\
\sigma_1(u_0)\sigma_3(U)-\sigma_3(u_0)\sigma_1(U)=0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\sigma_1(u_0)\sigma_\nu(U)-\sigma_\nu(u_0)\sigma_1(U)=0.
\end{gathered}$$

La conclusion intéressante tirée de ces considérations est le fait que l'ensemble $(\mathcal{E})$ des valeurs exceptionnelles, quand il n'est pas fini, est dénombrable n'ayant qu'un point limite, l'infini, et l'*exposant de convergence* de la suite des modules de ces valeurs est au plus égal au plus grand des ordres apparents des fonctions $\sigma(u)$. Ainsi on a un renseignement bien précieux sur la densité de ces nombres.

2. Passons maintenant au cas général, où les fonctions $A_i(z)$ sont quelconques (pas toutes des polynomes, bien entendu). Il est alors loisible d'écrire l'équation (13) comme il suit :

$$\varphi_1(z, u)A_1(z)+\varphi_2(z, u)A_2(z)+\ldots+\varphi_m(z, u)A_m(z)=0, \tag{18}$$

où les $\varphi_i(z, u)$ sont des fonctions entières (transcendantes, en général, de u), mais des polynomes par rapport à z et les $A(z)$ sont des fonctions entières linéairement distinctes (j'ai précisé ci-dessus ce que j'entends par là).

Des raisonnements analogues à ceux du numéro précédent nous permettent de constater les faits suivants :

1° Si u_0 et u'_0 désignent deux valeurs équivalentes, on aura identiquement

$$\frac{\varphi_1(z, u_0)}{\varphi_1(z, u'_0)}=\frac{\varphi_2(z, u_0)}{\varphi_2(z, u'_0)}=\ldots=\frac{\varphi_m(z, u_0)}{\varphi_m(z, u'_0)}; \tag{19}$$

2° Si $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_\nu$ sont $m+1$ valeurs exceptionnelles, parmi lesquelles il n'y ait pas deux équivalentes, on a les $m+1$ identités suivantes

$$\begin{vmatrix}
\varphi_1(z, u_0) & \varphi_2(z, u_0) & \ldots & \varphi_m(z, u_0)\\
\varphi_1(z, u_1) & \varphi_2(z, u_1) & \ldots & \varphi_m(z, u_1)\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
\varphi_1(z, u_{i-1}) & \varphi_2(z, u_{i-1}) & \ldots & \varphi_m(z, u_{i-1})\\
\varphi_1(z, u_{i+1}) & \varphi_2(z, u_{i+1}) & \ldots & \varphi_m(z, u_{i+1})\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
\varphi_1(z, u_m) & \varphi_2(z, u_m) & \ldots & \varphi_m(z, u_m)
\end{vmatrix}=0 \qquad (i=0, 1, 2, \ldots, m).$$

Par suite, si u_0, u_1, ..., u_{m-1} désignent m valeurs exceptionnelles fixes, non équivalentes, toutes les autres U doivent être des zéros de la fonction entière par rapport à U, donnée par la formule :

$$(20)\qquad D(z, U) = \begin{vmatrix} \varphi_1(z, u_0) & \varphi_2(z, u_0) & \dots & \varphi_m(z, u_0) \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ \varphi_1(z, u_{m-1}) & \varphi_2(z, u_{m-1}) & \dots & \varphi_m(z, u_{m-1}) \\ \varphi_1(z, U) & \varphi_2(z, U) & \dots & \varphi_m(z, U) \end{vmatrix},$$

quel que soit z. Si K est le plus grand des degrés des $\varphi_1(z, u)$, $\varphi_2(z, u)$, ..., $\varphi_m(z, u)$, par rapport à z, l'identité $D(z, U) = 0$ sera décomposée en $K+1$ au plus relations entre les u_0, u_1, ..., u_{m-1} et U, qui seront satisfaites par toutes les valeurs U exceptionnelles équivalentes ou non des u_0, u_1, ..., u_{m-1}.

Si le nombre des valeurs non équivalentes est moindre que m, on se bornera aux équations (19) qui déterminent leurs équivalentes. On arrivera toujours à la même conclusion finale sur la nature de l'ensemble ($\mathcal{E}$).

Théorème. — *La fonction $u = \Phi(z)$, définie par l'équation* (13) *et ayant un nombre infini de branches, prend, dans le domaine de l'infini, toutes les valeurs, sauf, peut-être, un ensemble dénombrable ayant l'infini comme point limite unique et faisant partie de l'ensemble des zéros d'une fonction entière de u bien déterminée, lorsque l'équation* (13) *est donnée.*

Corollaire. — L'infini est bien un point d'*indétermination complète,* d'après une terminologie de M. Painlevé [voir *Sur les singularités des fonctions analytiques et, en particulier, des fonctions définies par les équations différentielles* (*Comptes rendus*, t. CXXXI, 1900)].

Dans le cas où tous les $A_i(z)$ sont des polynomes, il est manifeste que l'infini n'est plus un point essentiel de $u = \Phi(z)$.

3. Il est à peine nécessaire d'ajouter que ces résultats subsistent dans le cas où les $\sigma_i(u)$ représentent des fonctions uniformes quelconques avec un ensemble dénombrable de singularités essentielles. Il n'y a qu'à adjoindre à l'ensemble ($\mathcal{E}$) les affixes des points essentiels qui peuvent bien être des valeurs exceptionnelles. Elles le sont sûrement dans le cas où il n'y a aucune relation de la forme

$$c_1\sigma_1(u) + c_2\sigma_2(u) + \ldots + c_\nu\sigma_\nu(u) = g(u), \qquad g(e_i) = 0 \quad (^1),$$

c_1, c_2, ..., c_ν étant des constantes et $g(u)$ une fonction entière de u.

(1) e_i désignant l'affixe d'un point essentiel des $\sigma(u)$.

Ici l'ensemble $(\mathcal{E}')$ dérivé de $(\mathcal{E})$ peut renfermer tous les points essentiels des fonctions $\sigma(u)$ et pas d'autres.

Nos déductions ne seront pas les mêmes lorsque l'ensemble des points essentiels d'une des $\sigma_i(u)$ est parfait, ponctuel ou linéaire [1]. Dans le cas où une de ces fonctions admet des coupures, l'infini peut être un point d'indétermination incomplète de la fonction $u = \Phi(z)$ définie par l'équation (13), c'est-à-dire l'ensemble des valeurs exceptionnelles sera continu, une aire par exemple.

L'hypothèse sur l'uniformité des fonctions $\sigma(u)$ n'est pas tout à fait indispensable, et l'on pourrait faire une étude analogue même dans les cas où il n'en est pas ainsi. Mais je n'y insisterai pas ici.

4. Je me propose maintenant de faire une remarque fort importante : Dans la plupart des cas, on peut être ramené à la *proposition fondamentale de M. Borel,* sans éliminer toutes les fonctions $A_i(z)$ qui figurent dans le premier membre de l'équation (13); en nous contentant d'une élimination partielle, nous arriverons à préciser et compléter suffisamment les résultats des trois paragraphes précédents, et surtout à établir des classes étendues de fonctions d'un nombre infini de branches qui n'admettent qu'un nombre fini de valeurs exceptionnelles.

Envisageons la fonction $u(z)$, définie par une équation telle que

$$A_0(z) + A_1(z)u + A_2(z)u^2 + \ldots + A_n(z)u^n + \ldots = F(z, u) = 0. \tag{21}$$

Soient $e^{M_n(r)}$ l'ordre de grandeur de la fonction entière $A_n(z)$ et $e^{M(r)}$ le plus grand des ordres de grandeur de toutes les fonctions $A_i(z)\,[i = 0, 1, 2, 3, \ldots, \infty]$. Supposons que $e^{M_n(r)}$ décroît notablement lorsque n croît indéfiniment, de sorte que l'on puisse assigner une valeur ν de n, assez grande (mais fixe), telle que l'inégalité $n > \nu$ entraîne l'inégalité

$$[M_n(r)]^2 < M(r) \tag{21'}$$

ou, d'une façon plus générale,

$$[M_n(r)]^{1+\alpha} < M(r),$$

α étant un nombre positif quelconque, à partir d'une certaine valeur de r ou, du moins, pour une infinité de valeurs de r remplissant des intervalles d'étendue totale assez grande (*voir* toujours le Mémoire de M. Borel, *loc. cit.*).

---

(1) En général, lorsque cet ensemble n'est pas dénombrable.

Soient $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_\nu, u_{\nu+1}$, $\nu+2$ valeurs de u non équivalentes, exceptionnelles.

On aura des relations de la forme

$$(22)\qquad \begin{cases} F(z, u_0) = P_0(z)\,e^{H_0(z)}, \\ F(z, u_1) = P_1(z)\,e^{H_1(z)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F(z, u_\nu) = P_\nu(z)\,e^{H_\nu(z)}, \\ F(z, u_{\nu+1}) = P_{\nu+1}(z)\,e^{H_{\nu+1}(z)} \end{cases}$$

[les $P_i(z)$ étant des polynomes].

$F(z, u_0)$ peut s'écrire sous la forme suivante

$$F(z, u_0) = A_0(z) + A_1(z)u_0 + A_2(z)u_0^2 + \ldots + A_\nu(z)u_0^\nu + R_\nu(z, u_0)$$

avec

$$R_\nu(z, u_0) = A_{\nu+1}(z)u_0^{\nu+1} + A_{\nu+2}(z)u_0^{\nu+2} + \ldots.$$

La fonction $R_\nu(z, u_0)$ croîtra sûrement moins vite que $e^{[M(r)]^{1-\beta}}$, β étant un nombre positif assez petit, si la décroissance de l'ordre de grandeur $e^{M_n(r)}$ avec $\frac{1}{n}$ est telle que, à partir d'une certaine valeur r_0 de r, indépendante de n, la différence

$$(22')\qquad M_{n+1}(r) - M_n(r)$$

est négative, pour n assez grand, et inférieure à un nombre $-\theta$, aussi petit que l'on voudra, mais fixe.

En effet, cette condition étant réalisée, on aura, à partir d'une certaine valeur $n = m$ de n,

$$e^{M_{n+1}(r) - M_n(r)} < e^{-\theta} < q < \frac{1}{|u_0|} \quad (^1),$$

pourvu que r soit supérieur à r_0.

D'autre part, on peut écrire

$$R_\nu(z, u_0) = [A_{\nu+1}(z)u_0^{\nu+1} + \ldots + A_{m-1}(z)u_0^{m-1}] + [A_m(z)u_0^m + A_{m+1}(z)u_0^{m+1} + \ldots]$$

$$R_\nu(z, u_0) = P_\nu(z, u_0) + R_{m-1}(z, u_0)$$

---

(1) Le nombre q dépend évidemment de u_0 et nous supposons qu'il existe, aussi grand que soit le module de u_0.

avec

$$P_\nu(z, u_0) = A_{\nu+1}(z)\, u_0^{\nu+1} + \ldots + A_{m-1}(z)\, u_0^{m-1},$$

$$R_{m-1}(z, u_0) = A_m(z)\, u_0^m \quad + A_{m+1}(z)\, u_0^{m+1} + \ldots;$$

$P_\nu(z, u_0)$, n'ayant qu'un nombre fini de termes, croît évidemment moins vite que $e^{[M(r)]^{1-\beta_1}}$ (β_1 étant assez petit).

Quant à $R_{m-1}(z, u_0)$, on aura, pour toute valeur de r,

$$|R_{m-1}(z, u_0)| < |u_0|^m e^{M_m(r)} + |u_0|^{m+1} e^{M_{m+1}(r)} + |u_0|^{m+2} e^{M_{m+2}(r)} + \ldots$$

ou bien

$$|R_{m-1}(r, u_0)| < |u_0|^m e^{M_m(r)}[1 + |u_0|\, e^{M_{m+1}(r)-M_m(r)} + |u_0|^2 e^{M_{m+2}(r)-M_m(r)} + \ldots].$$

Or, on a

$$e^{M_{m+1}(r)-M_m(r)} < q,$$
$$e^{M_{m+2}(r)-M_m(r)} < q^2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$e^{M_{m+\mu}(r)-M_m(r)} < q^\mu,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

à partir d'une certaine valeur de r.

Il en résulte

$$|R_{m-1}(z, u_0)| < |u_0|^m e^{M_m(r)}[1 + q\,|u_0| + q^2\,|u_0|^2 + q^3\,|u_0|^3 + \ldots] \qquad [q\,|u_0| < 1]$$

et

$$|R_{m-1}(z, u_0)| < \frac{|u_0|^m}{1 - q\,|u_0|}\, e^{M_m(r)} < \frac{|u_0|^m}{1 - q\,|u_0|}\, e^{[M(r)]^{1-\beta}} < e^{[M(r)]^{1-\beta_3}},$$

β_3 et β_2 étant des nombres positifs suffisamment petits.

Nous en tirons

$$|R_\nu(z, u_0)| < |P_\nu(z, u_0)| + |R_{m-1}(z, u_0)| < e^{[M(r)]^{1-\beta_1}} + e^{[M(r)]^{1-\beta_2}} < e^{[M(r)]^{1-\beta}},$$

β étant assez petit.

Il en sera de même des $R_\nu(z, u_1)$, ..., $R_\nu(z, u_{\nu+1})$ si l'on a aussi

$$q < \frac{1}{|u_1|}, \qquad q < \frac{1}{|u_2|}, \qquad \ldots, \qquad q < \frac{1}{|u_\nu|}, \qquad q < \frac{1}{|u_{\nu+1}|}.$$

Pour qu'il en soit ainsi, il faut que la différence

$$M_{n+1}(r) - M_n(r)$$

Soit maintenant une autre fonction $H_1(z)$ de genre zéro aussi et à croissance régulière, ainsi que $H(z)$. Leur ordre peut être un nombre entier, égal à un [1]. Leur produit est visiblement à croissance régulière; cela tient à ce que ces deux fonctions deviennent simultanément maximums (en module) sur chaque cercle de rayon r.

En effet, si Z_r désigne l'affixe d'un maximum de $|H_1(z)|$, ce sera un maximum de tous ses facteurs primaires, pourvu que r soit assez grand, et il en sera de même des facteurs primaires de $H_2(z)$.

On aura, par conséquent, à partir d'une certaine valeur de r,

$$|H_1(Z_r)| > e^{r^{\rho-\varepsilon}}, \qquad |H_2(Z_r)| > e^{r^{\rho-\varepsilon_1}}, \qquad |\Pi(Z_r)| > e^{r^{\rho-\varepsilon}+r^{\rho-\varepsilon_1}} > e^{r^{\rho-\eta}},$$

η étant arbitrairement petit avec ε et ε_1.

Nous en déduisons que $\Pi(z)$ est à croissance régulière.

La conclusion subsisterait si $H_1(z)$ et $H_2(z)$ contenaient des facteurs exponentiels libres e^{az+b} remplissant quelques conditions aisées à comprendre.

Avant d'aborder notre problème dans le cas le plus général, je vais établir quelques théorèmes préliminaires.

Théorème VI. — *$\omega(z)$ étant une fonction d'ordre ρ à croissance irrégulière et $H(z)$ une fonction quelconque d'ordre $\rho_1 < \rho$, la somme $S(z) = \omega(z) + H(z)$ et le produit $\Pi(z) = \omega(z)H(z)$ sont aussi à croissance irrégulière.*

La première partie du théorème se ramène immédiatement au théorème V, parce que, si $S(z)$ croissait régulièrement, la somme $S(z) - H(z) = \omega(z)$ croîtrait irrégulièrement, ce qui est en contradiction avec le théorème V.

Quant à la seconde partie, nous ferons les raisonnements suivants : il y aura un nombre ε tel que l'on ait

$$|\omega(z)| < e^{r^{\rho-\varepsilon}}, \qquad |H(z)| < e^{r^{\rho_1+\varepsilon}},$$

la première pour une infinité de valeurs de r de modules croissant indéfiniment, et la seconde à partir d'une certaine valeur de r.

Nous en tirons

$$|\Pi(z)| < e^{r^{\rho-\varepsilon}+r^{\rho_1+\varepsilon}} < e^{r^{\rho-\eta}} \qquad \text{pour} \qquad |z| = r,$$

parce que le rapport $r^{\rho_1+\varepsilon} : r^{\rho-\varepsilon}$ tend vers zéro avec $\frac{1}{r}$.

---

(1) Nous supposons, bien entendu, que les zéros de $H_1(z)$ jouissent de la même propriété que ceux de $H(z)$; alors le produit $H(z)H_1(z)$ sera à croissance régulière, même lorsqu'il n'en est pas ainsi de $H_1(z)$

Il en résulte que le module maximum de $\Pi(z)$ reste inférieur à $e^{r^{\rho-\eta}}$ pour une infinité de valeurs de r, et, par conséquent, $\Pi(z)$ est à croissance irrégulière.

Ce théorème subsiste-t-il dans le cas où $H(z)$ est du même ordre que $\omega(z)$?

5. Les résultats intéressants établis par M. E. Maillet dans son Mémoire : *Sur les fonctions entières et quasi-entières à croissance régulière, etc.* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse,* 2[e] série, t. IV) nous permettent d'établir qu'il en est ainsi dans des cas très étendus.

M. Maillet a cherché à voir dans quelle limite la loi de répartition des coefficients a_m qui satisfont à l'inégalité

$$\sqrt[m]{a_m} > \frac{1}{m^{\frac{1}{\rho}+\varepsilon}}$$

influe sur la régularité de la croissance d'une fonction donnée $\varphi(z)$

$$\varphi(z) = \sum a_m z^m.$$

Il est arrivé aux théorèmes suivants :

Supposons que cette fonction $\varphi(z)$ soit d'ordre ρ. On sait qu'il y a, pour m très grand, une infinité de coefficients a_m tels que

$$\text{(T)} \qquad \sqrt[m]{a_m} > \frac{1}{m^{\frac{1}{\rho}+\varepsilon}},$$

ε étant un nombre fini, aussi petit que l'on voudra.

Critères de M. Maillet. — α'. Si θ est un nombre positif, qui croît moins vite avec m que $m(\log m)^{1-\alpha} - m$ (α positif aussi petit qu'on veut), et si, sur θ coefficients consécutifs à partir de a_m, il y en a toujours un qui satisfait à l'inégalité (T); à partir d'une certaine valeur de m, la fonction $\varphi(z)$ est à croissance régulière.

β'. Si θ croît plus vite que $m^{1+\beta} - m$ (β un nombre positif arbitrairement petit) pour une infinité de valeurs de m satisfaisant à (T) dès que m dépasse une certaine limite, la fonction $\varphi(z)$ est à croissance irrégulière.

Nous allons faire une application du premier critère.

Soient

$$G(z) = \sum a_m Z^m, \qquad H(z) = \sum \alpha_m Z^m$$

deux fonctions à croissance régulière du même ordre ρ.

D'après la définition du nombre θ_m, sur θ_m coefficients consécutifs à partir de

a_m, il y en aura toujours un $a_\mu(\mu - m < \theta_m)$ qui satisfait à l'inégalité

$$\sqrt[\mu]{a_\mu} > \frac{1}{\mu^{\frac{1}{\rho}+\varepsilon}}.$$

Supposons que les fonctions $G(z)$ et $H(z)$ jouissent de la propriété que θ_m croît moins vite que $m(\log m)^{1-\alpha} - m$; il est facile à constater que la fonction $S(z) = G(z) + H(z)$ jouit, en général, de la même propriété. En effet, pour chacune de ces fonctions $G(z)$ et $H(z)$, sur θ_m coefficients consécutifs il y en a un a_n et α_ν qui satisfait à l'égalité (T).

Le coefficient général de $S(z)$ est égal à $a_m + \alpha_m = b_m$ et l'on aura

$$b_n = a_n + \alpha_n = \frac{1}{n^{\left(\frac{1}{\rho}+\varepsilon\right)n}} + \alpha_n \text{ (}^1\text{)},$$

$$b_\nu = a_\nu + \alpha_\nu = a_\nu + \frac{1}{\nu^{\nu\left(\frac{1}{\rho}+\varepsilon\right)}};$$

b_n et b_ν, s'ils ne sont pas nuls, sont de la forme

$$\sqrt[n]{b_n} = \frac{1}{n^{\frac{1}{\rho}+\varepsilon_1}}, \qquad \sqrt[\nu]{b_\nu} = \frac{1}{\nu^{\frac{1}{\rho}+\varepsilon_2}},$$

ε_1 et ε_2 étant arbitrairement petits avec ε; nous supposons ici que $|\alpha_n|$ et $|a_n|$ ne sont pas des infiniment petits équivalents, c'est-à-dire que le rapport $\frac{|\alpha_n|}{|a_n|}$ ne tend pas vers l'unité.

Dans ces cas, d'après le premier critère de M. Maillet, la somme $S(z)$ est à croissance régulière.

Dès lors, la somme d'une fonction $\omega(z)$ à croissance irrégulière et d'ordre ρ et $H(z)$ à croissance régulière et de la classe ci-dessus signalée peut ne pas être à croissance régulière, si $H(z)$ et $\omega(z)$ sont du même ordre.

Les deux critères de M. Maillet nous permettent de constater un fait très important.

La somme de deux fonctions à croissance régulière et du même ordre ρ n'est pas toujours une fonction à croissance régulière, même lorsqu'elle a le même ordre ρ.

---

(1) Ces formules sont écrites dans l'hypothèse que les coefficients a_n et α_n sont tous réels et positifs; dans le cas contraire, on devrait employer les modules.

Nous allons, en effet, former deux fonctions à croissance régulière, dont la somme soit à croissance irrégulière.

Considérons une fonction entière d'ordre ρ

$$\varphi(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \ldots + \alpha_m z^m + \ldots,$$

telle que le nombre θ_m de M. Maillet croisse moins vite que $m(\log m)^{1-\alpha} - m$ (α positif assez petit, si l'on veut) à partir d'une certaine valeur de m.

Posons

$$l_m = m(\log m)^{1-\alpha} - m,$$
$$L_m = m^{1+\alpha} - m.$$

Envisageons une infinité de valeurs de m

$$m_1, \quad m_2, \quad \ldots, \quad m_n, \quad \ldots,$$

telle que

$$m_n - m_{n-1} > L_{m_{n-1}} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Divisons l'intervalle $m_{n-1}, \ldots, m_n$ en deux parties, dont la première ait une étendue égale à $L_{m_{n-1}}$ et changeons tous les coefficients α_m, qui appartiennent à cette première partie de l'intervalle correspondant, en $-\alpha_m$; en laissant tous les autres coefficients de $\varphi(z)$ invariables, nous obtenons une nouvelle fonction $\varphi_1(z)$ qui est évidemment à croissance régulière, d'après le premier critère de M. Maillet, puisque ses coefficients ont le même module avec ceux de $\varphi(z)$.

La somme $\Phi(z) = \varphi(z) + \varphi_1(z)$ est à croissance irrégulière en vertu du deuxième critère de M. Maillet; il y aura, en effet, une infinité de valeurs de m, $m_1, m_2, \ldots, m_n, \ldots$, pour lesquelles θ_m croisse plus vite que $m^{1+\beta} - m$ (β étant un nombre positif fini).

La fonction $\varphi_1(z)$ ne saurait être d'ordre inférieur à ρ, puisque, autrement, la somme $\varphi(z) + \varphi_1(z)$ serait à croissance régulière (*voir* le théorème V).

La fonction $\Phi(z)$ sera sûrement d'ordre égal à ρ, si la deuxième partie de l'intervalle $m_{n-1} \overset{\mu_{n-1}}{\text{———}\!\!+\!\!\text{—}} m_n$ a une étendue supérieure à $L_{\mu_{n-1}}$ ou bien $l_{\mu_{n-1}}$, $\mu_{\nu-1}$ étant son commencement (¹). Nous avons donc formé deux fonctions d'ordre ρ et à croissance régulière, dont la somme, étant du même ordre ρ, soit à croissance irrégulière.

Il en résulte que le théorème VI n'est pas vrai dans le cas où les deux fonctions $\omega(z)$ et $H(z)$ sont du même ordre ρ; la somme $S(z)$ peut bien croître régulièrement.

6. Dans le nº 4 nous avons exposé deux cas, dans lesquels le produit de deux

---

(¹) C'est une conséquence immédiate du second critère de M. Maillet.

fonctions $H_1(z)$ et $H_2(z)$ à croissance régulière et d'ordre entier est aussi à croissance régulière. Dans ces deux cas, il en est de même de leur somme.

Le premier cas correspond au théorème V.

Quant au second cas, on s'en rend aisément compte, en remarquant que les points de module maximum des $H_1(z)$ et $H_2(z)$ pour $(z) = r$ se trouvent sur les droites

$$\text{(D)} \qquad \begin{cases} \theta = \gamma^{(1)} + (2k+1)\pi & \text{pour} \quad H_1(z), \\ \theta = \gamma^{(2)} + (2k+1)\pi & \text{pour} \quad H_2(z), \end{cases}$$

$\gamma^{(1)}$ et $\gamma^{(2)}$ étant les arguments d'un zéro des $H_1(z)$ et $H_2(z)$.

Si donc $\gamma^{(1)} = \gamma^{(2)} + 2\lambda\pi$ (λ étant un entier quelconque) les droites de module maximum des $H_1(z)$ et $H_2(z)$ sont communes, de sorte que les quatre cas examinés dans le n° 3 se présentent d'une façon très favorable. En effet, les arguments des $H_1(z)$ et $H_2(z)$ sur les droites (D) sont les mêmes, à un multiple de 2π près. Donc on a

$$|S(Z_r)| = |H_1(Z_r)| + |H_2(Z_r)| > 2e^{r^{\rho-\varepsilon}} > e^{r^{\rho-\eta}},$$

et la somme $S(z)$ est visiblement à croissance régulière.

Voici un autre cas exprimé par le théorème suivant :

Théorème VII. — *Le produit d'une fonction* $H(z)$ *à croissance régulière et d'ordre* ρ *entier par une fonction* $H_1(z)$ *quelconque, d'ordre* ρ_1 *inférieur à* ρ, *est toujours à croissance régulière.*

Pour la démonstration de ce théorème, je désignerai toujours par Z_r l'affixe d'un maximum du $|H(z)|$ sur le cercle de rayon r et j'aurai

$$(10) \qquad |H(Z_r)| > e^{r^{\rho-\varepsilon}}$$

à partir d'une certaine valeur de r.

Il n'y a que deux cas possibles :

Ou bien le $|H_1(Z_r)|$ est supérieur à $e^{-r^{\rho_1+\varepsilon_1}}$ (ε_1 aussi petit que l'on voudra), ou bien l'on a

$$(11) \qquad |H(Z_r)| < e^{-r^{\rho_1+\varepsilon_1}},$$

ε_1 étant assez petit.

Dans le premier cas la démonstration s'achève immédiatement.

On aura, en effet,

$$|\Pi(Z_r)| = |H(Z_r)|\,|H_1(Z_r)| > e^{r^{\rho-\varepsilon}-r^{\rho_1+\varepsilon}} > e^{r^{\rho-\eta}},$$

η étant aussi petit que l'on voudra, puisque $\rho > \rho_1$. Dans le second cas, il y aura une infinité de valeurs de r, qui satisfont à l'inégalité (11). Alors nous remplaçons Z_r par un autre point du cercle C_r satisfaisant à l'inégalité (10), s'il y en a.

Je dis qu'il est impossible que tous les points (Z_r) vérifiant l'inégalité (10) satisfassent en même temps à l'inégalité (11).

Pour s'en rendre compte, rappelons-nous l'importante modification apportée par M. Maillet au théorème de M. Hadamard sur le module minimum d'une fonction entière.

Dans son Mémoire déjà cité ([1]), M. Maillet a établi le théorème suivant :

Étant donnée une fonction entière d'ordre fini ρ et un nombre arbitraire ε; si l'on décrit autour de chaque zéro (a_n) un cercle de rayon η, tendant vers zéro avec $\frac{1}{n}$, en tout point extérieur à ces cercles, on a, pour $|z|$ assez grand, l'inégalité

$$|G(z)| > e^{-r^{\rho+\varepsilon}}.$$

Cette propriété du rayon des cercles exclus, de tendre vers zéro avec $\frac{1}{n}$, est précieuse pour nous ([2]).

Elle nous permettra, en effet, de montrer qu'il y aura, à partir d'une certaine valeur de r, des points z_r, satisfaisant à l'inégalité (10) et pour les quels on ait

$$(12) \qquad |H_1(z_r)| > e^{-r^{\rho_1+\varepsilon}}.$$

S'il n'en était pas ainsi, la longueur des arcs du cercle C_r, dont les points satisfont à l'inégalité

$$(13) \qquad |H(z)| > e^{r^{\rho-\varepsilon}}$$

tendrait vers zéro avec $\frac{1}{r}$, comme le diamètre des cercles exclus de M. Maillet.

Or, il est aisé de démontrer que ceci est impossible.

([1]) *Sur les fonctions entières et quasi-entières* (*Journal de Mathématiques*, 1900).

([2]) Le rayon η, qui a été fixé par M. Maillet, doit varier avec n et tendre vers zéro avec $\frac{1}{n}$, si l'on veut que son théorème soit vraiment utile. C'est M. Wiman qui a fait, le premier, cette remarque. [Voir *Arkiv för matematik, astronomi och fysik utgifvet af. k. svenska Vetenscapsakademien* (Band 1). *Sur le cas d'exception de M. Picard dans la théorie des fonctions entières.*]

Soient, en effet, z_r et $z_r + \Delta z_r$ deux points tels que

$$|\mathrm{H}(z_r)| = e^{r^{\rho-\varepsilon}}, \qquad |\mathrm{H}(z_r + \Delta z_r)| = e^{r^{\rho-\vartheta}}, \qquad \vartheta < \varepsilon;$$

il vient

$$(14) \qquad |\mathrm{H}(z_r + \Delta z_r) - \mathrm{H}(z_r)| > e^{r^{\rho-\vartheta}} - e^{r^{\rho-\varepsilon}} > e^{r^{\rho-\vartheta}}(1-\alpha),$$

α étant un nombre positif, aussi petit que l'on voudra.

D'autre part, l'on a

$$(15) \qquad \mathrm{H}(z_r + \Delta z_r) - \mathrm{H}(z_r) = \int_{z_r}^{z_r+\Delta z_r} \mathrm{H}'(z)\,dz < e^{r^{\rho-\vartheta}} r^k s_r \;(^1),$$

où K est un nombre entier fini et s_r représente la longueur de l'arc, qui a pour extrémités z_r et $z_r + \Delta z_r$.

Nous utilisons ici les résultats récents de M. Boutroux (²) sur la croissance de la dérivée logarithmique d'une fonction entière. M. Boutroux a démontré que, si l'on exclut du champ de la variable z certaines aires fermées entourant les pôles, la dérivée logarithmique d'une fonction entière d'ordre fini reste comparable, partout ailleurs, à une puissance finie de z.

On sait que ce théorème sert de complément précieux aux résultats bien connus de M. Borel sur la croissance de la dérivée d'une fonction donnée, et dont nous nous sommes servi dans les paragraphes précédents.

Les points z_r que nous avons en vue ici se trouvent dans les régions du module maximum de $\mathrm{H}(z)$ et, par suite, se trouvent en dehors des aires exclues par M. Boutroux. Son théorème est donc applicable pour ces points. Nous en déduisons

$$|\mathrm{H}'(z)| < |\mathrm{H}(z)|\, r^k < e^{r^{\rho-\vartheta}} r^k,$$

car l'on a

$$|\mathrm{H}(z)| < e^{r^{\rho-\vartheta}},$$

entre les deux limites de l'intégration z_r et $z_r + \Delta z_r$.

On a donc l'inégalité (15).

Reportons-nous maintenant au Mémoire plus haut cité de M. Maillet et voyons quel est l'ordre infinitésimal du rayon η_n des cercles exclus autour des zéros.

Le nombre η_n ne doit satisfaire qu'à la condition

$$2^\sigma\left(\log\frac{r}{\eta_n} + \log 2 + \frac{\sigma}{1-\sigma}\right) < r^\varepsilon.$$

(¹) D'une façon précise, c'est le module de la différence $\mathrm{H}(z_r + \Delta z_r) - \mathrm{H}(z_r)$ qui est inférieur à $e^{r^{\rho-\vartheta}} r^k s_r$.

(²) *Voir* P. Boutroux, *Sur quelques propriétés des fonctions entières*. Thèse de doctorat, 1903. Ce Mémoire va paraître dans les *Acta mathematica*.

Cette inégalité sera bien satisfaite, en prenant

$$\eta_n = e^{-r^{\varepsilon_1}} \qquad (\varepsilon_1 < \varepsilon) \quad (^1).$$

Si maintenant s_r était comparable à $e^{-r^{\varepsilon_1}}$, on aurait

$$|\mathrm{H}(z_r + \Delta z_r) - \mathrm{H}(z_r)| < e^{r^{\rho-\vartheta}} r^k e^{-r^{\varepsilon_2}}$$

(ε_2 un nombre fini) ou encore

$$(16) \qquad |\mathrm{H}(z_r + \Delta z_r) - \mathrm{H}(z_r)| < \omega e^{r^{\rho-\vartheta}},$$

puisque la quantité $r^k e^{-r^{\varepsilon_2}}$ tend vers zéro avec $\frac{1}{r}$.

ω désigne un nombre fini, mais arbitrairement petit, ou, mieux encore, une quantité tendant vers zéro avec $\frac{1}{r}$.

On voit maintenant que l'inégalité (16) est en contradiction avec l'inégalité (14).

Donc, il y aura toujours, à partir d'une certaine valeur de r, des points z_r satisfaisant en même temps aux inégalités (12) et (13). Il en résulte

$$|\mathrm{H}(z_r)\mathrm{H}_1(z_r)| > e^{r^{\rho-\varepsilon} - r^{\rho_1+\varepsilon}} = e^{r^{\rho-\varepsilon}[1 - r^{(\rho_1-\rho)+2\varepsilon}]} > e^{r^{\rho-\varepsilon_1}},$$

ε_1 étant arbitrairement petit.

D'autre part, le module maximum $\mathrm{M}(r)$ du produit est supérieur ou égal à

$$|\mathrm{H}(z_r)\mathrm{H}_1(z_r)|.$$

On a donc

$$\mathrm{M}(r) > e^{r^{\rho-\varepsilon_1}}.$$

Le produit $\mathrm{H}(z)\mathrm{H}_1(z)$ est donc à croissance régulière.

Faisons remarquer maintenant que, pour éviter la contradiction signalée dans la démonstration précédente, il faut qu'on ait

$$(17) \qquad r^k s_r > 1 - \alpha,$$

aussi petit que soit α. Ou bien

$$s_r > (1 - \alpha) r^{-k}.$$

Si donc s_r tend vers zéro avec $\frac{1}{r}$, son ordre infinitésimal n'est pas supérieur à

---

(1) Cette valeur du rayon r_n précise, d'une façon remarquable et utile, le théorème plus haut cité de M. Maillet, ainsi que le théorème analogue de M. Wiman (*voir* son travail cité) et il paraît qu'il y a là la précision la plus extrême du théorème de M. Hadamard. J'ai déjà publié ce résultat dans une Note du *Bulletin de la Société mathématique,* 1904 : *Sur les fonctions entières de genre fini.*

celui de r^{-k}. Le nombre k se rattache à l'ordre ρ, supposé entier, de la fonction $H(z)$.

Je pense que cette limite de s_r est très petite et que s_r tend vers l'infini avec r; il est très intéressant de faire des recherches à ce sujet; j'espère y revenir dans un autre travail (¹).

7. Il y a lieu maintenant de démontrer que le produit de deux fonctions $H_1(z)$ et $H_2(z)$ à croissance régulière et du même ordre ρ est aussi à croissance régulière lorsque son ordre n'est pas inférieur à ρ.

Ce théorème n'est pas douteux; cependant sa démonstration semble présenter des difficultés sérieuses. Il faut, pour cela, approfondir le mode dont le module d'une fonction entière varie avec l'argument sur un cercle de rayon r très grand.

Voici la voie la plus naturelle que l'on pourrait suivre et les difficultés qui s'y présentent.

Considérons le cercle C_r de rayon r et soit (A_1) l'ensemble linéaire de ses points qui satisfont à l'inégalité

$$|H_1(z)| > e^{r^{\rho-\varepsilon}}$$

(ε étant un nombre fini aussi petit que l'on voudra).

Désignons par $e^{-\alpha(r)r^{\rho-\varepsilon}}$ le plus grand des modules de $H_2(z)$ pour les points de l'ensemble (A_1).

Nous allons distinguer quatre cas :

Premier cas. — $\alpha(r)$ est négatif à partir d'une certaine valeur de r. Dans ce cas, il y aura un point z_r qui satisfera aux inégalités

$$|H_1(z_r)| > e^{r^{\rho-\varepsilon}},$$
$$|H_2(z_r)| > e^{-\alpha(r)r^{\rho-\varepsilon}}$$

et, par conséquent, à

$$|H_1(z_r)H_2(z_r)| > e^{[1-\alpha(r)]r^{\rho-\varepsilon}} > e^{r^{\rho-\varepsilon_1}},$$

ε_1 étant arbitrairement petit. Le produit sera donc à croissance régulière.

Deuxième cas. — $\alpha(r)$ est positif pour une infinité (I) de valeurs de r, mais $\alpha(r)$ reste inférieur à un nombre q inférieur à l'unité à partir d'une certaine valeur (I).

(¹) Ce résultat se rattache à un théorème de M. Phragmén, établi à l'occasion de quelques fonctions entières de genre infini signalées par M. Mittag-Leffler. *Voir* un travail récent de M. J. Malmguist [*Étude d'une fonction entière* (*Acta mathematica,* 1905)].

On aura alors, pour un point z_r,

$$|\mathrm{H}_1(z_r)\,\mathrm{H}_2(z_r)| > e^{r^{\rho-\varepsilon}[1-\alpha(r)]} > e^{(1-q)r^{\rho-\varepsilon}} > e^{r^{\rho-\varepsilon_1}},$$

ε_1 étant arbitrairement petit.

Notre théorème est encore vrai pour cette infinité (I) de valeurs de r.

Troisième cas. — $\alpha(r)$ étant positif pour une infinité (I) de valeurs de r reste supérieur à un nombre q, plus grand que l'unité, pour r très grand.

Dans ce cas, il faut permuter le rôle des $\mathrm{H}_1(z)$ et $\mathrm{H}_2(z)$. Je m'explique : on considérera l'ensemble linéaire (A_2) dont les points satisfont à l'inégalité

$$|\mathrm{H}_2(z)| > e^{r^{\rho-\varepsilon}\alpha(r)} > e^{qr^{\rho-\varepsilon}}.$$

Ici, il faut comparer l'ensemble (A_2) avec l'ensemble (a_1) des points qui satisfont à l'inégalité

$$|\mathrm{H}_1(z)| > e^{-r^{\rho-\varepsilon}}.$$

Si ces ensembles ont des points communs à partir d'une certaine valeur (I), on aura pour ces points z_r

$$|\mathrm{H}_2(z_r)|\,|\mathrm{H}_1(z_r)| > e^{(q-1)r^{\rho-\varepsilon}}$$

et la démonstration s'achèverait tout de suite.

Il est clair que les arcs dont les points satisfont à l'inégalité

$$\mathrm{H}(z) > e^{qr^{\rho-\varepsilon}}$$

ont une longueur inférieure à celle des arcs dont les points satisfont à l'inégalité

$$|\mathrm{H}(z)| > e^{r^{\rho-\varepsilon}}.$$

La question, dont la solution s'impose ici, est la suivante :

Comparer l'ensemble (A) *correspondant à l'inégalité*

$$|\mathrm{H}(z)| > e^{qr^{\rho-\varepsilon}}$$

avec l'ensemble (a) *correspondant à l'inégalité*

$$|\mathrm{H}(z)| < e^{-qr^{\rho-\varepsilon}}$$

(*q un nombre quelconque*), $\mathrm{H}(z)$ *étant une fonction entière quelconque.*

Si $\mathrm{H}(z)$ est une exponentielle

$$\mathrm{H}(z) = e^{\mathrm{P}(z)}$$

avec

$$\mathrm{P}(z) = qz^k + q_1 z^{k-1} + \ldots = qr^k e^{\theta k i} + q_1 r^{k-1} e^{\theta(k-1)i} + \ldots \qquad (z = re^{\theta i})$$

et

$$| e^{P(z)} | = e^{qr^k \cos(k\theta) + q_1 r^{k-1} \cos[(k-1)\theta] + \dots}.$$

Nous supposons, pour fixer les idées, que q, q_1, ..., sont des nombres réels

$$| e^{P(z)} | = e^{qr^k \cos(k\theta)[1+\omega(r)]},$$

$\omega(r)$ tendant vers zéro, avec $\frac{1}{r}$.

L'ensemble (A) comprend des arcs dont les points satisfont à l'inégalité

$$\cos(k\theta) > \frac{r^{-\varepsilon}}{1-\beta}$$

et l'ensemble (a) correspond à l'inégalité

$$\cos(k\theta) < \frac{-r^{-\varepsilon}}{1+\beta}$$

$\left(\beta\right.$ un nombre positif tendant vers zéro avec $\frac{1}{r}$, β étant arbitrairement $\left.\text{petit}\right)$, il est visible que ces deux ensembles sont comparables.

Expliquons-nous : l'arc de (A), qui commence par le point ($\theta = 0$), a une longueur angulaire égale à la plus petite valeur θ_0, qui satisfait à

$$\cos(k\theta_0) = \frac{r^{-\varepsilon}}{1-\beta_1},$$

aussi petit que soit β pour r très grand.

De même, l'arc de (a), qui commence par le point $\left(\theta = \frac{\pi}{k}\right)$, a une étendue angulaire égale à $\theta_1 - \frac{\pi}{k}$, θ_1 étant la valeur de θ supérieure à $\frac{\pi}{k}$ et satisfaisant à l'égalité

$$\cos(k\theta_1) = \frac{-r^{-\varepsilon}}{1+\beta_2}.$$

On voit immédiatement que ce rapport $\frac{\cos(k\theta_0)}{\cos(k\theta_1)}$ tend vers l'unité négative, lorsque r croît indéfiniment et la différence

$$k(\theta_1 - \theta_0) - \pi$$

tend vers zéro avec $\frac{1}{r}$, ce qui montre que la différence angulaire des arcs considérés tend vers zéro avec $\frac{1}{r}$.

Ces indications donnent une idée du problème général que j'ai signalé, et dont je ne m'occupe pas dans ce travail.