EDMOND MAILLET

Sur les fonctions quasi-entières et quasi-méromorphes d'ordre infini non transfini

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 2e série, tome 9 (1907), p. 183-195
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1907_2_9__183_0>

SUR LES

FONCTIONS QUASI-ENTIÈRES ET QUASI-MÉROMORPHES

D'ORDRE INFINI NON TRANSFINI (1),

PAR M. EDMOND MAILLET.

I.

M. Boutroux (2) poursuivant, après Laguerre et M. Vivanti, l'étude de la dérivée logarithmique $g(z)$ d'une fonction entière $f(z)$, a obtenu sur une infinité de circonférences ayant pour centre l'origine (ou dans certaines aires) : 1° une limite supérieure du module de $g(z)$ et de ses dérivées quand $f(z)$ est une fonction entière d'ordre fini ou même parfois d'ordre infini ; 2° une limite inférieure.

Je me propose ici de résumer, préciser ou étendre ces beaux résultats en vue surtout de mieux définir les aires où ils sont vrais, et d'en permettre l'application aux fonctions quasi-entières et quasi-méromorphes d'ordre fini ou infini non transfini aux environs d'un point essentiel : bien entendu je me servirai en partie des principes des méthodes de M. Boutroux, en les combinant avec des méthodes indiquées par M. Wiman et moi (3).

II.

THÉORÈME I. — *Soit* $F(z)$ *une fonction entière d'ordre* $\leqq(k, \rho)$ *non trans-*

(1) La lecture de cette Note, résumée dans les *Comptes rendus* du 18 février 1907, p. 366, exige seulement, à la rigueur, la connaissance de mon Mémoire *Sur les zéros des fonctions entières, des fonctions monodromes, des fonctions à* ν *branches* paru dans les *Annales de l'École Normale*, 1906, p. 263-338, et des travaux de MM. Hadamard et Borel ou de moi, mentionnés à la première page de ce Mémoire. Il est toutefois très utile de se reporter à la Thèse de M. Boutroux.

(2) Thèse de Doctorat, *Acta Math.*, 1903, p. 46, et *C. R.*, 13 janvier 1902, p. 84.

(3) *A. E. N.*, 1906, théorème IV, p. 287 et corollaire II, p. 295.

fini (k ou $\rho > 0$) : si l'on décrit, dans le plan des z, autour de chaque zéro α_n comme centre, un cercle Γ_n de rayon $r_1 = e_{k_1}(r_n^{\tau})^{-1}$ [(k_1, τ) quelconque $> (k, \rho)$ et $|\alpha_n| = r_n$)], en tout point extérieur à ces cercles, dès que $|z| = r$ est assez grand, si $g(z) = \frac{F'(z)}{F(z)}$, on a pour la dérivée $q^{\text{ième}}$ de $g(z)$

$$|g^{(q)}(z)| < e_{k_1}(r^{\tau_1}) \tag{1}$$

[$g^{(0)}(z) = g(z)$, *τ_1 arbitraire avec $(k_1, \tau_1) > (k_1, \tau)$, et, si $k_1 = k = 0$, $\tau_1 > (q+2)\tau$*] (1).

I. — Cas où $q = 0$.

Je vais considérer d'abord un produit canonique $\Phi(z)$ d'ordre $\leqq (k, \rho)$; on a, d'après une formule connue (2),

$$g(z) = \frac{\Phi'}{\Phi} = \sum \frac{z^{\rho_n}}{\alpha_n^{\rho_n}(z - \alpha_n)} \tag{2}$$

et

$$|g(z)| \leqq \sum \left(\frac{r}{r_n}\right)^{\rho_n} \frac{1}{|z - \alpha_n|}, \tag{3}$$

$\frac{\rho_n}{\log n}$ restant limité supérieurement et inférieurement dès que n est assez grand, ou $\rho_n = p =$ const., suivant que Φ n'est pas ou est d'ordre fini.

Je suppose que z soit en dehors des cercles Γ_n et (3), je divise les valeurs de n en trois catégories. Soient $\sum\limits_1, \sum\limits_2, \sum\limits_3$ les sommes des termes du second membre de (3) correspondant à chaque catégorie.

Première catégorie. — Elle est définie par

$$(1 + \lambda) r \geqq r_n \geqq (1 + \lambda)^{-1} r, \tag{4}$$

λ positif fixe.

---

(1) Pour préciser la portée de ce théorème, on remarquera que le théorème IV et son corollaire II des *A. E. N.*, 1906, p. 287 et 295, donnent seulement $|g^{(q)}(z)| \leqq e_{k_1+1}(r^{\tau_2})$, où il est vrai (k_1, τ_2) doit seulement être $> (k, \rho)$. Je ne m'attarde pas à la recherche d'une limite plus avantageuse quand $k = k_1 = 0$.

(2) *Voir*, par exemple, *A. E. N.*, 1906, p. 267, formule (a), et p. 271, 276, où les notations se trouvent expliquées.

(3) Voir *A. E. N.*, 1906, p. 326, où la marche des calculs est assez analogue.

On a

$$\frac{r}{r_n} \leqq 1 + \lambda, \qquad \frac{1}{|z - \alpha_n|} \leqq e_{k_1}(r_n^\tau).$$

Or, puisque Φ est d'ordre $\leqq (k, \rho)$, on a (¹)

$$(5) \qquad r_n^{\rho+\varepsilon} > \log_k n, \qquad n < e_k(r_n^{\rho+\varepsilon});$$

le nombre N des zéros de la première catégorie est

$$(5\ bis) \qquad \mathrm{N} < e_k\{[(1+\lambda)r]^{\rho+\varepsilon}\} < e_k(r^{\rho+\varepsilon_1}),$$

et

$$\sum_1 \left(\frac{r}{r_n}\right)^{\rho_n} \frac{1}{|z-\alpha_n|} < \mathrm{N}(1+\lambda)^{\rho'} e_{k_1}[r^\tau(1+\lambda)^\tau],$$

ρ' étant la plus grande des quantités ρ_n pour la première catégorie.

1° Quand $k > 0$,

$$\rho_n \leqq \theta \log n \qquad (\theta \text{ fixe}) \quad (^2),$$

et

$$(1+\lambda)^{\rho_n} \leqq (1+\lambda)^{\theta \log n} = n^{\theta \log(1+\lambda)} < e_k(r_n^{\rho+\varepsilon})^{\theta\log(1+\lambda)} < e_k(r^{\rho+\varepsilon_2}).$$

2° Quand $k = 0$ (fonctions entières d'ordre fini), ρ_n est un nombre fixe p; soit $k_1 > 0$.

Dans ces deux cas,

$$\sum_1 < e_k(r^{\rho+\varepsilon_1})\, e_k(r^{\rho+\varepsilon_2})\, e_{k_1}(r^{\tau+\varepsilon_3}) < e_{k_1}(r^{\tau+\varepsilon_4}),$$

c'est-à-dire que

$$\sum_1 < e_{k_1}(r^{\tau_1}),$$

où τ_1 est un nombre positif arbitraire tel que $(k_1, \tau_1) > (k_1, \tau)$.

3° Quand $k = k_1 = 0$,

$$\sum_1 < r^{\rho+\varepsilon_1}(1+\lambda)^{p+\tau} r^\tau < r^{2\tau_2},$$

où $\tau_2 > \rho$ et $\tau_2 > \tau$.

(¹) *A. E. N.*, 1906, p. 269.

(²) *Id.*, p. 271.

Deuxième catégorie. — Elle est définie par

$$r_n \leqq (1+\lambda)^{-1} r, \qquad r_n < r, \qquad r - r_n \geqq \lambda r_n :$$

$$\sum_2 \left(\frac{r}{r_n}\right)^{\rho_n} \frac{1}{|z-\alpha_n|} \leqq \sum_2 \left(\frac{r}{r_n}\right)^{\rho_n} \frac{1}{r-r_n} \leqq \frac{1}{\lambda} \sum_2 \left(\frac{r}{r_n}\right)^{\rho_n} \frac{1}{r_n}.$$

1° Quand $k > 0$, le dernier membre est plus petit que

$$\frac{1}{\lambda} \sum_2 \left(\frac{r}{r_n}\right)^{\rho_n+1} < P_r + \frac{1}{\lambda} \sum_2 \left(\frac{r}{r_n}\right)^{2\theta \log n},$$

où P_r est un polynome en r de degré limité. On sait [1] que le dernier membre est plus petit que

$$e_k(r^{\rho+\varepsilon_5}) < e_{k_1}(r^{\tau_1}). \tag{6}$$

2° Quand $k = 0$,

$$\frac{1}{\lambda} \sum_2 \left(\frac{r}{r_n}\right)^{\rho_n} \frac{1}{r_n} = \frac{r^p}{\lambda} \sum \frac{1}{r_n^{p+1}} < a r^p, \qquad a \text{ constante.}$$

Troisième catégorie. — Elle est définie par

$$r_n \geqq (1+\lambda) r, \qquad \frac{r}{r_n} \leqq \frac{1}{1+\lambda}, \qquad 1 - \frac{r}{r_n} \geqq \frac{\lambda}{1+\lambda} :$$

$$\sum_3 \left(\frac{r}{r_n}\right)^{\rho_n} \frac{1}{|z-\alpha_n|} \leqq \sum_3 \left(\frac{r}{r_n}\right)^{\rho_n} \frac{1}{r_n - r} \leqq \frac{1}{\lambda r} \sum_3 \left(\frac{r}{r_n}\right)^{\rho_n}.$$

Quand $k > 0$, on sait (*loc. cit.*) que

$$\sum_3 \left(\frac{r}{r_n}\right)^{\rho_n} < e_k(r^{\rho+\varepsilon_6});$$

quand $k = 0$, d'après (5),

$$\sum_3 \left(\frac{r}{r_n}\right)^{p} \frac{1}{r_n - r} = r^p \sum_3 \frac{1}{r_n^{p+1}} \frac{1}{1-\dfrac{r}{r_n}} \leqq \frac{(1+\lambda) r^p}{\lambda} \sum_3 \frac{1}{r_n^{p+1}} < r^{p+\varepsilon_7}.$$

Finalement, on voit que les sommes $\sum_1, \sum_2, \sum_3$ ont chacune une limite supé-

---

[1] *A. E. N.*, 1906, p. 274.

rieure de la forme indiquée au second membre de (1); il en est donc de même de leur somme et de $|g(z)|$.

Le théorème se trouve ainsi établi pour un produit canonique $\Phi(z)$ quand $q=0$; en observant que la dérivée logarithmique d'une fonction entière d'ordre $\leqq(k, \rho)$ est de la forme

$$\frac{\Phi'}{\Phi}+G'(z),$$

où $G(z)$ et $G'(z)$ sont des fonctions entières d'ordre $\leqq(k-1, \rho)$, ou des polynomes de degré $\leqq \rho$, on en conclut la formule (1) pour $q=0$.

II. — Cas où $q>0$.

Le théorème s'étend de suite aux dérivées successives de $g(z)$: soit d'abord

$$g(z)=\frac{\Phi'}{\Phi} \qquad \text{et} \qquad Z_n=\frac{z^{\rho_n}}{\alpha_n^{\rho_n}(z-\alpha_n)};$$

on a

$$g(z)=\sum Z_n, \qquad g^{(q)}(z)=\sum Z_n^{(q)},$$

$$\begin{aligned}
Z_n^{(q)}=\alpha_n^{-\rho_n}[&\rho_n(\rho_n-1)\ldots(\rho_n-q+1)\,z^{\rho_n-q}(z-\alpha_n)^{-1}\\
&-\rho_n(\rho_n-1)\ldots(\rho_n-q+2)\,C_q^1 z^{\rho_n-q+1}(z-\alpha_n)^{-2}+\ldots\\
&+(-1)^{q-1}\rho_n C_q^1(q-1)!\,z^{\rho_n-1}(z-\alpha_n)^{-q}+(-1)^q q!\,z^{\rho_n}(z-\alpha_n)^{-q-1}].
\end{aligned}$$

Le terme général de $Z_n^{(q)}$ est

$$(-1)^{q-s}\rho_n(\rho_n-1)\ldots(\rho_n-s+1)\,C_q^s(q-s)!\,z^{\rho_n-s}(z-\alpha_n)^{-q+s-1}\alpha_n^{-\rho_n},$$

dont le module est au plus égal à

$$T_{n,s}=\beta\left(\frac{\rho_n}{r}\right)^s\left(\frac{r}{r_n}\right)^{\rho_n}\frac{1}{|z-\alpha_n|^{q+1-s}},$$

β constante convenable >0, et $|g^{(q)}(z)|$ est au plus égal à une somme de quantités de la forme $\sum_1^\infty T_{n,s}$. Je vais évaluer une limite supérieure de $\sum T_{n,s}$ en divisant encore les valeurs de n en trois catégories correspondant à celles qui ont été considérées pour $q=0$.

Première catégorie. — Soit N_1 le nombre des zéros des deux premières catégories : N_1 satisfait comme N à (5 *bis*) et

$$\sum_1 \leqq \sum_s \frac{\beta}{r^s}(1+\lambda)^{\rho'} N_1 \rho'^s e_{k_1}[r^\tau(1+\lambda)^\tau]^{q+1-s};$$

lorsque $k_1 > 0$, on a, comme pour $q=0$,

$$\sum_1 < e_{k_1}(r^{\tau_1});$$

lorsque $k_1 = k = 0$, $\rho_n = p$, et

$$\sum_1 < \beta_1 r^{\tau(q+2)} < r^{\tau_2(q+2)}$$

(β_1, β_2, ... comme β, τ_2, τ_3, ... comme τ et $> \tau$).

Deuxième catégorie. — Quand $k > 0$,

$$\sum_2 < \sum_s \left[\frac{\beta}{r^s} \sum \rho_n^s \left(\frac{r}{r_n}\right)^{\rho_n} \frac{1}{(\lambda r_n)^{q+1-s}}\right] < \sum_s \left[\frac{\beta_2}{r^s} \sum \left(\frac{r}{r_n}\right)^{\rho_n} \rho_n^s\right];$$

$$\sum \left(\frac{r}{r_n}\right)^{\rho_n} \rho_n^s = \sum \left(\frac{r}{r_n}\right)^{\rho_n} e^{s \log \rho_n} < \beta_3 \sum \left(\frac{r e^q}{r_n}\right)^{\rho_n} < e_{k_1}(r^{\tau_3}),$$

d'après (6), et

$$\sum_2 < e_{k_1}(r^{\tau_1});$$

quand $k=0$, $\rho_n = p$,

$$\sum_2 < \sum_s \left[\frac{b}{r^s} \sum \left(\frac{r}{r_n}\right)^p \frac{1}{r_n^{q+1-s}}\right] = \sum_s \left(b r^{p-s} \sum r_n^{-p-q-1+s}\right) < b_1 r^p$$

(b, b_1, b_2, ... constantes).

Troisième catégorie. — Quand $k > 0$,

$$\sum_3 < \sum_s \left[\frac{\beta}{r^s} \sum \rho_n^s \left(\frac{r}{r_n}\right)^{\rho_n} \frac{1}{(\lambda r)^{q+1-s}}\right] \leqq \sum_s \left[\frac{b_2}{r^{q+1}} \sum \rho_n^s \left(\frac{r}{r_n}\right)^{\rho_n}\right],$$

et, comme pour $\sum_2$,

$$\sum_3 < e_{k_1}(r^{\tau_1}).$$

Quand $k=0$,

$$\sum_3 < \sum_s \left[b_3 r^{-s} \sum \left(\frac{r}{r_n}\right)^p \frac{1}{(r_n - r)^{q+1-s}} \right]$$
$$\leqq \sum_s \left[b_3 r^{p-s} \sum \frac{r_n^{-p-q-1+s}}{\left(1-\frac{r}{r_n}\right)^{q+1-s}} \right] < \sum_s \left(b_4 r^{p-s} \sum r_n^{-p-q-1+s} \right) < b_5 r^p.$$

$\sum_1, \sum_2, \sum_3$ ayant ainsi une limite supérieure de la forme indiquée au second membre de (1), il en est de même de leur somme et de

$$g^{(q)}(z) = \left(\frac{\Phi'}{\Phi}\right)^{(q)} = \sum Z_n^{(q)};$$

le théorème est ainsi établi quel que soit q quand $F(z)$ est un produit canonique. On l'étend encore sans difficulté au cas où $F(z)$ est une fonction entière quelconque. C. Q. F. D.

Corollaire I. — *Quand on prend pour* $F(z)$ *une fonction monodrome, qui n'a dans le domaine du point singulier essentiel isolé* $z=\infty$ *d'autres points critiques à distance finie que des pôles, et qui y est d'ordre* $\leqq (k, \rho)$, *la formule* (1) *subsiste dans ce domaine pour* $g^{(q)}(z)$, *en dehors des cercles* Γ_n *correspondant à la fois aux zéros et aux pôles de* $F(z)$.

En effet :

1° Si $F = \frac{f}{f_1}$ est une fonction méromorphe, f, f_1 étant des fonctions entières d'ordre $\leqq (k, \rho)$, on a

$$g(z) = \frac{f'}{f} - \frac{f'_1}{f_1}$$

et

$$g^{(q)}(z) \leqq \left| \left(\frac{f'}{f}\right)^{(q)} \right| + \left| \left(\frac{f'_1}{f_1}\right)^{(q)} \right|.$$

2° Si F est une fonction monodrome n'ayant dans le domaine du point essentiel isolé $z=\infty$ que des pôles, et qui y est d'ordre $\leqq (k, \rho)$, on a [1]

$$F = e^{\psi\left(\frac{1}{z}\right)} Q(z), \tag{6 bis}$$

où $Q(z)$ est une fonction méromorphe d'ordre $\leqq (k, \rho)$, et où $\psi\left(\frac{1}{z}\right)$ reste fini ainsi

[1] *Bull. Soc. math.*, 1903, p. 31 et 41.

que ses dérivées successives, dans le domaine de $z = \infty$. Alors

$$(7) \qquad \frac{d^q}{dz^q}\left(\frac{F'}{F}\right) = \frac{d^{q+1}}{dz^{q+1}}\left[\psi\left(\frac{1}{z}\right)\right] + \frac{d^q}{dz^q}\left(\frac{Q'}{Q}\right),$$

et le corollaire est évident. C. Q. F. D.

On peut encore trouver une limite inférieure du module de $g(z)$ et de ses dérivées sur une infinité de circonférences C ayant pour centre l'origine dans le plan complexe des z; je vais reprendre avec ma terminologie les méthodes de M. Boutroux, et, en les précisant un peu, aboutir au théorème suivant :

Théorème II. — *Soit* $F(z)$ *une fonction entière d'ordre réel non transfini* $\geqq (k, \rho)$; *on peut déterminer une infinité de couronnes circulaires ayant pour centre l'origine, et telles que, sur toute circonférence* C *de même centre comprise dans une de ces couronnes, le maximum* $m_{r,q}$ *du module de* $g^{(q)}(z)$ *soit* $> e_k(r^\sigma)$ $\left[g(z) = \frac{F'}{F}\right.$, σ *fixe arbitraire* $< \rho$ *quand* $k > 0$, σ *fixe arbitraire* $\left.< \rho - q - 1 \text{ quand } k = 0\right]$. *L'épaisseur totale de ces couronnes est infinie.*

De plus, quand la croissance du produit canonique ayant mêmes zéros que $F(z)$ *est régulière, cette propriété a lieu pour toute valeur de* r *assez grande* (¹).

Le théorème est évidemment vrai pour les circonférences C qui passent par un zéro. Soit α_j un des zéros, en nombre infini, pour lequel (²)

$$(8) \qquad r_j^{\rho-\varepsilon} \leqq \log_k j, \qquad j \geqq e_k(r_j^{\rho-\varepsilon})$$

(r_j assez grand, ε positif fixe).

Sur une circonférence C ayant pour centre l'origine, qui ne rencontre aucun zéro et est de rayon $r > r_j$ et $< r_j^{1+2\varepsilon}$, on a (³)

$$(9) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_C g(z)\,dz = n \geqq j,$$

n étant le nombre des zéros à l'intérieur de C. Si m_r est le maximum du module

---

(¹) Il convient de remarquer que, à l'extérieur des cercles Γ'_n analogues à ceux indiqués au théorème I ci-dessus, le théorème IV et son corollaire II des *Annales de l'École normale*, 1906, p. 287 et 295, donnent

$$|g^{(q)}(z)| > e_{k_1+1}(r^{\tau_2})^{-1}$$

[τ_2 arbitraire, avec $(k_1, \tau_2) > (k, \rho)$], lorsque $F(z)$ est d'ordre (k, ρ).

(²) *A. E. N.*, 1906, corollaire de la page 275 et p. 271.

(³) *Voir* Boutroux, *Thèse*, p. 55. La méthode de M. Boutroux montre aussi que, sur une circonférence quelconque C′ ayant pour centre l'origine, $m_r \geqq nr^{-1}$.

de $g(z)$ sur C,

$$(10) \qquad r m_r \geqq n \geqq j \geqq e_k(r^{\rho-\varepsilon_2});$$

si $k > 0$,

$$m_r > e_k(r^{\rho-\varepsilon_3});$$

si $k = 0$,

$$m_r > r^{\rho-1-\varepsilon_3}.$$

Cette inégalité est vraie pour les circonférences comprises dans les couronnes d'épaisseur

$$\sum (r_j^{1+2\varepsilon} - r_j - \varepsilon);$$

l'épaisseur totale de ces couronnes est évidemment infinie.

En particulier, quand la croissance du produit canonique $\Phi(z)$ ayant les mêmes zéros que $F(z)$ est régulière, les limites inférieures de m_r obtenues pour $F(z)$ s'appliquent à toute circonférence dont le rayon est assez grand (*A. E. N.*, 1906, p. 311 et 313).

On obtient des résultats semblables pour $g^{(q)}(z)$, en considérant l'intégrale [1]

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C z^q g^{(q)}(z)\,dz.$$

On a [2]

$$g(z) = \sum_C \left(\frac{1}{z-\alpha_i} + \frac{1}{\alpha_i} + \frac{z}{\alpha_i^2} + \ldots + \frac{z^{\rho_i-1}}{\alpha_i^{\rho_i}}\right) + R,$$

R correspondant à la fois à une partie du facteur exponentiel de $F(z)$ et aux zéros de $F(z)$ extérieurs à C.

$$g^{(q)}(z) = (-1)^q q! \sum_C (z-\alpha_i)^{-q-1} + S,$$

S n'ayant aucun pôle dans C.

$$(11) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_C z^q g^{(q)}(z)\,dz = \frac{(-1)^q q!}{2\pi i}\sum_C \int_C (z-\alpha_i+\alpha_i)^q (z-\alpha_i)^{-q-1}\,dz$$

$$= \frac{(-1)^q q!}{2\pi i}\sum_C \int_C (z-\alpha_i)^{-1}\,dz = (-1)^q q!\, n.$$

En désignant par $m_{r,q}$ le maximum du module de $g^{(q)}(z)$ sur C, on a

$$(12) \qquad r^{q+1} m_{r,q} \geqq q!\, n \geqq q!\, j \geqq e_k(r^{\rho-\varepsilon_2});$$

---

(1) BOUTROUX, *Thèse*, p. 72.
(2) *A. E. N.*, 1906, p. 267.

si $k > 0$,

$$m_{r,q} > e_k(r^{\rho-\varepsilon_4});$$

si $k = 0$,

$$m_{r,q} > r^{\rho-q-1-\varepsilon_5}.$$

Ces inégalités ont évidemment lieu pour toute valeur de r assez grande quand la croissance de $\Phi(z)$ est régulière. C. Q. F. D.

Corollaire I. — *Le théorème II s'applique encore dans le domaine de $z = \infty$, quand* $F(z)$ *est une fonction quasi-entière dans ce domaine, c'est-à-dire une fonction monodrome, qui n'a dans ce domaine qu'un seul point critique, d'ailleurs essentiel,* $z = \infty$.

En effet, on a, dans ce domaine (1),

$$F(z) = z^{-c} e^{\psi\left(\frac{1}{z}\right)} Q(z), \qquad c \text{ entier fixe} \geqq 0,$$

où $Q(z)$ est une fonction entière, et $\psi\left(\frac{1}{z}\right)$ une série ordonnée suivant les puissances croissantes de $\frac{1}{z}$ qui reste finie dans le domaine de $z = \infty$ ainsi que ses dérivées. Le corollaire résulte de suite de la formule (7) et des formules (9) à (12); (9) par exemple est remplacée par

$$(9\ bis) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_C g(z)\,dz = n - c \geqq j - c,$$

n étant le nombre des zéros dans le cercle C. C. Q. F. D.

Pour les fonctions $F(z)$ méromorphes et quasi-méromorphes dans le domaine de $z = \infty$, la question de l'extension du théorème II est beaucoup plus délicate.

Je suppose que l'ordre réel des zéros ou celui des pôles, par suite (*A. E. N.*, 1906, p. 306) l'ordre réel de $F(z)$, soit $\geqq (k, \rho)$.

En considérant une circonférence C_1 qui ne passe par aucun zéro ni aucun pôle, on obtient, au lieu de (9), la formule

$$(13) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} g(z)\,dz = n - m,$$

où m est le nombre des pôles, n le nombre des zéros, compris dans C_1 pour la fonction méromorphe $Q(z)$ de la formule (6 *bis*), et

$$(14) \qquad r m_r \geqq |n - m|;$$

(1) *Bull. Soc. math.*, 1906, p. 31.

de même,

$$r^{q+1} m_{r,q} \geqq | n - m | . q! . \tag{15}$$

Si alors les ordres réels des zéros et des pôles n'ont pas même valeur, ces ordres n'étant pas transfinis, le raisonnement du théorème II reste applicable, en prenant (k, ρ) plus grand que le plus petit de ces ordres, à cause de (5), qui donne une limite supérieure de la plus petite des quantités n et m dans la couronne considérée au théorème II.

Formant alors les deux produits canoniques ayant pour zéros, l'un les zéros, l'autre les pôles de $Q(z)$ [formule (6 *bis*)], si celui de ces deux produits dont l'ordre, supposé non transfini, est le plus grand, a sa croissance régulière (*A. E. N.*, 1906, p. 311 et 313), le théorème II s'applique pour toute valeur de r assez grande.

On peut résumer ainsi la plus grande partie de ces résultats :

Corollaire II. — *Soit*

$$F(z) = e^{\Psi\left(\frac{1}{z}\right)} Q(z), \tag{6 bis}$$

où $Q(z)$ *est méromorphe, une fonction monodrome, qui est quasi-méromorphe dans le domaine de* $z = \infty$.

Soient encore (k_1, ρ_1), (k_2, ρ_2) *les ordres réels des zéros et des pôles de* $Q(z)$, *supposés différents et non transfinis, et* (k, ρ) *arbitraire compris entre* (k_1, ρ_1) *et* (k_2, ρ_2); $\varphi_1(z)$ *et* $\varphi_2(z)$ *les produits canoniques formés avec ces zéros et ces pôles. On a, comme au théorème* II, *sur les circonférences* C,

$$m_{r,q} > e_k(r^\sigma).$$

L'épaisseur totale des couronnes formées des circonférences C *est infinie.*

Soit $\varphi_i(z)$ *celui des deux produits* φ_1 *et* φ_2 *dont l'ordre est maximum : quand la croissance de* φ_i *est régulière, cette limite inférieure s'applique pour toute valeur de* r *assez grande.*

Quand on ne suppose rien sur la valeur des ordres réels, il suffira que, dans une infinité des circonférences C_1, $n \neq m$, pour que l'on obtienne, d'après (15),

$$m_{r,q} \geqq q!\, r^{-q-1}. \tag{16}$$

Cette inégalité ne sera en défaut que si, à partir d'une certaine valeur de n, on a $n = m$, c'est-à-dire si, α_i et β_i désignant le $i^{\text{ème}}$ zéro et le $i^{\text{ème}}$ pôle de $Q(z)$, on a, à partir d'une certaine valeur de i,

$$|\alpha_i| = |\beta_i|.$$

Dans ce cas j'indiquerai seulement que la considération de l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C z^{\lambda+q} g^{(q)}(z)\,dz$$

peut parfois donner encore une limite inférieure de $m_{r,q}$, si toutefois $\alpha_i^\lambda - \beta_i^\lambda$ ne tend pas vers o quand i croît indéfiniment.

III.

Je terminerai en signalant une application des résultats précédents : c'est une extension de propriétés que j'ai fait connaître antérieurement ([1]).

Soit le système

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{dx_1}{dz} = a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{dx_n}{dz} = a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n, \end{array}\right.$$

où les a_{ij} sont des fonctions quasi-méromorphes $f_{ij}(z)$ dans le domaine de $z = \infty$ satisfaisant à la même inégalité (1) du théorème I que $g^{(q)}(z)$ en dehors des cercles Γ_n correspondant aux zéros et aux pôles des a_{ij}; les a_{ij} seront, par exemple, des dérivées d'ordre quelconque du logarithme de fonctions quasi-méromorphes d'ordre (k, ρ).

En tout point pris en dehors des cercles Γ_i, dès que $r = |z|$ est assez grand, on a

$$|x_j| < e_{k_1+1}(r^{\tau_2}),$$

où τ_2 est limité en fonction de τ_1.

Il suffit de suivre presque textuellement la démonstration de la propriété mentionnée tout à l'heure.

Enfin, j'indiquerai comme sujet d'études que l'on peut encore chercher à étendre aux fonctions entières d'ordre transfini, soit les résultats précédents, soit le théorème IV et le corollaire II de mon Mémoire des *Annales de l'École Normale* (1906). Il conviendra sans doute de modifier les démonstrations en s'inspi-

([1]) *A. E. N.*, 1906, p. 324 et suiv.

rant des idées de MM. Hadamard, Borel et Kraft. Je mentionnerai, par exemple, que j'ai obtenu une extension du théorème IV des *Annales de l'École Normale* (1906) aux produits canoniques [1] P d'ordre transfini, en dehors de cercles Γ_i de rayon $\psi(\tau r_i)^{-1}$, où τ est un nombre fixe assez grand et $\psi(r)$ une fonction qui est en corrélation avec $\log M_r$, M_r étant le maximum du module de P sur un cercle de rayon r.

---

(1) Supposés définis comme pour l'ordre non transfini (*A. E. N.*, 1906, p. 271 et 276).