ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

HENRI DULAC

Sur les points singuliers d'une équation différentielle

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 3e série, tome 1 (1909), p. 329-379

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1909_3_1__329_0>

SUR LES POINTS SINGULIERS

D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE,

PAR HENRI DULAC,

Professeur à l'Université d'Alger.

[**1**] *Introduction.* — Le problème qui fait l'objet de ce mémoire est le suivant. Étant donnée une équation

$$Y(x, y)\,dy + X(x, y)\,dx = 0 \tag{1}$$

où, en désignant par $X_i(x, y)$ et $Y_i(x, y)$ des polynomes homogènes et de degré égal à l'indice, on a

$$\begin{aligned} Y(x, y) &= Y_n(x, y) + Y_{n+1}(x, y) + \ldots, \\ X(x, y) &= X_n(x, y) + X_{n+1}(x, y) + \ldots, \end{aligned}$$

reconnaître si le point singulier $x = 0$, $y = 0$ est un *point singulier algébrique,* c'est-à-dire chercher les conditions nécessaires et suffisantes que doivent vérifier les coefficients de l'équation (1) pour que toutes les solutions $y(x)$ de l'équation telles que l'on ait $y = 0$. pour $x = 0$, soient algébroïdes pour $x = 0$. Si n est égal à 1, on sait que la solution de cette question est immédiate, dans la presque totalité des cas, puisque l'intégrale générale de l'équation est donnée par une relation de la forme

$$(ax + by + \ldots)(a'x + b'y + \ldots)^{\lambda} = C. \tag{2}$$

Dès que n est supérieur à 1, la solution du problème posé présente diverses difficultés provenant des circonstances suivantes : 1° on ne connaît pas, en général, comme pour $n = 1$, de relation donnant l'intégrale générale de l'équation (1) pour des valeurs de x et y voisines de 0; 2° il peut exister des solutions $y(x)$ telles que $y : x$ ne tend vers aucune limite finie ou infinie, lorsque x et y tendent simultanément vers 0.

Pour traiter le problème posé et pour me rendre compte que je ne pouvais le résoudre à l'aide de certaines méthodes plus simples que celles que j'ai employées, j'ai été amené à préciser l'étude de certaines catégories de solutions de l'équation différentielle (1) et l'étude de certaines formes que l'on peut donner parfois à l'intégrale générale de cette équation. Ces formes d'intégrales, déjà introduites dans un mémoire précédent, sont les suivantes :

$$x^{\lambda_0}[1 + A(x, y)] \prod_{i=1}^{q} (y + \varphi_i)^{\lambda_i} = C, \tag{3}$$

$$x[1 + xB_1 + x^2B_2 + \ldots] \prod_{i=1}^{p} (t + a_i)^{\mu_i} = C. \tag{4}$$

On a posé $t = y : x$; p et q sont des entiers, les nombres a_i, λ_0, λ_i et μ_i sont des constantes, les φ_i sont des fonctions de x holomorphes et nulles pour $x = 0$; $A(x, y)$ est une fonction de x et y holomorphe et nulle pour $x = 0$, $y = 0$; B_1, B_2, B_3, ... sont des fractions rationnelles en t.

Par cette étude, j'obtiens des résultats qui, en dehors de l'utilité qu'ils présentent pour la résolution du problème posé, me paraissent présenter un intérêt général puisqu'ils complètent l'étude de formes d'intégrales auxquelles, ainsi que je l'ai montré et ainsi que le montre encore ce mémoire, correspondent, dans le voisinage de $x = 0$, $y = 0$, des propriétés caractéristiques des solutions $y(x)$ de l'équation différentielle. Ces résultats complètent donc, ainsi qu'on le verra, l'étude des solutions considérées. Je m'en suis tenu, dans ce mémoire, à l'étude des solutions $y(x)$ pour lesquelles on a $y = 0$ pour $x = 0$. Bien que ce soit là un point de vue assez restrictif, les solutions en question me paraissent devoir jouer un rôle assez important, et leur étude présente assez de complexité pour qu'on puisse s'en occuper particulièrement.

Voici quelques indications sommaires sur les questions traitées dans les cinq parties de ce mémoire.

I. En précisant la forme des équations que l'on obtient dans la recherche des solutions $y(x)$ algébroïdes et nulles pour $x = 0$, je mets en évidence, dans certains cas, des catégories de solutions $y(x)$ de l'équation (1) qui sont nulles pour $x = 0$, mais présentent pour $x = 0$ des singularités transcendantes diverses.

II. J'étudie les propriétés pour $x = 0$ des fonctions $y(x)$ vérifiant une relation de la forme (3). Il résulte de cette discussion qu'il y a incompatibilité entre cette forme d'intégrale et certaines des singularités que nous avons rencontrées dans I.

III. J'examine diverses questions relatives à la forme (3) d'intégrale générale : nombre q des facteurs $(y + \varphi_i)^{\lambda_i}$ qui figurent dans (3), choix de ces facteurs, convergence de $A(x, y)$, cas où il ne peut exister deux intégrales de cette forme, cas où il existe deux intégrales de cette forme.

IV. J'ai fait voir que, dans un grand nombre de cas, s'il existe une intégrale de la forme (4), il existe une intégrale de la forme (3). J'étudie les cas où il peut ne pas en être ainsi. Je suis conduit, pour généraliser le résultat obtenu, à introduire une forme d'intégrale intermédiaire entre (3) et (4).

V. Je forme dans tous les cas des conditions nécessaires pour que $x=0$, $y=0$ soit un point singulier algébrique de l'équation (1). Je montre que, dans une catégorie très étendue de cas, les conditions trouvées sont suffisantes pour que $x=0$, $y=0$ soit un point algébrique(¹). Les restrictions que nous sommes obligés de faire dans cette démonstration n'ont rien d'étonnant, car déjà, dans le cas de $n=1$, on est obligé de faire des restrictions analogues pour démontrer rigoureusement la réciproque en question.

[**2**] *Notations.* — Il me paraît utile d'indiquer, afin d'éviter des répétitions fastidieuses, certaines notations que, sauf avis contraire, j'emploierai dans ce mémoire. Je renverrai à ce paragraphe **2**, lorsqu'il pourra y avoir doute dans l'emploi des notations :

1° $A_i(x, y)$, $X_i(x, y)$, $P_i(x, y)$, ou une majuscule quelconque affectée d'un indice et précédant le signe (x, y), désignera un polynome homogène en x et y dont le degré est égal à l'indice i. Afin de disposer de symboles plus nombreux permettant d'établir une concordance entre différentes notations, j'emploierai avec le même sens $\overline{A}(x, y)$, ..., $A'(x, y)$, ...

2° $A(x, y)$, ou toute autre majuscule sans indice précédant le signe (x, y), désignera une fonction de x et y holomorphe et nulle pour $x=0$, $y=0$. $\overline{A}(x, y)$, $A'(x, y)$, ... auront la même signification.

3° Je désignerai par φ, ψ, χ, θ ou φ_i, ψ_i, χ_i, θ_i des fonctions de la seule variable x, holomorphes et nulles pour $x=0$. Les seules lettres φ, ψ, χ et θ, affectées ou non d'indice, auront cette signification. L'indice i servira à distinguer différentes fonctions les unes des autres sans avoir aucune autre signification.

4° Je poserai

$$A(x|t) = xA_1 + x^2A_2 + x^3A_3 + \dots, \tag{5}$$

(¹) On trouvera incidemment des exemples simples de points singuliers qui dégénèrent en singularités algébriques dans deux importants travaux de M. P. BOUTROUX parus pendant la rédaction de mon mémoire : *Leçons sur les fonctions définies par les équations différentielles du premier ordre;* — *Équations différentielles et fonctions multiformes.* [Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, t. XXIX.]

$A_1, A_2, A_3, \ldots$, étant des fractions rationnelles en t. Au lieu de la lettre A, j'emploierai également avec la même signification une majuscule quelconque.

5° Si l'équation (1) admet une intégrale générale de la forme (3), nous dirons qu'elle admet une intégrale $f\overline{x, y}$. Cette intégrale peut évidemment se mettre encore sous la forme

$$x^{\lambda_0} e^{\overline{A}(x,y)} \prod_{i=1}^{q} (y + \varphi_i)^{\lambda_i} = C \tag{6}$$

en posant

$$\overline{A}(x, y) = \log[1 + A(x. y)].$$

6° Si, en posant $y = tx$, l'équation (1) admet une intégrale générale de la forme (4), ou

$$x[1 + A(x|t)] \prod_{i=1}^{p} (t + a_i)^{\mu_i} = C, \tag{7}$$

nous dirons que l'on a une intégrale $L\overline{x, t}$. Cette intégrale peut se mettre sous la forme

$$x e^{\overline{A}(x|t)} \prod_{i=1}^{p} (t + a_i)^{\mu_i} = C,$$

en posant

$$\overline{A}(x, t) = \log[1 + A(x|t)].$$

7° Si l'équation (1) admet une intégrale $L\overline{x, t}$, c'est-à-dire de la forme (7), nous verrons que les seules valeurs de t qui puissent être des pôles des fractions $A_1, A_2, A_3, \ldots$ sont les valeurs $t = -a_1$, $t = -a_2$, $\ldots$, $t = -a_p$. Si aucune des fractions rationnelles $A_1, A_2, A_3, \ldots$ n'admet $t = -a_j$ comme pôle, j ayant l'une des valeurs, 1, 2, $\ldots$, p, nous dirons que nous avons une intégrale $R\overline{x, t}$ *régulière* pour $t = -a_j$. On aura une intégrale *régulière pour toutes les valeurs de* t, si $A_1, A_2, A_3, \ldots$ sont des polynomes en t.

8° Nous pouvons, en divisant au besoin les deux membres de l'équation (1) par une constante, supposer que l'on a

$$yY_n(x, y) + xX_n(x, y) = x^r \prod_{i=1}^{p} (y + a_i x)^{r_i}. \tag{8}$$

Les droites $x = 0$, $y + a_i x = 0$ s'appelleront tangentes du point singulier $x = 0$, $y = 0$. La droite $y + a_i x = 0$ sera une tangente simple si l'on a $r_i = 1$. Elle sera une tangente multiple si l'on a $r_i > 1$.

9° J'appellerai *solution* une fonction $y(x)$ vérifiant l'équation (1). Ce mot solution remplacera à la fois les mots *caractéristique* et *intégrale* que j'avais employés pour désigner une fonction vérifiant l'équation (1). Le mot caractéristique se rapportait au cas où x tend vers o suivant un chemin déterminé et le mot intégrale au cas où x tend vers o d'une façon quelconque. Je réserverai ici le mot d'intégrale pour désiguer une relation telle que (3) ou (7) fournissant l'intégrale générale de (1) dans le voisinage de $x=0$, $y=0$.

J'aurai, dans la suite, à renvoyer parfois à certains de mes mémoires précédents; je le ferai en employant les abréviations indiquées ci-dessous :

A. U. G. Intégrales d'une équation différentielle. [Annales de l'Université de Grenoble, t. XVII (1905), pp. 1-52.]

B. D. Détermination et intégration d'une certaine classe d'équations différentielles. [Bulletin des Sciences mathématiques, 2e série, t. XXXII (1908), 1re partie, pp. 230-252.]

J. E. P. Recherches sur les points singuliers des équations différentielles. [Thèse, Paris (1903), et Journal de l'École polytechnique, 2e série, 9e cahier (1904), pp. 1-126.]

J. M. Sur les points dicritiques. [Journal de Mathématiques pures et appliquées, 6e série, t. II, vol. 61 (1906), pp. 381-403.]

R. C. M. P. Intégrales passant par un point singulier. [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XXVII (1909), pp. 337-373.]

I. — Solutions de l'équation (1).

[3] *Solutions holomorphes.* — Rappelons, en les groupant d'une manière commode pour notre étude, les résultats obtenus dans la recherche des solutions $y(x)$ de l'équation (1) qui sont algébroïdes et nulles pour $x=0$ [2].

Nous savons qu'il existe un entier m_1 tel que si l'on pose $x=x_1^m$ toutes les solutions $y(x)$ algébroïdes et nulles pour $x=0$ deviennent des solutions $y(x_1)$ holomorphes et nulles pour $x_1=0$. Nous aurons donc toujours le droit de supposer et nous supposerons en général dans la suite, pour simplifier, que toutes les solutions algébroïdes passant par $x=0$, $y=0$ sont holomorphes pour $x=0$.

Il nous sera également parfois commode de supposer que $x=0$ n'est pas une courbe intégrale de l'équation (1) ou encore que $yY_n(x, y)+xX_n(x, y)$ ne contient

---

[2] On pourra consulter, à ce sujet, un mémoire de M. Autonne (*Journal de l'École polytechnique*, 1897) et les deux mémoires *J. E. P.* et *A. U. G.* que j'ai cités § 2.

pas x en facteur. Nous pourrons toujours faire qu'il en soit ainsi en effectuant, s'il y a lieu, un changement de variable de la forme

$$x = x_1 + ay.$$

Nous savons (voir *J. E. P.*, p. 89, et *A. U. G.*, p. 14) qu'au moyen d'un changement de variable

$$(9) \qquad y = \varphi(x) + zx^m$$

où m est un entier et où $\varphi(x)$ est soit un polynome nul pour $x = 0$, soit une fonction de x holomorphe et nulle pour $x = 0$[3], toute solution $y(x)$ passant par $x = 0$, $y = 0$ est fournie par une solution $z(x)$ holomorphe pour $x = 0$, vérifiant une équation ayant l'une des formes suivantes, où a désigne une constante qui n'est pas nulle, s un entier plus grand que 1, et où $f(z)$, $F(x, z)$, $G(x, z)$ sont des fonctions soit de z seul, soit de x et de y, holomorphes pour $x = 0$, $z = 0$ (ces fonctions peuvent ne pas être nulles pour $x = 0$, $z = 0$) :

$$(10) \qquad xdz + [-az + z^2 f(z) + xF(x, z)]\,dx = 0,$$

$$(11) \qquad xdz + [az^s + z^{s+1} f(z) + xF(x, z)]\,dx = 0,$$

$$(12) \qquad x^s dz + [az + z^2 f(z) + xF(x, z)]\,dx = 0,$$

$$(13) \qquad [P(z) + xF(x, z)]\,dz + [Q(z) + xG(x, z)]\,dx = 0.$$

Dans cette dernière équation, P et Q sont des polynomes en z, $Q(z)$ peut être identiquement nul, mais il ne peut en être ainsi de $P(z)$.

D'après la manière dont les équations (10), (11) et (12) sont obtenues, nous n'avons à considérer que les solutions $z(x)$ de ces équations qui sont nulles pour $x = 0$. Pour l'équation (13), nous devons considérer toutes les solutions pour lesquelles z prend pour $x = 0$ une valeur finie z_0. A chaque valeur z_0, choisie arbitrairement, correspond une solution $z(x)$ telle que $z(0) = z_0$[4]. Il est évident, en effet, qu'à une valeur z_0 n'annulant pas simultanément $P(z)$ et $Q(z)$ correspond une solution $z(x)$ et une seule : le théorème de Cauchy est en effet applicable. Cette solution, si l'on faisait le changement de variable $z = z_0 + xz_1$ serait obtenue au moyen d'une équation en z_1 et x qui a la forme (10), mais cette façon d'obtenir ces solutions n'entraînerait que des complications inutiles et nous obligerait en particulier à considérer un nombre infini d'équations (10), au lieu d'un nombre fini d'équations (10) et (13). Nous n'emploierons donc pas cette façon d'obtenir les solutions qui correspondent à

---

[3] On peut toujours prendre pour $\varphi(x)$ un polynome de degré inférieur à $m + 1$, mais il nous sera utile de considérer le cas où $\varphi(x)$ contient un nombre fini ou infini de termes de degré supérieur à m.

[4] C'est parce que nous supposons que toutes les solutions algébroïdes et nulles pour $x = 0$ sont des solutions holomorphes pour $x = 0$ que nous n'avons pas à considérer le cas où z_0 est infini. Pour la même raison, il n'y a pas de valeur z_0 annulant $P(z)$ sans annuler $Q(z)$.

des valeurs ordinaires de z_0. Au contraire, pour rechercher les solutions $z(x)$ prenant pour $x=0$ une valeur singulière z_0 qui annule à la fois $P(z)$ et $Q(z)$, nous poserons $z=z_0+y_1$ et nous opérerons comme dans la recherche des solutions $y(x)$ de l'équation (1). Nous serons conduits à faire un certain nombre de changements de variable de la forme

$$z=\psi(x)+x^m z_1$$

où $\psi(x)$ est un polynome de degré au plus égal à m, tel que $\psi(0)=z_0$. Les solutions holomorphes $z(x)$ telles que $z(0)=z_0$ seront fournies par les solutions holomorphes $z_1(x)$ d'équations en z_1 et x qui seront de l'une des formes (10), (11), (12) ou (13). Nous pourrons, par suite, dans l'équation (13) d'où nous partons, ou dans les équations de la forme (13) que nous rencontrons dans la recherche des solutions relatives à une valeur singulière z_0, ne pas considérer les solutions relatives à des valeurs singulières z_0. Ces solutions peuvent toujours être obtenues à l'aide d'un nombre fini d'équations de la forme (10), (11) ou (12).

Les solutions $y(x)$ fournies par les solutions $z(x)$ d'une équation (13) peuvent avec avantage être considérées comme obtenues de la façon suivante. Au lieu du changement de variable (9) qui fournit l'équation (13), faisons le changement de variable

$$y=\varphi(x)+z_1 x^{m-1}. \tag{14}$$

Aux solutions $z(x)$, prenant pour $x=0$ une valeur finie, correspondent des solutions $z_1(x)$ nulles pour $x=0$ de la nouvelle équation en z_1 et x. Cette équation sera telle qu'à une valeur arbitraire z_0 corresponde une solution $z_1(x)$ pour laquelle $z_1 : x$ tend vers z_0 lorsque x tend vers 0. Cette équation sera donc une équation à *point dicritique*, c'est-à-dire de la forme

$$[xA_r(x, z_1)+\ldots]dz_1+[-z_1A_r(x, z_1)+\ldots]dx=0 \tag{15}$$

où nous n'écrivons que les termes de moindre de degré et où A_r désigne un polynome homogène de degré r en x et z_1. Le changement de variable (14) ne se distinguant que par les notations du changement de variable (9), nous pouvons dire que les solutions $y(x)$ holomorphes et nulles pour $x=0$ de l'équation (1) sont, au moyen de changements de variable de la forme (9), fournies par les solutions $z(x)$ holomorphes et nulles pour $x=0$ d'un certain nombre d'équations de la forme (10), (11), (12) ou (15).

On voit sans peine que si on considère l'équation (13) et l'équation (15) qui se correspondent par le changement de variable $z_1=zx$, on a $P(z)=A_r(1, z)$; on voit également que les valeurs singulières z_0 annulant à la fois $P(z)$ et $Q(z)$ correspondent à ce que j'ai appelé (voir *J. M.*, p. 386) *directions singulières* $z_1-z_0x=0$ du point dicritique de l'équation (15). Tandis que nous considérerons toujours les solutions $z_1(x)$ tangentes aux directions non singulières comme fournies directement par l'équation (15), sans avoir recours pour les obtenir à des équations de la forme (10), (11) ou (12), nous supposerons, d'après ce que nous avons dit plus haut, que les solutions tangentes à une direction singulière sont fournies par l'intermédiaire d'une équation (10), (11) ou (12).

L'équation (10) admet, si a n'est pas un entier positif, une solution $z(x)$ et une seule holomorphe et nulle pour $x=0$. Si a est un entier positif[5], l'équation (10) admet zéro ou une infinité de solutions holomorphes. On sait, en effet, que le cas où a est un entier se ramène au cas où a est égal à 1 et que, par suite, un changement de variable, convenablement choisi, de la forme (9) conduit à obtenir les solutions holomorphes $y(x)$ fournies par l'équation (10), au moyen d'une équation de la forme

$$(16) \qquad xdz + (-z + bx + \ldots)dx = 0$$

où les termes de moindre degré de la parenthèse sont seuls écrits. Si b est nul, il y a une infinité de solutions holomorphes fournies par cette équation (16), qui est alors une équation à point dicritique, c'est-à-dire de la forme (15) avec $A_r(x, y) = 1$. Si b n'est pas nul, l'équation (16) n'a pas de solutions holomorphes. Puisque les solutions holomorphes fournies par (10), dans le cas où a est un entier positif, peuvent (lorsqu'elles existent) être obtenues au moyen d'une équation de la forme (15), nous réserverons l'équation (10) pour le cas où a n'est pas un entier positif. D'après la note précédente, ce n'est pas non plus un nombre fractionnaire positif.

En résumé, des changements de variable de la forme (9) fourniront toutes les solutions de (1) holomorphes et nulles pour $x=0$ au moyen des solutions $z(x)$ holomorphes et nulles pour $x=0$ d'un certain nombre d'équations de l'une des formes (10), (11), (12) ou (15). Dans (10), a n'est pas un nombre rationnel positif.

De plus, certains changements de variable (9) peuvent donner des équations de la forme (16) où b n'est pas nul.

Les équations de la forme (10), (11), (12) et (15) que nous employons sont en nombre fini. A chaque solution holomorphe $y(x)$ de (1) correspond avec nos conventions une seule équation de l'un des quatre types indiqués. A une équation (10), (11) ou (12) correspond au plus[6] une solution holomorphe $y(x)$. A une équation (15) correspondent une infinité de solutions holomorphes formant ce que nous appellerons un *faisceau de solutions holomorphes*.

---

[5] Si, comme nous l'avons dit, on suppose que toutes les solutions $y(x)$ algébroïdes et nulles pour $x=0$ sont holomorphes pour $x=0$, il n'y a pas à considérer le cas où a est un nombre fractionnaire, car il y aurait toujours dans ce cas une infinité de solutions algébroïdes, mais non holomorphes.

[6] On sait que l'équation (11), comme l'équation (10), admet toujours une solution $z(x)$ holomorphe, nulle pour $x=0$. L'équation (12) n'admet pas en général de solution holomorphe et nulle pour $x=0$, bien qu'il existe un développement $z=\psi(x)$ vérifiant formellement l'équation (12). Voir, au sujet de cette question, un intéressant travail de M. Rémoundos. [*Bulletin de la Société mathématique de France,* t. XXXVI, p. 185.]

[**4**] *Diverses catégories de solutions.* — J'appellerai *solution d'ordre imaginaire* ν une solution $y(x)$ telle que, ν étant un nombre complexe ($\nu = \alpha + i\beta$), le quotient $y : x^\nu$ tende vers une limite ni nulle ni infinie lorsque x et y tendent simultanément vers o. Ces solutions, considérées en particulier par M. Horn ([7]), jouissent de propriétés spéciales, en raison desquelles il me paraît utile de les distinguer très explicitement des solutions d'ordre réel ν, pour lesquelles ν étant réel, $y : x^\nu$ tend vers une limite, qui n'est ni nulle ni infinie. En dehors de ces deux catégories de solutions et en dehors des solutions telles que pour une valeur de ν le quotient $y : x^\nu$ ne tende vers aucune limite lorsque x et y tendent vers o, on peut distinguer, comme je l'ai déjà fait (*J. E. P.*, p. 77), les quatre catégories suivantes de solutions :

1° Solutions telles que si grand que soit le nombre réel ν, le quotient $y : x^\nu$ tende vers o lorsque x et y tendent vers o. Par exemple, $y = e^{\frac{1}{x}}$, lorsque l'argument de x reste compris entre $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$. Ces solutions sont les solutions *d'ordre infini.*

2° Solutions telles que si petit que soit ν, le quotient $y : x^\nu$ croisse indéfiniment. Par exemple : $y = (\log x)^{-1}$. Ces solutions sont les solutions *d'ordre nul.*

3° Solutions telles que m étant un nombre fixe réel, $y : x^\nu$ tende vers o avec x si l'on a $\nu \leqslant m$, et croisse indéfiniment si l'on a $\nu > m$. Par exemple : $y = x^m (\log x)^{-1}$. J'ai appelé ces solutions « intégrales d'ordre excédant m ». Il me paraît préférable de les appeler *solutions d'ordre* $m + 0$.

4° Solutions telles que $y : x^\nu$ tende vers o avec x si l'on a $\nu < m$, et croisse indéfiniment si l'on a $\nu \geqslant m$. Par exemple : $y : x^m \log x$. Au lieu d'appeler ces solutions, comme je l'avais fait, « intégrales d'ordre déficient, je les appellerai *solutions d'ordre* $m - 0$.

Les solutions d'ordre imaginaire fourniraient facilement des exemples de solutions présentant les singularités précédentes, à condition de faire tendre x vers o suivant un chemin convenable, *tournant indéfiniment* autour de $x = 0$. Il y aura avantage à considérer à part les solutions d'ordre imaginaire et à n'appliquer les dénominations de solutions d'ordre nul, infini, $m + 0$, $m - 0$, qu'aux solutions qui, présentant les propriétés indiquées, ne sont pas d'ordre imaginaire.

Considérons une solution d'ordre imaginaire $\alpha + i\beta$ et supposons que x tende vers o sans tourner indéfiniment autour de $x = 0$. Pour que y tende vers o avec x, il faut que α soit positif. S'il en est ainsi et si nous désignons par μ un nombre positif, une solution d'ordre $\alpha + i\beta$ possède les propriétés suivantes qui s'établissent sans

---

([7]) *Journal de Crelle*, t. CXIII (1894), p. 50.

peine : 1° $y : x^\mu$ tend vers o avec x si l'on a $\mu < \alpha$; 2° $y : x^\mu$ reste fini sans tendre vers une limite si l'on a $\mu = \alpha$; 3° $y : x^\mu$ croît indéfiniment si l'on a $\mu > \alpha$. Ces propriétés distinguent les solutions d'ordre imaginaire de certaines solutions d'ordre nul ou infini, $m + o$ ou $m - o$, que nous rencontrerons, et pour lesquelles y tend vers o lorsque x tend vers o sans tourner indéfiniment autour de $x = o$. En effet, la propriété 1° distingue les solutions d'ordre imaginaire des solutions d'ordre nul; la propriété 2° les distingue des solutions d'ordre $m + o$ ou $m - o$; la propriété 3° les distingue des solutions d'ordre infini.

Supposons maintenant que x tende vers o sans que nous sachions s'il tourne indéfiniment ou non autour de $x = o$. Posons $y = zx^r$, r étant réel, positif ou nul, entier ou fractionnaire, et considérons les solutions $y(x)$ d'ordre imaginaire auxquelles correspond une fonction $z(x)$ tendant vers o avec x. Si nous considérons maintenant x comme fonction de z, la fonction $x(z)$ ainsi définie sera également d'ordre imaginaire par rapport à z. Ce que nous avons dit précédemment montre alors que si z tend vers o, sans tourner indéfiniment autour de $z = o$, cette solution $x(z)$ d'ordre imaginaire ne peut posséder aucune des propriétés qui servent de définition aux solutions $x(z)$ d'ordre nul, infini, $m + o$ et $m - o$. Cette remarque, comme la précédente, nous servira à distinguer d'avec solutions d'ordre imaginaire certaines solutions d'ordre nul, infini, $m + o$, $m - o$, pour lesquelles z tendra vers o sans tourner indéfiniment autour de $z = o$.

[**5**] *Solutions non holomorphes.* — Il nous sera nécessaire de bien préciser ce que nous savons sur les solutions nulles pour $x = o$, mais non holomorphes des équations (10), (11), (12) et (15).

Soit d'abord l'équation (10) :

$$xdz + [-az + z^2 f(z) + z\mathrm{F}(x, z)]\,dx = 0$$

où a n'est pas nul et n'est pas un nombre rationnel positif.

Deux cas se présentent si l'on considère les solutions de (10) pour lesquelles z tend vers o avec x.

1° Cette équation n'admet pas de solution nulle pour $x = o$ en dehors de la solution holomorphe. Nous dirons que celle-ci est une *solution isolée.*

2° Cette équation admet, en dehors de la solution holomorphe, d'autres solutions nulles pour $x = o$. Nous dirons que l'équation (10) fournit un *faisceau de solutions.*

On est toujours dans le cas 2° si a n'est pas négatif; en particulier, si a est imaginaire, il y a une infinité de solutions $z(x)$ *d'ordre imaginaire* a. Si a est négatif, on est dans le cas 1°, si l'intégrale générale de l'équation (10) peut se mettre sous la forme (voir § 2, 1°) :

$$x^{-a}[\mathrm{A}_1(x, z) + \mathrm{A}_2(x, z) + \ldots] = \text{const} \tag{17}$$

le développement entre crochets étant convergent pour $|x|$ et $|z|$ suffisamment petits.

Si a étant négatif, l'intégrale générale peut se mettre sous la forme (17), mais si le développement entre crochets est divergent, si petits que soient $|x|$ et $|y|$, il paraît probable qu'on est dans le cas 1°; mais je n'ai pas de raisons rigoureuses pour écarter le cas 2°. Si a étant négatif, l'intégrale générale de (10) ne peut se mettre sous la forme (17), on est dans le cas 2°. (Pour cette discussion, voir *J. E. P.*, p. 20.)

Considérons l'équation (11) :

$$xdz + [az^s + z^{s+1}f(z) + x\mathrm{F}(x, z)]dx = 0.$$

Cette équation admet une infinité de solutions $z(x)$ d'ordre nul. Ce résultat peut se conclure de l'étude de l'équation (11) que j'ai faite ailleurs (*J. E. P.*, p. 59), et la manière la plus simple de le démontrer me paraît être de poser

$$x = z^r u$$

en supposant $r > s$. Nous obtenons l'équation :

$$u[1 + z^{s-1}\mathrm{G}(u, z)]dz + [az^s + z^{s+1}\mathrm{H}(u, z)]du = 0.$$

Si z tend vers 0 dans son plan, en restant dans un secteur tel que la partie réelle de az^{1-s} soit positive, on sait (voir, par exemple, *J. E. P.*, p. 65) que l'on a une infinité de solutions $u(z)$ pour lesquelles u tend vers 0 avec z. Cette circonstance se produisant si grand que soit l'entier r, ces solutions $u(z)$ sont d'ordre infini; il leur correspond des solutions $z(x)$ d'ordre nul pour lesquelles l'argument de z ne croît pas indéfiniment (8).

Considérons l'équation (12) :

$$x^s dz + [az + z^2 f(z) + x\mathrm{F}(x, z)]dx = 0;$$

cette équation a une infinité de solutions non holomorphes, pour lesquelles z tend vers 0 lorsque x tend vers 0, de telle manière que la partie réelle de ax^{1-s} reste positive. En général, ces solutions sont d'ordre fini; elles ne peuvent être d'ordre infini (voir *J. E. P.*, p. 78) que si l'équation (12) admet la solution $z = 0$. Plus généralement, considérons le cas pourtant exceptionnel où l'équation (12) admet une solution $z = \psi(x)$ holomorphe et nulle pour $x = 0$. Si nous faisons le changement de variable

$$z = \psi(x) + \mathrm{Z},$$

nous obtenons l'équation

$$x^s d\mathrm{Z} + \mathrm{Z}[a + \mathrm{Z}f(\mathrm{Z}) + x\mathrm{G}(x, \mathrm{Z})]dx = 0. \tag{18}$$

---

(8) Nous aurions pu encore montrer qu'à chaque valeur de la constante c correspond une solution $z(x)$ donnée par

$$z = v[c + (s-1)\,a \log x]^{\frac{1}{1-s}}$$

où v est une fonction de x qui tend vers 1, lorsque x tend vers 0. Ce résultat se déduit facilement du résultat énoncé note (9).

Nous sommes donc ramenés au cas où l'équation admet la solution $Z=0$ en faisant dans l'équation (1), au lieu du changement de variable (9), le changement de variable

$$(19) \qquad y=\varphi(x)+x^m\psi(x)+x^m Z.$$

L'équation (18) admet une infinité de solutions d'ordre infini. Si nous posons, en effet, $Z=ux^r$, nous obtenons l'équation

$$x^s du+u(a+\ldots)dx=0,$$

les termes non écrits étant nuls pour $x=0$, $u=0$. Quelque grand que soit l'entier r, on a des solutions $u(x)$ qui tendent vers o, lorsque x tend vers o de telle manière que la partie réelle de ax^{1-s} reste positive. Nous avons ainsi des solutions $Z(x)$ d'ordre infini (9). L'argument de x restant fini, ces solutions ne sauraient être d'ordre imaginaire.

Puisque le changement de variable (19) est identique aux notations près au changement (9), nous pouvons dire que si, dans la recherche des solutions holomorphes de (1), on rencontre une équation (12) admettant une solution holomorphe $z(x)$, il existe un changement de variable de la forme (9) tel que l'équation en z et x obtenu par ce changement admette des solutions d'ordre infini.

Si nous considérons enfin l'équation (16) :

$$xdz+(-z+bx+\ldots)dx=0$$

où b n'est pas nul, cette équation admet une intégrale générale de la forme (voir § 2, 1°) :

$$-b\log x+\frac{A_1(x,z)+A_2(x,z)+\ldots}{x}=C.$$

Cette équation (16) admet donc une infinité de solutions $z(x)$ d'ordre $1-0$.

[**6**] *Autres solutions non holomorphes.* — Dans la recherche des solutions holomorphes de (1), avant d'employer les changements de variable tel que (9) qui conduisent aux équations (10), (11), (12) et (15), on passe par l'intermédiaire de changements de variable de même forme, mais qui conduisent à des équations en z et x de la forme suivante :

$$(20) \qquad \begin{aligned}&[x(a_0z^s+a_1z^{s+1}+\ldots+a_pz^{s+p})+x^2F(x,z)]dz\\&+[b_0z^q+b_1z^{q+1}+\ldots+b_rz^{q+r}+xG(x,z)]dx=0\end{aligned}$$

(9) Ce résultat se conclut également de la forme analytique que j'ai donnée (*J. E. P.*, p. 66) pour les solutions de (18). On a

$$Z=vx^b\, l^{-ax^{1-s}}$$

où b est une constante déterminée par les coefficients de (18) et oú v est une fonction de x qui, lorsque x tend vers o, tend vers une limite c; c est une constante arbitraire.

où les a et les b sont des constantes, F et G des fonctions de x et z holomorphes pour $x=z=0$. Les coefficients b_i peuvent être tous nuls simultanément, mais les coefficients a_i ne sont pas alors tous nuls. On obtient, dans ce cas, une équation de la forme (13). Les coefficients a_i peuvent être tous nuls et les b_i ne sont pas alors tous nuls. L'équation ne présente dans ce cas aucune particularité à signaler. Ces cas étant mis à part, nous pouvons supposer que a_0, a_p, b_0, b_r ne sont pas nuls. En général, nous aurons :

$$q \leqslant s+1, \qquad q+r \geqslant s+p+1.$$

Il n'y a pas lieu d'insister sur ce cas général, mais il y a lieu de signaler les deux cas particuliers suivants :

1° On a :

$$q > s+1;$$

2° On a :

$$q+r < s+p+1.$$

J'ai démontré (*J. E. P.*, p. 80; *A. U. G.*, p. 15) que, dans le premier cas, l'équation (20) admet une infinité de solutions $z(x)$ d'ordre nul. Il nous sera utile d'établir cette propriété en précisant dans quelles conditions sont obtenues ces solutions.

Puisque nous avons $q > s+1$, posons $q = s+h+1$. Si nous faisons le changement de variable $x = tz^{s+h+2+r'}$, l'équation (20) devient :

$$z^{h+1}(b_0+\ldots)dt + t(a_0+\ldots)dz = 0.$$

Les termes non écrits sont tous nuls pour $z=0$. Si z varie à l'intérieur d'un secteur tel que la partie réelle de $b_0 z^h : a_0$ soit positive, il y a une infinité de solutions pour lesquelles t tend vers o avec z. Ceci ayant lieu si grand que soit l'entier r', il y a une infinité de solutions $x(z)$ d'ordre infini. *L'équation* (20) *admet donc, si l'on a* $q > s+1$ *une infinité de solutions* $z(x)$ *d'ordre nul et pour lesquelles l'argument de* z *reste fini lorsque* x *tend vers* o.

Pour nous rendre exactement compte de la particularité qui se présente lorsque l'on a $q+r < s+p+1$, faisons, au lieu du changement de variable (9), le changement

$$y = \varphi(x) + z_1 x^{m-1};$$

nous obtenons l'équation

$$[A_l(x, z_1)+\ldots]dz_1 + [B_l(x, z_1)+\ldots]dx = 0 \tag{21}$$

en n'écrivant que les termes de degré minimum l. Si nous faisons ensuite le changement de variable $z_1 = xz$, nous devons obtenir l'équation (20). L'identification nous donne :

$$A_l(x, z_1) = a_0 x^{l-s} z_1^s + \ldots + a_p x^{l-s-p} z_1^{s+p},$$

$$z_1 A_l(x, z_1) + x B_l(x, z_1) = b_0 x^{l-q+1} z_1^q + \ldots + b_r x^{l-q-r+1} z_1^{q+r},$$

$$B_l(x, z_1) = b_0 x^{l-q} z_1^q + \ldots + b_r x^{l-q-r} z_1^{q+r} - a_0 x^{l-s-1} z_1^{s+1} - \ldots - a_p x^{l-s-p-1} z_1^{s+p+1}.$$

Si maintenant nous faisons dans l'équation (21) le changement de variable $x = z_1 u$, nous obtenons l'équation

$$z_1(-a_p u^{l-s-p-1} + \ldots)du + (b_r u^{l-q-r+1} + \ldots)dz_1 = 0, \tag{22}$$

en n'écrivant dans les parenthèses que les termes qui ne contiennent pas z_1 et parmi ceux-ci seulement les termes où u entre avec le plus petit exposant. Nous avons :

$$l - s - p - 1 + 1 < l - q - r + 1. \tag{23}$$

Si nous comparons l'équation (22) à l'équation (20) en faisant jouer à u le rôle de z et à z_1 le rôle de x, nous voyons que, d'après la condition (23), nous sommes dans le cas où l'équation (22) admet une infinité de solutions $u(z_1)$ d'ordre nul, pour lesquelles l'argument de u reste fini [10].

Nous pouvons résumer les deux paragraphes précédents en disant que, *dans les divers cas signalés* § 6 *et cas des équations* (11), (12) *et* (16), *il existe un changement de variable*

$$y = \varphi(x) + Z \tag{24}$$

tel qu'à certaines solutions de (1) *correspondent des solutions* $Z(x)$ *d'ordre infini, d'ordre* $m + 0$ *ou* $m - 0$. Les différents cas se distinguent entre eux au moyen de l'équation différentielle obtenue par le changement de variable $Z = x^m z$:

1° Z est d'ordre infini, si l'on obtient une équation (12) admettant la solution $z = 0$.

2° Z est d'ordre $m + 0$, si l'on obtient une équation (11).

3° Z est d'ordre $m + 1 + 0$, si l'on obtient une équation (16).

4° Si l'on obtient une équation (20), Z est d'ordre $m + 0$ ou $m - 0$, suivant que l'on a $q > s + 1$ ou $q + r < s + p + 1$. Si les deux conditions étaient vérifiées simultanément, on aurait à la fois des solutions $Z(x)$ d'ordre $m - 0$ et des solutions d'ordre $m + 0$.

II. — Étude des solutions vérifiant une relation (3).

[**7**] *Forme que prend la relation* (3) *après un changement de variable.* — Pour étudier les solutions $y(x)$ fournies par une relation (3), c'est-à-dire

$$[1 + A(x, y)]x^{\lambda_0} \prod_{i=1}^{q} (y + \varphi_i)^{\lambda_i} = C \tag{25}$$

(10) M. A. Rosenblatt a publié (*Göttingen-Druck der Dieterisch'schen Univ.-Buchdruckerei*) une intéressante note que l'on pourra consulter au sujet des solutions $z_1(x)$ que nous considérons dans le cas 2°. Il en résulte que ces solutions sont de la forme $z_1 = vx(\log x)^k$, k étant une constante déterminée et v une fonction de x qui dépend d'une constante arbitraire, et qui, pour chaque valeur de la constante, tend vers une limite finie, lorsque x tend vers 0.

que nous appellerons (voir § 2, 5°) relation $f\overline{x, y}$, nous aurons besoin de voir quelle forme prend cette relation lorsqu'on fait le changement de variable :

$$y = \varphi(x) + zx^m. \tag{26}$$

Voyons d'abord ce que deviennent les diverses expressions $y + \varphi_i$ qui figurent dans (25). On a

$$y + \varphi_i \equiv \varphi(x) + \varphi_i + x^m z \equiv x^{m_i}(\alpha_i + \ldots) + x^m z,$$

m_i est un entier, les termes non écrits sont des puissances de x, α_i est une constante qui n'est pas nulle. On peut distinguer les trois cas suivants :

1° On a $m_i < m$. Le terme en x^{m-1} de $\varphi(x)$ ou l'un des termes précédents n'a pas même coefficient que le terme correspondant de $-\varphi_i$. On a

$$y + \varphi_i = x^{m_i}(\alpha_i + \ldots),$$

les termes non écrits étant nuls pour $x = 0$, quel que soit z.

2° On a $m_i = m$. Les termes en x^p de $\varphi(x)$ et de $-\varphi_i$ ont même coefficient pour p est inférieur à m et des coefficients différents pour $p = m$. On a

$$y + \varphi_i = x^m(\alpha_i + z + \ldots).$$

3° On a $m_i > m$. Les termes en x^p de $\varphi(x)$ et de $-\varphi_i$ ont même coefficient pour $p \leqslant m$. On a

$$y + \varphi_i = x^m(z + \ldots).$$

Nous serons dans ce cas 3° lorsque $\varphi(x) + \varphi_i$ sera identiquement nul.

On peut distinguer géométriquement les trois cas, en considérant les deux courbes $y - \varphi(x) = 0$ et $y + \varphi_i = 0$. Suivant que l'on est dans le cas 1°, 2°, 3°, elles ont un contact d'ordre inférieur à $m - 1$, d'ordre $m - 1$, d'ordre supérieur à $m - 1$. On peut encore dire que l'on est dans le cas 1°, 2° ou 3° suivant que, lorsque x tend vers 0, la valeur de z correspondant à une solution $y + \varphi_i = 0$ croît indéfiniment, tend vers une limite finie ou tend vers 0.

Pour réunir les cas 2° et 3°, nous pourrons écrire dans ces deux cas

$$y + \varphi_i = x^m(\beta_i + z + \ldots),$$

β_i étant nul dans le cas 3° et égal à α_i dans le cas 2°. Supposons que les expressions $y + \varphi_i$ qui prennent cette forme correspondant aux cas 2° et 3° soient celles que l'on obtient en donnant à l'indice i les valeurs 1, 2, ..., q', tandis que pour les valeurs $q' + 1$, $q' + 2$, ..., q, on a des expressions rentrant dans le cas 1°.

Si dans (25) nous faisons la substitution (26), et si nous posons

$$\lambda = \lambda_0 + \sum_{i=1}^{q'} \lambda_i + \sum_{i=q'+1}^{q} m_i \lambda_i,$$

nous obtenons, en divisant par une constante :

$$(27)\qquad [1+B(x|z)]x^{\lambda}\prod_{i=1}^{q'}(\beta_i+z+\ldots)^{\lambda_i}=C.$$

On a

$$B(x|z)=xB_1(z)+x^2B_2(z)+\ldots,$$

$B_i(z)$ étant un polynome en z de degré au plus égal à i. $B(x|z)$ est convergent pour n'importe quelle valeur finie de z, pourvu que $|x|$ soit assez petit.

[8] *Étude des solutions vérifiant* (25). — Si l'on a $\lambda\neq 0$, on peut supposer $\lambda=1$. Plaçons-nous dans ce cas et étudions d'abord les solutions pour lesquelles z tend vers o avec x. Si aucun des β_i n'est nul, la relation (27) s'écrira :

$$x(\beta+\ldots)=C;$$

β est une constante fixe et non nulle, les termes non écrits sont nuls pour $x=0$, $z=0$. Il en résulte que les solutions pour lesquelles z tend vers o avec x ne peuvent être fournies que par la valeur $C=0$ de la constante arbitraire. Or, il est assez évident et nous verrons (§ 10) que toute solution qui ne coïncide pas avec une solution $y+\varphi_i=0$ (ce qui est bien le cas actuel) est fournie par une valeur de C qui n'est ni nulle ni infinie. *Il ne peut y avoir, si λ n'est pas nul et si aucun des nombres β_i n'est nul, aucune solution telle que z tende vers* o *avec x.*

Le même raisonnement s'applique si l'on a $q'=0$, c'est-à-dire si toutes les expressions $y+\varphi_i$ rentrent dans le cas 1°.

Si certains des β_i sont nuls, par exemple ceux qui correspondent aux valeurs $1, 2, \ldots, q''$ de l'indice i, les fonctions $y=-\varphi_i$ correspondant à ces valeurs de i fournissent des solutions pour lesquelles z tend vers o avec x, mais il pourra y avoir d'autres solutions de cette espèce. Elles vérifient une relation que l'on peut écrire

$$(28)\qquad [1+H(x,z)]x^{\lambda}\prod_{i=1}^{q''}(z+\ldots)^{\lambda_i}=C,$$

que l'on déduît de (27) en divisant par une constante. L'étude des solutions $z(x)$, nulles pour $x=0$ et fournies par la relation (28), est identique à l'étude des solutions $y(x)$, nulles pour $x=0$ et fournies par la relation (25).

Si nous cherchons les solutions pour lesquelles z tend vers une limite a, lorsque x tend vers o, nous n'aurons qu'à poser $z=z_1+a$; la relation (27) devient

$$(29)\qquad [1+B(x|z_1+a)]x^{\lambda}\prod_{i=1}^{q'}(a+\beta_i+z_2+\ldots)^{\lambda_i}=C.$$

On voit, comme précédemment, qu'il ne peut y avoir de solution telle que x tende vers a, si l'une des égalités

$$a+\beta_i=0 \qquad (i=1, 2, \ldots, q')$$

n'est pas vérifiée. *Il n'y a de solutions pour lesquelles z tend vers a, lorsque x tend vers* o, *que si, pour l'une au moins des solutions $y+\varphi_i=0$, z tend vers a.*

Considérons maintenant le cas où λ est nul. Supposons d'abord qne q' ne soit pas nul. Pour être ramené à un problème déjà traité, faisons, au lieu du changement de variable (26), le changement

$$y=\varphi(x)+y_1 x^{m-1}. \tag{30}$$

A l'aide de la relation $y_1=zx$ et de la relation (27), on reconnaît facilement que la relation (25) prend la forme

$$[1+F(x, y_1)]x^{\lambda'}\prod_{i=1}^{q'}(y_1+\beta_i x+\ldots)^{\lambda_i}=C$$

avec

$$\lambda=\lambda'+\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_{q'}=0.$$

Les termes non écrits sont nuls pour $x=0$ et $F(x, y)$ est holomorphe et nul pour $x=y_1=0$.

La somme λ des exposants étant nulle, nous savons (*R. C. M. P.*, pp. 366 et 368) que l'équation différentielle en x et y_1 peut présenter deux cas bien distincts :

1° le cas où $x=0$, $y=0$ est un point dicritique, ce qui est le cas général ;

2° *le cas exceptionnel* où l'on a $\lambda'=0$ et où l'on a

$$\sum_{i=1}^{q'}\frac{\lambda_i dy_1+\lambda_i\beta_i dx}{y_1+\beta_i x}\equiv 0$$

quels que soient dy_1 et dx. Dans les deux cas, z tend nécessairement vers une limite lorsque x tend vers o. (*R. C. M. P.*, pp. 367 et suiv.)

Dans le premier cas, il y a en général une solution et une seule pour laquelle $z=y_1:x$ tend vers une limite donnée a, et cette solution est holomorphe pour $x=0$. En posant $y_1=zx$, nous avons la relation (27) qui s'écrit :

$$[1+B(x|z)]\prod_{i=1}^{q'}(\beta_i+z+\ldots)^{\lambda_i}=C. \tag{31}$$

Examinons à l'aide de cette relation s'il y a des valeurs singulières de a telles que l'on ne soit plus dans le cas où il y a une solution $z(x)$ et une seule tendant vers a lorsque x tend vers o. Posons $z=z_1+a$ et supposons d'abord que pour aucune des valeurs 1, 2, ..., q' de l'indice i on n'ait $\beta_i+a=0$. En fixant les déterminations que l'on considère pour les divers facteurs $(\beta_i + z + \ldots)^{\lambda_i}$ où λ_i n'est pas entier, on obtient immédiatement la valeur de la constante C fournissant les solutions pour lesquelles z_1 tend vers o. En donnant cette valeur à la constante et développant suivant les puissances de x le premier membre de (31), on obtient la relation

$$S_0(z_1) + xS_1(z_1) + x^2S_2(z_1) + \ldots = 0.$$

S_0, S_1, ... sont des séries entières en z_1 dont la première est nulle pour $z_1 = 0$, mais n'est jamais identiquement nulle. Si s' est l'ordre de multiplicité de la racine $z_1 = 0$ de $S_0(z_1) = 0$, il y aura s' solutions holomorphes telles que z_1 tende vers o avec x.

Si pour une seule valeur de l'indice i, pour $i = 1$ par exemple, on a $\beta_i + a = 0$, on peut supposer $\lambda = 1$; il faut alors, pour que z_1 tende vers o, que l'on ait $C = 0$. On voit qu'il n'y a que la solution $y + \varphi_1 = 0$ pour laquelle z tend vers a.

Si pour plusieurs valeurs de i, on a $\beta_i + a = 0$, nous pouvons, après avoir posé $z = z_1 + a$, répéter, pour la relation obtenue, ce que nous avons dit à propos de la relation (28). Il pourra y avoir un nombre fini ou infini de solutions telles que z tende vers a.

Considérons maintenant le cas 2° auquel nous avons été conduit, c'est-à-dire le *cas exceptionnel*. Nous employons encore la relation (31). Si on considère les solutions $z(x)$ pour lesquelles z ne tend pas vers une des valeurs $-\beta_i$, j'ai montré (*R. C. M. P.*, p. 367) que ces solutions doivent vérifier une relation de la forme

$$\frac{P(z)}{Q(z)} + x\frac{P_1(z)}{Q_1(z)} + \frac{x^2P_2(z)}{Q_2(z)} + \ldots = 0 \tag{32}$$

où $P, P_1, P_2, \ldots, Q, Q_1, Q_2, \ldots$ sont des polynomes en z, les derniers n'ayant pas d'autres racines que $-\beta_1, -\beta_2, \ldots, -\beta_{q'}$. La fonction $z(x)$ doit tendre vers une racine de $P(z) = 0$. A une racine d'ordre de multiplicité s' correspondent s' solutions holomorphes pour lesquelles z tend vers cette racine, lorsque x tend vers o.

A chacune des valeurs $-\beta_i$ correspondent (*R. C. M. P.*, pp. 367 et 368) un ou plusieurs changements de variable de la forme

$$z = R(x) + y_1 x^{m'} \tag{33}$$

où m' est un entier positif et R un polynome tel que $R(0) = -\beta_i$. Chacun de ces changements de variable jouit de la propriété suivante : l'équation différentielle en x et y_2 admet $x = 0$, $y_2 = 0$ comme point dicritique. Il en résulte qu'il y a une infinité de solutions $y(x)$ de (1) telles que z tende vers $-\beta_i$. La dérivée d'ordre $m+m'+1$ de cette catégorie de solutions holomorphes pourra être choisie arbitrairement pour $x = 0$ [11].

[11] En prenant toutes les solutions fournies par des changements de variable tels que (33), on ne laissera de côté qu'un nombre fini (ou nul) de solutions obtenues par des relations analogues à (32).

Il nous reste à considérer le cas où, λ étant nul, on a $q' = 0$, c'est-à-dire le cas où, pour aucune des solutions $y + \varphi_i = 0$, z ne tend vers une limite finie. La relation (25) prend dans ce cas la forme

$$(34) \qquad [1 + A(x, y + \varphi + x^m z)] \prod_{i=1}^{q} (\alpha_i + z x^{m-m_i} + \ldots)^{\lambda_i} = C.$$

Cherchons s'il y a des solutions telles que pour $x = 0$, z tende vers une limite finie. On obtient immédiatement la valeur de C correspondant à ces solutions. En développant le premier membre de (34) suivant les puissances de x, on a :

$$x^s[P_0(z) + xP_1(z) + x^2 P_2(z) + \ldots] = 0.$$

P_0, P_1. P_2 sont des polynomes en z dont plusieurs et en particulier P_0 peuvent se réduire à une constante. A une racine $z = a$ d'ordre de multiplicité s' correspondent s' solutions holomorphes telles que z tende vers a. En dehors de ces solutions, il n'y a pas de solutions telles que z reste fini lorsque x tend vers 0.

Il me paraît intéressant de montrer que lorsque λ étant nul on a $q' = 0$, il y a, comme dans les autres cas où λ est nul, une infinité de solutions holomorphes se répartissant en faisceaux tels que, pour chaque faisceau, la valeur pour $x = 0$ de la dérivée d'un certain ordre puisse être choisie arbitrairement. Désignons par m' la plus grande des valeurs que prennent les m_i dans (34). Supposons que pour $i = 1$, $i = 2$, ..., $i = q'$ on ait $m_i = m'$. Faisons le changement de variable $z_1 = zx^{m-m'}$, ce qui revient à faire, au lieu du changement de variable (26), le changement

$$y = \varphi(x) + x^{m'} z_1.$$

La relation (34) devient, en divisant par une constante,

$$[1 + F(x, z_1)] \prod_{i=1}^{q'} (\alpha_i + z_1 + \ldots)^{\lambda_i} = C.$$

$F(x, z_1)$ est holomorphe et nul pour $x = z_1 = 0$. Nous raisonnerons sur cette relation comme nous avons raisonné sur la relation (27), dans le cas où λ est nul. Nous en concluerons qu'on peut choisir arbitrairement la valeur, pour $x = 0$, d'une dérivée de certaines solutions holomorphes $y(x)$; en général, ce sera la dérivée d'ordre m' qui pourra être choisie arbitrairement, exceptionnellement ce sera la dérivée d'un ordre compris entre m' et m. *A chaque valeur choisie pour la dérivée correspond une solution holomorphe, en général unique.*

Nous pouvons résumer notre discussion par les énoncés suivants où a désigne une constante arbitraire et où z désigne la fonction liée par la relation (26) à la fonction y qui vérifie la relation (25), $y + \varphi_i = 0$ désigne une des q solutions qui figurent dans (25).

A. — Si λ n'est pas nul et s'il n'y a pas de solution $y+\varphi_i=0$ telle que z tende vers a, lorsque x tend vers o, il n'y a pas de solution $y(x)$ telle que z tende vers a.

B. — Si λ n'est pas nul et s'il y a au moins une solution $y+\varphi_i=0$ telle que z tende vers a, il pourra y avoir d'autres solutions holomorphes ou non pour $x=0$, telles que z tende vers a.

C. — Si λ est nul, il y a une infinité de solutions holomorphes. La valeur pour $x=0$ de la dérivée d'un certain ordre de ces solutions peut être choisie arbitrairement.

D. — Si λ est nul et s'il n'y a pas de solution $y+\varphi_i=0$ telle que z tende vers a, nous avons les deux cas suivants : 1° *Cas général.* Si a est quelconque, il y a une solution et une seule telle que z tende vers a. Il peut y avoir des valeurs particulières de a (en nombre fini) telles qu'il existe un nombre supérieur à 1, mais limité de solutions pour lesquelles z tende vers a. — 2° *Cas particulier* ($q'=0$ et cas exceptionnel). Si a est quelconque, il n'y a pas de solution telle que z tende vers a. Il peut y avoir des valeurs particulières de a (en nombre fini) telles qu'il existe un nombre supérieur à 1, mais limité de pareilles solutions.

Toutes les solutions dont il est question dans cet énoncé D sont holomorphes pour $x=0$.

E. — Si λ est nul et s'il y a q'' solutions $y+\varphi_i=0$ telles que z tende vers a, nous avons encore à considérer deux cas : 1° le *cas général*, 2° le *cas exceptionnel.* Dans le cas 1°, si l'on a $q''=1$, il n'y a pas de solution autre qu'une des solutions $y+\varphi_i=0$ pour laquelle z tende vers a. Si l'on a $q''>1$, il peut y avoir, en dehors des q'' solutions $y+\varphi_i=0$, une infinité de solutions holomorphes ou non holomorphes telles que z tende vers a. Dans le cas exceptionnel, il y a une infinité de solutions holomorphes telles que z tende vers a; il peut y avoir en outre des solutions non holomorphes.

[**9**] *Ordres d'infinitude des solutions vérifiant* (25). — Je vais montrer que la relation (25), qui définit certainement des solutions d'ordre réel (en particulier les solutions $y+\varphi_i=0$), peut définir des solutions $y(x)$ d'ordre imaginaire, mais ne définit jamais de solution d'ordre nul ou infini, d'ordre $m+0$ ou $m-0$.

Les démonstrations employées feront voir de plus comment on peut déterminer les divers ordres d'infinitude des solutions $y(x)$ d'ordre réel et comment on peut, dans la plupart des cas, obtenir et étudier ces solutions. Nous ne porterons notre attention que sur les solutions d'ordre réel et ne ferons que mentionner les solutions d'ordre imaginaire qui se présenteront.

Cherchons d'abord s'il y a une limite supérieure des ordres d'infinitude des solutions vérifiant la relation (25). Plaçons-nous d'abord dans le cas où aucune des solutions $y+\varphi_i=0$ ne se réduit à $y=0$. Désignons par $a_i x^{r_i}$ le terme de degré minimum de φ_i. Soit r la plus grande valeur des r_i. Demandons-nous s'il y a des solutions $y(x)$ d'ordre supérieur à r, c'est-à-dire telles qu'en posant

$$y = zx^r,$$

z tende vers o avec x. Nous supposons que pour $i = 1, 2, \ldots, q'$, et seulement pour ces valeurs de i, l'on ait $r_i = r$. Les expressions correspondantes $y + \varphi_i$ prennent la forme

$$x^r(z + a_i + \ldots);$$

a_i n'est pas nul, les termes non écrits sont nuls pour $x = 0$. Les autres expressions $y + \varphi_i$ prennent la forme

$$x^{r_i}(a_i + \ldots);$$

a_i n'est pas nul, les termes non écrits, y compris un terme tx^{r-r_i}, sont nuls pour $x = 0$. Si l'on pose

$$\lambda = \lambda_0 + r\sum_{i=1}^{q'} \lambda_i + \sum_{i=q'+1}^{q} r_i\lambda_i,$$

la relation (25) prend la forme

$$(35) \qquad [1 + \mathrm{B}(x|z)]x^\lambda \prod_{i=1}^{q'} (a_i + z + \ldots)^{\lambda_i} = \mathrm{C}$$

qui ne diffère de (27) que par le changement de β_i en a_i. En employant la discussion précédente, nous avons les résultats suivants. Si λ n'est pas nul, il n'y a pas de solution telle que z tende vers o avec x (§ 7, énoncé A). Si λ est nul, il y a un nombre limité de solutions $z(x)$ qui tendent vers o avec x (§ 7, énoncé D). Ces solutions étant toutes holomorphes, il est facile d'évaluer l'ordre d'infinitude des solutions $y(x)$ correspondantes.

Considérons maintenant le cas où une des solutions $y + \varphi_i = 0$, par exemple $y + \varphi_1 = 0$, se réduit à $y = 0$. Nous aurons, en désignant par r le plus grand des nombres $r_2, r_3, \ldots, r_q$ et en employant les mêmes notations que pour (35), la relation

$$(36) \qquad [1 + \mathrm{B}(x|z)]x^\lambda z^{\lambda_1} \prod_{i=2}^{q'} (a_i + z + \ldots)^{\lambda_i} = \mathrm{C}.$$

Nous pouvons toujours supposer que l'on a $\lambda_1 = 1$. Posons

$$u = \mathrm{C}x^{-\lambda}.$$

Si u ne tend pas vers o avec x, en particulier si λ est nul ou positif, il est impossible qu'il y ait une solution $z(x)$, autre que $z = 0$, qui tende vers o avec x. Si u tend vers o avec x, les solutions pour lesquelles z tend vers o s'obtiennent en résolvant (36) par rapport à z; on obtient

$$z = u[1 + \mathrm{E}(x, u)],$$

$E(x, u)$ étant holomorphe et nul pour $x = 0$, $u = 0$. Si λ est négatif, nous avons ainsi une infinité de solutions $y(x)$ d'ordre $r - \lambda$ et nous n'avons pas de solutions d'ordre supérieur. Si λ est un nombre complexe, nous avons des solutions d'ordre imaginaire que nous nous bornons à mentionner.

Nous pouvons donc conclure qu'*on peut toujours déterminer sans difficulté la limite supérieure des ordres des diverses solutions $y(x)$ nulles pour $x = 0$ et vérifiant la relation* (25). Si l'équation (1) admet une intégrale $f\overline{x, y}$, c'est-à-dire une intégrale générale de la forme (25), *il n'y a pas (en dehors de $y = 0$), de solution d'ordre infini.*

Il n'y a pas non plus de solutions d'ordre nul, c'est-à-dire telles que, si grand que soit ν, le quotient $y : x^\nu$ tende vers o avec x et y. Si nous désignons, en effet, par R le plus petit commun multiple des nombres r_i et si nous posons $y = Y^R$, une expression $y + \varphi_i$ se mettra sous la forme

$$Y^R + \varphi_i = [a_i + H_i(x, Y)] \prod_{j=1}^{r_i} [x + \Phi_{ij}(Y)]$$

où H_i est une fonction de x et Y holomorphe et nulle pour $x = Y = 0$ et Φ_{ij} une fonction de Y holomorphe et nulle pour $Y = 0$. La relation (25) pourra s'écrire (§ 2, 2°) :

$$[1 + H(x, Y)] Y^{\lambda'_0} \prod_{i=1}^{k} [x + \Psi_i(Y)]^{\lambda_i} = C, \tag{37}$$

k étant égal à $\sum_{i=1}^{q} r_i$. En raisonnant sur cette relation comme sur la relation (25), on voit qu'on peut déterminer sans difficulté une limite supérieure de l'ordre des solutions $x(Y)$. Il en résulte immédiatement une limite inférieure de l'ordre des solutions $y(x)$. *Il n'y a donc pas d'intégrales d'ordre nul.*

Ce qui précède montre comment on obtient les solutions dont l'ordre d'infinitude est supérieur au plus grand ou inférieur au plus petit des ordres des diverses fonctions $y + \varphi_i = 0$ (la solution $y = 0$ étant mise à part). Parmi ces solutions, il n'y a que des solutions d'un ordre déterminé ; il n'y a *ni solution d'ordre $m + 0$, ni solution d'ordre $m - 0$.*

Pour obtenir les solutions d'ordre ν ou d'ordre $\nu + 0$, nous n'avons qu'à poser $y = zx^\nu$ et à chercher s'il y a des solutions telles que, lorsque x tend vers o, ou bien z tend vers une limite finie et différente de o, ou bien soit une solution $z(x)$ d'ordre nul de l'équation en z et x.

Si l'on a $\nu = r$, les solutions $z(x)$ pour lesquelles z ne devient pas infini vérifient la relation (35). Les raisonnements déjà faits montrent qu'il n'y a pas de solution $y(x)$ d'ordre $r + 0$. Les solutions $y(x)$ d'ordre r pour lesquelles z tend vers une limite finie et différente de o ont été étudiées par la discussion du § 8.

En se servant de la relation (37) on montrerait de même que si r' est le plus petit des nombres r_i il n'y a pas de solution $y(x)$ d'ordre $r' - 0$. On ramène l'étude des solutions d'ordre r' à une étude déjà faite (§ 8).

Il nous suffit maintenant de chercher les solutions d'ordre ν lorsque ν est compris entre r et r'. Si ν est un entier ($\nu = m$), la forme que prend la relation (25), en posant $y = zx^m$, résulte de la discussion faite (§ 7), en supposant dans (26) $\varphi(x) = 0$. On obtient la relation

$$(38) \qquad [1 + B(x|z)]x^\lambda \prod_{i=1}^{q'} (\beta_i + z + \ldots)^{\lambda_i} = C.$$

Supposons que pour les valeurs 1, 2, ..., q'' de l'indice i l'on ait $\beta_i = 0$. On a $q'' > 0$ et par suite $q' > 0$, puisque, par hypothèse, il existe des solutions $y + \varphi_i = 0$ dont l'ordre r_i est supérieur à m.

L'étude des solutions pour lesquelles z tend vers une limite finie se fera comme il a été indiqué (§ 8). Pour étudier les solutions telles que z tende vers 0 avec x, on peut mettre la relation (38) sous la forme

$$(39) \qquad [1 + E(x, z)]x^\lambda \prod_{i=2}^{q''} (z + \ldots)^{\lambda_i} = C.$$

L'étude de ces solutions est identique à l'étude des solutions $y(x)$ vérifiant la relation (25). Nous savons, par conséquent, qu'il n'y a pas de solutions $z(x)$ d'ordre nul. *Il n'y a donc pas de solution $y(x)$ d'ordre $m + 0$*, si m est un entier.

Si ν n'est pas entier [12], désignons par m l'entier qui lui est immédiatement inférieur. On a $m < \nu < m + 1$. Posons $y = zx^m$, nous obtenons la relation (38). A toute solution $y(x)$ d'ordre ν ou $\nu + 0$ correspond une solution $z(x)$ d'ordre $\nu - m$ ou $\nu - m + 0$, telle par conséquent que $x : z$ tende vers 0 lorsque x et z tendent vers 0. Posons $x = uz$, étudions les solutions pour lesquelles u et z tendent simultanément vers 0. La relation (39) devient

$$(40) \qquad [1 + E(uz, z)]z^{\lambda'}u^\lambda \prod_{i=1}^{q''} (1 + a_i u + \ldots)^{\lambda_i} = C,$$

en posant

$$\lambda' = \lambda + \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_{q''}$$

et en négligeant d'écrire dans $(1 + a_i u + \ldots)$ les termes de la forme $cz^p u^{p+1}$ lorsque p n'est pas nul.

---

(12) ν peut être rationnel ou irrationnel. Le cas où ν est rationnel ($\nu = p : q$) se ramène immédiatement, si l'on veut, au cas de ν entier en posant $x = x_1^q$.

Supposons qu'il n'y ait aucun des deux nombres λ et λ' qui soit nul. Nous pouvons prendre $\lambda = 1$. Si l'on a $\lambda' > 0$, il ne saurait y avoir de solution $u(z)$ telle que u tende vers o avec z, car, pour une pareille solution, on aurait $C = 0$, ce qui ne fournit pas d'autres solutions possibles que $u = 0$ et $z = 0$, solutions qui ici ne sont pas acceptables, puisqu'elles donnent $x = 0$.

Si l'on a $\lambda' < 0$, on aura une infinité de solutions $u(z)$ pour lesquelles $uz^{\lambda'}$ tendra vers une limite finie différente de o. Nous avons ainsi des solutions $y(x)$ d'ordre $m + \frac{1}{1-\lambda'}$ (13).

Si λ' est imaginaire, nous avons des solutions $u(z)$ d'ordre imaginaire qui fournissent des solutions $y(x)$ d'ordre imaginaire. Si un seul des deux nombres λ ou λ' est nul, on peut supposer l'autre égal à 1 et on voit comme précédemment qu'il ne peut y avoir de solution $y(x)$ telle que u et z tendent simultanément vers o, puisqu'on devrait avoir $C = 0$.

Si l'on a $\lambda = 0$, $\lambda' = 0$, et si dans (40) on suppose choisies les déterminations des divers facteurs qui se réduisent à 1 pour $u = 0$, on devra prendre $C = 1$ pour obtenir des solutions telles que u et z tendent vers o. En développant le premier membre de (40) suivant les puissances de u et en retranchant $C = 1$, on obtient un développement dont les termes contiennent tous en facteur une certaine puissance de u et parfois aussi une puissance de z. En supprimant ces facteurs, la relation (40) donne

$$B_0(z) + uB_1(z) + u^2B_2(z) + \ldots = 0,$$

$B_0, B_1, B_2, \ldots$ étant des fonctions de z qui sont holomorphes pour $z = 0$. Si $B_0(0)$ est nul, il y aura un nombre limité de solutions $z(u)$ nulles pour $u = 0$. Si σ est l'ordre d'une de ces solutions $z(u)$, elle fournira une solution $y(x)$ d'ordre égal à $m + \frac{\sigma}{\sigma + 1}$.

---

(13) L'existence de ces solutions $y(x)$ d'ordre $\nu = m + \frac{1}{1-\lambda'}$ étant établie, il serait facile de les obtenir commodément en posant $y = z_1 x^{\nu}$.

Si on pose, en outre :

$$u = x^{\nu - m}, \qquad v = x^{m+1-\nu},$$

la relation (25) devient

$$[1 + F(u, v, z_1)] \prod_{i=1}^{q''} [z_1 + v\Psi_i(uv)]^{\lambda_i} = C.$$

$F(u, v, z_1)$ est holomorphe et nul pour $u = v = z_1 = 0$, $\Psi_i(uv)$ est une fonction du produit uv holomorphe et nulle pour $uv = 0$. Cette relation permet d'exprimer la solution $z(x)$ qui, pour $x = 0$, se réduit à un nombre a différent de o, mais arbitrairement choisi, par un développement

$$z_1 = a + S(u, v \mid a)$$

où $S(u, v \mid a)$ est holomorphe et nul pour $u = 0$, $v = 0$, les coefficients de ce développement sont des polynomes en a. (Cf. *Bulletin de la Société mathématique*, t. XXXVI [1908], p. 222.)

Nous concluons de cette discussion qu'*il peut y avoir des solutions dont l'ordre* ν *pas entier* [14], *mais il n'y a jamais de solution d'ordre* $\nu + 0$.

De même qu'en renversant les rôles joués par x et y, c'est-à-dire en mettant la relation (25) sous la forme (37), nous avons montré qu'il n'y avait pas de solution $y(x)$ d'ordre nul; nous montrerons, en raisonnant sur la relation (37) comme nous avons raisonné sur (25), qu'il n'y a pas de solution $y(x)$ d'ordre $\nu - 0$.

III. — Relation (3) considérée comme intégrale générale de l'équation (1).

[**10**] *Généralités sur les relations entre l'équation* (1) *et une intégrale générale de la forme* (3). — On sait que, tout au moins dans certains cas, l'intégrale générale de l'équation (1) peut se mettre sous la forme $f\overline{x, y}$, c'est-à-dire sous la forme (3) ou la forme équivalente

$$x^{\lambda_0} e^{\mathrm{H}(x,y)} \prod_{i=2}^{q} (y + \varphi_i)^{\lambda_i} = \mathrm{C}. \tag{41}$$

Examinons les relations qui existent entre l'équation (1) et le premier membre de (41). Nous pourrons faire ainsi diverses remarques utiles dans la suite.

Prenons la dérivée logarithmique de (41) et chassons les dénominateurs, nous obtenons l'équation

$$\mathrm{B}(x, y)dy + \mathrm{A}(x, y)dx + 0; \tag{42}$$

en posant, suivant que λ_0 est nul ou non,

$$\left.\begin{cases} \mathrm{A}(x, y) = \left(\mathrm{H}'_x + \displaystyle\sum_{i=1}^{q} \frac{\lambda_i \varphi'_i}{y + \varphi_i}\right) \displaystyle\prod_{i=1}^{q} (y + \varphi_i) \\ \mathrm{B}(x, y) = \left(\mathrm{H}'_y + \displaystyle\sum_{i=1}^{q} \frac{\lambda_i}{y + \varphi_i}\right) \displaystyle\prod_{i=1}^{q} (y + \varphi_i) \end{cases}\right\} \lambda_0 = 0, \tag{43}$$

$$\left.\begin{cases} \mathrm{A}(x, y) = x\left(\mathrm{H}'_x + \dfrac{\lambda_0}{x} + \displaystyle\sum_{i=1}^{q} \frac{\lambda_i \varphi'_i}{y + \varphi_i}\right) \displaystyle\prod_{i=1}^{q} (y + \varphi_i) \\ \mathrm{B}(x, y) = x\left(\mathrm{H}'_y + \displaystyle\sum_{i=1}^{q} \frac{\lambda_i}{y + \varphi_i}\right) \displaystyle\prod_{i=1}^{q} (y + \varphi_i) \end{cases}\right\} \lambda_0 \neq 0. \tag{43'}$$

[14] Pour trouver ces diverses solutions, on pourra faire le changement de variable $y = zx^m$ et utiliser la discussion précédente; m prendra successivement les diverses valeurs entières comprises entre r et r'.

Pour que la relation (41) donne l'intégrale de l'équation (1), il faut que l'on ait

$$A(x, y)\,Y(x, y) \equiv B(x, y)\,X(x, y). \tag{44}$$

Nous pouvons toujours supposer qu'il n'y ait pas de facteur $L(x, y)$ holomorphe et nul pour $x=0$, $y=0$ qui divise à la fois X et Y. Si un tel facteur existait, on le supprimerait. Dans ces conditions, l'identité (44) entraîne les identités

$$A(x, y) \equiv D(x, y)\,X(x, y), \qquad B(x, y) \equiv D(x, y)\,Y(x, y), \tag{45}$$

$$B(x, y)\,dy + A(x, y)\,dx \equiv D(x, y)[Y(x, y)\,dy + X(x, y)\,dx], \tag{46}$$

$D(x, y)$ étant une fonction de x et y holomorphe pour $x=0$, $y=0$ et qui peut être nulle pour $x=0$, $y=0$. Il y a une relation très simple entre $D(x, y)$ et un des multiplicateurs $M(x, y)$ rendant le premier membre de (1) différentielle exacte. On a

$$D(x, y) \equiv M(x, y) \prod_{i=1}^{q} (y + \varphi_i). \tag{47}$$

Si, comme il nous a été parfois utile de le faire, nous multiplions les différents exposants de (41), y compris $H(x, y)$, par une constante k, le facteur $D(x, y)$ sera aussi multiplié par k.

Les identités (45) et (46) étant vérifiées, demandons-nous si toute solution $y(x)$ de l'équation (42) est une solution de l'équation (1). Il est bien évident que toute solution $y=g(x)$ de l'équation (42) est, en vertu de (46), une solution de (1), si elle n'annule pas $D(x, y)$. *En particulier, les diverses fonctions* $y=-\varphi_i$, *qui sont des solutions de* (42), *sont des solutions de* (1). En effet elles n'annulent pas $D(x, y)$, puisque, en vertu des identités (45), elles annuleraient A et B, ce qui n'est pas. De même, $x=0$ est une courbe intégrale de (1), si dans (41) on a $\lambda_0 \neq 0$. Considérons maintenant une fonction $y=g(x)$ nulle pour $x=0$ et vérifiant la relation $D(x, y)=0$, ce sera une solution de (42); montrons que ce sera une solution de (1). Cette fonction vérifiant $D(x, y)=0$ sera algébroïde pour $x=0$; nous pouvons la supposer holomorphe (§ 3), et ensuite, au moyen d'un changement de variable $y=g(x)+y_1$, supposer que cette fonction se réduit à $y=0$. Pour considérer tout de suite le cas le plus général, supposons que $D(x, y)$ contienne en facteur y^p et non y^{p+1}. Nous allons démontrer que $A(x, y)$ contient en facteur y^{p+1}. Il en résultera, d'après (45), que $X(x, y)$ contient y en facteur : c'est-à-dire que $y=0$ *est solution de l'équation* (1). Nous avons

$$B(x, y)\,dy + A(x, y)\,dx = \prod_{i=1}^{q} (y + \varphi_i)\,dS(x, y) \tag{48}$$

en désignant par dS la différentielle totale et posant

$$S(x, y) = H(x, y) + \lambda_0 \log x + \sum_{i=1}^{q} \lambda_i \log(y + \varphi_i).$$

Nous pouvons choisir des nombres ε' et ε'' assez petits pour que, si l'on a $\varepsilon' < |x| < \varepsilon''$, toutes les fonctions φ_i soient holomorphes et restent supérieures en module à un nombre ε. Nous pouvons supposer ε assez petit pour que, si nous considérons les valeurs de x de module compris entre ε' et ε'' et des valeurs de y telles que l'on ait $|y| < \varepsilon$, la fonction $S(x, y)$ soit une fonction holomorphe de x et de y, si dans le plan des x on fait une coupure allant d'un point tel que l'on ait $|x| = \varepsilon'$ à un point tel que l'on ait $|x| = \varepsilon''$. Soit

$$S(x, y) = S_0(x) + yS_1(x) + y^2 S_2(x) + \ldots$$

le développement de cette fonction suivant les puissances de y.

D'après les identités (43), aucune des expressions $y + \varphi_i$ ne peut se réduire à y, si $B(x, y)$ contient y en facteur; il en résulte, d'après (48), que $dS(x, y)$ devra contenir en facteur y^p; ceci exige que l'on ait

$$S_1(x) = 0, \quad S_2(x) = 0, \quad \ldots, \quad S_p(x) = 0, \quad S_0(x) = \text{const.};$$

$\dfrac{\partial S}{\partial x}$ contient donc en facteur y^{p+1}; il en est de même de $A(x, y)$, puisque l'on a

$$A(x, y) = \frac{\partial S(x, y)}{\partial x} \prod_{i=1}^{q} (y + \varphi_i).$$

Nous démontrons [15] ainsi que toute fonction $y = g(x)$, qui vérifie la relation (41) où C est une constante, est une solution de l'équation (1).

---

[15] Nous démontrons également que si $M(x, y)$ est un multiplicateur de $Y(x, y)dy + X(x, y)dx$ toute fonction qui vérifie la relation $M(x, y)$ est une solution de l'équation (1). Un énoncé semblable a été donné par EULER (*Institutiones calculi integrali*, t. I, chap. IV, théorème 572) et par M. PAINLEVÉ (*Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles*, p. 145). Euler *admet* dans sa démonstration (comme on continue presque toujours à le faire) que si $F(x, y) = C$ est l'intégrale générale correspondant au multiplicateur $M(x, y)$, toute fonction $y(x)$ qui vérifie la relation $F(x, y) = C$ est une solution de l'équation donnée. Il en est bien ainsi, par hypothèse, dans le cas où M. Painlevé démontre le théorème énoncé. Dans la démonstration que nous venons de donner, nous avons voulu au contraire établir que toute fonction vérifiant $F(x, y) = C$ est une solution de l'équation donnée. Cette démonstration n'est valable que dans le cas où $F(x, y) = C$ est de la forme (41) (qui comprend comme cas particuliers les cas envisagés par Euler et par M. Painlevé), mais le mode de raisonnement employé me paraît s'appliquer à diverses autres formes de $F(x, y)$ fournissant l'intégrale générale dans le voisinage de valeurs singulières $x = 0$, $y = 0$. On ne peut toutefois songer à l'appliquer que si la forme de $F(x, y)$ est précisée.

Faisons encore la remarque suivante : Si $y = g(x)$ n'annule identiquement aucune des expressions $y + \varphi_i$ qui figurent dans (41) et si on remplace y par $g(x)$, la signification du symbole $(y + \varphi_i)^{\lambda_i}$ ne présente aucune ambiguïté (même si λ_i est un nombre fractionnaire ou un nombre complexe) dès que l'on a choisi la détermination initiale de cette expression et qu'on la suit par continuité. Si $y = g(x)$ est une solution de l'équation (1), le premier membre de (41) prendra une valeur constante C, qui n'est ni nulle ni infinie. Nous avons déjà employé cette remarque (§ 8).

Si nous prenons $y = g(x)$ avec $g(x) = -\varphi_i$, il correspond à la solution $y + \varphi_i = 0$ dans (41) une valeur C de la constante qui est nulle si λ_i est positif, infinie si λ_i est négatif. Mais si λ_i est un nombre complexe, l'expression $(y + \varphi_i)^{\lambda_i}$ ne présente aucun sens, si on remplace y par $-\varphi_i$. A cette solution $y + \varphi_i = 0$ ne correspond dans (41) aucune valeur déterminée de C. Ce n'est que par convention que nous pourrons dire que la relation (41) définit cette solution $y + \varphi_i = 0$ de l'équation (1). Nous ferons cette convention et nous dirons que la relation (41), qui définit les solutions $y(x)$ correspondant à une valeur de C qui n'est ni nulle ni infinie, définit en outre les diverses solutions holomorphes $y + \varphi_i = 0$.

Avec cette convention, et d'après le théorème précédemment énoncé, nous pouvons dire que toute solution de l'équation (42), ou toute fonction définie par la relation (41), est une solution de l'équation (1), et réciproquement.

[**11**] *Cas où il est impossible que l'équation* (1) *admette une intégrale* $f\overline{x, y}$. — Si dans la recherche des solutions holomorphes de l'équation (1) on obtient une équation de la forme (11), (12), (16), ou de la forme (20) avec l'une au moins des deux conditions $q > s + 1$ ou $q + r < s + p + 1$, il est impossible que l'équation admette une intégrale générale de la forme $f\overline{x, y}$, c'est-à-dire de la forme (3). En effet, nous avons vu (§§ 5 et 6) que, dans les différents cas indiqués, il existe un changement de variable

$$y = \varphi(x) + Z \tag{49}$$

tel que l'équation en Z et x ait une infinité de solutions $Z(x)$ qui sont, suivant le cas, d'ordre infini, d'ordre $m + 0$ ou $m - 0$. D'autre part, si l'intégrale générale de l'équation (1) est donnée par la relation (3), l'intégrale générale de l'équation en Z et x est donnée par une relation de même forme. Or, nous avons vu (§ 9) qu'une relation de cette forme n'est jamais vérifiée par une solution d'ordre infini, $m + 0$ ou $m - 0$. Le théorème est donc démontré [16].

---

[16] La démonstration n'est pas valable si l'intégrale (3) n'existe que formellement, c'est-à-dire si $A(x, y)$ est divergent, si petits que soient x et y (il ne peut en être ainsi que dans le cas où les rapports des exposants λ sont tous positifs). Le théorème énoncé est cependant encore exact, comme on le verrait en se servant de l'équation (42) et de l'identification (46). Il ne me semble pas y avoir grand intérêt à insister sur ce point, puisque la forme d'intégrale (3) ne présente pas elle-même grand intérêt lorsque $A(x, y)$ est divergent.

Dans le cas où l'on rencontre une équation de la forme (12), notre raisonnement suppose que cette équation admet une solution holomorphe $z(x)$, ce qui n'est pas exact en général. Nous compléterons la démonstration du théorème en montrant plus loin (§ 13) que si l'équation (12) n'admet pas de solution holomorphe $z(x)$ l'équation (1) ne peut admettre d'intégrale $f\overline{x, y}$.

Le raisonnement que nous avons employé ne suppose pas du tout que le changement de variable (9) ou le changement (49), qui conduit à une équation en z et x ou en Z et x ayant des solutions d'ordre nul ou infini $m + 0$ ou $m - 0$, soit un des changements de variable auxquels on est conduit dans la recherche des solutions holomorphes $y(x)$. Le raisonnement s'appliquerait quelle que soit l'origine du changement de variable conduisant à l'une des équations indiquées. Dans le même ordre d'idées, nous voyons que si on considère l'équation

$$x(a_0 y^q + \ldots) dy + (b_0 y^{q+h+1} + \ldots) dx = 0$$

où dans les parenthèses nous n'écrivons que les termes qui ne contiennent pas x et parmi ceux-ci seulement les termes où y entre avec le plus faible degré, cette équation ne peut avoir son intégrale générale de la forme $f\overline{x, y}$, parce que cette équation admet une infinité de solutions d'ordre nul, ainsi que nous l'avons vu (§ 6).

[**12**] *Nombre de facteurs dans* (3). — Avant de nous demander comment on doit choisir les facteurs $(y + \varphi_i)^{\lambda_i}$ qui figurent dans la relation $f\overline{x, y}$, demandons-nous quel est le nombre q de ces facteurs. Les termes de degré minimum et $X(x, y)$ et $Y(x, y)$ étant de degré n, on voit qu'il est naturel de prendre $q = n + 1$, si on suppose $\lambda_0 = 0$, et de prendre $q = n$, si on suppose $\lambda_0 \neq 0$. En effet, en se reportant aux notations du § 10, on voit que dans (42) les termes de degré minimum de $A(x, y)$ et $B(x, y)$ seront en général de degré n, et l'identité (46) pourra être vérifiée en prenant un facteur $D(x, y)$ tel que $D(0, 0)$ ne soit pas nul. On peut cependant dans certains cas prendre $q \neq n + 1$.

L'exemple de l'équation

$$x(1 - y) dy + (-y - x^2 + 2y^2) dx = 0,$$

dont l'intégrale générale est de la forme

$$(y - x)(y + x)(y - x^2)^{-2} = C,$$

montre qu'on peut prendre $q > n + 1$.

L'exemple de l'équation

$$(y^2 - x^2 + x^2 y) dy + 2xy\, dx = 0,$$

dont l'intégrale générale est

$$y(y + x^2)^{-1} e^{-y} = C,$$

montre qu'on peut prendre $q < n + 1$.

Si nous supposons que l'intégrale générale est de la forme (3) avec $\lambda_0 = 0$, l'équation (1) possède au moins q solutions holomorphes : les solutions $y + \varphi_i = 0$.

Si l'on a $q > n+1$, l'équation admettra une infinité de solutions holomorphes, puisqu'elle ne peut posséder plus de $n+1$ solutions holomorphes sans en admettre une infinité. Il y aura également une infinité de solutions holomorphes, si l'on a $q < n+1$. En effet, d'après les identités (45), les termes de degré minimum de $A(x, y)$ et $B(x, y)$ doivent être au moins de degré n. Il en résulte que, dans les expressions (43), les termes de degré $q-1$ de $A(x, y)$ et $B(x, y)$ doivent disparaître. Si $a_i x$ est le terme du premier degré de φ_i, on aura

$$\sum_{i=1}^{q} \frac{\lambda_i}{y + a_i x} \equiv 0, \qquad \sum_{i=1}^{q} \frac{\lambda_i a_i}{y + a_i x} \equiv 0.$$

Nous sommes dans un cas que nous avons examiné ailleurs (*R. C. M. P.*, p. 365) et que nous avons désigné sous le nom de *cas exceptionnel;* nous avons rappelé (§ 7, énoncé E) les résultats obtenus dans ce cas et dit, en particulier, qu'il y a une infinité de solutions holomorphes.

Nous concluons de ce qui précède que, si l'équation (1) admet exactement $n+1$ solutions holomorphes nulles pour $x=0$, on doit dans (41) prendre $q = n+1$. Si l'équation (1) a moins de $n+1$ solutions holomorphes, il est impossible qu'elle admette une intégrale générale de la forme (41). Si l'équation (1) admet plus de $n+1$ solutions holomorphes, elle en admet une infinité, et il y a incertitude sur le nombre q des facteurs à employer pour chercher à mettre son intégrale générale sous la forme (41). On ne peut avoir $q < n+1$ que si l'intégrale générale (41) présente le cas singulier énoncé.

Si nous supposons que l'équation (1) admette la courbe intégrale $x = 0$, nous pouvons examiner le cas où l'intégrale générale de cette équation est de la forme

$$e^{h(x,y)} x^{\lambda_0} \prod_{i=1}^{q} (y + \varphi_i)^{\lambda_i} = C \tag{50}$$

avec $\lambda_0 \neq 0$. Des calculs et des raisonnements identiques à ceux que nous avons développés montrent que q est en général égal à n; il ne peut être supérieur à n que si l'équation (1) admet une infinité de solutions holomorphes nulles pour $x=0$. L'entier q ne peut jamais être inférieur à n, car la relation (50) ne rentre jamais, lorsque λ_0 n'est pas nul, dans le *cas exceptionnel* où, en prenant la dérivée logarithmique de (50) et chassant les dénominateurs, les termes de degré q disparaissent dans le coefficient de dx et dans celui de dy.

[**13**] *Choix des facteurs qui figurent dans* (3). — Nous dirons qu'une solution holomorphe figure dans la relation $f\overline{x, y}$ [équation (3) ou (50)] lorsque cette solution s'obtient en égalant à zéro une des expressions $y + \varphi_i$ qui figurent dans (3).

Toutes les fois qu'une équation (10) obtenue dans la recherche des solutions holomorphes admet un *faisceau* (§ 4) de solutions $z(x)$ nulles pour $x = 0$, la solution holomorphe $y(x)$ fournie par l'équation (10) figure dans la relation $f\overline{x, y}$.

Faisons le changement de variable (9) qui conduit à l'équation (10) et supposons que la solution holomorphe $y(x)$ fournie par (10) ne figure pas dans la relation (41), celle-ci prendra la forme (27), c'est-à-dire

$$(51) \qquad [1 + B(x|z)]x^{\lambda} \prod_{i=1}^{q'} \alpha_i + z + \ldots)^{\lambda_i} = C,$$

aucun des α_i n'étant nul. Nous savons que si λ n'est pas nul il n'y a pas de solution, holomorphe ou non, telle que z tende vers zéro avec x (§ 8, énoncé A). Si λ est nul, il ne peut y avoir qu'un nombre limité de solutions telles que z tende vers zéro avec x, et ces solutions sont holomorphes (§ 8, énoncé D). Dans les deux cas il y a contradiction avec notre hypothèse que l'équation (10) admet un faisceau de solutions $z(x)$ nulles pour $x = 0$.

Un raisonnement analogue montrerait que si l'équation (12) n'admet pas de solution holomorphe, il est impossible que l'équation (1) admette une intégrale de la forme $f\overline{x, y}$. On montrerait, en effet, à l'aide de cette intégrale que l'équation (12) n'admet pas de solutions non holomorphes $z(x)$ telles que z tende vers zéro avec x, ce qui est faux. Cette remarque complète la démonstration du théorème du § 10.

Le théorème que nous venons de démontrer ici ne s'applique pas si la solution holomorphe $y(x)$ fournie par l'équation (10) est une *solution isolée* (§ 4). La démonstration donnée montre seulement dans ce cas que, si l'on fait le changement de variable (9) qui conduit à l'équation (10), la relation (3) prend la forme (51), avec $\lambda = 0$. Ceci est parfaitement d'accord avec ce que nous avons vu (§ 8, énoncé D). La discussion faite à ce propos nous permet de former facilement des exemples d'équations (1) admettant une intégrale $f\overline{x, y}$ dans laquelle certaines solutions holomorphes fournies par des équations de la forme (10) ne sont pas représentées. Citons

$$x(x^2 + y^2 + x^2 y)\,dy + (-2x^2 + x^4 - 2x^2 y^2)\,dx = 0$$

dont l'intégrale générale peut se mettre sous la forme

$$(y^2 - x^2)(y^2 - x^2 + 2x^2 y + x^4)^{-1} = C.$$

Cette équation admet, en dehors des solutions $y = x$, $y = -x$, $y = x - x^2$, $y = -x - x^2$ qui figurent dans l'intégrale générale, la solution $y = \frac{x^2}{2}$ qui n'y figure pas En posant $y = -\frac{x^2}{2} + zx^2$, on obtient l'équation

$$x\left(1 + x^2z^2 - \frac{x^2}{4}\right)dz + 2z\,dx = 0$$

qui est de la forme (10) et qui n'admet que la solution isolée $z = 0$ en fait de solution $z(x)$ nulles pour $x = 0$.

Nous aurons un exemple un peu différent avec l'équation

$$x(y^2 + 3x^3 + 4x^2y - xy^2 - 3x^4)\,dy + y(-y^2 - 6x^3 - 6x^2y + 2xy^2 + 3x^4)\,dx = 0,$$

dont l'intégrale générale est

$$(y+x)(y-3x)^{-1}(y-x^2)(y+3x^2)^{-1} = C.$$

La solution $y = 0$, qui ne figure pas dans cette relation, est fournie, en posant $y = zx$, par l'équation

$$(3x + 3^2 - 3x^2 + 4zx - z^2x)\,dz + z(-3 - 2z + z^2)\,dx$$

qui admet $x = 0$, $z = 0$ pour point dicritique. Il est bien évident que les solutions holomorphes en nombre infini fournies par une équation à point dicritique ne peuvent figurer toutes dans l'intégrale général). Ceci nous amène à chercher combien de ces solutions fournies par une équation (16) à point dicritique doivent figurer dans $f\overline{x, y}$.

Supposons qu'un changement de variable

$$y = \varphi(x) + zx^m \tag{52}$$

fournisse une équation à point dicritique

$$[xA_r(x, z) + \ldots]\,dz + [-zA_r(x, z) + \ldots]\,dx = 0, \tag{53}$$

A_r est un polynome homogène de degré r. Supposons que dans $f\overline{x, y}$ [relation (3) ou (50)] figurent q' solutions $y + \varphi_i = 0$ fournies par des solutions $z(x)$ nulles pour $x = 0$. Après le changement (52), la relation (3) devient

$$[1 + B(x|z)]x^\lambda \prod_{i=1}^{q'} (z + c_i x + \ldots)^{\lambda_i} = C; \tag{54}$$

les c_i désignent des constantes, les termes non écrits contiennent x^2 en facteur. Cette relation (54) donne l'intégrale générale [17] de (53); elle ne présente jamais, puisque

---

[17] On en déduit facilement, à l'aide de la discussion du § 8, que la somme

$$\lambda + \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_{q'}$$

des exposants est nulle.

$x=0$, $z=0$ est un point dicritique, le cas exceptionnel où l'on a à la fois

$$\lambda = 0, \qquad \prod_{i=1}^{q'} (z + c_i x)^{\lambda_i} = 1.$$

Il n'existe pas, d'autre part, de facteur $z + \psi(x)$ [où $\psi(x)$ est holomorphe et nul pour $x = 0$] qui divise le premier membre de (53), car il existerait un facteur $y - \varphi(x) + x^m \psi(x)$ divisant dans (1) à la fois $X(x, y)$ et $Y(x, y)$. Il n'y a donc pas de facteur $R(x, z)$ holomorphe et nul pour $x = 0$, $z = 0$ divisant le premier membre de (53). Nous sommes dans les conditions voulues pour appliquer à l'équation (53) et à son intégrale générale (54) les résultats obtenus (§§ 10 et 12).

Si l'on a $\lambda = 0$, on aura $q' \geqslant r + 2$.
Si l'on a $\lambda \neq 0$, on aura $q' \geqslant r + 1$.

Le nombre $r + 1$ degré minimum des termes en x et z de l'équation (53) est la limite inférieure du nombre des solutions fournies par (53) qui doivent figurer dans l'intégrale $f\overline{x, y}$. Nous n'avons pas de limite supérieure : on forme facilement des exemples où ce nombre de solutions est aussi grand qu'on le veut. Dès que l'équation (1) admet une infinité de solutions holomorphes, nous sommes dans une incertitude à peu près complète sur le nombre des facteurs $(y + \varphi_i)^{\lambda_i}$ à choisir. Nous sommes également dans l'incertitude au sujet des facteurs à choisir. La difficulté la plus sérieuse est celle qui résulte de l'incertitude au sujet du nombre q des facteurs à employer. Supposons par exemple qu'on ne rencontre dans la recherche des solutions $y(x)$ holomorphes et nulles pour $x = 0$ qu'une seule équation telle que (15) fournissant une infinité de solutions holomorphes, et supposons pour le moment que nous sachions quel est le nombre q' des solutions holomorphes $y(x)$ appartenant à ce faisceau qui doivent figurer dans $f\overline{x, y}$. Nous savons que, si on considère les solutions de ce faisceau, la valeur pour $x = 0$ de la dérivée d'un certain ordre de $y(x)$ peut être choisie arbitrairement. Prenons parmi les solutions de ce faisceau q' solutions, mais en laissant indéterminée la valeur de la dérivée qui peut être choisie arbitrairement. En exprimant au moyen des identités (44) ou (45) que la relation $f\overline{x, y}$ considérée donne bien l'intégrale générale de (1), l'identification fournira des équations déterminant, avec les coefficients de $H(x, y)$, les exposants λ et les valeurs laissées indéterminées pour la dérivée des solutions faisant partie du faisceau.

Si nous ne connaissons que le nombre total des solutions $y + \varphi_i$ qui doivent figurer dans $f\overline{x, y}$, et si d'autre part il y a plusieurs faisceaux de solutions holomorphes, nous serons amené à essayer un nombre *fini* d'intégrales de la forme $f\overline{x, y}$ différant les unes des autres par le nombre de solutions $y(x)$ appartenant à chacun des faisceaux. La limitation du nombre de ces essais sera d'ailleurs facilitée par les indications que nous avons données précédemment. (Voir § 19.)

Je ne reviendrai pas sur ce que j'ai dit ailleurs (*J. E. P.*, pp. 94 et 97) au sujet de la détermination des exposants λ_i et des coefficients du développement $H(x, y)$. En général, on se heurtera à des impossibilités dans la détermination de $H(x, y)$. Je me contenterai de faire remarquer que dès que dans $A(x, y)$ et $B(x, y)$ [équation (42)] les termes de degré minimum sont de degré supérieur à n, nous ne pouvons plus déterminer, comme je l'avais indiqué (*J. E. P.*, p. 94), les exposants λ_i sans déterminer en même temps les coefficients de $H(x, y)$; cela tient à ce que dans les identités (45), $D(x, y)$ n'est plus différent de zéro pour $x = 0$, $y = 0$. Nous serons obligés de déterminer les exposants λ_i, en même temps que les coefficients de $H(x, y)$; nous emploierons pour cela l'identification des deux membres de (44).

[**14**] *Convergence du premier membre de* (3). — J'ai démontré (*A. V. G.*, pp. 25 et suiv.) que le développement $A(x, y)$ qui figure au premier membre de (3) est convergent pour $|x|$ et $|y|$ assez petit, si les rapports des exposants λ_i ne sont pas tous positifs, et j'ai considéré en particulier le cas où la somme des exposants est nulle. Toutefois, dans cette dernière hypothèse, la démonstration est en défaut dans un cas particulier. De plus, la démonstration a été faite dans le cas où l'on a $\lambda_0 \neq 0$ et $q = n$, et bien qu'elle soit valable quel que soit le nombre des facteurs, il peut ne pas paraître évident qu'il en est bien ainsi. Je vais démontrer que $A(x, y)$ est convergent, toutes les fois que l'équation (1) admet une infinité de solutions $y(x)$ holomorphes et nulles pour $x = 0$. C'est le cas qui se présente toujours lorsque dans (3) la somme des exposants est nulle (§ 8, énoncé C). C'est également le cas qui se présente lorsque le nombre des facteurs $y + \varphi_i$ (augmenté de 1 si λ_0 n'est pas nul) est différent de $n + 1$.

Je suppose d'abord que l'on ait dans la relation (3) $\lambda_0 + \lambda_1 + \ldots + \lambda_q = 0$.

En posant $y = tx$, cette solution devient

$$(55) \qquad [1 + A(x, tx)] \prod_{i=1}^{q} (t + a_i + \ldots)^{\lambda_i} = C;$$

les a_i sont des constantes, les termes non écrits sont nuls pour $x = 0$. Si l'on n'est pas dans le cas exceptionnel où l'on a

$$\lambda_0 = 0, \qquad \prod_{i=1}^{q} (t + a_i)^{\lambda_i} = 1,$$

$x = 0$, $y = 0$ est pour l'équation (1) un point dicritique, et l'équation différentielle en t et x est de la forme

$$[Q(t) + \ldots]\,dt + [R(t) + \ldots]\,dx = 0,$$

$Q(t)$ et $R(t)$ sont des polynomes dont le premier n'est pas identiquement nul; les termes non écrits dans les quantités entre crochets sont nuls pour $x=0$. L'intégrale générale de cette équation est fournie par une solution $\varphi(x, t)$ de l'équation aux dérivées partielles

$$[Q(t)+\ldots]\frac{\partial\varphi}{\partial x}=[B(t)+\ldots]\frac{\partial\varphi}{\partial t}. \tag{56}$$

Il est facile de choisir une valeur α telle que le coefficient de $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ ne soit pas nul pour $x=0$, $t=\alpha$. L'équation (56) admet une solution qui pour $x=0$ se réduit à une fonction arbitraire de t : par exemple, à $\prod_{i=1}^{q}(t+a_i)^{\lambda_i}$. Puisque cette solution est unique, elle est identique au premier membre de la relation (55). Il en résulte, puisque α est différent des divers nombres $-a_i$, que $A(x, tx)$ est convergent pour x voisin de zéro et t voisin de α. Par suite, en vertu d'un théorème que j'ai démontré (*Acta mathematica*, t. XXXI (1908), p. 101), $A(x, y)$ *est convergent pour x et y voisins de zéro.*

La démonstration précédente est en défaut dans le *cas exceptionnel;* mais j'ai montré (*R. C. M. P.*, p. 368) qu'il existe toujours dans ce cas un changement de variable

$$y=\varphi(x)+x^m z \tag{57}$$

tel que l'équation en x et z soit une équation ayant $x=0$, $z=0$ comme point dicritique. Si l'on fait ce changement de variable, la relation (3) prend la forme (voir § 7)

$$x^\lambda[1+A(x, \varphi+x^m z)]S(z, x)\prod_{i=1}^{q''}(z+\psi_i)^{\lambda_i}=C,$$

en supposant que les ψ_i sont des fonctions de x holomorphes et nulles pour $x=0$ et en posant

$$S(z, x)=\prod_{i=q''+1}^{q'}(\alpha_i+z+\ldots)^{\lambda_i}\prod_{i=q'+1}^{q}(\alpha_i+x^{m-m_i}z+\ldots)^{\lambda_i}$$

où les termes non écrits sont des puissances de x. Pour que l'on ait un point dicritique, il faut que l'on ait $\lambda+\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_{q''}=0$.

D'après la démonstration précédente, $[1+A(x, \varphi+x^m y)]S(z, x)$ est convergent pour $|x|$ et $|z|$ assez petits, comme $S(z, x)$ est convergent dans les mêmes conditions, $A(x, \varphi+zx^m)$ sera également convergent.

En nous appuyant comme précédemment sur le théorème cité, nous voyons que $A(x, y)$ *est convergent si* $|x|$ et $|y|$ sont assez petits.

Toutes les fois que l'équation (1) admet une infinité de solutions $y(x)$ holomorphes et nulles pour $x=0$, il existe (§ 3) un changement de variable (57) qui conduit à une équation en z et x à point dicritique. *Notre démonstration s'applique donc à tous ces cas.*

Le mode de raisonnement employé nous montre également que, une fois choisis, les facteurs $(y+\varphi_i)^{\lambda_i}$ qui figurent dans (3), aucune ambiguïté ne peut se présenter dans le cas que nous considérons pour la détermination des termes de $P(x, y)$: ce développement s'il existe est unique.

Nous pouvons également combler une lacune signalée (§ 11, note 16) et montrer que si on rencontre, dans la recherche des solutions $y(x)$ holomorphes, des équations (11), (12), (16) ou (20) dans un des deux cas indiqués, il est impossible qu'il existe une intégrale générale de la forme (3), même si on se contente d'une existence formelle, c'est-à-dire si on suppose $A(x, y)$ toujours divergent. En effet, supposons qu'on ait fait en sorte (§ 2) que $x=0$ ne soit pas une courbe intégrale, de telle sorte que dans (3) λ_0 soit nul; $A(x, y)$ ne peut, d'après ce qui précède, être divergent que si l'équation (1) n'a qu'un nombre fini de solutions holomorphes; ceci ne peut avoir lieu (§ 12) que si l'on a dans (3) $q=n+1$. Le nombre des solutions holomorphes qui ne peut être supérieur à $n+1$ est donc exactement égal à $n+1$. Or, ceci est impossible, si l'on rencontre dans la recherche des solutions holomorphes une des équations de l'espèce indiquée. Il résulte en effet de ce que nous avons vu ailleurs (*A. U. G.*, p. 7) que, dans tous les cas, le nombre des solutions holomorphes est inférieur à $n+1$.

[15] *Cas où il existe deux intégrales distinctes de la forme* (3). — *S'il y a deux intégrales distinctes de la forme $f\overline{x, y}$, il y aura une troisième intégrale de la même forme, mais où tous les exposants λ_i seront des entiers positifs ou négatifs.*

Soient

$$f\equiv[1+P(x, y)]\prod_{i+1}^{q}(y+\varphi_i)^{\lambda_i}=C, \tag{58}$$

$$f'\equiv[1+P'(x, y)]\prod_{i\ 1}^{q'}(y+\psi_i)^{\lambda'_i}=C', \tag{59}$$

deux formes [18] de l'intégrale générale de (1). Nous supposons ces deux formes d'intégrales distinctes, ou, d'une façon plus précise, nous supposons que l'on n'ait pas

$$f\equiv(f')^k, \tag{60}$$

k étant une constante.

[18] Nous supposons $\lambda_0=0$ afin de simplifier l'écriture. On peut du reste toujours supposer qu'il en est ainsi, puisqu'on peut supposer que l'équation (1) n'admet pas la courbe intégrale $x=0$.

L'existence des intégrales (58) et (59) entraîne [§ 10, équation (47)] l'existence pour l'équation (1) de multiplicateurs de la forme

$$D(x, y)\prod_{i=1}^{q}(y+\varphi_i)^{-1} \quad \text{et} \quad D'(x, y)\prod_{i=1}^{q'}(y+\psi_i)^{-1};$$

le quotient de ces deux multiplicateurs fournit une intégrale de l'équation (1). Cette intégrale

$$\frac{D(x, y)\prod_{i=1}^{q'}(y+\psi_i)}{D'(x, y)\prod_{i=1}^{q}(y+\varphi_i)} = C'' \tag{61}$$

est bien de la forme indiquée. Le premier membre de (61) ne se réduit pas identiquement à une constante. En effet, pour qu'il en fût ainsi, il faudrait, puisque aucun des facteurs $y+\varphi_i$ ne divise $D(x, y)$, que ces facteurs $y+\varphi_i$ fassent partie des facteurs $y+\psi_i$. De même, les facteurs $y+\psi_i$ devraient faire partie des $y+\varphi_i$. On aurait donc $q=q_1$ et on pourrait supposer $\psi_i=\varphi_i$. On aurait, de plus, $D'(x, y)=kD(x, y)$ en désignant par k une constante. On vérifie alors immédiatement que puisque l'on a [équation (46)]

$$\prod_{i=1}^{q}(y+\varphi_i)\,d\log f = D(x, y)[Y(x, y)dy + X(x, y)dx],$$

$$\prod_{i=1}^{q}(y+\psi_i)\,d\log f' = D'(x, y)[Y(x, y)dy + X(x, y)dx],$$

on aurait la relation (60), contrairement à notre hypothèse.

Remarque I. — Si nous supposons que l'intégrale (58) ne rentre pas dans le *cas exceptionnel*, les termes de degré minimum en x et y dans $D(x, y)$ seront de degré $q-n-1$ et nous aurons, en désignant par θ_i des fonctions holomorphes et nulles pour $x=0$,

$$D(x, y) = [1+H(x, y)]\prod_{i=1}^{q-n-1}(y+\theta_i);$$

$D'(x, y)$ se mettra sous une forme analogue avec un nombre de facteurs $y+\chi_i$ égal à $q'-n-1$, si l'intégrale (59) ne rentre pas dans le *cas exceptionnel*. Si on remplace D et D' par ces expressions dans (61), en faisant des simplifications (si certains des $y+\varphi_i$ sont identiques à des $y+\chi_i$ et certains des $y+\psi_i$ identiques à des $y+\theta_i$), on obtient une intégrale $f\overline{x, y}$ où le nombre des facteurs nuls pour $x=0$, $y=0$ est au plus égal à $2(q+q'-1)$, mais où la somme des exposants relatifs à ces divers facteurs est nulle. Ceci ne peut se produire (*R. C. M. P.*, p. 365) que si $x=0$, $y=0$ est pour l'équation (1) un point dicritique, ou bien si l'intégrale (61) rentre dans le *cas exceptionnel.* Si l'on a un point dicritique, il faut que l'on ait dans (58) et (59)

$$\sum_{i=1}^{q} \lambda_i = 0 \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{q'} \lambda'_i = 0.$$

Cette remarque nous montre que dans le cas (qui est le cas général) où l'équation (1) n'admet que $n+1$ solutions holomorphes, il ne peut exister qu'une seule intégrale $f\overline{x, y}$. En effet, s'il y en avait deux, l'équation (1) admettrait soit $x=0$, $y=0$ pour point dicritique, soit une intégrale générale rentrant dans le *cas exceptionnel.* Dans les deux cas, on aurait une infinité de solutions holomorphes.

Remarque II. — Il est facile de voir que si l'on a deux formes d'intégrale (58) et (59) avec $q=q'=n+1$ et $\varphi_i=\psi_i$ pour $i=1, 2, \ldots n+1$, ces deux formes d'intégrales ne sont pas distinctes, si toutefois l'une au moins des deux intégrales ne rentre pas dans le cas exceptionnel [19]. En effet, nous avons l'intégrale (61); si nous supposons que (58) ne rentre pas dans le cas exceptionnel, nous aurons $D'(0, 0) \neq 0$, et (61) peut s'écrire

$$[D'(0, 0)\,D(x, y) - D(0, 0)\,D'(x, y)]\,[D'(x, y)]^{-1} = \text{const.},$$

ou encore

$$H(x, y) = \text{const.},$$

H étant holomorphe et nul pour $x=y=0$. Le point singulier $x=0$, $y=0$ est donc un *centre*, il n'y a qu'un nombre fini de solutions $y(x)$ holomorphes et nulles pour $x=0$. Mais si, d'autre part, nous considérons la relation

$$(f')^{\lambda_1}(f)^{-\lambda'_1} = \text{const.},$$

elle nous fournit une intégrale de (1) contenant moins de $n+1$ facteurs $y+\varphi_i$ nuls pour $x=0$, $y=0$. Cette intégrale rentre donc dans le cas exceptionnel et l'équation (1) admet une infinité de solutions holomorphes et nulles pour $x=0$, $y=0$. Nos hypothèses sont donc contradictoires.

[**16**] *Cas où il ne peut y avoir deux formes distinctes d'intégrale* (3). — Nous pouvons démontrer qu'il ne peut y avoir deux formes distinctes (58) et (59) d'intégrale

[19] Il résulte du reste de la méthode de détermination des exposants λ_i (*J. E. P.*, p. 95) que les exposants λ_i et λ'_i sont identiques. Si une des formes d'intégrale rentre dans le cas exceptionnel, il en est de même de l'autre.

en n'employant que des hypothèses moins restrictives que précédemment. Supposons que $x=0$, $y=0$ ne soit pas pour l'équation (1) un point dicritique et supposons aussi que ni l'intégrale (58) ni (59) ne rentrent dans le cas exceptionnel. Ces diverses hypothèses sont équivalentes à l'hypothèse suivante : ni la somme des exposants λ_i dans (58), ni la somme des exposants λ'_i dans (59) ne sont nulles. Nous pouvons donc supposer ces deux sommes égales à 1. Puisque $x=0$, $y=0$ n'est pas un point dicritique de l'équation (1), l'expression $tY_n(1, t)+X_n(1, t)$ n'est pas identiquement nulle. De plus, l'équation admettant une intégrale $f\overline{x, y}$, il résulte de ce que nous avons dit [§ 6, équation (20), cas de $q>s+1$ et § 11] que si $tY_n(1, t)+X_n(1, t)$ admet une racine multiple d'ordre p', cette racine est racine d'ordre au moins égal à $p'-1$ de $Y_n(1, t)=0$. Dans ces conditions, on a :

$$\frac{Y_n(1, t)}{tY_n(1, t)+X_n(1, t)}=\sum_{i=1}^{p}\frac{\mu_i}{t+a_i}. \tag{62}$$

Comme nous l'avons dit (§ 3), nous pouvons supposer que $Y_n(x, y)$ ne contient pas x en facteur : $Y_n(1, t)$ sera exactement de degré n et la somme des résidus μ_i sera égale à 1. Nous supposerons enfin, comme dernière et principale hypothèse que les nombres μ_i ne soient pas tous des nombres rationnels (positifs ou négatifs). Il est alors impossible que l'équation (1) admette deux intégrales distinctes (58) et (59).

D'après ce que nous avons dit (§ 15), il n'y a lieu de faire la démonstration que si l'équation (1) admet plus de $n+1$ solutions holomorphes, et nous avons vu (§ 14) que dans ce cas $P(x, y)$ et $P'(x, y)$ sont nécessairement convergents lorsque x et y sont assez petits. Si nous posons $y=tx$, l'intégrale (58) (voir *R. C. M. P.*, p. 344) prend la forme $L\overline{x, t}$,

$$L\equiv x(1+xL_1+x^2L_2+\ldots)\prod_{i=1}^{p}(t+a_i)^{\mu_i}=C, \tag{63}$$

où $L_1, L_2, \ldots$ sont des fractions rationnelles de t. Le développement $1+xL_1+x^2L_2+\ldots$ est convergent si $|x|$ étant assez petit ainsi que ε, on a :

$$|t|<\frac{1}{\varepsilon}, \qquad |t+a_i|>\varepsilon. \qquad (t=1, 2, \ldots, p)$$

L'intégrale (59) fournit, en posant $y=tx$, une intégrale de même forme que L et que nous désignerons par L'. Si L et L' sont identiques, il en sera de même de f et f' dans (58) et (59); or, il en est bien ainsi. Nous avons en effet étudié (*R. C. M. P.*, p. 345) comment on obtient les différents termes d'un certain développement $\overline{\overline{H}}$, et il en résulte que, sauf dans le cas où tous les nombres μ_i sont rationnels, ce développement $\overline{\overline{H}}$ est unique. Il en résulte immédiatement que la forme d'intégrale (63) est unique. On peut du reste remarquer que ce qui a été dit pour la détermination des termes de $\overline{\mathrm{H}}$ s'applique sans modification à la détermination des termes L_1, L_2, L_3, ... *Il est donc impossible qu'il y ait deux intégrales distinctes* (58) *et* (59) *ne rentrant ni l'une ni l'autre dans le cas exceptionnel si* $y Y_n(x, y) + x X_n(x, y)$ *n'est pas identiquement nul, et si les nombres* μ_i *de l'identité* (62) *ne sont pas tous rationnels.*

[**17**] *Étude du cas où il y a deux intégrales de la forme* (3). — Nous n'avons à faire cette étude (§ 14, remarque I) que dans le cas où l'équation (1) admet plus de $n+1$ solutions holomorphes et nulles pour $x=0$. Considérons d'abord le cas où $x=0$, $y=0$ est un point dicritique. Dans chacune des deux intégrales (58) et (59), dont nous supposons l'existence, la somme des exposants λ est nulle. De ces deux intégrales résulte, comme nous l'avons vu, une troisième intégrale (61) que nous pouvons écrire

$$f_1 = \frac{P_1(x, y)}{Q_1(x, y)} = C_1, \tag{64}$$

C_1 étant une constante, P_1 et Q_1 étant des fonctions de x et y holomorphes pour $x=0$, $y=0$. Nous pouvons supposer que P_1 et Q_1 sont nuls pour $x=0$, $y=0$; s'il n'en était ainsi, on serait dans un cas examiné (§ 15, remarque II), $x=0$, $y=0$ serait un centre et ne pourrait être point dicritique. Désignons par $p_1(x, y)$ et $q_1(x, y)$ l'ensemble des termes de degré minimum respectivement dans P_1 et Q_1. Les polynomes homogènes p_1 et q_1 sont de même degré, puisque l'équation (1) admet $x=0$, $y=0$ comme point dicritique. De plus, on n'a pas, en désignant par k une constante,

$$p_1(x, y) = k q_1(x, y);$$

car l'intégrale (64) rentrerait dans le cas exceptionnel, ce qui ne peut jamais se produire pour un point dicritique.

En raisonnant comme pour l'intégrale (58), nous voyons que l'intégrale (64) nous fournit un multiplicateur de l'équation (1) qui est de la forme

$$D_1(x, y)[P_1(x, y)\, Q_1(x, y)]^{-1};$$

le quotient de ce multiplicateur par le multiplicateur fourni par l'intégrale (58) donne une nouvelle intégrale que nous mettons sous la forme

$$f_2 \equiv \frac{P_2(x, y)}{Q_2(x, y)} = C_2,$$

P_2 et Q_2 étant holomorphes et nuls pour $x=y=0$. Nous désignons par $p_2(x, y)$ et $q_2(x, y)$ les termes de degré minimum de P_2 et Q_2. Je vais montrer qu'*en désignant par α et β des fonctions de x et y holomorphes et nulles pour $x=0$, $y=0$, il existe une fonction*

$$\theta = \frac{\alpha(x, y)}{\beta(x, y)}$$

telle que f_1 et f_2 s'expriment rationnellement au moyen de θ. Posons

$$(65)\qquad g_1 = \frac{p_1(1, t)}{q_1(1, t)}, \qquad g_2 = \frac{p_2(1, t)}{q_2(1, t)}.$$

Si on considère g_1 et g_2 comme les coordonnées d'un point, ces deux équations où t est variable représentent une courbe unicursale. Soit que la représentation (65) de cette courbe soit *propre*, soit qu'elle soit *impropre*, il existe une fonction rationnelle de t que je désigne par $\tau(t)$, telle que l'on ait

$$g_1 = F_1(\tau), \qquad g_2 = F_2(\tau), \qquad \tau = F(g_1, g_2),$$

F_1, F_2 étant des fonctions rationnelles de τ et F étant une fonction rationnelle de g_1 et g_2. Si la représentation (65) est propre, on aura $\tau(t) = t$. Remplaçons dans F respectivement g_1 et g_2 par f_1 et f_2, nous obtenons une fonction

$$F(f_1, f_2) \equiv \theta(x, y) = \frac{\alpha(x, y)}{\beta(x, y)};$$

$\theta(x, y) = \text{const.}$ est une nouvelle forme de l'intégrale générale de l'équation (1). Montrons que l'on a

$$f_1 \equiv F_1[\theta(x, y)].$$

En effet, f_1 et $F_1[\theta(x, y)]$ sont deux intégrales de l'équation aux dérivées partielles

$$(66)\qquad Y(x, y)\frac{\partial\varphi}{\partial x} = X(x, y)\frac{\partial\varphi}{\partial y};$$

par conséquent, $f(x, tx)$ et $F_1[\theta(x, tx)]$ sont deux intégrales de l'équation

$$(67)\qquad [Y_n(1, t) + \ldots]\frac{\partial\psi}{\partial x} = [tY_n(1, t) + X_n(1, t) + \ldots]\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

obtenue en remplaçant dans (66) y par tx et $\varphi(x, y)$ par $\psi(x, t)$. Les deux intégrales $f_1(x, tx)$ et $F_2[\theta(x, tx)]$ se réduisent respectivement à g_1 et à $F_1(\tau)$ pour $x = 0$: elles se réduisent donc pour $x = 0$ à une même fonction de t. Elles sont par suite identiques, puisque $Y_1(1, t)$ n'étant pas identiquement nul, il existe une intégrale et une seule qui se réduise pour $x = 0$ à une fonction donnée de t. Pour appliquer en toute rigueur le théorème d'existence sur lequel nous nous appuyons, il suffit de considérer les valeurs de t voisines d'une valeur t_0 telle que ni $Y_n(1, t_0)$ ni $q_1(1, t_0)$ ne soient nuls. Nous démontrons donc que $f_1(x, y)$ *est une fonction rationnelle de* θ; on montrerait de la même façon que $f_2(x, y)$ *est une fonction rationnelle de* θ.

On verrait facilement que les nouvelles intégrales que nous pouvons former en divisant les uns par les autres les multiplicateurs fournis par f_1 et f_2 et ceux fournis par f et f' sont toutes des fonctions rationnelles de θ.

Cherchons sous quelle forme peuvent se mettre f et f'. Puisque

$$\theta(x, y) \equiv \alpha(x, y) : \beta(x, y)$$

est une intégrale de (1), nous avons

$$(68) \qquad d\theta = \frac{\mu(x, y)}{[\beta(x, y)]^2}[Y(x, y)dy + X(x, y)dx],$$

$\mu(x, y)$ étant une fonction de x et y holomorphe pour $x = 0$, $y = 0$. On a par suite

$$\frac{df_1(x, y)}{f_1(x, y)} = \frac{F_1'(\theta)}{F_1(\theta)}d\theta = \frac{\mu(x, y)}{[\beta(x, y)]^2}\cdot\frac{F_1'(\theta)}{F_1(\theta)}[Y(x, y)dy + X(x, y)dx],$$

et par conséquent

$$(69) \qquad \frac{D_1(x, y)}{P_1(x, y)Q_1(x, y)} = \frac{\mu(x, y)F_1'(\theta)}{[\beta(x, y)]^2 F_1(\theta)}.$$

On a aussi

$$(70) \qquad \frac{D_1(x, y)}{P_1(x, y)Q_1(x, y)} : \frac{D(x, y)}{\Pi(y + \varphi_i)} = f_2(x, y) = F_2(\theta),$$

en désignant par $D(x, y)$, $\Pi(y + \varphi_i)^{-1}$, le multiplicateur fourni par l'intégrale (58) et qui est tel que l'on ait

$$\frac{df}{f} = \frac{D(x, y)}{\Pi(y + \varphi_i)}[Y(x, y)dy + X(x, y)dx].$$

On a donc, en se servant de (70), (69) et (68),

$$\frac{df}{f} = \frac{\mu(x, y)F_1'(\theta)[Y(x, y)dy + X(x, y)dx]}{[\beta(x, y)]^2 F_1(\theta)F_2(\theta)} = \frac{F_1'(\theta)d\theta}{F_1(\theta)F_2(\theta)},$$

c'est-à-dire

$$(71) \qquad df : f = \chi(\theta)d\theta,$$

en désignant par $\chi(\theta)$ une certaine fonction rationnelle de θ.

Si nous remarquons que l'on peut sans rien changer aux raisonnements précédents remplacer θ par une fonction homographique de θ,

$$(\theta + k_1) : (\theta + k_2) \equiv (\alpha + k_1\beta) : (\alpha + k_2\beta),$$

on voit que l'on peut supposer que le dénominateur $\beta(x, y)$ de $\theta(x, y)$ n'admet pas de diviseur élémentaire multiple, c'est-à-dire pas de diviseur de la forme $[l(x, y)]^{n'}$ n'étant supérieur à 1 et $l(x, y)$ étant holomorphe et nul pour $x = 0$, $y = 0$. Nous pouvons supposer également qu'aucun des facteurs $y + \varphi_i$ ne divise $\beta(x, y)$. De plus, d'après (68) et d'après ce que nous avons dit sur la relation (61), aucun des diviseurs élémentaires de $\beta(x, y)$ ne divise $\mu(x, y)$; comme, d'autre part, on a

$$\frac{D(x, y)}{\Pi(y+\varphi_i)} = \frac{\mu(x, y)\chi(\theta)}{[\beta(x, y)]^2}, \tag{72}$$

il s'ensuit que β^2 doit diviser $\chi(\theta)$, et l'on a, si $\chi(\theta)$ est une fonction rationnelle de degré s,

$$\chi_\alpha\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = \frac{\beta^2(A_{s-2}\alpha^{s-2} + A_{s-1}\alpha^{s-3}\beta + \ldots + A_0\beta^{s-2})}{B_s\alpha^s + B_{s-1}\alpha^{s-1}\beta + \ldots + B_0\beta^s},$$

A_{1-2}, A_{s-1}, A_0, B_s, ..., B_0 étant des constantes.

Le dénominateur de cette fraction ne contient pas de facteur multiple $(\alpha + c\beta)^m$, car, d'après (72), un pareil facteur devrait diviser le produit $\mu(x, y)\Pi(y + \varphi_1)$, et, comme $\Pi(y + \varphi_i)$ ne contient que des facteurs simples, $\alpha + c\beta$ devrait diviser $\mu(x, y)$. Ceci est impossible; nons avons en effet

$$\beta d(\alpha + c\beta) - (\alpha + c\beta)d\alpha = \mu(x, y)[Y(x, y)dy + X(x, y)dx]. \tag{73}$$

Désignons alors par φ une fonction de x holomorphe et nulle pour $x = 0$, et soit $(y + \varphi)^r$ un diviseur de $\alpha + c\beta$, l'entier r étant égal ou supérieur à 1. Le facteur $(y + \varphi)^r$ devrait diviser $\mu(x, y)$, mais le coefficient de dy dans $d(\alpha + c\beta)$ ne sera divisible que par $(y + \varphi)^{r-1}$, il est donc impossible que dans l'égalité (73) le premier membre, et par suite $\mu(x, y)$, soit divisible par $(y + \varphi)^r$. Il est donc impossible que $\mu(x, y)$ soit divisible par $\alpha + c\beta$, impossible également que le dénominateur de χ admette un facteur multiple $(\alpha + c\beta)^m$.

D'après (71), et d'après les remarques que nous venons de faire, nous avons

$$\frac{df}{f} = d\theta \sum_{i=1}^{s} \frac{r_i}{\theta + c_i},$$

r_i et c_i étant des constantes. La somme des quantités r_i est nulle.

On aura donc

$$f \equiv \prod_{i=1}^{s} (\alpha + c_i\beta)^{r_i} \equiv \prod_{i=1}^{s} (\theta + c_i)^{r_i}.$$

On montrerait de la même façon que f' s'exprimerait d'une manière analogue au moyen du rapport $\theta = \alpha : \beta$.

Si on a une autre intégrale générale de (1) de la forme

$$f'' \equiv [1 + P''(x, y)] \prod_{i=1}^{q''} (y + \chi_i)^{\lambda''_i},$$

nous aurons, en nous servant de cette intégrale comme nous nous sommes servis de (59), une intégrale méromorphe

$$f_3 \equiv \frac{P_3(x, y)}{Q_3(x, y)} = C_3,$$

P_3 et Q_3 étant holomorphes et nuls pour $x = 0$, $y = 0$. Soient $p_3(x, y)$ les termes de degré minimum de P_3 et Q_3, ce degré est le même pour p_3 et pour q_3; nous le désignons par s_3. Deux cas peuvent se présenter suivant que f_3 est une fonction rationnelle de $\theta = \alpha : \beta$ ou non. Pour qu'on soit dans le premier cas, il faut et il suffit que $p_3(1, t) : q_3(1, t)$ s'exprime rationnellement au moyen de la fonction $\tau(t)$ trouvée précédemment. S'il en est ainsi, f^q s'exprimera sous la même forme que f au moyen de α et β ou de θ. Si f_3 ne s'exprime pas rationnellement au moyen de $\alpha : \beta$, nous raisonnerons sur $P_3 : Q_3$ et $\alpha : \beta$ comme nous avons raisonné sur f_2 et f_3, et nous déterminerons une intégrale méromorphe

$$f_4 = \frac{P_4(x, y)}{Q_4(x, y)} = C_4$$

telle que f_3 et $\alpha : \beta$ soient des fonctions rationnelles de f_4; f, f', f'' s'expriment d'ailleurs au moyen de f_4.

S'il y avait une intégrale f''' fournissant (de la même manière que f'' fournit f_3) une intégrale méromorphe qui ne puisse s'exprimer rationnellement au moyen de f_4, nous pourrions trouver une intégrale méromorphe f_6 telle que toutes les intégrales méromorphes précédentes θ, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 soient des fonctions rationnelles de f_6, les intégrales non méromorphes f, f', f'', f''' s'expriment en fonction de f_6 de la même façon que f s'exprimait en fonction de θ.

Il est bien évident que nous ne pouvons continuer à raisonner indéfiniment ainsi. En effet, si $p_3(1, t)$ et $q_3(1, t)$ n'ont pas de facteurs communs, le degré s_4 de $p_4(1, t)$ et $q_4(1, t)$ sera un diviseur de s_3 autre que s_3; ce degré s_4 sera un diviseur d'un nombre inférieur à s_3 si $p_3(1, t)$ et $q_3(1, t)$ ont des facteurs communs. Les degrés s_3, s_4, s_5, s_6 allant toujours en diminuant, la suite des opérations qui nous ont donné les intégrales $f_1, f_2, \ldots, f_6$ ne pourra pas se continuer indéfiniment. Nous arrivons à la conclusion suivante :

Si l'équation (1) *admet plus d'une intégrale de la forme* $f\overline{x, y}$, *il existe une intégrale méromorphe de la forme*

$$\frac{A(x, y)}{B(x, y)} = \text{const.}$$

telle que toutes les intégrales $f\overline{x, y}$ *de l'équation s'expriment sous la forme*

$$f\overline{x, y} \prod_{i=1}^{s} [A(x, y) + c_i B(x, y)]^{r_i}.$$

La somme des exposants r_i est nulle. Tous les nombres r_i peuvent être supposés entiers si l'intégrale $\overline{fx, y}$ est elle-même méromorphe. Le théorème n'est pour le moment démontré que si $x = 0$, $y = 0$ est un point dicritique; nous allons l'étendre à tous les cas.

D'après ce que nous avons dit (§ 15, remarque I), il ne peut y avoir deux intégrales distinctes de la forme $\overline{fx, y}$ que si l'équation (1) admet plus de $n+1$ solutions holomorphes et nulles pour $x = 0$. Il existe donc un changement de variable $y = \varphi(x) + zx^m$ tel que l'équation en z et x admette $z = 0$, $x = 0$ comme point dicritique. Si l'on fait au lieu de ce changement le changement de variable

$$y = \varphi(x) + u^{m+1}, \tag{74}$$

l'équation différentielle en u et x admettra $u = 0$, $x = 0$ pour point dicritique. En effet, l étant arbitrairement choisi, il existera une solution $u(x)$ telle que $u : x$ tende vers l lorsque u et x tendent vers 0. A chaque intégrale $\overline{fx, y}$ de l'équation (1) correspond une intégrale $\overline{fx, u}$ de l'équation en u et x. Nous sommes donc ramenés au cas précédent et il existe une intégrale méromorphe pour $u = 0$, $x = 0$ au moyen de laquelle s'expriment, ainsi qu'il a été indiqué, toutes les intégrales $\overline{fx, u}$ de l'équation différentielle en u et x. Montrons que dans cette intégrale méromorphe u ne figure que par l'expression u^{m+1}, de telle sorte qu'en revenant aux variables x et y on aura bien une intégrale méromorphe pour $x = 0$, $y = 0$. En effet, si nous faisons le changement de variable (74), le multiplicateur fourni pour l'intégrale (58) sera

$$\mathrm{D}(x, \varphi(x) + u^{m+1}) \prod_{i=1}^{q} [\varphi(x) + u^{m+1} + \varphi_i]^{-1}.$$

Le multiplicateur fourni par (59) ne dépendra également que de x et de u^{m+1}. Il en sera de même de leur quotient f_1, également de même de f_2 et de θ qui est une fonction rationnelle de f_1 et f_2. On pourra continuer à raisonner ainsi jusqu'à ce qu'on ait montré que l'intégrale méromorphe, au moyen de laquelle s'expriment toutes les autres, ne dépend que de x et de u^{m+1}. *Le théorème énoncé plus haut est donc établi dans tous les cas.*

Nous remarquerons que si la méthode suivie dans la démonstration établit l'existence d'une intégrale méromorphe au moyen de laquelle peuvent s'exprimer toutes les intégrales $\overline{fx, y}$ qui peuvent exister, elle ne permet pas de déterminer cette intégrale méromorphe. Elle permet seulement (en obtenant autant de termes que l'on veut du numérateur et du dénominateur) de déterminer l'intégrale méromorphe au moyen de laquelle s'expriment toutes les intégrales $\overline{fx, y}$ de l'équation (1) qui sont *données*. Ainsi f et f' étant donnés, la méthode permet de déterminer l'intégrale $\alpha : \beta$ au moyen de laquelle s'expriment f et f'. Mais cette intégrale $\alpha : \beta$ étant obtenue, la méthode ne montre pas s'il y a ou non une intégrale méromorphe plus simple au moyen de laquelle $\alpha : \beta$ lui-même pourrait s'exprimer. Certaines remarques permettraient, dans certains cas, de montrer qu'il n'y a pas de pareille intégrale. Par exemple, dans le cas d'un point dicritique, on peut remarquer que pour qu'il existe une intégrale plus simple à l'aide de laquelle $\alpha : \beta$ puisse s'exprimer, il est nécessaire (mais non suffisant) que la fonction $\tau(t)$ dont il a été question s'exprime rationnellement au moyen d'une autre fonction rationnelle de t.

La méthode suivie ne donne pas non plus d'indications bien précises sur la manière, étant donné une intégrale (58), de reconnaître s'il existe d'autres intégrales de cette forme. On peut, pour résoudre cette question, chercher s'il existe des fonctions $\alpha(x, y)$ et $\beta(x, y)$ holomorphes et nulles pour $x = 0$, $y = 0$, et telles que f s'exprime comme il a été indiqué au moyen de α et de β. Bien qu'on puisse faire un certain nombre de remarques pouvant faciliter les calculs, il semble que cette méthode ne puisse guère donner que des conditions nécessaires (mais non suffisantes) pour qu'il y ait deux intégrales (58) et (59).

IV. — Différentes formes que peut prendre l'intégrale générale de l'équation (1).

[**18**] *Cas où l'existence d'une intégrale* (4) *peut ne pas entraîner l'existence d'une intégrale* (3). — J'ai démontré (*R. C. M. P.*, p. 344) que si, en posant $y = tx$, l'équation (1) admet une intégrale $L\overline{x, t}$, c'est-à-dire si l'équation

$$x(Y_n(1, t) + xY_{n+1}(1, t) + \ldots]dt + [tY_n(1, t) + X_n(1, t) + \ldots]dx = 0 \tag{75}$$

admet une intégrale de la forme

$$x(1 + xL_1 + x^2L_2 + \ldots)\prod_{i=1}^{p}(t + a_i)^{\mu_i} = C \tag{76}$$

où L_1, L_2, ... sont des fonctions rationnelles de t, l'équation (1) admet, en général, une intégrale $f\overline{x, y}$, c'est-à-dire de la forme

$$x^{\lambda_0}[1 + P(x, y)]\prod_{i=1}^{q}(y + \varphi_i)^{\lambda_i} = C.$$

En raison de l'intérêt qu'il y aurait pour certaines démonstrations ultérieures à étendre ce théorème aux divers cas où la démonstration donnée est en défaut, je me propose d'étudier ces cas d'exception.

Nous avions supposé, dans la démonstration donnée, que le polynome

$$tY_n(1, t) + X_n(1, t)$$

n'admet pas de facteur multiple $(t + a)^r$. C'est une hypothèse qui n'est pas indispensable. Avant de chercher dans quelles conditions on peut s'affranchir de cette hypothèse, faisons une remarque relative à ce cas d'un facteur multiple. Puisque l'équation (75) admet l'intégrale (76), l'équation

$$xY_n(1, t)dt + [tY_n(1, t) + X_n(1, t)]\,dx = 0$$

admettra l'intégrale

$$x\prod_{i=1}^{p}(t+a_i)^{\mu_i} = C.$$

Il en résulte immédiatement que si $tY_n(1, t) + X_n(1, t)$ admet $(t+a_i)^r$ pour facteur multiple d'ordre, r, $Y_n(1, t)$ sera divisible par $(t+a_i)^{r-1}$. Nous devons donc, lorsque nous supposons que l'intégrale $L\overline{x, t}$ existe, nous placer toujours dans le cas où la condition suivante, que nous appellerons condition (r), est vérifiée : tout facteur multiple d'ordre r de $tY_n(1, t) + X_n(1, t)$ est facteur multiple d'ordre $r-1$ au moins de $Y_n(1, t)$. Dans ces conditions, si nous supposons que $Y_n(1, t)$ soit de degré n par rapport à t, c'est-à-dire si $Y_n(x, y)$ ne contient pas x en facteur, nous aurons

$$\frac{Y_n(1, t)}{tY_n(1, t) + X_n(1, t)} = \sum_{i=1}^{p}\frac{\mu_i}{t+a_i}. \tag{77}$$

La somme $\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_p$ est égale à 1. Le résidu ou exposant μ_i qui correspond à un facteur multiple $(t+a_i)^r$ du dénominateur peut être nul; ceci se produit si $Y_n(1, t)$ contient également $(t+a_i)^r$ en facteur. Par contre, l'exposant relatif à un facteur simple ne peut être nul, si l'on veut qu'il puisse exister une intégrale $f\overline{x, y}$. En effet, si $t+a_1$ par exemple est un facteur simple et si l'on pose $t+a_1 = y_1$, nous obtenons l'équation

$$(\mu_1 x + \ldots)dy_1 + (y_1 + \ldots)dx = 0$$

où les termes non écrits sont du second degré au moins en x et en y. Si μ_1 est nul, on peut raisonner sur cette équation comme on a raisonné sur l'équation (12) [voir §§ 11 et 13]. Il est impossible qu'il existe une intégrale $f\overline{x, y}$.

Nous avons aussi supposé dans la démonstration indiquée, et nous venons encore de supposer, que $yY_n(x, y) + xX_n(x, y)$ ne contient pas x en facteur. Nous avons dit (§ 3) que l'on peut toujours faire en sorte qu'il en soit ainsi. Cependant les équations différentielles que l'on déduit de (1) en faisant le changement de variable (9) admettent la courbe intégrale $x = 0$, et par suite x est en facteur dans le polynome qui joue le rôle de $Y_n(x, y)$. Pour pouvoir appliquer le théorème en question à ces équations, il nous sera utile de considérer le cas où dans (1) le coefficient $Y(x, y)$ de dy contient x en facteur ([20]), sans que x soit en facteur dans $X_n(x, y)$. On montre facile-

([20]) On peut montrer que le cas que nous signalons est le seul qui puisse se présenter pour l'équation (1) et pour celles qu'on en déduit si l'équation (1) admet une intégrale $f\overline{x, y}$ et si toutes les solutions $y(x)$ algébroïdes et nulles pour $x = 0$ sont, comme nous l'avons supposé, holomorphes pour $x = 0$.

ment que dans ce cas x doit être un facteur simple de $yY_n(x, y) + xX_n(x, y)$. Pour le voir, il suffit de remarquer que la condition (r) dont nous avons parlé doit être vérifiée lorsqu'on permute le rôle joué par x et par y. Nous pouvons énoncer d'une façon générale cette condition en disant : tout facteur multiple d'ordre r de $yY_n(x, y) + xX_n(x, y)$ est facteur d'ordre au moins égal à $r - 1$ de $Y_n(x, y)$ et de $X_n(x, y)$, si l'équation (1) admet une intégrale $L\overline{x, t}$. Nous aurons dans tous les cas que nous venons de considérer

$$\frac{Y_n(x, y)}{yY_n(x, y) + xX_n(x, y)} = \sum_{i=1}^{p} \frac{\mu_i}{y + a_i x}. \tag{77'}$$

La somme $\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_p$ est égale à 1 si $Y_n(x, y)$ ne contient pas x en facteur. Elle n'est pas égale à 1 si $Y_n(x, y)$ contient x en facteur, et nous poserons dans ce cas $\mu_0 = 1 - \mu_1 - \mu_2 - \ldots - \mu_p$. On montrera que μ_0 n'est pas nul, en raisonnant comme nous l'avons fait pour montrer que l'exposant μ_i relatif à un facteur simple n'est pas nul.

Il est indispensable de nous placer dans les conditions que nous venons d'indiquer, si nous voulons que les intégrales $L\overline{x, t}$ et $f\overline{x, y}$ existent simultanément. C'est dans ces conditions que nous nous plaçons. J'ai démontré (*R. C. M. P.*, p. 344) que l'existence de l'intégrale $L\overline{x, t}$ entraîne l'existence de l'intégrale $f\overline{x, y}$, si les conditions suivantes sont simultanément vérifiées :

1° μ_0 *est nul*, ce qui revient à dire, dans les conditions où nous nous sommes placés, que $Y_n(x, y)$ ne contient pas x en facteur;

2° $yY_n(x, y) + xX_n(x, y)$ *n'a pas de facteur multiple;*

3° *Aucun des nombres* $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_p$ *n'est un nombre rationnel négatif.*

Il nous est facile de nous affranchir de la restriction 1° en supposant vérifiées les conditions 2° et 3°, de même que les conditions indiquées plus haut.

Les raisonnements que nous avons développés (*R. C. M. P.*, p. 346) subsistent presque complètement, si μ_0 n'est pas nul. Il faut cependant remarquer, en employant les notations indiquées (*R. C. M. P.*, p. 346), que

$$V = tY_n(1, t) + X_n(1, t)$$

est de degré n et non plus de degré $n + 1$. Il en résulte que $t = \infty$ sera, en général, un point critique de u. Nous avons

$$u = t^{1-\mu_0} \prod_{i=1}^{p} \left(1 + \frac{a_i}{t}\right)^{\mu_i},$$

$$\frac{D_{n+s-1}}{Vu^s} = t^{-1+s\mu_0}\left(\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{t} + \frac{\alpha_2}{t} + \ldots\right),$$

$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ étant des constantes. Nous avons par suite

$$\mathrm{I} = k + t^{s\mu_0}\left(\beta_0 + \frac{\beta_1}{t} + \frac{\beta_2}{t} + \ldots\right),$$

$$\overline{\mathrm{H}}_s = t^{s-s\mu_0}(k-d)\left(1 + \frac{\gamma_1}{t} + \frac{\gamma_2}{t} + \ldots\right) + t^s\left(\delta_0 + \frac{\delta_1}{t} + \frac{\delta_2}{t^2} + \ldots\right),$$

les quantités β, γ, δ, ainsi que k et δ, étant des constantes, $\overline{\mathrm{H}}_s$ devant être par hypothèse une fonction uniforme de t, on aura $k = d$ si $s(1-\mu_0)$ n'est pas un nombre entier, et $t = \infty$ sera un pôle de $\overline{\mathrm{H}}_s$, d'ordre au plus égal à s. Si $s(1-\mu_0)$ est un nombre entier, rien ne prouve que l'on ait $k = d$, mais $t = \infty$ sera encore un pôle d'ordre au plus égal à s si l'on a $\mu_0 > 0$. Rien ne sera alors changé à la conclusion de notre raisonnement : l'existence de $\mathrm{L}\overline{x, t}$ entraîne l'existence de $f\overline{x, y}$. Mais cette conclusion peut être en défaut si μ_0 est un nombre *rationnel négatif*, car $s(1-\mu_0)$ pouvant être un entier, $\overline{\mathrm{H}}_s$ pourra avoir $t = \infty$ pour pôle d'ordre supérieur à s.

Ce cas d'exception ne doit pas nous surprendre, car μ_0 doit évidemment jouer le même rôle que les exposants $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p$. Nous supprimerons donc la restriction 1° en étendant la restriction 3° à l'exposant μ_0, et la démonstration de l'équivalence des formes $\mathrm{L}\overline{x, t}$ et $f\overline{x, y}$ reste seulement en défaut si les conditions 2° et 3° ne sont pas vérifiées.

Si $y\mathrm{Y}_n(x, y) + x\mathrm{X}_n(x, y)$ admet un facteur multiple d'ordre r, par exemple $(y + a_1 x)^r$, nous savons que trois cas seulement sont possibles :

a) L'équation (1) admet exactement r solutions holomorphes $y(x)$ passant par $x = 0$, $y = 0$ et tangentes pour $x = 0$ à la droite $y + a_1 x = 0$;

b) L'équation (1) admet moins de r solutions de l'espèce indiquée;

c) L'équation (1) admet une infinité de solutions de l'espèce indiquée.

Si $y + a_1 x$ est un facteur simple et si μ_1 est rationnel et négatif (21), on a les deux cas suivants :

---

(21) Si μ_1 est rationnel et négatif, nous supposerons, pour simplifier le langage, que, pour considérer les solutions $y(x)$ tangentes pour $x = 0$ à $y + a_1 x = 0$, on fasse un changement de variable $x = x_1^r$, l'entier r étant tel que s'il existe des solutions $y(x)$ algébroïdes pour $x = 0$ et tangentes à $y + a_1 x = 0$, ces solutions deviennent des fonctions $y(x_1)$ holomorphes pour $x_1 = 0$. C'est dans ces conditions que nous parlerons de solutions holomorphes lorsque μ_1 est rationnel et négatif, bien qu'en toute rigueur il doive être question de solutions algébroïdes. Il serait gênant de faire tout d'abord dans l'équation (1) le changement de variable $x = x_1^r$; en effet, pour la nouvelle équation, l'expression analogue à $y\mathrm{Y}_n(x, y) + x\mathrm{X}_n(x, y)$ se réduirait en général à une puissance de y. Nous serions presque toujours dans le cas 2° de ce paragraphe, pour lequel justement se présentent des difficultés.

A. Infinité de solutions holomorphes et tangentes pour $x = 0$ à $y + a_1 x = 0$.

B. Aucune solution de l'espèce indiquée.

Il résulte de ce que nous avons dit [§§ 3 et 5, équation (16)] que dans le cas B l'équation admet des solutions d'ordre $-\frac{1}{\mu_1} - 0$. *Il est donc impossible* (§ 11) *qu'il y ait une intégrale* $f\overline{x, y}$. *Il en est de même dans le cas b.* En effet, l'équation différentielle que l'on forme en posant $y = -a_1 x + xy_1$ ayant par hypothèse dans le cas b moins de r solutions $y_1(x)$ holomorphes et nulles pour $x = 0$, alors que les termes de degré minimum dans le coefficient de dx et dans celui de dy, sont de degré r, cette équation admettra et par suite l'équation (1) admettra aussi des solutions nulles pour $x = 0$ et présentant pour $x = 0$ une singularité incompatible avec l'existence d'une intégrale $f\overline{x, y}$ (voir §§ 5 et 6, voir aussi *A. U. G.*, p. 16, et *J. E. P.*, p. 91). Nous arriverons plus directement à la même conclusion en raisonnant de la façon suivante : Si l'équation (1) admet une intégrale $f\overline{x, y}$, l'équation obtenue en posant $y = -a_1 x + y_1 x$ admettra une intégrale de la même forme :

$$x[1 + Q(x, y_1)] \prod_{i=1}^{q'} (y_1 + \psi_i)^{\lambda'_i} = C.$$

Puisque l'équation différentielle en y_1 et z admet moins de r solutions $y_1(x)$ holomorphes et nulles pour $x = 0$, nous aurons $q' < r$. D'autre part, les termes de degré minimum dans le coefficient de dy et dans celui de dx sont dans cette équation de degré r, on ne saurait donc (§ 12) avoir $q' < r$ sans qu'il y ait une infinité de solutions $y_1(x)$ holomorphes et nulles pour $x = 0$. Il ne peut donc exister d'intégrale $f\overline{x, y}$.

Dans les cas a, c et A on aperçoit immédiatement la raison pour laquelle la démonstration que nous avons donnée (*R. C. M. P.*, p. 344) est en défaut, bien que le théorème puisse être exact. En effet, dans le cas d'un facteur multiple $(y + a_1 x)^r$ ou dans le cas A, nous avons choisi arbitrairement un certain nombre de solutions $y + \varphi_i = 0$ tangentes à $y + a_1 x = 0$ et nous avons choisi arbitrairement les exposants des facteurs $(y + \varphi_i)^{\lambda_i}$ correspondants (sous la seule condition que leur somme soit égale à μ_1). Les facteurs $(y + \varphi_i)^{\lambda_i}$ que nous avons fait figurer dans l'intégrale $f\overline{x, y}$ dont nous voulons démontrer l'existence ont été ainsi choisis, en partie, arbitrairement. Or, il est évident qu'on ne pourra mettre l'intégrale $L\overline{x, t}$ sous la forme $f\overline{x, y}$ que si les facteurs $(y + \varphi_i)^{\lambda_i}$ sont convenablement choisis. L'exemple cité (*R. C. M. P.*, p. 349), montre que $L\overline{x, t}$ peut se mettre sous la forme $f\overline{x, y}$ pour un certain choix de facteurs $(y + \varphi_i)^{\lambda'_i}$, tandis que pour un autre choix de facteurs on ne peut obtenirr la forme $f\overline{x, y}$. Dans les cas c et A, nous n'aurons pas en général de méthode pour déterminer le nombre des facteurs $(y + \varphi_i)^{\lambda_i}$ et par conséquent pas le moyen de choisir ces facteurs : le *théorème énoncé restera douteux*. Dans le cas a, où ce choix est possible, on peut espérer démontrer le théorème.

Nous reviendrons (§ 21) sur le cas où $yY_n(x, y) + xX_n(x, y)$ admet un facteur multiple $(y + a_1x)^r$; nous allons auparavant donner un certain nombre d'exemples des cas qui peuvent se présenter lorsque l'on est dans le cas A. Nous développerons ensuite certaines considérations permettant, lorsqu'on est dans les cas a, c ou A, de caractériser différentes catégories d'équations (1) admettant une intégrale $f\overline{x, y}$.

(*A suivre.*)