

CHARLES CAMICHEL

DENIS EYDOUX

MAURICE GARIEL

**Étude théorique et expérimentale des coups de bélier.
Essais faits à l'institut électrotechnique de Toulouse et à
l'usine hydroélectrique de Soulom**

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 3^e série, tome 8 (1916), p. 1-251

http://www.numdam.org/item?id=AFST_1916_3_8_1_0

© Université Paul Sabatier, 1916, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ANNALES

DE LA

FACULTÉ DES SCIENCES

DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

ÉTUDE THÉORIQUE ET EXPÉRIMENTALE DES COUPS DE BÉLIER

ESSAIS FAITS A L'INSTITUT ÉLECTROTECHNIQUE DE TOULOUSE
ET A L'USINE HYDROÉLECTRIQUE DE SOULOM

PAR MM.

CHARLES CAMICHEL

Professeur à la Faculté des Sciences, Directeur de l'Institut électrotechnique de Toulouse.

DENIS EYDOUX

Ingénieur des Ponts et Chaussées, Ingénieur principal de la voie à la C^{ie} du Midi, Professeur à l'Institut Electrotechnique.

MAURICE GARIEL

Ingénieur, Directeur général des ateliers Neyret-Beylier et Piccard-Pictet.

CHAPITRE PREMIER

SOMMAIRE : Avant-propos. — Méthodes employées au laboratoire et à l'usine. — Appareils utilisés. — Conduites de l'Institut électrotechnique. — Conduites industrielles. — Usine de Soulom : chute du gave de Pau, chute du gave de Caunterets. — Mesure des débits. — Classement des graphiques.

1. Avant-propos.

On appelle coups de bélier, les variations de pression qui prennent naissance dans les conduites sous l'influence des changements de vitesse de l'eau. Ces phénomènes ont une grande importance en raison du développement actuel des installations hydro-électriques, dans lesquelles les conduites forcées constituent un organe important et coûteux. Il est indispensable pour l'économie de réduire le plus possible leur épaisseur; il faut pour cela connaître exactement les pressions produites par les divers fonctionnements possibles du régulateur et donner à la paroi l'épaisseur juste suffisante pour que le métal, sous l'influence de la pression statique augmentée des surpressions, travaille au taux habituel de 8 à 10 kgmes par mm².

Il faut d'ailleurs remarquer que la tendance actuelle de l'industrie paraît être

d'augmenter la vitesse de l'eau dans les conduites; celle-ci, qui ne dépassait pas récemment 2 ou 3 mètres par seconde, atteint aujourd'hui, dans certains projets, 5 à 6 mètres par seconde ⁽¹⁾, ce qui rend encore plus importante la question des coups de bélier. Les appareils de protection des conduites, réservoirs d'air, cheminées d'équilibre viennent encore compliquer cette étude. Ajoutons que les usines métallurgiques tendent de plus en plus à l'emploi des presses hydrauliques alimentées, soit par des chutes d'eau, soit par des accumulateurs hydrauliques actionnés par des pompes; on sait combien les coups de bélier sont violents dans ces installations.

Le travail que nous publions aujourd'hui ⁽²⁾ a pour objet de résumer les études théoriques et expérimentales que nous avons poursuivies pendant plusieurs années à l'Institut électrotechnique de Toulouse et à l'usine hydro-électrique de Soulom, et qui ont nécessité plus de trois mille expériences distinctes. Les considérations théoriques trouveront leur place dans les chapitres qui leur correspondent; il en sera de même de la description des expériences. Il est toutefois nécessaire, pour éviter les redites, de donner dès le début quelques indications tout à fait générales sur les méthodes employées, les appareils utilisés, et les laboratoires et usines où nous avons travaillé: c'est ce que nous allons faire.

2. Méthodes employées au Laboratoire et à l'usine.

Nous nous sommes attachés à conduire simultanément des expériences de Laboratoire sur une chute artificielle de 17 m. 3 de hauteur et d'une puissance de 4 chevaux organisée à l'Institut électrotechnique de Toulouse, et de grandes expériences industrielles dans une usine d'une puissance totale de 21.000 chevaux (Soulom), répartie en deux chutes distinctes ayant respectivement 120 mètres et 250 mètres de hauteur.

Au premier abord, il semble que les conditions dans lesquelles on se trouve dans l'un et l'autre cas sont bien différentes. En effet, dans le phénomène du coup de bélier, interviennent deux éléments distincts: la compressibilité de l'eau et la déformation de l'enveloppe. Or, les faibles hauteurs de chute et les faibles débits, dont on peut disposer normalement dans un Laboratoire, amènent à employer des conduites travaillant à un taux très inférieur à celui admis dans la pratique industrielle. C'est ainsi que la conduite de Toulouse ne travaille qu'à 0,16 kg. par mm², alors que l'on admet pour les conduites industrielles 8 à 10 kg. par mm² comme taux normal de travail de l'acier. Il en résulte que dans la conduite de laboratoire,

⁽¹⁾ Cette augmentation de vitesse est limitée par la perte de charge.

⁽²⁾ Voir *C. R.*, T. 161, p. 548 et p. 626, Camichel, Eydoux et Gariel, Sur les coups de bélier.

la variation de volume due à la compressibilité de l'eau est de beaucoup supérieure à celle due à la dilatation de l'enveloppe, alors que, dans les conduites industrielles, ces deux variations de volume sont du même ordre de grandeur.

Pour nous faire mieux comprendre, employons une comparaison ; nous pourrions dire qu'une conduite de Laboratoire est, en quelque sorte, l'inverse d'un tube de caoutchouc rempli d'eau, dans lequel la compressibilité du liquide est négligeable vis-à-vis de la dilatation de l'enveloppe. Mais comme, dans la théorie du phénomène ⁽¹⁾, la compressibilité de l'eau et la dilatation de l'enveloppe interviennent dans un même facteur, la vitesse de propagation, il en résulte que les conditions spéciales dans lesquelles travaille le métal de la conduite de laboratoire n'altèrent pas l'allure des phénomènes. Précisons ces considérations par quelques chiffres : dans la conduite de 80 mm. de l'Institut électrotechnique, l'épaisseur de 5 mm., qui est beaucoup trop grande, n'a d'autre effet que de donner à la vitesse de propagation des ondes une valeur élevée : 1.300 m/s. ; tandis que dans la conduite C₄ de Soulom, à la partie supérieure (7 mm. d'épaisseur, diamètre 810 mm.) la vitesse de propagation des ondes est 962 m/s. Les conduites de Laboratoire auront donc une vitesse de propagation plus élevée que les conduites industrielles, mais les phénomènes auront la même allure dans les unes et dans les autres.

Ainsi, nos expériences de laboratoire, dont nous avons pu faire varier les conditions à peu près à volonté, nous ont permis de créer une technique expérimentale qui a pu être transportée, *sans aucun changement*, dans les usines. Elles nous ont servi à la fois de guide et de contrôle. Citons par exemple : la méthode de la dépression brusque, l'analyse harmonique d'une conduite au moyen d'un robinet tournant, etc.

Cette alliance constante de l'usine et du Laboratoire se retrouvera constamment dans notre travail ; elle nous a permis de résoudre certaines questions de la plus grande importance, comme la détermination de la vitesse de propagation dans les conduites à caractéristiques variables. Nous avons pu ainsi faire disparaître l'incertitude dans laquelle on se trouvait relativement à cette vitesse, dont la variation apparente sous l'influence de la pression était, en quelque sorte, la pierre d'achoppement qu'on rencontrait au début de toute étude sur les coups de bélier.

Au cours de ce mémoire, nous reviendrons sur cette comparaison entre les expériences d'usines et de laboratoire (chap. II). Nous expliquerons également comment on choisit les manomètres servant à mesurer les pressions dans les conduites de faible section (voir chap. II) employées dans les Laboratoires et les diverses corrections qu'il faut apporter aux mesures (chap. XI).

⁽¹⁾ Au moins, si l'on se borne à l'emploi des théories jusqu'à présent utilisées, c'est-à-dire des théories négligeant la déformation des ondes et admettant l'hypothèse d'une vitesse de propagation bien définie.

3.

Appareils employés.

Nous nous sommes surtout servis des manomètres Garnier-Mathot et Crosby. Le manomètre Mathot (*fig. 1*) se compose d'un piston qui se déplace sous l'influence de la pression à mesurer; il est maintenu par un ressort antagoniste qui a la forme

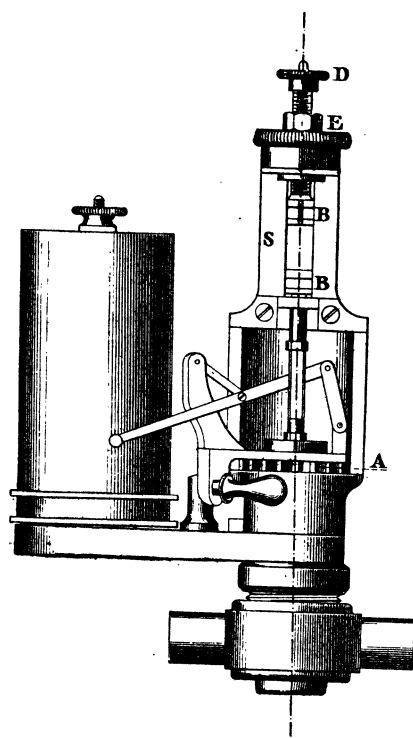


FIG. 1. — Vue de l'Indicateur Mathot et du cylindre sur lequel se fait l'inscription; B logement des extrémités du ressort; D bouton de réglage.

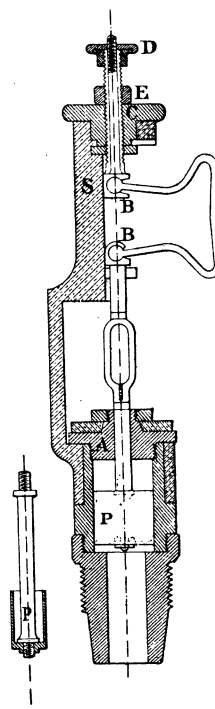


FIG. 1. — Coupe d'indicateur, montrant le piston P, le ressort BB et les divers détails de construction.

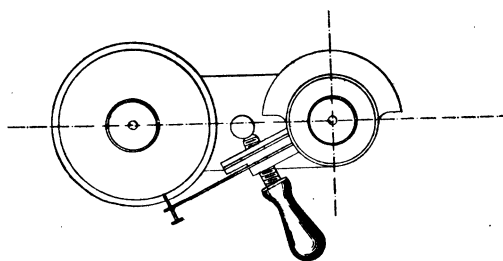


FIG. 1. — Vue en plan de l'indicateur et du cylindre enregistreur.

d'un V. Le piston entraîne un système articulé qui amplifie ses mouvements en traçant sur un cylindre enduit de noir de fumée des ordonnées rectilignes, qui sont des génératrices de ce cylindre. Les ressorts, les pistons et les corps de pompe dans lesquels ceux-ci se déplacent sont choisis convenablement dans chaque cas. Par exemple, pour la conduite de laboratoire de 80 mm. et 17 m. 3 d'eau de pression statique, nous avons employé, dans le cas de fermetures lentes, le piston de 2 cm. de diamètre et le ressort donnant 15 mm. de déplacement du style pour une augmentation de pression de 1 kgm. par cm^2 . Le cylindre, suivant les cas, tourne plus ou moins vite. Nous avons employé : des cylindres Richard faisant un tour en 12 secondes, un tour en 50 secondes; un cylindre Chauvin et Arnoux à vitesse variable, et ayant comme vitesse rapide un tour en 3 minutes, etc. Ce cylindre est utile pour des phénomènes lents, comme par exemple les variations de pression provoquées par une cheminée d'équilibre (voir chap. XI).

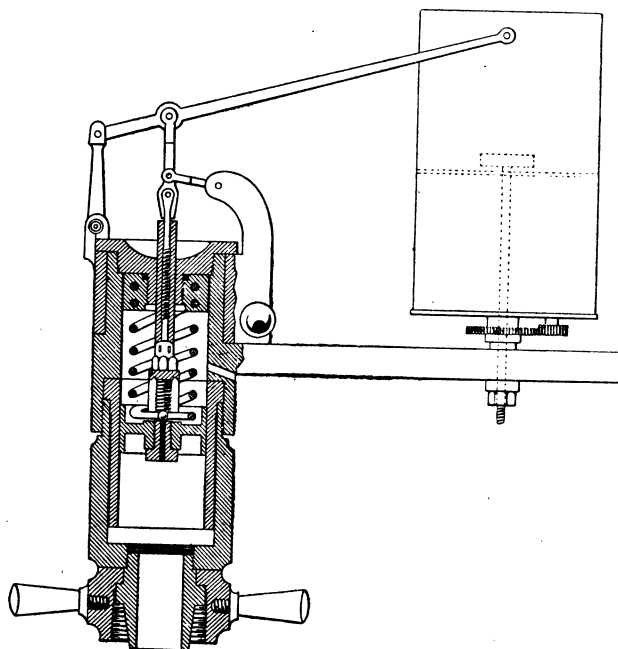


FIG. 2. — Vue de l'indicateur Crosby à ressort intérieur et du cylindre enregistreur.

Le manomètre indicateur Crosby, dont nous avons fait un très fréquent usage, est fondé sur le même principe que le précédent; le ressort est à boudin, il est placé soit à l'intérieur, soit à l'extérieur (*fig. 2 et 3*).

Pour inscrire le temps, nous employons un signal genre Deprez, actionné par une horloge électrique battant la $1/2$ seconde. Nous avons utilisé, au laboratoire,

une horloge Favarger, entretenue électriquement et à l'usine, soit un simple pendule, établissant un contact sur une cuvette à mercure, soit une horloge de la Compagnie de Cambridge. Pour subdiviser le temps, un diapason entretenue électriquement et ayant comme période soit $\frac{1}{100^e}$, soit $\frac{1}{50^e}$ de seconde, inscrit ses vibrations sur le cylindre enduit de noir de fumée.

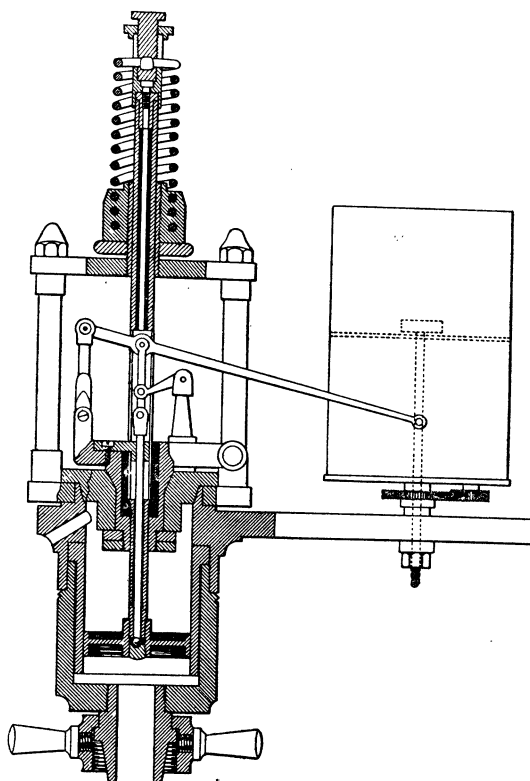
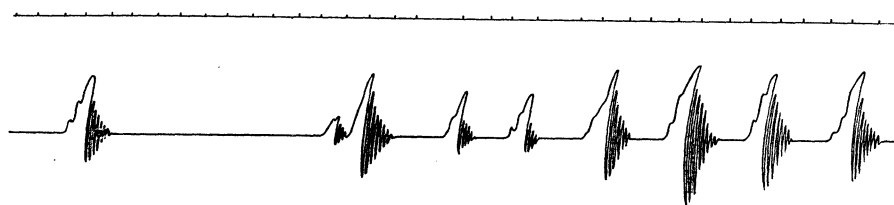


FIG. 3. — Vue de l'indicateur Crosby à ressort intérieur et du cylindre enregistreur.

Les indicateurs Mathot, Crosby conviennent très bien pour l'inscription des pressions variant rapidement; c'est le cas des conduites courtes, telles qu'on les emploie dans les laboratoires. Ils conviennent aussi pour l'étude des faibles volumes d'air, etc...

Quand on a affaire à des conduites industrielles longues de plusieurs centaines de mètres, et pour lesquelles la vitesse de propagation de l'onde est assez faible, ou bien à des conduites munies de grands réservoirs d'air, ou à des conduites munies de cheminées d'équilibre, les variations de pression ont une période de plusieurs

secondes; on peut alors, sans inconvénients, employer des manomètres genre Bourdon, qui ne se prêteraient pas à l'inscription de phénomènes rapides, en raison des grandes dimensions de leur équipement mobile. C'est ainsi que pour la conduite C₄, nous avons pu employer avec succès un manomètre Bourdon.



1E. Période propre du manomètre Bourdon.
(Fig. 4)

4 Périodes du Bourdon
= 2^m13 période 0^m532
7^m - 13^m5

FIG. 4. — 1E-60-5. Détermination de la période propre d'un manomètre genre Bourdon.

Toutefois, avec ces appareils, il est nécessaire de déterminer la période propre qu'ils possèdent. Pour cela, on écarte légèrement l'équipage mobile de sa position d'équilibre et on abandonne l'appareil à lui-même; ses oscillations s'inscrivent sur le cylindre enregistreur. La figure 4 indique une détermination de ce genre; la période trouvée a été 0^m,052. Le manomètre, dans certains cas, peut résonner sous l'influence de cette période; nous en verrons plus loin un exemple. Les manomètres genre Bourdon ont l'inconvénient d'avoir des ordonnées curvilignes.

Les manomètres de l'un et l'autre système doivent être réglés de façon à ne pas frotter; on arrive à les régler convenablement avec un peu d'habitude; signalons que les manomètres Bourdon doivent avoir leur axe légèrement écarté par rapport à l'axe du cylindre enregistreur.

L'étalonnage de ces appareils peut se faire au laboratoire⁽¹⁾ en employant l'appareil de Marecx, dont la figure 5 indique le fonctionnement: un piston P, de 1 centimètre de section, est chargé de poids marqués et produit une pression exactement connue. On commence par ouvrir le robinet R; on soulève le piston et les poids P'; on ferme les robinets R, on donne aux poids P' et au piston P un mouvement de rotation; on met en marche le cylindre enregistreur et on trace une droite corres-

(¹) A l'usine, l'étalonnage se fait facilement en utilisant la pression statique y_0 , qui est toujours exactement connue; on trace la ligne atmosphérique et celle qui correspond à y_0 . Pour la mesure des surpressions, il faut s'assurer que l'extrapolation est légitime.

pendant à la pression produite. L'appareil est plein d'huile. Quand la pression est élevée, on refoule l'huile au moyen d'une pompe qui n'est pas figurée sur le schéma. Le tarage doit se faire d'abord en augmentant, ensuite en diminuant les pressions. La figure 6 indique le tarage d'un manomètre indiquant les pressions de 0 à 4 kgm. par cm^2 .

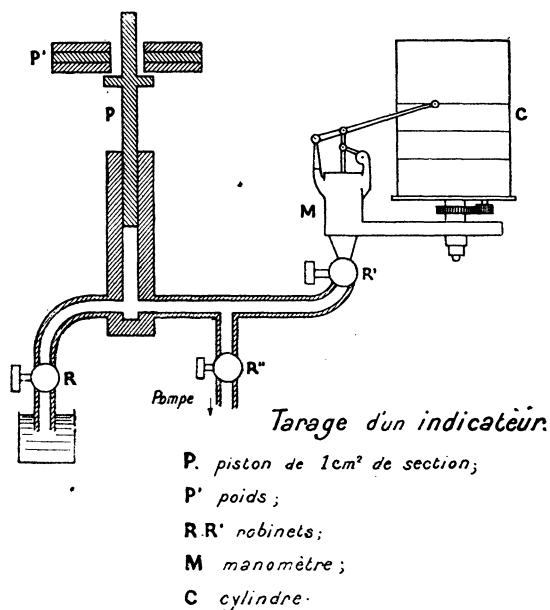


FIG. 5. — Schéma du montage de l'appareil de Marex pour le tarage des indicateurs.

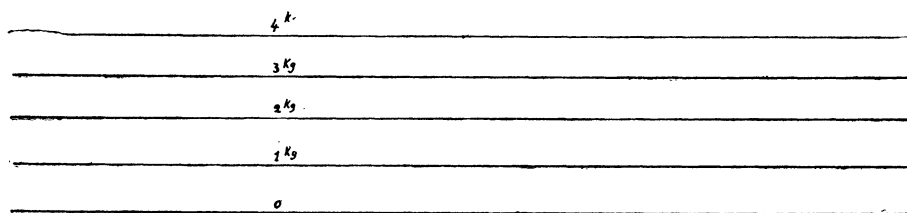


FIG. 6. — IE-92. Graphique de tarage d'un manomètre Crosby, ressort de 15 m/m , par l'appareil Marex.

Indépendamment des indicateurs et des manomètres Bourdon, nous avons employé, assez rarement, des manomètres utilisant la déformation d'une plaque téléphonique, qui entraîne un équipage mobile, comme dans le manographe Hospitalier-Carpentier. Nous avons même réalisé un appareil différentiel, en produisant sur l'une des faces de la plaque la pression $y_0 + \Delta y$ et sur l'autre la pression y_0 .

Pour cela, au lieu de laisser la plaque dans l'atmosphère, on la place dans une chambre d'air close, où l'on produit la pression γ_0 . Cette chambre a un volume suffisant pour que la dissolution de l'air dans l'eau ne fasse pas varier sensiblement le zéro de l'appareil pendant la durée d'une mesure; les figures 7, 8, 9, 10 représentent la disposition adoptée pour une expérience, la coupe de l'appareil et une courbe de graduation. Cet appareil est certainement mieux adapté que les précédents à l'étude des surpressions et dépressions qui constituent les coups de bélier;

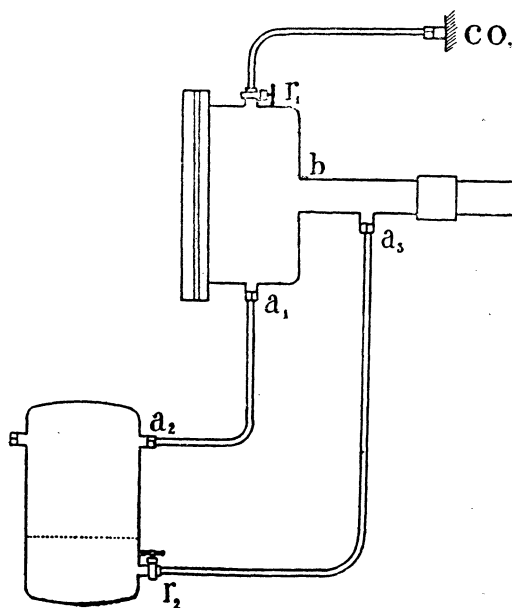


FIG. 7. — Schéma du montage du manomètre à plaque : *co* compresseur d'air; a_1, a_2 tube de communication avec la chambre à air; r_2 robinet permettant d'établir la communication de la conduite avec la partie inférieure de la chambre à air. Le robinet r_2 est fermé un peu avant le début de la mesure; dès que celle-ci est terminée, on l'ouvre pour vérifier que le zéro n'a pas changé.

malheureusement, si la lecture des elongations peut se faire avec une échelle translucide, comme dans un galvanomètre balistique, l'inscription des pressions exige la photographie. C'est une grande complication dans des études comme celles que nous avons entreprises, qui exigent beaucoup d'expériences qu'il faut effectuer rapidement pendant les périodes d'arrêt des machines et qu'il est souvent nécessaire d'interpréter sur-le-champ, en vue de la conduite des expériences suivantes. C'est pour cela que nous avons abandonné la photographie et que nous avons presque toujours adopté l'inscription sur du papier enduit de noir de fumée et la

fixation à la gomme laque en dissolution dans l'alcool. Ce n'est que d'une façon tout à fait exceptionnelle que nous avons employé les plumes enduites d'encre ou le papier chimique dont l'usage est si répandu pour les indicateurs des machines thermiques.

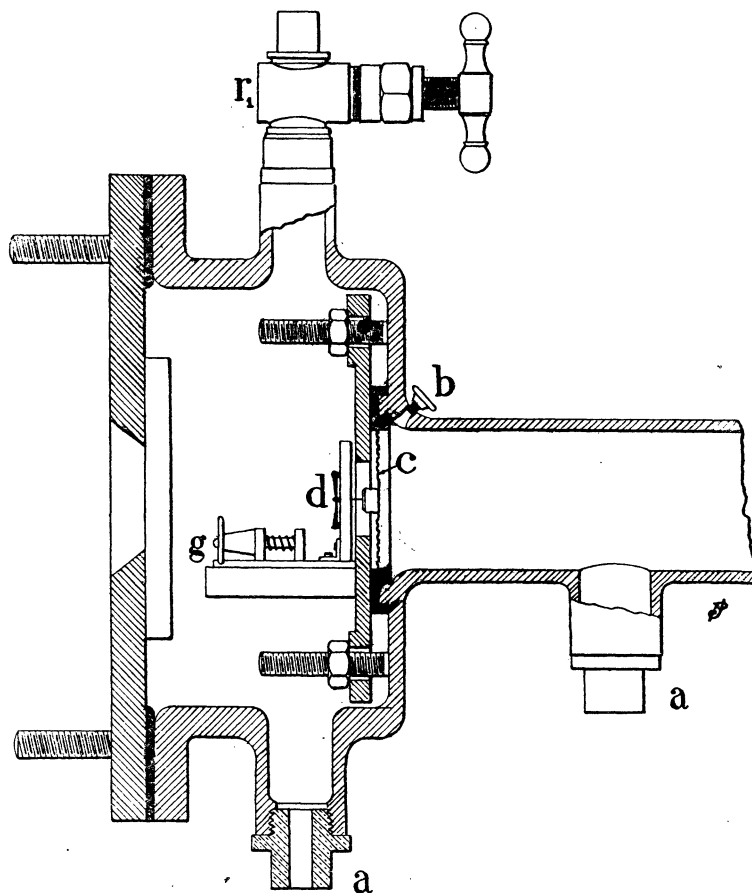


FIG. 8. — Coupe du manomètre à plaque : *a* raccord de communication avec la chambre à air ; *b* purge ; *c* plaque ondulée ; *d* miroir concave ; *g* vis de réglage du zéro de l'appareil ; *r₁* robinet, tube de communication avec le compresseur d'air *co* (voir fig. 7).

4. Conduites de l'Institut électrotechnique de Toulouse.

Les conduites employées sont reliées d'une part à une chambre de mise en charge, à l'une de leurs extrémités et à l'autre à un robinet. La conduite de 80 mm. de diamètre intérieur et de 5 mm. d'épaisseur, en fer, est formée de tronçons de

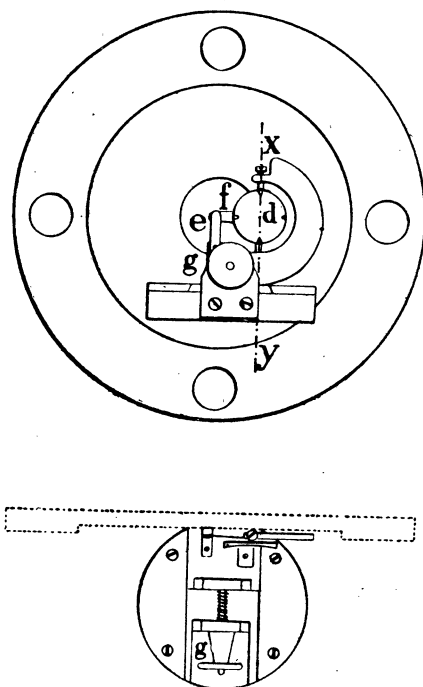


FIG. 9. — Figure montrant la disposition adoptée pour amplifier les mouvements du miroir *d*. Ce miroir porte un bras, *f*, sur lequel s'appuient, d'un côté, une pointe soudée au centre de la plaque *e* et de l'autre côté un ressort antagoniste que l'on règle au moyen de la vis *g*; on modifie ainsi le zéro de l'appareil; *xy* est l'axe de rotation du miroir.

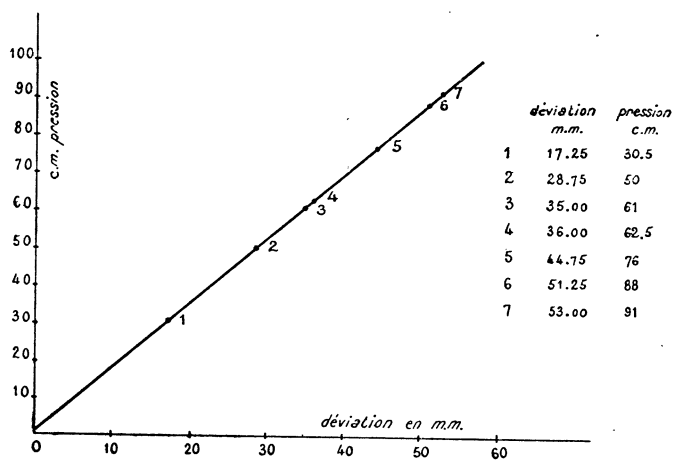


FIG. 10. — Courbe de tarage du manomètre à plaque.

5 m. 50 environ de longueur, reliés les uns aux autres par des raccords vissés (*fig. 11*), munis à leur partie supérieure d'une ouverture O, qui sert pour purger la conduite. La purge d'une conduite est la question la plus importante qui se pose au moment d'un essai : il faut la débarrasser complètement de tout l'air qui a pu rester dans ses cavités. Quand la pression de l'eau (hauteur de chute) est faible, par exemple quelques mètres d'eau (4 mètres pour la conduite installée à l'usine à gaz de Tou-

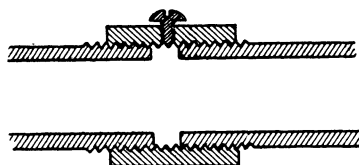


FIG. 11. — Raccord de la conduite IE; à la partie supérieure, on voit la vis permettant d'effectuer la purge de la conduite par l'évacuation de l'air logé dans la partie supérieure du raccord.

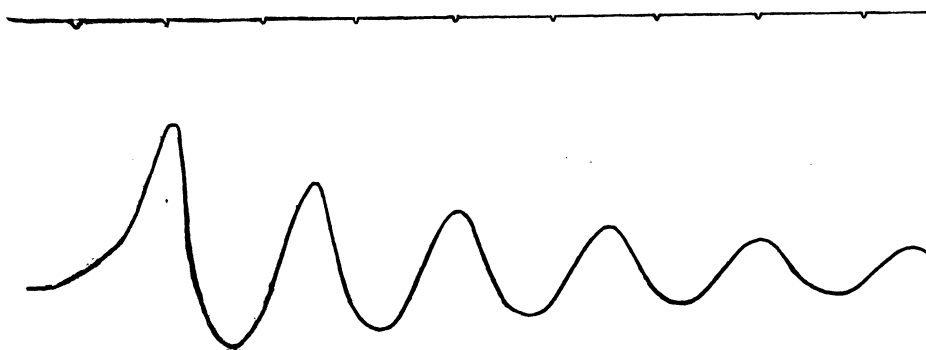


FIG. 12. — IE-2. Graphique des surpressions dans une conduite ayant une poche d'air à son extrémité aval: au début du graphique, on observe la forme caractéristique des graphiques dans les conduites non purgées : la partie supérieure est pointue.

louse), et que la conduite comprend une portion horizontale, il est très difficile et parfois impossible de se débarrasser complètement de l'air; c'est le cas de la conduite de 300 mm. de diamètre intérieur de l'Institut électrotechnique. L'air s'emmagasine à la partie supérieure des robinets vannes et s'accroche aux rivures. Quand on opère une fermeture de très courte durée sur une pareille conduite, on obtient des graphiques de surpressions présentant l'aspect caractérisant la présence de l'air : d'abord, dès que le coup de bélier est notable, de l'ordre de la pression statique par exemple, les courbes de pression ont leur partie positive, c'est-à-dire située au-dessus de la ligne de pression statique, plus pointue et plus

haute que la portion négative. Nous retrouverons cet aspect dans les graphiques du chapitre XI, où nous parlerons des grands coups de bélier dans les conduites munies à leur extrémité aval d'un réservoir d'air ⁽¹⁾, ex. (*fig. 12*) ; un pareil graphique donnerait une valeur tout à fait fautive de la vitesse, a , de propagation de l'onde : la période observée 0^s,77 correspond à une vitesse de 150 mètres par seconde, tandis que la formule d'Allievi dont nous parlerons au chapitre II donne pour cette conduite de 30 mm. de diamètre intérieur et de 5 mm. d'épaisseur une vitesse de 1.119 mètres.



FIG. 13. — IE-16. Graphique des surpressions, dans lequel on peut séparer trois courbes sinusoïdales superposées

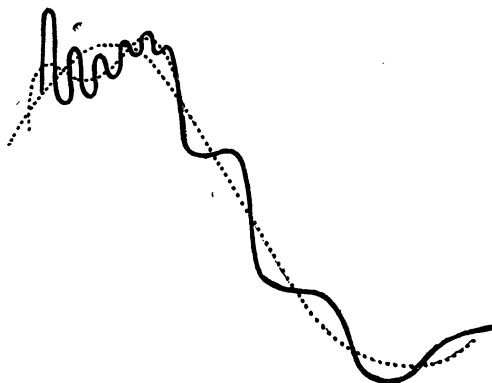


FIG. 14. — IE-16. Séparation des trois courbes sinusoïdales superposées dans le graphique fig. 13.

Quand il y a plusieurs poches d'air, on obtient des courbes *en apparence irrégulières*, mais qui sont la superposition de plusieurs courbes dont les périodes ne sont pas des sous-multiples d'une période fondamentale ; c'est le cas du graphique, figure 13 et figure 14, dans lequel on sépare facilement trois courbes superposées. Un autre diagnostic de la présence de l'air dans une conduite d'épaisseur et de diamètre constants sur toute sa longueur est une courbe dont *la tête* (partie positive) *se modifie constamment*, comme le montre la figure 15 ; cette modification de

(¹) C. Camichel, C. R., T. 164, et *Revue générale de l'Électricité*, 12 mai 1917.

la tête de la courbe provient de la superposition de périodes non harmoniques. Le graphique IE-49-4 (*fig. 15*) représente la superposition d'une sinusoïde de période 0,658, et d'une autre sinusoïde de période 0,265, qui correspondent à la présence de deux poches d'air (voir chap. XI); les courbes ne deviennent sinusoïdales que lorsque leur amplitude est faible.

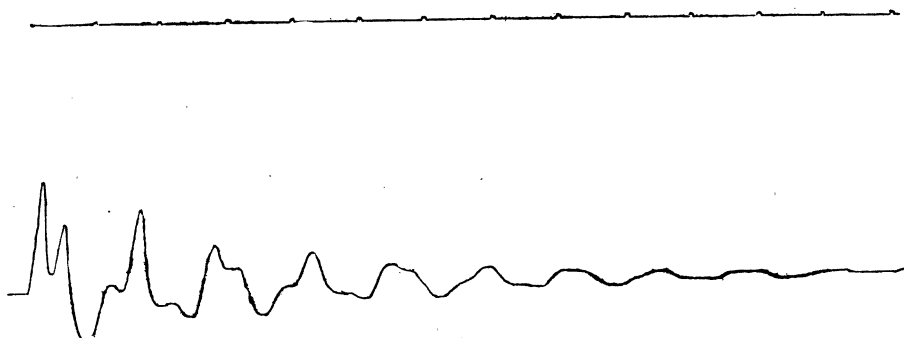


FIG. 15. — IE-49-4. Graphique des surpressions dans le cas de deux poches d'air : deux courbes sinusoïdales sont superposées; la tête de la courbe se modifie.

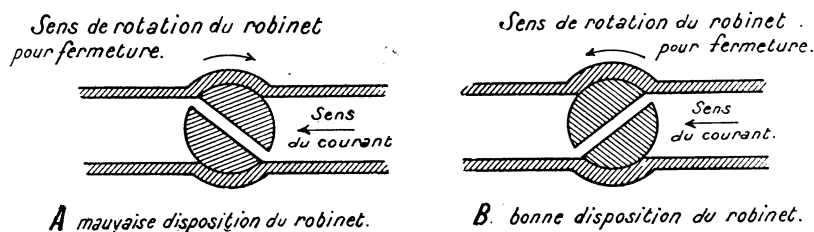


FIG. 16. — IE-80. Figure montrant la disposition qu'il faut adopter pour le robinet placé à l'extrémité aval de la conduite.

Pour purger une conduite, on ouvre complètement le robinet placé à son extrémité aval et on laisse l'eau s'écouler pendant quelques heures avec le maximum de vitesse qu'il est possible de réaliser; on ferme ensuite *lentement* le robinet, et on ouvre pendant quelques instants les trous O pratiqués dans les raccords qui réunissent les divers tronçons de la conduite. Pour les faibles charges, il faut recommencer plusieurs fois cette opération et attendre parfois *plusieurs jours* pour que la purge soit complète. On suit l'opération en déterminant, après chaque purge, la période de la conduite par un graphique de fermeture brusque (voir chap. II). Cette période décroît progressivement jusqu'à la valeur correspondant à la formule d'Allievi (chap. II); elle reste alors constante. La conduite est alors entièrement purgée. Le graphique de fermeture brusque doit avoir, à son début, la forme rec-

tangulaire indiquée dans la figure 18. On peut également employer le clapet automatique (voir chap. VI), dont la période donne précisément celle de la conduite : un simple chronomètre suffit alors pour suivre les opérations de purge.

Il est essentiel de disposer tous les organes placés sur le trajet de la conduite de façon à éviter les cavités dans lesquelles l'air pourrait se loger. La figure 16 montre deux dispositions qu'on peut adopter pour la fermeture du robinet : il est facile de voir que la disposition A permet aux bulles d'air de se rassembler contre le robinet ; elle est défectueuse. En opérant, avec cette disposition, une fermeture de très courte durée, on obtient un graphique avec des dentelures (*fig. 17*). En adoptant la disposition B, ces dentelures disparaissent, et on obtient le graphique normal de fermeture instantanée, formé de portions de rectangles (*fig. 18*) ; voir chap. II.

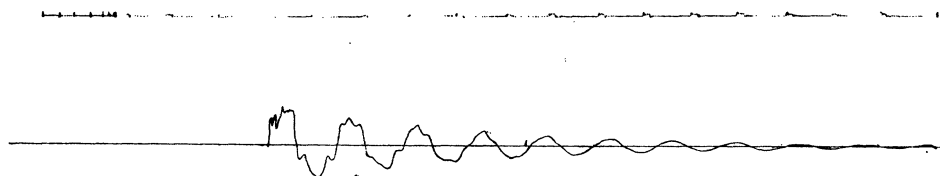


FIG. 17. — IE-80-14. Graphique de fermeture inexact, provenant de l'emploi défectueux du robinet (disposition A) : l'air accumulé contre le robinet manifeste sa présence par des dentelures qui se greffent sur le graphique de fermeture.

Quand une conduite est purgée, il faut éviter avec soin toutes les causes susceptibles d'y faire rentrer de l'air ; ces causes sont multiples. La plus importante et la plus fréquente est la production dans la conduite de pressions inférieures à la pression atmosphérique, pressions consécutives à une fermeture de très courte durée, telle que l'on ait : $\frac{av_0}{g} > y_0$ (voir chap. II) ; c'est le cas réalisé dans le graphique (*fig. 19*) ; on voit que ce phénomène a pour effet de produire sur le graphique les dentelures caractéristiques de l'existence de poche d'air.

Ajoutons que pour éviter toute perturbation, il faudra éliminer avec soin tous les joints, cuir, caoutchouc, qui équivalent à des poches d'air et qui ont pour effet d'altérer la vitesse de propagation en la diminuant ou, ce qui revient au même, d'augmenter la période de la conduite et de modifier entièrement les conditions dans lesquelles elle fonctionne. Nous avons employé à l'usine à gaz de Toulouse une conduite de 100 mm. munie de joints de caoutchouc. La déformation de cette conduite était telle que son extrémité aval se déplaçait de 25 centimètres environ sous l'influence des coups de bélier !

Une autre conduite à joints de plomb n'a pu être employée, car il était impossible de se débarrasser de l'air qui était logé dans l'étaupe destinée à arrêter le plomb fondu au moment de la coulée nécessaire pour la confection des joints.

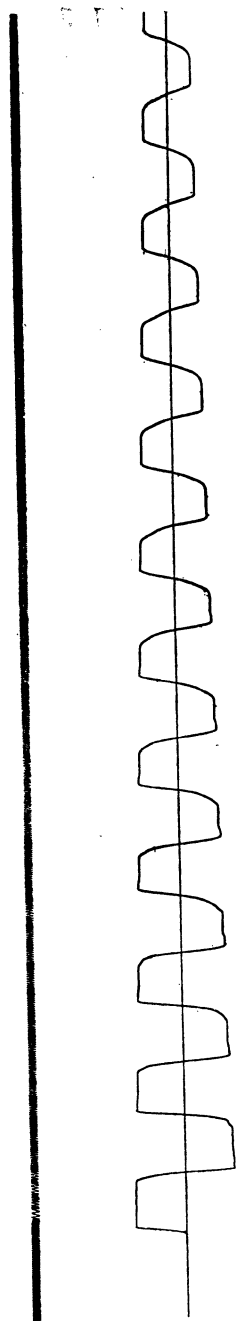


Fig. 18. — IE-112. Fermeture brusque dans une conduite entièrement purgée d'air.

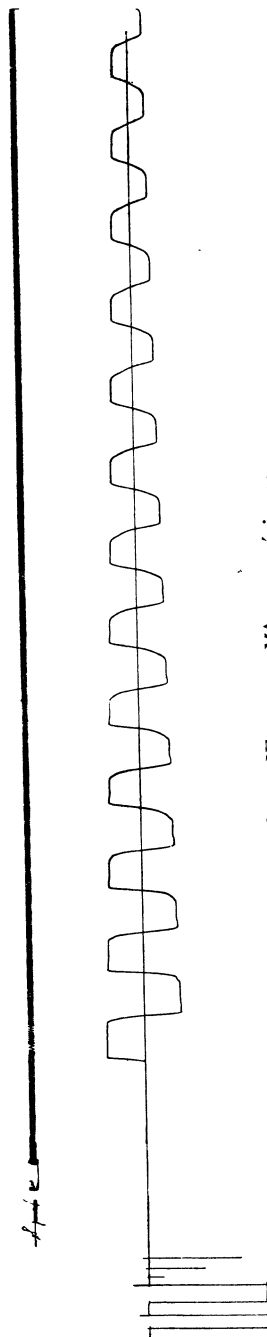


Fig. 18. — IE-112-9. Même expérience.

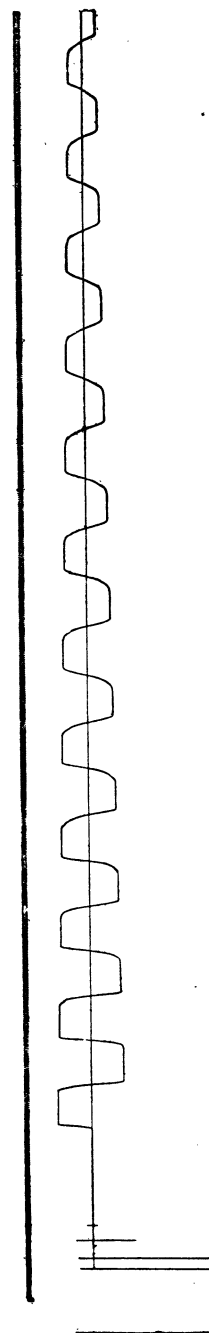


Fig. 18. — IE-112-7. Même expérience.

5.

Conduites industrielles.

Pour les conduites industrielles, la purge est facile à condition de pouvoir réaliser des vitesses d'eau de 2 à 3 mètres par seconde, ce qu'on obtient en chargeant normalement l'alternateur entraîné par la turbine que la conduite

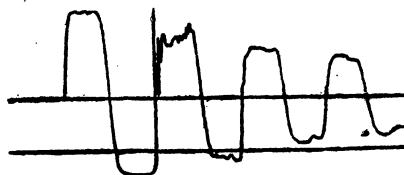


FIG. 19. — IE-127-8. Graphique de fermeture brusque dans une conduite entièrement purgée dans le cas où l'on a : $\frac{av_0}{g} > \gamma_0$; la dépression étant supérieure à la pression statique, la pression au bout du temps $2 \frac{L}{a}$ devient inférieure à la pression atmosphérique ; il y a des rentrées d'air qui ont pour effet de produire des dentelures ; l'observation est faite à l'extrémité aval.

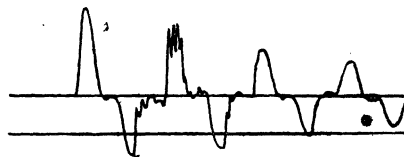


FIG. 19. — IE-127-8. Graphique des pressions dans la même expérience ; l'observation est faite au premier tiers amont.

alimente. Dans le cas contraire, les diagrammes obtenus montrent l'existence de poches d'air localisées, en particulier à Soulom, au Venturi, qui se trouve dans la portion horizontale de la conduite. Cette poche d'air constitue une sorte de barrière pour les surpressions et dépressions qui s'y réfléchissent avec changement de signe ; il en résulte que les diagrammes pris en aval de la poche d'air sont très complexes et surchargés de dentelures, tandis que ceux qu'on prend en amont sur la partie montante de la conduite, où l'air ne peut séjourner, ne contiennent que les variations de pression les plus notables (voir chap. XI). Les hautes chutes réalisent une purge très complète des conduites pendant leur fonctionnement, parce que l'eau qui passe dans la portion aval, étant soumise à une pression élevée, dissout peu à peu tout l'air qui peut rester emprisonné dans les cavités. Une conduite présentant une portion horizontale, dans la région amont, peut y conserver des poches d'air.

6.

Usine de Soulom.

L'usine de Soulom, où nous avons fait de nombreuses expériences, appartient à la Compagnie des Chemins de fer du Midi. Elle est située sur la commune de Pierrefitte-Nestalas (Hautes-Pyrénées), à la jonction des vallées de Cauterets et de Luz. Elle utilise les gaves qui coulent dans ces deux vallées et qui s'appellent gave de Cauterets et gave de Pau. Elle réalise donc, en une seule usine, l'aménagement de deux chutes distinctes : celle dite de « Pau » avec une chute de 120 mètres environ, celle dite de « Cauterets » avec une hauteur de 250 mètres environ. La station centrale est équipée avec six groupes turbo-alternateurs de 3.500 chevaux sur l'arbre des turbines, dont trois sur chaque chute, et quatre groupes d'excitation, dont deux sur chaque chute. Chaque turbine génératrice est alimentée par une conduite spéciale⁽¹⁾.

7.

Chute du gave de Pau.

Nous désignerons les conduites correspondantes par les symboles P_1 , P_2 , P_3 . Chaque conduite alimente une turbine de 3.500 chevaux fournie par la maison A. et H. Bouvier, de Grenoble, du type Francis, centripète à injection totale et aspiration. La turbine est isolée de la conduite d'amenée par un robinet vanne manœuvrable à main ; en outre, le débit peut être réglé par un distributeur à directrices mobiles, commandé par un régulateur de vitesse. En cas de fermeture du vannage par le régulateur de vitesse, celui-ci ouvre en même temps un orifice compensateur, en sorte que le débit reste momentanément constant ; l'orifice se referme ensuite assez lentement pour éviter les surpressions dangereuses. La turbine est accouplée rigidement à un alternateur Thomson-Houston. L'alternateur, d'une puissance effective de 2.400 kilowatts, fournit du courant monophasé à 6.000 volts à la fréquence de 16 2/3 périodes ; il est à 4 pôles inducteurs tournants, à pôles encastrés.

La conduite P_3 , sur laquelle nous avons travaillé le plus souvent, a les caractéristiques suivantes :

Longueur totale : 346 m. 51 ;

Diamètre intérieur : 1.200 mm. ;

Pression statique au bas de la conduite : 118 m. 90.

⁽¹⁾ Voir Camichel, Eydoux et Lhériaud, *Note sur les usines hydro-électriques pour traction de la Compagnie du Midi*, Congrès de la Houille blanche, 1914, T. II, et *Revue générale de l'Électricité*, T. I, 1917.

La conduite est en tôle d'acier soudée avec brides; elle a une épaisseur variant de 7 à 13 mm., en allant de la chambre d'eau au distributeur. On trouvera ci-après (chapitre VII) la nomenclature des tronçons, leurs longueurs et leurs épaisseurs,

Profil en long schématique de la conduite P₃.

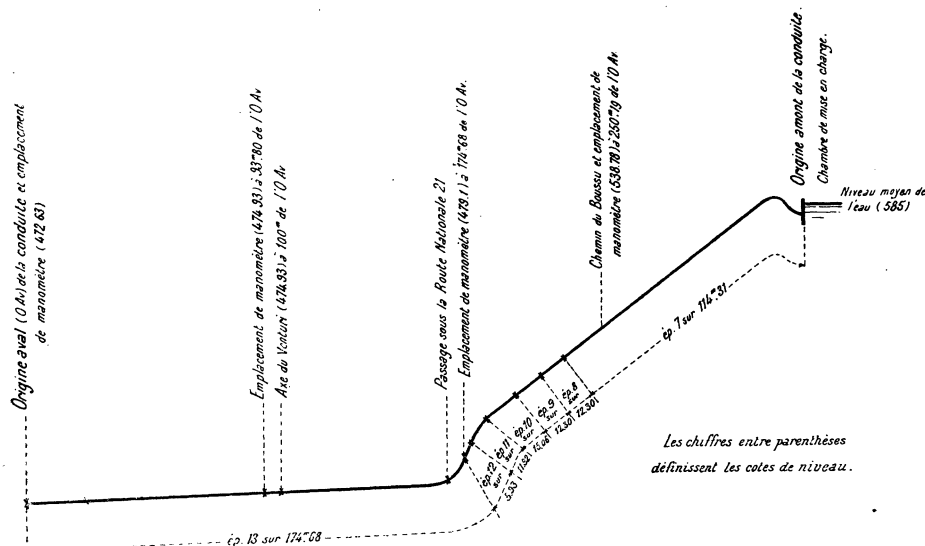


FIG. 20. — Profil en long de la conduite P₃ (gave de Pau); on a indiqué en regard de chaque tronçon l'épaisseur correspondante; c'est à la chambre de mise en charge des conduites P₃ qu'ont été effectuées les expériences de répartition des surpressions expliquées dans la seconde partie de ce mémoire, chapitres VII et IX.

ainsi que le profil de la conduite (*fig. 20*). Dans la partie horizontale inférieure est intercalé un compteur d'eau Venturi.

8.

Chute du gave de Cauterets.

Nous désignerons les conduites correspondantes par les symboles : C₁, C₂, C₃. Nous avons étudié la conduite C₁; ses caractéristiques sont les suivantes :

Longueur totale : 536 mètres.

Diamètre intérieur moyen : 0 m. 810.

Pression statique au bas de la conduite : 252 m. 50.

La conduite est composée de 40 tronçons d'épaisseur variant de 7 à 20 mm. en

allant de la chambre d'eau au distributeur. On trouvera, plus loin, la nomenclature des tronçons (chap. vii), leurs longueurs, leurs épaisseurs, ainsi que le profil de la conduite (*voir fig. 21*). Dans la partie horizontale inférieure est intercalé un compteur d'eau Venturi.

Chaque conduite alimente une turbine Pelton, répondant aux caractéristiques suivantes :

Puissance sur l'arbre : 3.500 chevaux.

Hauteur de chute nette pour cette puissance : 242 m. 50.

Vitesse : 330 t/m.

Débit maximum : 1.400 litres par seconde environ.

Cette turbine, construite par la maison Neyret, Beylier et C^{ie} de Grenoble, est du type Pelton à une roue. L'admission se fait par deux injecteurs circulaires à débit réglable par des aiguilles. La turbine est munie d'un dispositif d'hydropneumatisation qui permet de récupérer une partie de la chute comprise entre le sol de l'usine et le niveau aval, mais ce dispositif a été réglé pendant les essais de coup de bélier de façon que son action soit négligeable et n'introduise pas un facteur de trouble dans les résultats (la dépression maxima dans la capote était en effet de l'ordre de 2 m. 50 pendant les essais, la chute totale étant 252 m. 50).

La turbine est munie d'un régulateur automatique de vitesse à servo-moteur à huile sous pression. C'est à l'aide de ce servo-moteur qu'ont été réalisées toutes les manœuvres de vannage effectuées au cours des expériences. Grâce à des dispositifs spéciaux, on pouvait faire varier les vitesses de manœuvre et réaliser les fermetures et les ouvertures que l'on désirait. Les buses ont été préalablement étalonnées à diverses ouvertures à l'aide du jaugeur Venturi, comme indiqué ci-après. On a employé des dispositifs d'enregistrement automatique du mouvement du vannage pour la mesure des ouvertures des buses.

9.

Mesures des débits.

Dans les recherches faites à l'Institut électrotechnique, on a mesuré les débits au moyen de bassins de jaugeage; à Soulom, nous avons utilisé le jaugeur Venturi. Pour la description de cet appareil, nous renvoyons à la communication que deux d'entre nous ont faite, en collaboration avec M. Lhériaud, ingénieur de la traction aux Chemins de fer du Midi, au deuxième Congrès de la Houille blanche (1914). Le Venturi, tel qu'il est installé à Soulom, donne des indications qui sont exactes à 2 % près pour tous les débits supérieurs à 10 % du débit total, comme l'a mon-

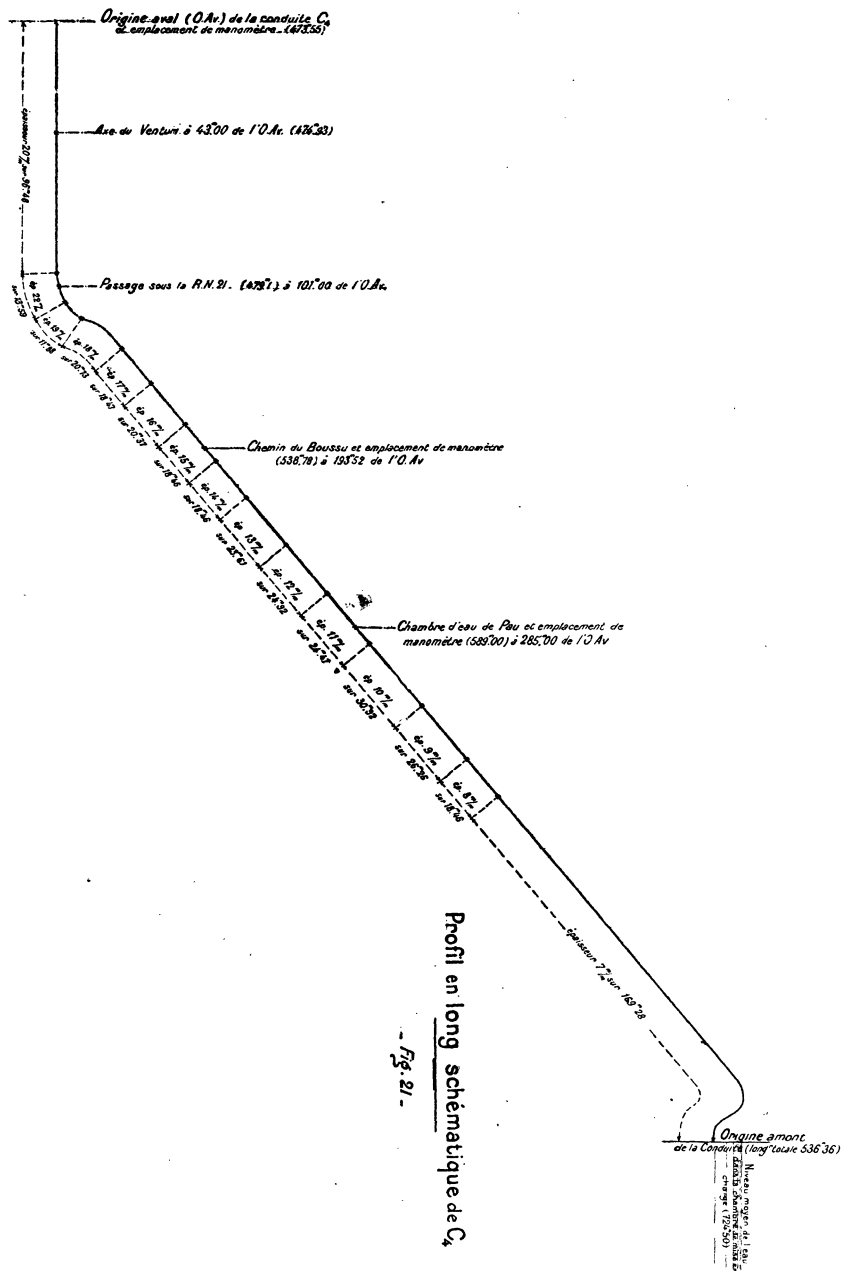


FIG. 21. — Profil en long schématique de la conduite C_4 (gave de Cauterets); les épaisseurs sont indiquées en regard des divers tronçons; la position de la chambre de mise en charge des conduites P_3 est indiquée sur ce schéma.

tré une comparaison avec un déversoir en mince paroi sans contractions latérales, établi suivant les règles de Bazin. En effet, les écarts entre les débits donnés par le déversoir et ceux donnés par le Venturi n'ont jamais, pendant les essais, atteint 4 %, et en général ne dépassaient pas 2 %. Le déversoir donnant une précision de 2 %, on a donc la preuve que le Venturi donne industriellement la même précision que le déversoir établi avec toutes les précautions indiquées par Bazin.

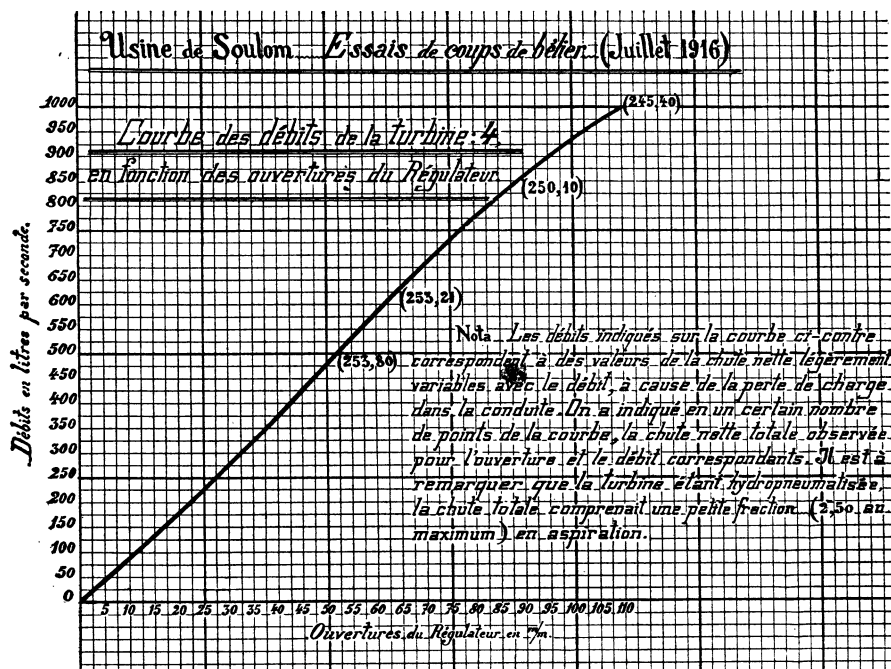


Fig. 23. — Courbe de tarage des ouvertures du régulateur de la turbine alimentée par la conduite C₁; cette courbe a été obtenue par l'emploi du Venturi.

Nous avons songé tout d'abord à enregistrer le débit au cours du coup de béliers lui-même, mais nous avons renoncé à cette méthode qui aurait présenté des erreurs graves à cause du retard qui se produit dans les indications de Venturi, celui-ci n'étant pas établi pour mesurer des variations très rapides de débit. Nous nous sommes donc bornés à étalonner les buses sous la pression statique correspondant aux débits considérés, mais abstraction faite de toute variation de pression dynamique. Les figures 23 et 24 donnent la variation du débit en fonction de l'ouverture du régulateur. La figure 23 donne les débits jusqu'à 110 mm. d'ouverture; la figure 24 jusqu'à 205 mm., ce qui correspond à l'ouverture totale.

L'enregistrement du mouvement du vannage se faisait, dans nos expériences, par l'intermédiaire d'un style fixé sur la tige du servo-moteur du régulateur.

Ce style imprimait sa trace sur un cylindre tournant, enduit de noir de fumée, sur lequel étaient enregistrés également les signaux du temps.

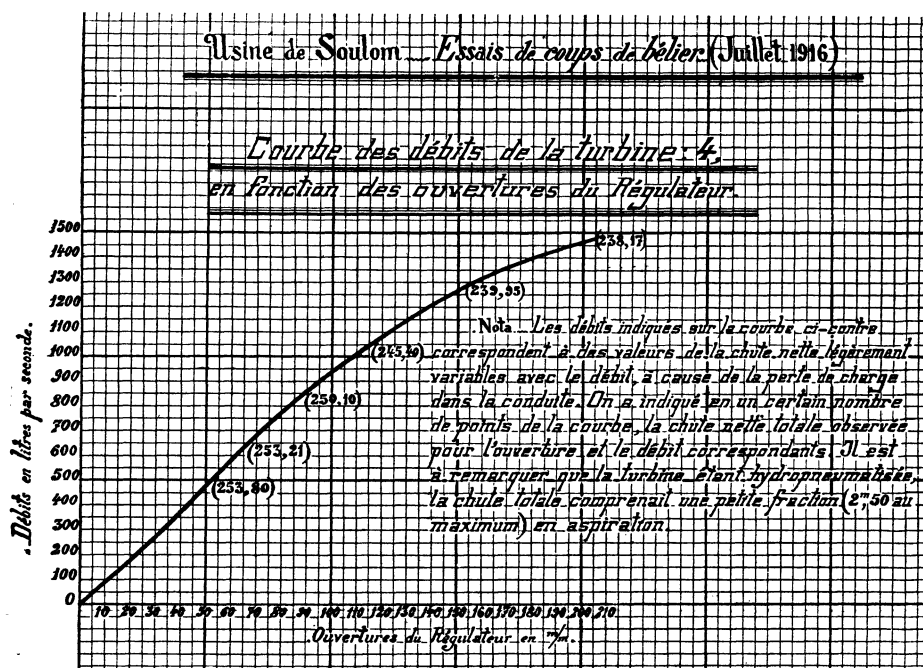


Fig. 24. — Même courbe pour des ouvertures plus grandes du régulateur de la turbine alimentée par C_4 .

10.

Classement des graphiques.

Le nombre des graphiques faits à l'Institut électrotechnique et à l'usine de Soulom sur P_3 , C_4 , a dépassé trois mille; pour éviter des confusions, nous avons convenu de les désigner par les notations suivantes :

IE — Série n°, US — P_3 Série n°, US — C_4 Série n°

PREMIÈRE PARTIE

CHAPITRE II

SOMMAIRE : Coups de bélier d'ondes. — Oscillations en masse. — Bibliographie des coups de bélier. — Conduites à caractéristique unique. — Théorie de MM. Joukowski et Allievi. — Détermination de la vitesse a : méthode de la dépression brusque. — Même méthode : observation au milieu de la conduite. — Application : vérification de l'état d'une conduite; détermination de la position d'une poche d'air. — Fermeture brusque et complète. — Expériences. — Pressions inférieures à la pression atmosphérique provoquées par un coup de bélier de fermeture trop violent. — Comparaison des conduites de laboratoire et des conduites industrielles. — Choix du manomètre; dérivée maximum de la pression en fonction du temps.

11. Coups de bélier d'onde; oscillations en masse.

Nous diviserons les coups de bélier en deux classes distinctes : *ondes se propageant avec une vitesse finie, oscillations en masse*. A la première catégorie appartiennent les phénomènes qui se produisent, au moins au début ⁽¹⁾, dans les *conduites entièrement purgées*; à la seconde, les conduites munies de *réservoirs d'air*, de *cheminées d'équilibre*, de *pare-chocs*... lorsque la dilatation de l'enveloppe et la compressibilité du liquide peuvent être négligées vis-à-vis des autres phénomènes. Cette division des coups de bélier est commode mais artificielle; il arrive assez fréquemment que les deux catégories de phénomènes coexistent. Quant aux conduites, certaines ont sur toute leur longueur la même épaisseur, le même diamètre et la même nature : nous les appellerons conduites à *caractéristique unique*. Le plus souvent, les conduites industrielles sont plus épaisses à leur extrémité aval et plus minces à leur extrémité amont. Elles sont constituées par des tronçons d'épaisseurs différentes et parfois de diamètres différents. Nous dirons que de pareilles conduites sont à *caractéristiques variables ou multiples*.

Nous parlerons d'abord des coups de bélier de la première catégorie, qui sont les plus importants (chap. II, III, IV, V, VI).

⁽¹⁾ Voir, chap. V, *Répartition sinusoïdale*.

12. Bibliographie des coups de bélier.

On trouvera dans *L'Hydraulique* de M. Boulanger, t. II; dans un mémoire de M. Goupil paru en 1907 dans les *Annales des Ponts et Chaussées* et dans le Rapport présenté par M. Jouguet au Congrès de la Houille blanche de 1914, la bibliographie des travaux parus sur cette question avant 1914. Nous avons ajouté à la fin de ce mémoire une bibliographie qui complète les précédentes.

Parmi les auteurs, on peut citer : MM. Boussinesq, Korteweg, Resal, Joukowski, Rateau et surtout MM. Allievi et de Sparre. Ce dernier a en particulier étudié d'une façon complète le cas des conduites à caractéristiques variables, qui n'avait jamais été abordé avant lui, malgré sa grande importance pratique.

Nous avons nous-mêmes, dans les études qui font l'objet de ce mémoire, résolu un certain nombre de questions relatives aux coups de bélier; elles trouveront place dans les chapitres correspondants.

13. Conduites à caractéristique unique. — Théorie de MM. Allievi et Joukowski.

Nous résumerons d'abord, d'après les travaux de MM. Allievi et Joukowski et de Sparre⁽¹⁾, la théorie des coups de bélier dans une conduite à une seule caractéristique.

Le problème des coups de bélier fait intervenir deux éléments : la compressibilité du liquide et la dilatation de la paroi de la conduite. On néglige en général le frottement intérieur ou l'imparfaite fluidité de l'eau; on suppose que les composantes transversales de la vitesse par rapport à l'axe de la conduite, pris pour axe des x , sont nulles, et qu'enfin la vitesse n'est fonction que de x et de t , c'est-à-dire qu'elle est la même, à chaque instant, en tous les points d'une même section de la conduite.

On peut résumer, en un mot, le résultat fondamental auquel on arrive : l'étude des coups de bélier se ramène à l'équation de d'Alembert des cordes vibrantes.

(¹) Allievi, *Teoria del colpo d'ariete*, 1913. Cinq notes de l'Association électrotechnique italienne; *Reale Accademia dei Lincei*, anno CCCIX, 1912; *Revue de mécanique*, janvier et mars 1904, juillet 1914.

Joukowski, *Ueber den hydraulischen Stoss in Wasserleitungsröhren* (Mémoires de l'Académie des sciences de Pétersbourg, 8^e série, vol. IX, 1898).

De Sparre, *Étude théorique sur les coups de bélier dans les conduites forcées*; — *La Houille blanche*, septembre 1904, juillet 1905; — *Bulletin technique de la Société hydrotechnique de France*, 1915.

Considérons d'abord une conduite horizontale; en A se trouve la chambre de mise en charge, en B le distributeur (*fig. 25*).

D désigne le diamètre de la conduite, supposé constant ;

e son épaisseur supposée constante ;

E le module d'élasticité de la paroi ;

ϵ le coefficient de compressibilité de l'eau ;

v_0 et p_0 la vitesse et la pression initiales ;

v et p la vitesse et la pression au temps t ;

ω le poids spécifique de l'eau.

L'axe de la conduite est horizontal, le sens positif de l'axe des x est dirigé d'aval

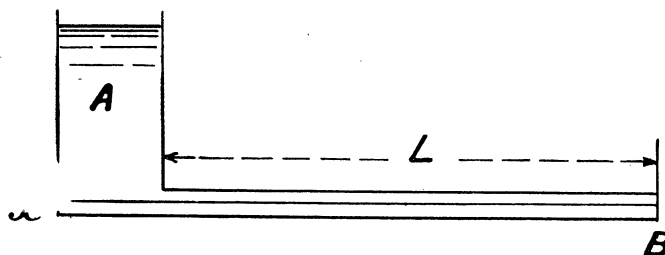


FIG. 25. — A chambre de mise de charge ; B extrémité aval de la conduite.

en amont, et par conséquent opposé au sens positif de la vitesse. Les distances x sont comptées à partir du distributeur.

L'équation des forces vives donne :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\omega}{g} \left(\frac{\partial v}{\partial t} - v \frac{\partial v}{\partial x} \right). \quad (1)$$

L'expérience montre que le terme $v \frac{dv}{dx}$ est tout à fait négligeable vis-à-vis de $\frac{dv}{dt}$.

Pour écrire l'équation de continuité, on exprime que la différence des volumes d'eau qui passent à travers deux sections distantes de dx est égal au volume d'eau emmagasinée par suite de la compressibilité de l'eau et de la dilatation de l'enveloppe ; on obtient ainsi :

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{1}{\epsilon} + \frac{D}{e} \frac{1}{E} \right) \frac{\partial p}{\partial t}. \quad (2)$$

En posant :

$$\frac{1}{a^2} = \frac{\omega}{g} \left(\frac{1}{\epsilon} + \frac{D}{e} \frac{1}{E} \right) \quad (3) \quad \text{et} \quad p = \omega y$$

on a :

$$\frac{\partial v}{\partial t} = g \frac{\partial y}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{g}{a^2} \frac{\partial y}{\partial t},$$

dont les intégrales sont bien connues.

On a :

$$\left. \begin{aligned} y &= y_0 + F_1 \left(t - \frac{x}{a} \right) + F_2 \left(t + \frac{x}{a} \right) \\ v &= v_0 - \frac{g}{a} \left\{ F_1 \left(t - \frac{x}{a} \right) - F_2 \left(t + \frac{x}{a} \right) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Ces équations montrent que les pressions y et les vitesses v ⁽¹⁾ résultent de la composition de deux ondes, l'une se déplaçant avec la vitesse a , l'autre avec la vitesse $-a$. Il est facile de voir que le paramètre a a les dimensions d'une vitesse : LT^{-1} .

Quand le tuyau est indéformable, $E = \infty$, on a alors :

$$a = \sqrt{\frac{\omega}{g}} \varepsilon, \text{ la valeur de } a \text{ est alors } 1.425 \text{ m/s à } 15^\circ\text{C.}$$

M. Allievi a donné à la formule (3) l'expression :

$$a = \frac{9900}{\sqrt{48,3 + k \frac{D}{e}}} \quad (5)$$

où :

$k = 0,5$ pour le fer et l'acier,

$k = 1$ pour la fonte,

$k = 5$ pour le plomb.

Prenons par exemple un tuyau en tôle d'acier :

$$D = 1 \text{ mètre}, \quad e = 10 \text{ mm.}, \quad \text{on a :} \quad a = 998 \text{ m. 6.}$$

La valeur de a pour les tuyaux métalliques est en général voisine de 1.000 mètres par seconde.

Néanmoins, elle peut être, dans certains cas, très inférieure à cette valeur; par

⁽¹⁾ v est négligeable vis-à-vis de a ; v est par exemple égal à 2 m. p. s., et a égal à 1.000 m. p. s.

exemple, la conduite de la Praz, dont le diamètre est 2 mètres et dont l'épaisseur est 4 mm. dans le haut de la conduite, a une vitesse a de 329 mètres par seconde.

Pour les tuyaux de caoutchouc du commerce, M. Allievi trouve E , compris entre 2.10^3 et 6.10^3 , ce qui donne des vitesses comprises entre 17 mètres et 29 mètres. Ce doit être l'ordre de grandeur de la vitesse avec laquelle les pulsations du cœur se propagent dans les artères.

Revenons au système (4), au temps $t = 0$: la vitesse dans la conduite est v_0 au distributeur et la pression est y_0 ; à ce moment-là, il n'y a pas de surpression; on a donc :

$$F_1(0) = F_2(0) = 0$$

y_0 est la pression statique au distributeur. La pression à l'extrémité amont de la conduite, c'est-à-dire à la chambre de mise en charge, est également y_0 ; en désignant par L la longueur de la conduite, on doit donc avoir, quel que soit t :

$$F_1\left(t - \frac{L}{a}\right) + F_2\left(t + \frac{L}{a}\right) = 0 \quad (6)$$

ou :

$$F_2(t) = F_1\left(t - \frac{2L}{a}\right).$$

On pose : $\Theta = \frac{2L}{a}$, c'est la durée d'aller et retour de l'onde du distributeur à la chambre de mise en charge et de cette chambre au distributeur.

On peut alors écrire, pour la pression y et la vitesse v au distributeur :

$$\begin{aligned} y &= y_0 + F(t) - F(t - \Theta), \\ v &= v_0 - \frac{g}{a} \left\{ F(t) + F(t - \Theta) \right\}, \end{aligned}$$

équations qui sont applicables à partir de l'époque Θ .

On peut interpréter ces équations en disant que la perturbation F se propage avec la vitesse a du distributeur à la chambre de mise en charge, se réfléchit sur celle-ci avec changement de signe et revient au distributeur, etc.

Prenons maintenant un point d'abscisse x et considérons les équations (4) et (6), en posant :

$$t + \frac{x}{a} = t' + \frac{L}{a},$$

on a :

$$F_2\left(t + \frac{x}{a}\right) = -F_1\left(t + \frac{x}{a} - \frac{2L}{a}\right);$$

les équations (4) deviennent donc :

$$\begin{aligned} y &= y_0 + F\left(t - \frac{x}{a}\right) - F\left(t - \frac{2L-x}{a}\right), \\ v &= v_0 - \frac{g}{a} \left\{ F\left(t - \frac{x}{a}\right) + F\left(t - \frac{2L-x}{a}\right) \right\} \end{aligned} \quad (4 \text{ bis})$$

dont l'interprétation est évidente.

14. Détermination de la vitesse a . Méthode de la dépression brusque.

La méthode qui paraît, au premier abord, la plus simple consiste à déterminer le temps mis par une perturbation de courte durée pour aller d'un point à l'autre de la conduite. Comme la perturbation est nécessairement enregistrée aux deux postes par des manomètres différents munis de signaux différents, il en résulte des erreurs qui enlèvent à la méthode toute précision, à moins qu'on ait affaire à des conduites relativement longues, comme celles sur lesquelles M. Joukowski a opéré dans ses remarquables expériences de Moscou et qui avaient 760 mètres de longueur.

D'ailleurs, dans l'industrie, les conduites forcées industrielles sont le plus souvent installées sur des pentes abruptes, où il n'est pas toujours facile d'installer provisoirement la ligne électrique d'expérience. On peut toutefois utiliser, lorsqu'elle existe, la ligne téléphonique reliant l'usine au poste de la chambre de mise en charge.

Pour déterminer la vitesse de propagation a de l'onde et en même temps pour se rendre compte de son degré de longévité, nous avons employé la *méthode de la dépression brusque*, imaginée et étudiée par l'un de nous (*), et qui a l'avantage de s'appliquer à des conduites courtes, comme celles dont on dispose dans les laboratoires, et de n'utiliser qu'un seul poste et par conséquent un seul manomètre et un seul signal (**); on peut dire que c'est une *méthode de répétition*, en ce sens qu'on enregistre un grand nombre d'allers et retours de l'onde.

(*) C. Camichel, *C. R.*, T. 161, p. 412, et T. 163, p. 150; *Lumière électrique*, numéros des 9, 16 septembre et du 7 octobre 1916.

(**) Remarquons toutefois que si l'on se borne à l'étude de la vitesse a dans les conduites à caractéristique constante, la méthode de la dépression brusque pourrait à la rigueur être remplacée par l'observation des graphiques des surpressions obtenues quand la fermeture est complètement terminée. En effet, le coup de bélier est un phénomène de période $\frac{4L}{a}$. S'il en est ainsi, il suffit pour déterminer cette période de mesurer le temps

A l'extrémité aval de la conduite étudiée se trouve un petit robinet, qu'on ouvre pendant un temps très court, vis-à-vis du temps Θ que l'onde met pour aller et revenir de l'extrémité aval à la chambre de mise en charge. La variation de pression est inscrite par un manomètre, qui enregistre ensuite cette même variation de pression, réfléchi à l'extrémité amont et changée de signe et ainsi de suite. On obtient ainsi dans le graphique de la pression une série d'encoches, tantôt dans un sens, tantôt en sens inverse, qui permettent de déterminer très commodément la vitesse a . Le temps est inscrit sur le cylindre enregistreur au moyen d'un diapason ayant comme période un $\frac{1}{100^e}$ de seconde. Pendant cette détermination, la conduite reste fermée, les vannes compensatrices n'interviennent pas. La figure 26 indique l'enregistrement des variations de pression. On voit à la partie supérieure du cliché l'inscription du diapason; au-dessous se trouvent inscrites les dépressions et surpressions.

La figure 27 donne également le graphique d'une dépression brusque; le temps est inscrit au moyen d'un signal.

La théorie de la méthode de la dépression brusque est très simple :

Nous supposons, pour simplifier, la conduite toujours horizontale. Soit γ_0 la pression statique, soit ε la vitesse de l'eau et γ la pression à l'extrémité de la conduite au moment du maximum de dépression; on a, en écrivant les équations de M. Allievi :

$$\gamma_1 = \gamma_0 + F_1, \quad \varepsilon = -\frac{g}{a} F_1,$$

d'où :

$$F_1 = -\frac{a\varepsilon}{g}, \quad \gamma_1 = \gamma_0 + \frac{a\varepsilon}{g}. \quad (7)$$

A l'époque $\Theta = \frac{2L}{a}$, la dépression revient à l'extrémité aval, mais elle est changée de signe; on a, à cette extrémité de la conduite, une vitesse nulle, puisque le robinet est fermé, et une pression γ_2 donne par les équations :

$$\gamma_2 = \gamma_0 + F_2 - F_1, \quad 0 = -\frac{g}{a} (F_2 + F_1),$$

qui s'écoule entre deux maxima ou minima consécutifs de la pression. C'est ainsi, semble-t-il, que l'observation d'un simple manomètre à cadran doit permettre, en comptant un certain nombre de périodes et en prenant la moyenne des résultats obtenus, de déterminer a . Si l'on applique cette méthode aux diagrammes relevés à l'Institut électrotechnique de Toulouse, on retrouve la même valeur de a que celle donnée par la méthode de la dépression brusque.

Il n'en est plus de même pour les conduites à caractéristiques variables, comme nous le verrons plus loin (II^e partie, chapitre VIII).

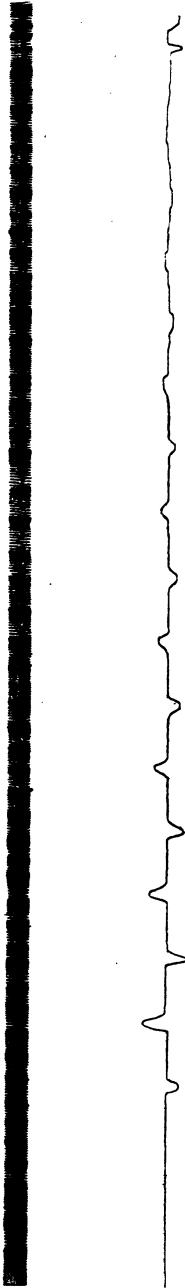


FIG. 26. — IE-112. Méthode de la dépression brusque.

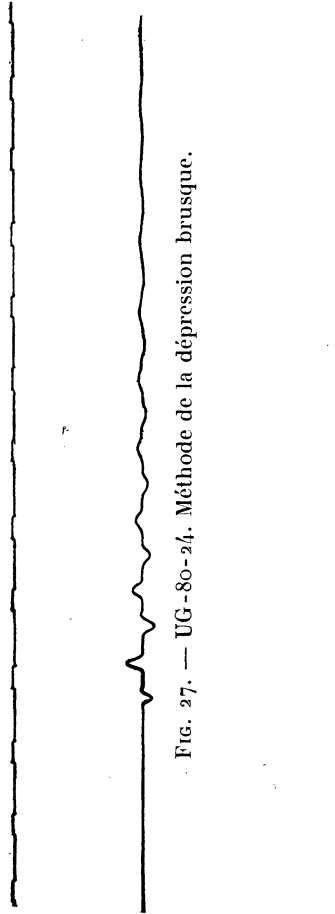


FIG. 27. — UG-80-24. Méthode de la dépression brusque.



FIG. 28. — IE-109-10. Dépression brusque, observation au milieu de la conduite.

d'où

$$F_2 = \frac{a\varepsilon}{g}, \quad \gamma_2 = \gamma_0 + 2 \frac{a\varepsilon}{g}. \quad (8)$$

On voit que la dépression change de signe et que sa valeur absolue est doublée; c'est ce que l'expérience vérifie complètement, comme il est facile de s'en rendre compte sur la figure 26.

En considérant de même les valeurs $\gamma_3, \gamma_4, \dots$ de la pression aux époques 2 Θ , 3 Θ , etc., on a de même :

$$\gamma_3 = \gamma_0 + F_3 - F_2, \quad F_3 + F_2 = 0,$$

d'où :

$$\begin{aligned} F_3 &= -\frac{a\varepsilon}{g}, & \gamma_3 &= \gamma_0 - 2 \frac{a\varepsilon}{g}, \\ \gamma_4 &= \gamma_0 + F_4 - F_3, & F_4 + F_3 &= 0, \\ F_4 &= \frac{a\varepsilon}{g}, & \gamma_4 &= \gamma_0 + \frac{2a\varepsilon}{g}. \end{aligned} \quad (9)$$

Le deuxième encoche a une hauteur double de la première; à partir de la deuxième, toutes les encoches sont pareilles, à l'amortissement près; c'est bien ce qu'indiquent la figure 26 et figure 27.

Diverses expériences ont été faites à l'Institut électrotechnique sur une conduite de fer ayant comme diamètre intérieur 80 mm. et comme épaisseur 5 mm. et 186 m. 8 de longueur; la pression statique étant 17,30, on a obtenu :

$$\frac{4L}{a} = 0,57, \quad \text{d'où} \quad a = 1,312 \text{ mètres.}$$

La formule d'Allievi appliquée à cette conduite donne 1,315 mètres.

15. Même méthode; observation au milieu de la conduite.

On peut appliquer la même méthode en plaçant le manomètre au milieu de la conduite (ou en tout autre point) et en provoquant, comme dans le premier cas, la dépression brusque par la manœuvre d'un robinet situé à l'extrémité aval; on obtient alors le graphique figure 28, qui comprend d'abord une dépression; celle-ci, par sa réflexion sur la chambre de mise en charge, change de signe et devient compression; après réflexion sur l'extrémité aval, elle conserve son signe et reste compression. La réflexion à l'extrémité amont change ensuite son signe, etc.; on expli-

que ainsi le graphique figure 27, qui sert, comme le précédent, à la détermination de la vitesse a .

16. Application. — Vérification de l'état d'une conduite. — Détermination de la position d'une poche d'air.

Pour s'assurer qu'une conduite est complètement purgée, on fera l'expérience de la dépression brusque. Si la conduite est à caractéristique unique, la valeur trouvée pour a doit coïncider avec celle donnée par la formule d'Allievi, si la conduite est complètement purgée. Si la conduite contient une poche d'air, la réflexion s'y fera avec changement de signe, comme à l'extrémité amont, dès que le volume de cette

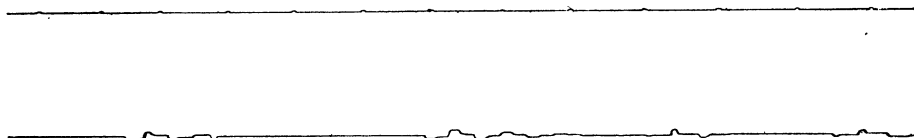


FIG. 29 IE-100-1. Conduite sans poche d'air.

poche d'air sera notable; on pourra, au moyen du graphique correspondant, déterminer la position de la poche d'air.

L'expérience a porté sur une conduite de 115 m. 7 de longueur; le graphique de la dépression brusque est représenté figure 29. Il correspond à une observation à l'extrémité aval. On a :

$$\frac{4L}{a} = \frac{24}{67,5},$$

en évaluant les durées par des mesures de longueurs sur le graphique, et sur l'enregistrement du signal; d'où, en adoptant une vitesse de 1.300 mètres,

$$L = \frac{1300 \times 24}{4 \times 67,5} = 115 \text{ m. } 6.$$

La conduite est donc bien purgée, puisqu'on retrouve sa longueur totale.

On provoque en un point de la conduite une poche d'air bien localisée; on répète l'expérience de la dépression brusque, l'observation étant faite toujours à l'extrémité aval (fig. 30). En désignant par L' la distance de cette poche d'air à l'extrémité aval de la conduite, on a :

$$\frac{4L'}{a} = \frac{14}{52}; \quad \text{d'où} \quad L' = \frac{1300 \times 14}{4 \times 52} = 87 \text{ m. } 5.$$

La distance réelle est 86 m. 5; on voit donc qu'il y a concordance.

La figure 30 indique le schéma de la conduite.

M. Joukowski, dans son important travail sur les coups de bélier, avait indiqué

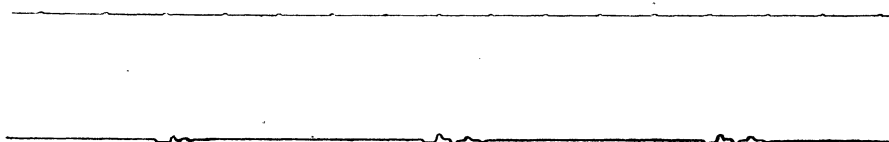


FIG. 30. IE-100-2. Conduite avec poche d'air.

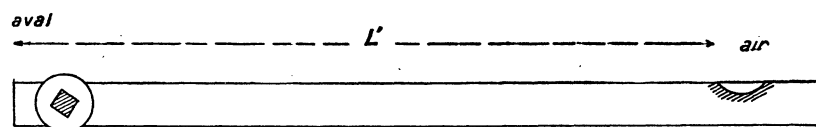


FIG. 30. Schéma d'une conduite présentant une poche d'air à une distance L' de l'extrémité aval (expérience : IE-100-2).

une méthode analogue pour la détermination des poches d'air, mais moins précise que celle-ci.

17.

Fermeture brusque et complète.

Nous dirons qu'une fermeture est *brusque* quand sa durée est inférieure à $\frac{2L}{a} = \Theta$ (¹); dans ce cas, la fermeture est terminée quand l'onde revient à l'extrémité aval.

Les formules de fermeture brusque sont les suivantes.

En désignant par γ_0 la pression statique, on a à la fin de la fermeture (époque 0), une pression γ , dans la conduite; les relations sont :

$$\gamma_1 = \gamma_0 + F_1, \quad 0 = v_0 - \frac{g}{a} F_1,$$

v_0 désignant la vitesse initiale de l'eau dans la conduite, d'où :

$$F_1 = \frac{av_0}{g}, \quad \gamma_1 = \gamma_0 + \frac{av_0}{g}. \quad (10)$$

Le coup de bélier est donc :

$$\xi = \frac{av_0}{g}. \quad (10)$$

(¹) C'est dans le même sens qu'il faut entendre l'expression : *dépression brusque*.

Cette formule a été établie par MM. Joukowski et Allievi; elle est très importante et très fréquemment employée dans la pratique.

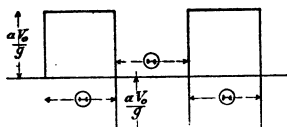


FIG. 31. — Graphique schématisé d'un coup de bélier de fermeture instantanée dans une conduite entièrement purgée d'air, les pressions étant mesurées à l'extrémité aval de la conduite.

En désignant par γ_1 la pression à l'extrémité aval de la conduite à l'époque $\Theta = \frac{2l}{a}$, on a :

$$\gamma_2 = \gamma_0 + F_2 - F_1, \quad v = v_0 - \frac{g}{a}(F_2 + F_1),$$

puisque la conduite est fermée.

On a donc :

$$F_2 = 0, \quad \gamma_2 = \gamma_0 - \frac{av_0}{g}.$$

On aura de même :

$$F_3 = \frac{av_0}{g}, \quad \gamma_3 = \gamma_0 + \frac{av_0}{g},$$

$$F_4 = 0, \quad \gamma_4 = \gamma_0 - \frac{av_0}{g}, \text{ etc.}$$

Si donc la fermeture est très rapide, le graphique des pressions à l'extrémité aval se composera de portions de droites parallèles à l'axe des temps et situées à une distance égale à $\pm \frac{av_0^{(4)}}{g}$, et ayant comme longueur Θ , raccordées par des parallèles à l'axe des ordonnées (fig. 31).

C'est bien ce que donne l'expérience (Voir fig. 18). Celle-ci montre que les amplitudes des surpressions et dépressions diminuent lentement, et en même temps

(4) On peut remarquer que la réflexion avec changement de signe sur l'extrémité amont (chambre de mise en charge) de la conduite est une circonstance heureuse pour la conservation de celle-ci; en cherchant à produire cette réflexion en un point plus rapproché de l'extrémité aval, on arrive à la disposition comprenant une chambre d'air au voisinage de cette extrémité.

que les courbes s'arrondissent; au bout d'un nombre suffisant de périodes 2Θ , elles ont sensiblement la forme de sinusoides (Voir 46, chap. v). Cette déformation des ondes est en général assez lente dans les conduites industrielles, et c'est là, comme nous le verrons à propos de l'influence des pertes de charge, une circonstance heureuse dans la pratique.

L'un de nous a fait quelques expériences pour vérifier les résultats précédents. Nous citerons les expériences suivantes :

18. Expérience : IE-112-6 (*fig. 18*).

Jaugeage : en 50 secondes, masse d'eau écoulée : 26.250 grammes. — Tare : 12.050 grammes. On a pris $a = 1.305$ mètres.

Le diamètre intérieur de la conduite est 80 mm.; on a donc :

$$v_0 = 0 \text{ m. } 0568;$$

Le coup de bélier calculé est :

$$\xi = \frac{1.305 \times 0,0568}{9,8} = 7 \text{ m. } 56 \text{ (calculé).}$$

Sur le graphique, 24 mm. 8 correspondent à 16 m. 85 de pression; le coup de bélier observé correspond à 11 mm. 2. D'où :

$$\xi = \frac{11,2 \times 16,85}{24,8} = 7 \text{ m. } 59 \text{ (observé).}$$

Expérience : IE-112-7 (*fig. 18*).

La fermeture de la conduite a été faite par un petit robinet latéral, tandis que dans la précédente elle était faite au moyen du robinet principal.

Jaugeage : en 100 secondes, masse d'eau écoulée : 29.200 grammes. — Tare : 12.050 grammes.

La vitesse est :

$$v_0 = 0 \text{ m. } 0344.$$

Le coup de bélier calculé est :

$$\xi = \frac{0,0344 \times 1.305}{9,8} = 4 \text{ m. } 5 \text{ (calculé),}$$

$$\xi \text{ observé} = 4 \text{ m. } 7.$$

Expérience : IE-112-9 (fig. 18).

Jaugeage : en 100 secondes, masse de l'eau écoulée : 31.250 grammes. — Tare : 12.000 grammes.

Vitesse de l'eau $v_0 = 0 \text{ m. } 0385$.

$$\xi = \frac{0,0385 \times 1.305}{9,8} = 5 \text{ m. } 1 \text{ (calculé),}$$

$$\xi \text{ observé} = 5 \text{ m. } 3.$$

La concordance est tout à fait satisfaisante. En outre la période $T = \frac{4L}{a}$ déterminée sur les graphiques concorde exactement avec la valeur déterminée par la formule d'Allievi.

19. Pressions inférieures à la pression atmosphérique provoquées par un coup de bélier de fermeture trop violent.

Si l'on a :

$$\frac{av_0}{g} > \gamma_0$$

le coup de bélier, ξ , produit par la fermeture est supérieur à la pression statique ; il en résulte que la pression au temps $\Theta = \frac{2L}{a}$ sera inférieure à la pression atmosphérique ; le graphique aura donc l'aspect ci-dessous :

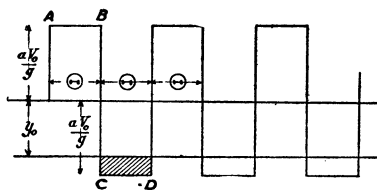


FIG. 32. — Graphique schématique d'un coup de bélier de fermeture dans une conduite entièrement purgée d'air, dans le cas où l'on a : $\frac{av_0}{g} > \gamma_0$, les pressions étant mesurées à l'extrémité aval de la conduite.

Comparer ce schéma au graphique de la fig. 19 (extrémité aval).

Donc, pendant les durées Θ à 2Θ , 3Θ à 4Θ , la pression dans la con-

duite au voisinage du distributeur sera inférieure à la pression atmosphérique; il en résultera un dégagement de l'air dissous, et des rentrées d'air par les filetages de la conduite, les robinets, etc. Cet air traduira sa présence par des dentelures qui, n'existant pas sur le graphique de la première surpression, apparaîtront sur les autres surpressions et dépressions. La figure 19 montre très nettement ce phénomène, auquel nous avons fait déjà allusion plus haut.

En même temps, la période T de la conduite, c'est-à-dire la durée telle qu'une perturbation partie du distributeur y revienne après avoir fait deux fois le trajet aller et retour d'un bout à l'autre de la conduite $T = 2 \Theta$, ne sera plus $\frac{4L}{a}$, mais légèrement augmentée. La vitesse a paraîtra avoir diminué. Il faudra recommencer la purge de la conduite, qui n'est plus bien définie.

Nous avons maintenant tous les éléments pour étudier certaines perturbations produites par les indicateurs, et sur lesquels nous n'avons pu dire que quelques mots; en même temps, nous pourrions préciser les conditions dans lesquelles travaillent les conduites, relativement à la compressibilité de l'eau et à la dilatation de la paroi.

20. Comparaison des conduites de laboratoire et des conduites industrielles à caractère unique.

Précisons ce que nous avons dit page 4. Il est essentiel de remarquer que les conditions dans lesquelles travaillent les conduites industrielles, P_3 et C_4 par exemple, et la conduite IE sont tout à fait différentes, et de rechercher si ces différences n'enlèvent pas leur généralité aux résultats obtenus au laboratoire.

La conduite IE a 5 mm. d'épaisseur et 80 mm. de diamètre intérieur, la pression y est 17 m. 3, soit environ 2 kgm. par cm^2 ; dans ces conditions, le travail moléculaire à l'extension R est :

$$R = \frac{pD}{200e} = \frac{2 \times 80}{200 \times 5} = 0 \text{ kg. 160 p. mm}^2;$$

Nous sommes donc loin des conditions ordinaires de l'industrie. Pour faire travailler le métal à raison de 8 kgm. par mm^2 , il faudrait placer cette conduite sur une chute d'un kilomètre de hauteur. La conduite de l'Institut électrotechnique est relativement trop épaisse. Elle conviendrait plutôt à une installation de presse hydraulique qu'à une usine hydroélectrique. Il faut d'ailleurs remarquer que l'épaisseur nécessaire pour le filetage des bouts de chaque tronçon rend impossible

l'emploi d'une conduite assez mince pour réaliser au Laboratoire, avec de faibles dimensions, des conditions analogues à celles qu'on rencontre le plus souvent dans l'industrie.

Dans la conduite IE la compressibilité de l'eau donne des variations de volume beaucoup plus grandes que la déformation de la paroi.

Calculons la variation de volume produite dans la conduite IE pour 1 kgm. de pression par cm². Soit ρ le rayon de la conduite,

$$D = 2\rho, \quad \text{on a :} \quad R = \frac{1 \times 80}{200 \times 5} = 0,08 \text{ kgm. p. mm}^2.$$

$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{R}{E}$, E étant le coefficient d'élasticité du métal (fer) constituant la paroi,
on a :

$$d\rho = \frac{4 \times 0,08}{20.000} = 16 \times 10^{-6} \text{ cm.}$$

Prenons une conduite de 220 mètres de longueur, comme c'est le cas dans les expériences (IE—143 et suiv.) Nous avons comme volume, v_b , dû à la dilatation de l'enveloppe sous la pression de 1 kgm. par cm².

$$v_b = 220 \times 10^3 \times 2\pi \times 4 \times d\rho \text{ cm}^3 = 8 \text{ cm}^3, 7.$$

Déterminons maintenant la variation de volume, v_e , correspondant à la compressibilité de l'eau; nous avons, V désignant le volume total de l'eau,

$$\frac{v_e}{V} = 50 \times 10^{-6}, \text{ pour une variation de pression de 1 kgm. par cm}^2; \text{ donc :}$$

$$v_e = 50 \times 10^{-6} \times 50 \times 220 \times 10^3 = 55 \text{ cm}^3.$$

La variation totale de volume sera donc :

$$v_e + v_b = 63 \text{ cm}^3, 7.$$

Ce chiffre est à retenir; il sera, en effet, indispensable, pour un choix judicieux des manomètres employés, que la variation de volume due à ces appareils soit toujours négligeable vis-à-vis de $v_e + v_b$, sans quoi le manomètre introduirait une perturbation faussant complètement les résultats. On choisira donc le piston et le ressort de l'indicateur pour qu'il en soit ainsi.

On peut calculer rapidement le volume $v_e + v_b$ par la remarque suivante : réalisons un coup de bélier de fermeture instantanée, donnant une augmentation de pression de p kgm. par cm². La vitesse v_0 qu'on coupe est donnée par :

$$\frac{av_0}{g} = p.$$

Or pendant le temps $\frac{L}{a}$, l'eau arrive avec la vitesse v_0 à l'extrémité amont de la conduite pour venir remplir le volume $v_c + v_b$; on a donc :

$$v_c + v_b = S \times v_0 \times \frac{L}{a} = \frac{SLgp}{a^2}.$$

Donc : si $p = 1$ kgm., $L = 220$ mètres, $S = 50$ cm², $a = 1.315$ mètres, ce qui correspond à la conduite IE, nous avons :

$$v_c + v_b = \frac{50 \times 220 \times 10^2 \times 9,8 \times 10}{1.315^2} = 62 \text{ cm}^3, 3.$$

Prenons maintenant la conduite P₃ dans sa partie inférieure, faisons les mêmes calculs que pour IE.

$D = 1.200$ mm., $e = 13$ mm., la pression statique est 11 kg. 2; elle travaille donc à raison de R kgm. par mm² :

$$R = \frac{11,2 \times 1.200}{200 \times 13}, \text{ soit environ } 6 \text{ kgm. p. mm}^2.$$

Calculons le volume v_c ; supposons que l'on prenne 100 mètres de conduite P₃ et que la pression augmente de 1 kgm. par cm², on a :

$$v_c = \frac{50}{10^6} \times 11.310 \times 100 \times 100 = 5 \text{ l. } 65.$$

Calculons v_b :

$$\begin{aligned} v_b &= 100 \times 100 \times 2\pi \times 60 \times d\varphi \text{ cm}^3, \\ d\varphi &= \frac{1}{20.000} \times \varphi \times R = \frac{1}{20.000} 60 \times \frac{6}{13}, \\ v_b &= 5 \text{ l. } 2, \quad v_c + v_b = 11 \text{ l. } 9. \end{aligned}$$

Calculons $v_c + v_b$ par la formule :

$$\begin{aligned} v_c + v_b &= \frac{SLgp}{a^2}, \\ a &= 1.020, \quad D = 1.200 \text{ mm.}, \quad S = 11.310 \text{ cm}^2, \\ v_0 &= \frac{10^4}{1.020} \text{ en cm. p. s. on trouve : } v_c + v_b = 11 \text{ litres;} \end{aligned}$$

on voit que dans la conduite P₃ les variations de volume dues à la compressibilité de l'eau et à la dilatation de l'enveloppe sont du même ordre de grandeur. Il n'en

est pas de même dans la conduite IE que nous avons employée à l'Institut électrotechnique.

Il était nécessaire de mettre en évidence cette différence. Il n'en résulte pas, au point de vue qui nous intéresse, de différences essentielles entre les résultats donnés par l'une et l'autre conduites. Si nous nous bornons, dans une première approximation, en général suffisante pour les besoins de la pratique, à étudier les conduites comme MM. Joukowski, Allievi, de Sparre l'ont fait, en faisant intervenir une vitesse a bien déterminée, la différence que nous venons de préciser entre la conduite de laboratoire et la conduite industrielle n'intervient pas, car le coefficient de compressibilité de l'eau et le module d'élasticité de la paroi de la conduite interviennent globalement dans l'expression de la vitesse a , et n'apparaissent pas ailleurs. Nous avons montré plus haut que la conduite de laboratoire avait seulement une vitesse plus grande que la conduite industrielle.

Il n'en serait pas de même si on étudiait les coups de bélier à un point de vue complet, sans faire l'hypothèse d'une vitesse a bien définie.

21. Choix du manomètre. Dérivée maximum de la pression en fonction du temps ⁽¹⁾.

Mais le point de vue précédent n'est pas le seul; il faut également considérer que la conduite de laboratoire a en général une faible section, et que le fonctionne-

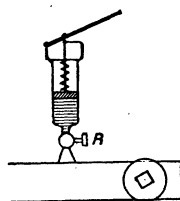


FIG. 33. — Figure schématique indiquant la disposition adoptée, à l'extrémité aval, pour le manomètre.

ment du manomètre peut y introduire des perturbations, provoquées par le mouvement du piston que comprend cet appareil. Il peut en résulter des variations notables de la vitesse de l'eau dans la conduite. Il importe donc de faire un choix judicieux du piston et du ressort du manomètre.

Prenons un exemple. Sur la conduite de 80 mm. de diamètre intérieur, plaçons en aval un indicateur ayant un piston de 2 cm. de diamètre et un ressort antago-

⁽¹⁾ Camichel, Eydoux et Gariel, *C. R.*, T. 165.

Fac. des Sc., t. VIII.

niste donnant 15 mm. de déviation du style pour une augmentation de pression de 1 kgm. par cm².

En ouvrant brusquement le robinet R, on met en communication la conduite avec l'indicateur; il en résulte dans la conduite le même phénomène que si l'on faisait l'expérience de la dépression brusque; le style du manomètre marque sur le cylindre enregistreur une courbe MN. On détermine facilement sur cette courbe le maximum de vitesse de l'indicateur.

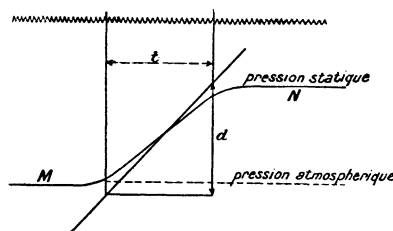


FIG. 34. — Figure schématique indiquant la variation de pression qui se produit quand on met l'indicateur en communication avec la conduite; la pression atmosphérique est indiquée en M, et la pression p_0 en N; la tangente au point d'inflexion de la courbe a été mal tracée.

En appelant σ la section du piston de l'indicateur, S la section de la conduite, $\frac{d}{t}$ étant la vitesse maximum du style mesurée sur le graphique, comme le montre le schéma, γ étant le rapport entre le déplacement du style et le déplacement correspondant du piston de l'indicateur, on a dans la conduite une vitesse maximum

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{S} \times \frac{d}{t} \times \frac{1}{\gamma}$$

provoquée par l'indicateur dans la manœuvre indiquée.

En raisonnant comme pour la dépression brusque (voir 14), il est facile de voir que cette vitesse donne naissance à une dépression qui au bout du temps $\frac{2L}{a}$ revient à l'extrémité aval doublée et changée de signe. L'expérience vérifie complètement cette manière de voir.

La perturbation maximum sera donc, dans ce cas :

$$\frac{2a\varepsilon}{g} = \frac{2a}{g} \times \frac{\sigma}{S} \times \frac{d}{t} \times \frac{1}{\gamma}.$$

Voici un graphique obtenu dans les conditions que nous venons d'indiquer (fig. 35).

L'indicateur a un piston de 1 cm. de rayon.

$$d = 30 \text{ mm.}, \quad t = 0,03, \quad \gamma = 6,$$

ressort donnant 15 mm. environ de déplacement du style, p. 1 kgm.

La perturbation maximum, au temps Θ , dans cette manœuvre du robinet sera :

$$\frac{2a\varepsilon}{g} = 2 \times 130 \times \frac{1}{16} \times \frac{0,03}{0,03} \times \frac{1}{6} = 2 \text{ m. } 7.$$

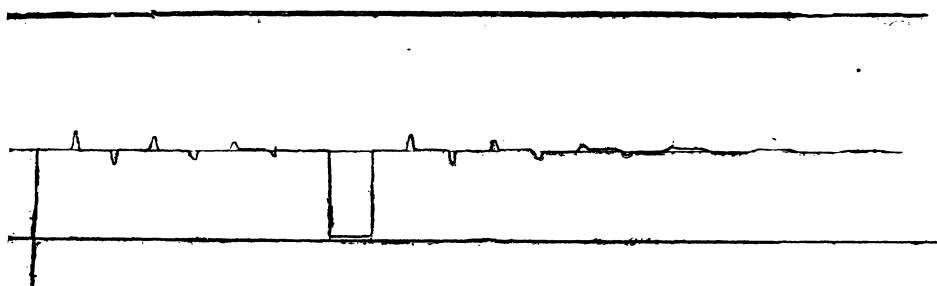


FIG. 35. — IE-145-19. Graphique de l'établissement de la pression par ouverture brusque du robinet mettant en communication la conduite et l'indicateur ; le trait noir supérieur indique le tracé du diapason qui n'est pas venu dans la reproduction ; on a utilisé pour le calcul la première expérience (à gauche du graphique).

Comme 25 mm. du diagramme correspondent à une augmentation de 17 m. 3, la perturbation maximum correspondra à $\frac{2,7 \times 25^{\text{mm}}}{17,3}$ sur le graphique, soit environ 4 mm. ; c'est ce que l'expérience vérifie sensiblement (*Voir fig. 35*).

Il faudra donc, dans chaque cas, choisir convenablement le piston et le ressort de l'indicateur à employer, de façon que cette perturbation soit négligeable.

Nous n'insisterons pas davantage sur ce point. Disons seulement que les phénomènes lents pourront être étudiés avec des ressorts plus faibles et des pistons plus larges ; au contraire, pour des phénomènes rapides, il faudra employer des ressorts très durs et des pistons de faible section.

Quand on étudiera une conduite munie d'un réservoir d'air, la variation de volume due à l'indicateur sera le plus souvent complètement négligeable.

CHAPITRE III

Fermetures lentes dans les conduites à caractéristique unique.

SOMMAIRE : Méthode de M. Allievi. — Formules de M. de Sparre. — Discontinuité de la fonction u . — Conduite inclinée.

22. Méthode de M. Allievi ⁽¹⁾.

Soit s la surface ouverte au temps t du distributeur. Nous appellerons $\psi(t)$ la fonction représentant $\frac{s}{S}$.

$$\psi(t) = \frac{s}{S}.$$

Employons la méthode de M. Allievi ; considérons une époque τ :

$$0 < \tau < \Theta;$$

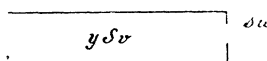


FIG. 36. — y pression dans la conduite, à extrémité aval, au temps t ; v vitesse de l'eau dans la conduite, à l'extrémité aval, au temps t ; S section de la conduite; s surface de l'ouverture du distributeur; u vitesse de l'eau au distributeur, au temps t .

à cette époque, nous avons : $y_1 = y_0 + F$, $vS = us$, u désignant la vitesse au distributeur, et

$$v = v_0 - \frac{g}{a}(y - y_0) = \psi u = \psi \sqrt{2g(y_0 + F)},$$

en supposant la contraction de la veine constante et la faisant entrer dans la fonction ψ , la pression y_1 à l'époque τ est donnée par l'équation :

$$y^2 - 2y \left(y_0 + \frac{av_0}{g} + \frac{a^2}{g} \psi^2 \right) + \left(y_0 + \frac{av_0}{g} \right)^2 = 0;$$

on choisit évidemment pour y_1 la racine inférieure à $y_0 + \frac{av_0}{g}$.

⁽¹⁾ *Loc. cit.*

On a de même :

$$y_k = y_0 + F_k - F_{k-1}, \quad y_k \text{ étant la pression à l'époque } \tau + (k-1)\Theta,$$

y_k est donné par l'équation :

$$y^* - 2y \left(y_0 + \frac{av_0}{g} - 2F_{k-1} + \frac{a^2}{g} \psi^2 \right) + \left(\frac{av_0}{g} + y_0 - 2F_{k-1} \right)^2 = 0 \quad (11)$$

qui peut s'écrire autrement en faisant intervenir les valeurs $y_1, y_2, y_3, \dots, y_k$, de la pression. On a, en effet,

$$F_1 = y_1 - y_0, \quad F_2 = y_2 + y_1 - 2y_0, \quad \dots \quad F_k = y_k + y_{k-1} + \dots + y_1 - ky_0$$

en remplaçant F_{k-1} par sa valeur dans l'équation (11), on obtient :

$$\begin{aligned} y^* - 2y \left[\frac{av_0}{g} + (2k-1)y_0 + 2(y_{k-1} + y_{k-2} + \dots + y_1) + \frac{a^2}{g} \psi^2 \right] \\ + \left[\frac{av_0}{g} + (2k-1)y_0 + 2(y_{k-1} + y_{k-2} + \dots + y_1) \right]^2 = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

qui s'applique à partir de l'époque $\Theta + \tau$.

Des formules analogues s'appliquent aux ouvertures.

L'expérience vérifie complètement ces formules, comme nous le verrons dans le chapitre IV, relatif à l'influence, sur les coups de bélier, des pertes de charge. Il nous a été impossible, en effet, d'étudier les fermetures lentes sans faire intervenir les pertes de charge. Dans l'industrie, nous n'avons eu à notre disposition que des conduites à caractéristiques multiples, et au laboratoire l'un de nous n'a pu aborder la question des fermetures lentes que sur une conduite ayant 10 coudes sur 220 mètres de longueur, et donnant des pertes de charge énormes (p. ex. 50 % de la pression statique) pour les vitesses de l'eau (1 à 2 m. p. seconde), qu'il faut nécessairement produire dans de pareilles fermetures.

23. Formules de M. de Sparre ⁽¹⁾.

M. de Sparre a montré que si le coup de bélier ne dépasse pas la charge, on a pour le maximum ξ_m du coup de bélier :

1° Dans le cas d'une fermeture brusque, réduisant la vitesse de régime de v_0 à v_1 :

$$\xi_m = \frac{a}{g} \frac{v_0 - v_1}{1 + \frac{av_1}{2gy_0}}; \quad (13)$$

⁽¹⁾ De Sparre, *loc. cit.* On trouvera, chapitre VII, l'exposé de la méthode de calcul de M. de Sparre.

2° Dans le cas d'une fermeture linéaire en fonction du temps et de durée T :

Si

$$\frac{av_0}{2g\gamma_0} < 1,$$

on a :

$$\xi_m = \frac{2Lv_0}{gt} \frac{1}{1 + \frac{v_0 a}{2g\gamma_0} \left(1 - \frac{2L}{aT}\right)}, \quad (14)$$

Si

$$\frac{av_0}{2g\gamma_0} > 1,$$

on a :

$$\xi_m = \frac{Lv_0}{gT} \frac{1}{1 - \frac{v_0 L}{2gT\gamma_0}}, \quad (15)$$

formules sur lesquelles nous aurons l'occasion de revenir, en raison de leur importance.

M. de Sparre a indiqué un mode de calcul très commode des surpressions dans les fermetures lentes; nous l'indiquerons en détail au chapitre VII.

24. Remarque sur la discontinuité de la fonction a .

A la fin de la fermeture, la fonction u (vitesse de l'eau à la sortie) a une discontinuité. Pour le voir, il suffit d'écrire l'équation de Bernoulli :

$$\frac{v^2}{2g} + y = \frac{u^2}{2g};$$

$\frac{v^2}{2g}$ est négligeable vis-à-vis de y , en général, et à plus forte raison au moment de la fermeture; on a donc :

$$y = \frac{u^2}{2g},$$

Soit t l'époque de la fin de la fermeture; à l'époque $t - \varepsilon$, on a :

$$y = \frac{u_{t-\varepsilon}^2}{2g},$$

Supposons que la fermeture se fasse lentement et que y soit sensiblement égal à y_0 , les coups de bélier étant très faibles, on a :

$$u_{t-\varepsilon} = \sqrt{2gy_0};$$

à l'époque $t + \varepsilon$, u est nul; u passe donc brusquement de $\sqrt{2gy_0}$ à 0.

La même remarque s'applique à des fermetures assez rapides pour produire des coups de bélier.

La fonction y est continue, la fonction $\frac{dy}{dt}$ peut ne pas l'être, et certains graphiques, p. ex. : US — C₄ — 56 — 4 (voir plus loin), paraissent présenter au moment de la fin de la fermeture du distributeur un point singulier.

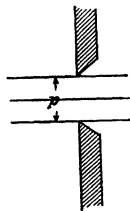


FIG. 37. — Ouverture fraisée, de diamètre extérieur d .

Nous avons pensé qu'il n'était pas inutile de mettre en évidence expérimentalement la discontinuité de la fonction u . Nous avons pour cela exécuté l'expérience suivante :

Dans une paroi verticale, on a pratiqué plusieurs trous circulaires, fraisés à l'intérieur et ayant comme diamètre d extérieur : charge, 17 m. 90 :

2 mm., 3 mm. 5, 4 mm. 5, 5 mm., 6 mm. 1, 8 mm. 3, 10 mm. 5.

On a mesuré la vitesse de l'eau à la sortie; on a trouvé :

Diamètre des trous : 2 mm. , 3 mm. 5, 4 mm. 5, 5 mm. , 6 mm. 1.

Vitesse apparente : 14 m. 81, 13 m. 38, 13 m. 99, 13 m. 41, 14 m. 26.

Diamètre des trous : 8 mm. 3, 10 mm. 5.

Vitesse apparente : 13 m. 29, 12 m. 57.

Les vitesses qui sont inscrites dans le tableau précédent sont les vitesses apparentes, calculées sans faire intervenir la contraction de la veine; leur valeur moyenne est 13 m. 6; elles se rapprochent de cette valeur, et les discordances observées sont irrégulières et proviennent des erreurs expérimentales. S'il n'y avait pas de contrac-

tion, la vitesse serait $\sqrt{2g \cdot 17,90} = 18$ m. g. Le coefficient de contraction est environ 0,71 dans les conditions de l'expérience.

Malgré leurs imperfections, ces déterminations montrent nettement que la vitesse se maintient, jusqu'à la fin de la fermeture, à la valeur 18 m. g.

Ces expériences montrent la discontinuité de u qui passe à la fin de la fermeture de $\sqrt{2gy_0}$ à 0.

La relation : $v = u\psi$ montre que v n'a pas de discontinuité, puisque $\psi = 0$ au moment de la fin de la fermeture.

Il faut remarquer également, en ce qui concerne la fin de la fermeture, que les formules qu'on applique à ce moment-là ne font pas intervenir la perte de charge dans le distributeur (ou dans le robinet), perte de charge qui peut être importante au moment où l'eau est laminée. Il peut en résulter une erreur notable dans le calcul des surpressions au moment de la fermeture; nous avons examiné avec soin cette question dans nos diverses expériences.

L'erreur ainsi commise à la fin de la fermeture altère ensuite tous les autres calculs ultérieurs. A l'appui de cette manière de voir, on peut citer la remarque suivante :

En étudiant un graphique de surpression et en prenant, comme point de départ du calcul, les pressions observées (et non calculées) correspondant à des époques où la fermeture est complète, on voit que les formules d'Allievi rendent parfaitement compte des résultats observés ultérieurement, tandis qu'elles donnent des discordances très notables quand on fait le calcul de proche en proche à partir du début de la fermeture. Ex. : IE-144-5 (voir plus loin).

25.

Conduite inclinée.

M. Allievi ⁽¹⁾ a montré que dans le cas d'un tuyau incliné d'un angle α sur l'horizon, si l'on suppose l'axe du tuyau rectiligne et si l'on compte les longueurs x sur cet axe à partir de l'extrémité aval, on a :

$$\left. \begin{aligned} y &= y_0 - x \sin \alpha + F_k - F_{k-1}, \\ v &= v_0 - \frac{g}{a}(F_k + F_{k-1}), \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

formules qui ne diffèrent des équations (4) que par l'adjonction du terme : $-x \sin \alpha$. Toutes les conditions et formules obtenues pour une conduite horizontale sont donc applicables au tuyau incliné, sous la réserve que les ordonnées de la ligne de charge le long de la conduite doivent être diminuées de $x \sin \alpha$, en un point d'abscisse x .

⁽¹⁾ Allievi, *Revue de mécanique*, 1904.

CHAPITRE IV

Influence de la perte de charge sur les coups de bélier dans les conduites à caractéristique unique.

SOMMAIRE : Remarques générales. — Fermetures brusques. — Expériences sur les fermetures brusques. — Expériences : IE-124-15 ; IE-145-7 ; IE-147-5. — Fermetures lentes. — Expériences sur les fermetures lentes : IE, séries : 143, 144, 145. — Détermination de la fonction ψ . — Expériences : IE-144-5 ; IE-143-3 ; IE-145-14. — Conclusion. — Ouvertures instantanées. — Distinction entre les coups de bélier de fermeture et d'ouverture. — Expériences : IE-147-3. — Démonstration expérimentale de la formule (28). — Ouvertures lentes avec pertes de charge. — Expériences sur les ouvertures lentes avec pertes de charge. — Expériences : IE-148-18 ; IE-148-7. — Conclusions.

26.

Remarques générales.

Les travaux relatifs à cette question sont peu nombreux ; nous ne connaissons que deux remarques de MM. de Sparre et Neeser à ce sujet.

L'un de nous ⁽¹⁾ a envisagé cette question à un point de vue différent de celui des auteurs précédents et a pu, comme on va le voir, rendre compte d'une façon satisfaisante des fermetures et ouvertures lentes ou instantanées. Nous allons résumer ce travail.

L'examen des diagrammes des pressions met en évidence la lenteur avec laquelle se produisent, dans les conduites forcées, les changements de régime : ainsi pour l'expérience IE-145-7 (*fig. 46*), le changement de régime correspondant à la première fermeture partielle exige pour s'établir un temps égal à $12 \frac{L}{a}$ environ, c'est-à-dire correspondant à six trajets aller et retour de l'onde d'un bout à l'autre de la conduite.

L'étude des graphiques de dépression brusque montre en outre que, sur la conduite IE, l'onde, dans son parcours, a une longévité remarquable ; la diminution d'amplitude et l'étalement sont assez lents. Il en est de même dans les conduites industrielles P_3 , C_4 ; et si parfois le graphique des pressions paraît donner un étalement rapide, ce n'est souvent qu'une apparence provenant des réflexions multiples qui se produisent dans les conduites à caractéristiques multiples.

Il faut d'ailleurs remarquer que dans le cas de fermetures lentes le maximum de pression se produit assez souvent à une époque peu éloignée du début de la fermeture, c'est-à-dire à un moment pour lequel l'onde n'a pas encore parcouru un

⁽¹⁾ M. Camichel.

bien long chemin et par conséquent n'a pas eu le temps de s'altérer beaucoup. C'est ainsi que M. de Sparre, étudiant les conditions à remplir au point de vue des coups de bélier par les régulateurs des moteurs hydrauliques, montre que si : $\rho\lambda_0 < 1$, le coup de bélier maximum se produit à la fin de la première période Θ ⁽¹⁾.

On a : $\rho = \frac{av_1}{2g\gamma_0}$, v_1 désigne la vitesse de l'eau dans la conduite pour le distributeur complètement ouvert, λ étant le rapport de la surface ouverte du distributeur à cette surface quand l'ouverture est totale, λ_0 étant la valeur initiale de λ .

De l'ensemble de ces remarques, on peut déduire que pour les conduites industrielles relativement courtes ne dépassant pas par exemple 400 mètres de longueur, et pour les fermetures lentes produisant le maximum de la surpression assez rapidement, par exemple avant $\frac{8L}{a} = 4\Theta$, on peut dans une première approximation, suffisante dans la pratique, ne pas tenir compte de l'altération de l'onde dans son va et vient le long de la conduite. Cette remarque s'applique encore mieux dans le cas des fermetures instantanées, pour lesquelles l'onde réfléchie sur la chambre de mise en charge n'a pas le temps de revenir au distributeur quand la fermeture totale ou partielle est terminée. D'ailleurs, en ce qui concerne les fermetures très lentes et les conduites très longues, le phénomène à envisager est tout à fait différent de celui qui a été considéré par M. Allievi et les divers auteurs, qui ont étudié jusqu'à présent les coups de bélier en vue des applications industrielles.

Dans le cas où la perte de charge est importante, nous appliquerons donc les équations d'Allievi, en prenant toutefois comme valeur initiale de la pression, non pas la pression statique γ_0 , mais la pression γ'_0 qui existe au début de l'expérience et qui est égale à la pression statique diminuée de la perte de charge; quant à la vitesse v_0 , elle est définie sans ambiguïté. Nous appliquerons donc les formules suivantes :

$$\gamma = \gamma'_0 + F_k - F_{k-1},$$

$$v = v_0 - \frac{g}{a}(F_k + F_{k-1}).$$

Ces mêmes formules serviront, comme nous le verrons plus loin, à l'étude de la répartition du coup de bélier le long de la conduite.

27. Fermetures brusques, avec pertes de charge.

Considérons le diagramme des pressions au distributeur (*fig. 38*) : la ligne CD représente la ligne atmosphérique; la ligne AB, la pression statique γ_0 , que l'on

(1) De Sparre, *Revue générale de l'Électricité*, t. I, p. 483.

mesure quand la conduite est fermée et l'eau calme; EF, la pression y'_0 au distributeur, qui est ouvert, la vitesse de l'eau dans la conduite est alors v_0 et la surface ouverte du distributeur S_0 . Remarquons que, dans les expériences que nous allons citer, la perte de charge mesurée sur le graphique par la distance des droites AB

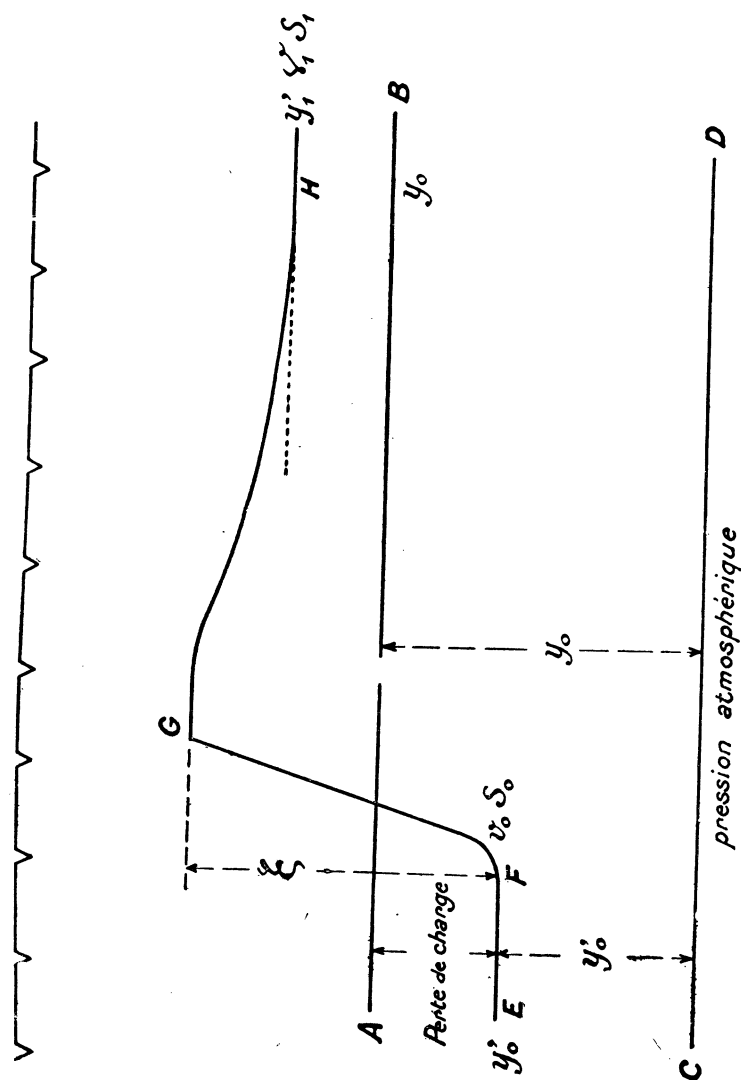


Fig. 38. — Graphique schématique des pressions dans une fermeture partielle; la droite AB indiquant la pression y_0 devrait être au-dessus de la droite pointillée passant par H : $y_0 > y'_1$; le lecteur rétablira facilement la figure avec cette correction.

et EF est très grande et dépasse de beaucoup les pertes de charge que l'on rencontre ordinairement dans l'industrie. Dans ces conditions, la démonstration des méthodes de calcul proposées est plus convaincante.

Quand la fermeture a lieu, la courbe de pression monte rapidement, atteint son

maximum en G, maximum auquel correspond la pression $y'_0 + \xi$ et la vitesse v , et redescend ensuite *très lentement*, pour atteindre au bout d'un certain temps la pression y'_1 de régime correspondant à la vitesse v_1 et à la surface S_1 , ouverture du distributeur, quand la manœuvre est terminée et le nouveau régime permanent établi.

En appelant y la pression au temps t au distributeur, on a :

$$\begin{aligned} y &= y'_0 + F(t) \quad (17) \quad t < \frac{2L}{a}, \\ v &= v_0 - \frac{g}{a} F(t) = S_1 \sqrt{2gy}; \\ v_0 &= S_0 \sqrt{2gy'_0}, \quad v_1 = S_1 \sqrt{2gy'_1}; \quad \text{posons : } \lambda = \frac{S_1}{S_0}. \end{aligned}$$

Si nous admettons que la contraction de la veine est sensiblement constante, on aura :

$$\lambda v_0 = v_1 \sqrt{\frac{y'_0}{y'_1}}. \quad (18)$$

La courbe des pertes de charge de la conduite mesurées au distributeur permettra de déterminer y'_0 et y'_1 , pressions correspondant aux vitesses v_0 et v_1 , et par suite de déterminer λv_0 .

Soit t l'époque, où la pression y est maximum, on a, en désignant par ξ la surpression :

$$\xi = F(t), \quad \frac{v}{v_0} = \lambda \sqrt{1 + \frac{\xi}{y'_0}}.$$

En remarquant que ξ est en général inférieur à $\frac{y'_0}{2}$, on en déduit :

$$\xi = \frac{a}{g} \frac{v_0 - \lambda v_0}{1 + \frac{a}{g} \frac{v_0 \lambda}{2y'_0}}, \quad (19)$$

formule analogue à celle donnée par M. de Sparre dans le cas où les pertes de charge sont négligeables (13) [voir chap. III].

Quand ξ dépasse $\frac{y'_0}{2}$, on doit résoudre, pour avoir ξ , l'équation :

$$\left(v_0 - \frac{g\xi}{a}\right)^2 = \lambda^2 v_0^2 \left(1 + \frac{\xi}{y'_0}\right)$$

ou :

$$\xi^2 - \xi \left(\frac{2av_0}{g} + \frac{\lambda^2 v_0^2}{y'_0} \frac{a^2}{g^2} \right) + (v_0^2 - \lambda^2 v_0^2) \frac{a^2}{g^2} = 0, \quad (20)$$

que nous écrirons sous la forme :

$$\xi^2 - M\xi + N = 0. \quad (21)$$

28. Expériences sur les fermetures brusques avec pertes de charge.
Vérification des formules (19 et 20).

Une première série d'expériences a été faite sur la conduite IE qui avait 186 m. 8 de longueur et fonctionnait sous une pression statique de 17 m. 3. La figure 39 re-

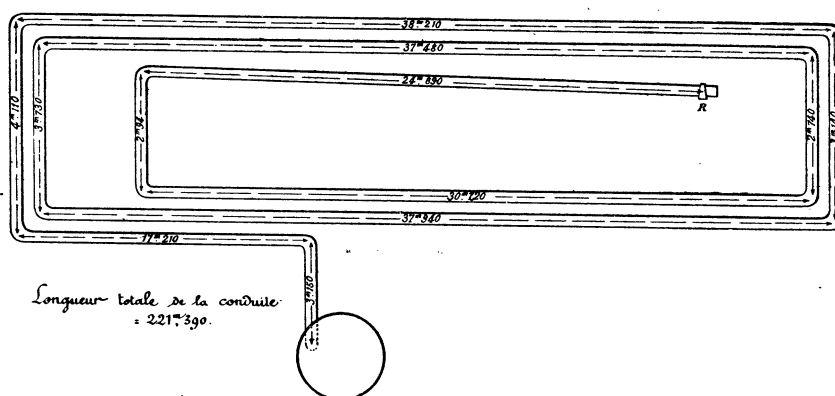


FIG. 39. — Schéma de la conduite employée (projection horizontale); R robinet situé à l'extrémité aval de la conduite.

présente la disposition de la conduite, qui comprenait 10 coudes. Dans d'autres expériences, la conduite avait 12 coudes et 221 m. 39 de longueur; c'est le cas qui a été figuré dans le schéma ci-dessus (*fig. 39*).

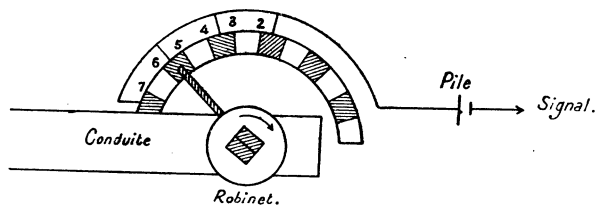


FIG. 40. — Inscription du mouvement du robinet R par l'intermédiaire d'une manette frottant sur des plots.

Le robinet, fermant la conduite à son extrémité aval, est muni d'une manette qu'il entraîne dans son mouvement et qui frotte sur des plots, qui sont en communication avec une pile et un signal (*fig. 40*). La fermeture du robinet s'inscrit alors

sur le graphique des pressions et permet de connaître à chaque instant l'ouverture du robinet; un tarage préalable permet de déterminer pour chaque position de la manette la vitesse de l'eau dans la conduite, quand le régime permanent est établi

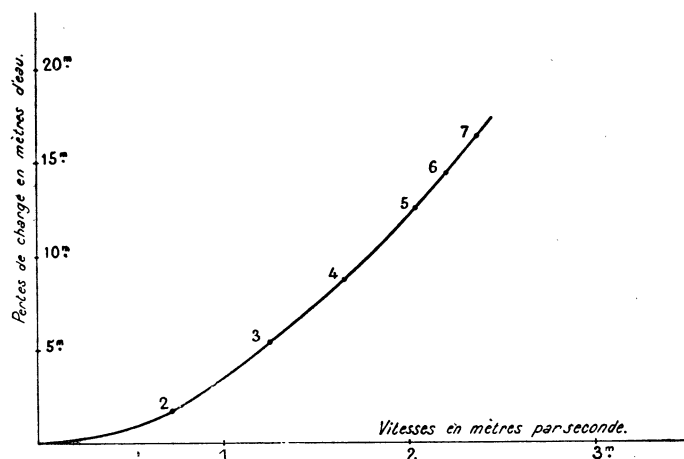


FIG. 41. — Pertes de charge en fonction des vitesses de l'eau.

et la perte de charge correspondante; inversement, la connaissance de la perte de charge permet de déterminer la vitesse de l'eau dans la conduite.

La courbe (*fig. 41*) donne la perte de charge en fonction de la vitesse de l'eau.

Plots :	Vitesse de l'eau dans la conduite :	Perte de charge en mètres d'eau :
7	2 m. 37	16 m. 6
6	2 m. 22	14 m. 25
5	2 m. 04	12 m. 55
4	1 m. 66	8 m. 48
3	1 m. 42	5 m. 48
2	0 m. 71	1 m. 56

Pour permettre au lecteur de refaire facilement les calculs des expériences citées, nous avons également donné la figure 42, qui représente la courbe de tarage indiquant les vitesses de régime (abscisses v) en mètres par seconde, pour les diverses valeurs des pertes de charge (ordonnées) représentées en millimètres sur le diagramme des pressions. Ces courbes ont été obtenues de la façon suivante : on a ouvert le robinet de l'extrémité aval de la conduite dans la position correspondant aux contacts 7, 6, 5, 4, 3, 2; l'indicateur a marqué diverses pressions; on a fait

déplacer légèrement à chaque fois le cylindre enregistreur afin d'obtenir la pression moyenne. Il faut remarquer, en effet, que lorsque le robinet n'est pas complètement ouvert ou presque complètement fermé, la pression varie sous l'influence

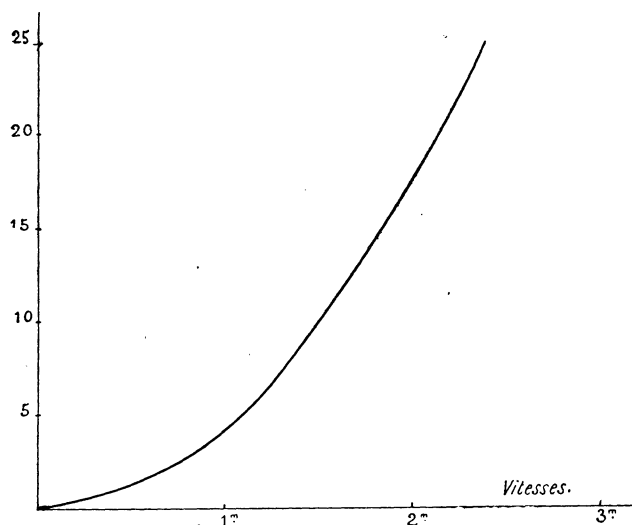


FIG. 42. — IE-124-15. Courbe de tarage indiquant les vitesses correspondant aux pertes de charge mesurées en millimètres sur le graphique.

des chocs de l'eau; il faut prendre la valeur moyenne, ce qu'on fait facilement. Le graphique figure 43 et la courbe figure 42 donnent donc les vitesses de régime dans la conduite, en fonction des pertes de charge δ , mesurées directement en mm. sur le graphique.

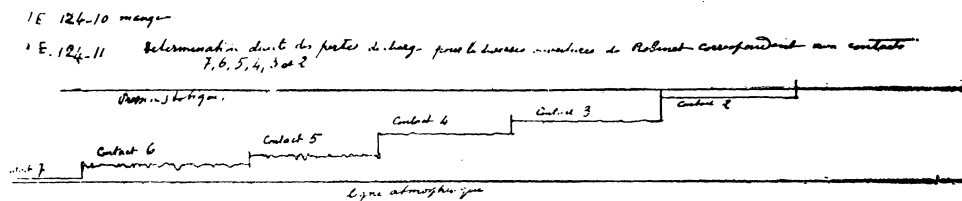


FIG. 43. — IE-124-11. Détermination des pertes de charge correspondant à diverses ouvertures du robinet R. Les vitesses correspondantes ont été déterminées par des jaugeages; on remarquera que pour des ouvertures voisines de l'ouverture à gueule bée et pour des ouvertures très faibles, la pression ne varie pas; pour les ouvertures intermédiaires, les chocs de l'eau contre le robinet incomplètement ouvert produisent des dentelures de la courbe de pression; mais il est facile dans tous les cas de déterminer la pression moyenne.

Le tableau suivant donne divers points de la courbe de tarage, dont on se sert constamment dans les calculs :

Plots :	Pertes de charge mesurées en millimètres sur le graphique :	Vitesse :
7	$\partial = 24 \text{ mm. } 9$	2 m. 37
6	$\partial = 21 \text{ mm. } 0$	2 m. 22
5	$\partial = 18 \text{ mm. } 5$	2 m. 04
4	$\partial = 12 \text{ mm. } 5$	1 m. 66
3	$\partial = 8 \text{ mm. } 8$	1 m. 42
2	$\partial = 2 \text{ mm. } 6$	0 m. 71

Utilisons les données précédentes pour l'étude d'une fermeture instantanée.

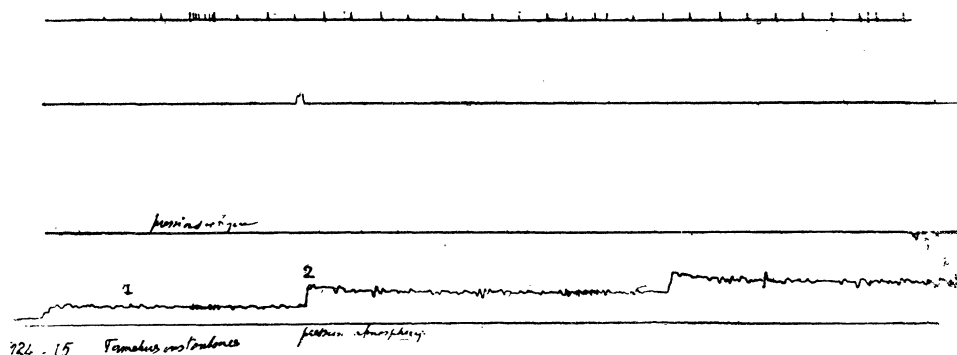


FIG. 44. — IE-124-15. Graphique de fermetures instantanées avec pertes de charge.

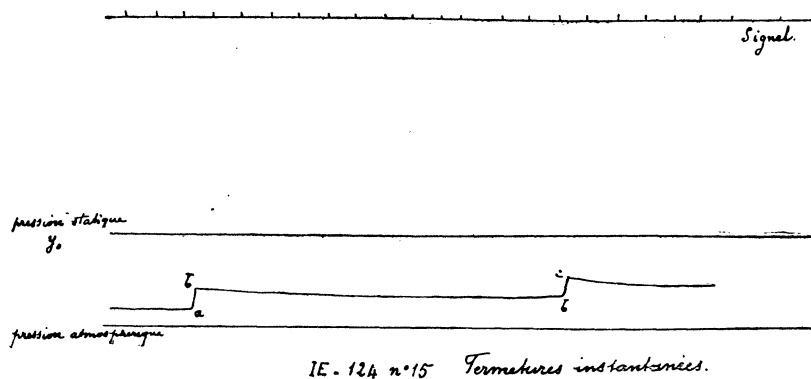


FIG. 45. — Schéma du même graphique.

29. Expérience : IE-124-15 (fig. 44 et 45).

Fermeture brusque ab , on a, avec les notations précédemment adoptées :

$$y_0 = 17,3, \quad y'_0 = 3 \text{ m. } 38;$$

on remarquera l'énorme perte de charge avec laquelle ces expériences sont faites.

$$v_0 = 2 \text{ m. } 16, \quad v_1 = 1 \text{ m. } 95.$$

Voir figure 42 et graphique 44; on trouve sur le graphique que y'_0 correspond à 4 mm. 8, y'_1 à 8 mm. 6.

On en déduit :

$$\lambda v_0 = 1,95 \sqrt{\frac{4,8}{8,6}} = 1,46,$$

d'où :

$$\frac{a}{g} \frac{\lambda v_0}{2y'_0} = 28,24.$$

En prenant : $a = 1.300$ mètres par seconde et en appliquant la formule (19), on trouve : $\xi = 3 \text{ m. } 26$ (calculé).

Sur le graphique, la surpression correspond à 5 mm., c'est-à-dire, en mètres, à :

$$\frac{5 \times 17,3}{25,5} = 3 \text{ m. } 39 \text{ (observé).}$$

Autre expérience sur le même graphique : IE-124-15 entre b et c (fig. 45).

On a :

$$\begin{aligned} y'_0 & \text{ qui correspond à } 8 \text{ mm. } 6, \\ y'_1 & \text{ — à } 12 \text{ mm. } 0, \\ v_0 & = 1 \text{ m. } 95, \quad v_1 = 1 \text{ m. } 725, \end{aligned}$$

$$\lambda v_0 = 1,725 \sqrt{\frac{8,6}{12,0}} = 1,46,$$

$$\frac{a}{g} \frac{\lambda v_0}{2y'_0} = 16,46,$$

d'où :

$$\xi = 3 \text{ m. } 68 \text{ (calculé).}$$

Sur le graphique, la surpression entre b et c correspond à 5 mm. 5, c'est-à-dire à 3 m. 73 (observé).

Autre expérience : IE-145-7 (fig. 46, 47 et 48).

$$\gamma'_0 = 10 \text{ m. } 66, \quad d = 12 \text{ mm. } 2, \quad v_0 = 1 \text{ m. } 375,$$

$$\gamma'_1 = 12 \text{ m. } 17, \quad d = 23 \text{ mm. } 5, \quad v_1 = 1 \text{ m. } 165,$$

$$\lambda v_0 = 1,09, \quad \frac{a}{g} \frac{\lambda v_0}{2\gamma'_0} = 6,75,$$

on trouve

$$\xi = 4 \text{ m. } 87.$$

Le graphique donne :

$$\xi = 4 \text{ m. } 82,$$

concordance plus grande qu'on ne peut l'espérer.

L'expérience qui vient d'être citée fait partie d'une autre série que les premières expériences effectuées sur le même sujet : IE-124. Dans cette nouvelle série, l'inscription du mouvement du robinet se fait d'une façon continue par un procédé analogue à celui qui nous a servi pour C_1 à Soulom (voir II^e partie). On trouvera la description de ce dispositif dans les expériences sur les fermetures lentes (voir plus loin, même chapitre).

Coups de bélier de fermeture brusque ayant une valeur plus élevée que dans les expériences précédentes.

Pour élucider la question de l'influence de la perte de charge sur les coups de bélier, nous avons tenu à faire de nouvelles séries d'expériences, mettant en jeu des surpressions plus élevées que les précédentes.

Exemple : IE-147-5 (fig. 49 et 50), fermeture partielle instantanée de α à β .

$$\gamma'_0 = 6 \text{ m. } 3, \quad \gamma'_1 = 10 \text{ m. } 2, \quad v_0 = 1 \text{ m. } 729, \quad v_1 = 1 \text{ m. } 386,$$

$$\gamma_0 = 17 \text{ m. } 3, \quad \lambda v_0 = 1,09,$$

$$\xi \text{ calculé} = 6 \text{ m. } 8,$$

$$\xi \text{ observé} = 7 \text{ m. } 2.$$

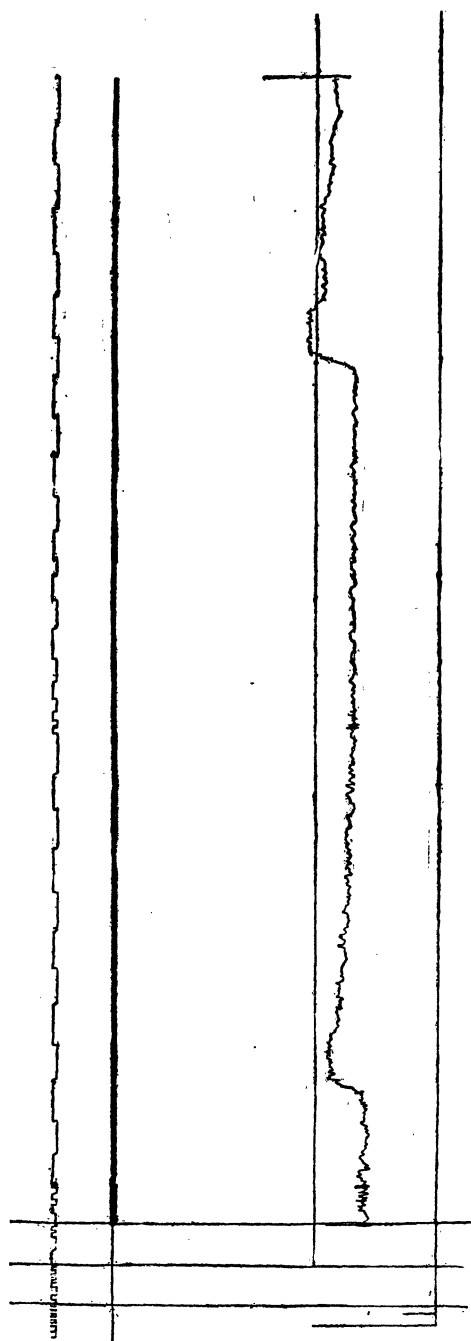


FIG. 46. — Fermetures partielles et instantanées. — Expérience : IE-145-7. — Graphique des pressions. — On voit à la partie supérieure l'inscription du signal et celle du diapason ; à gauche on remarque les génératrices de réglage.

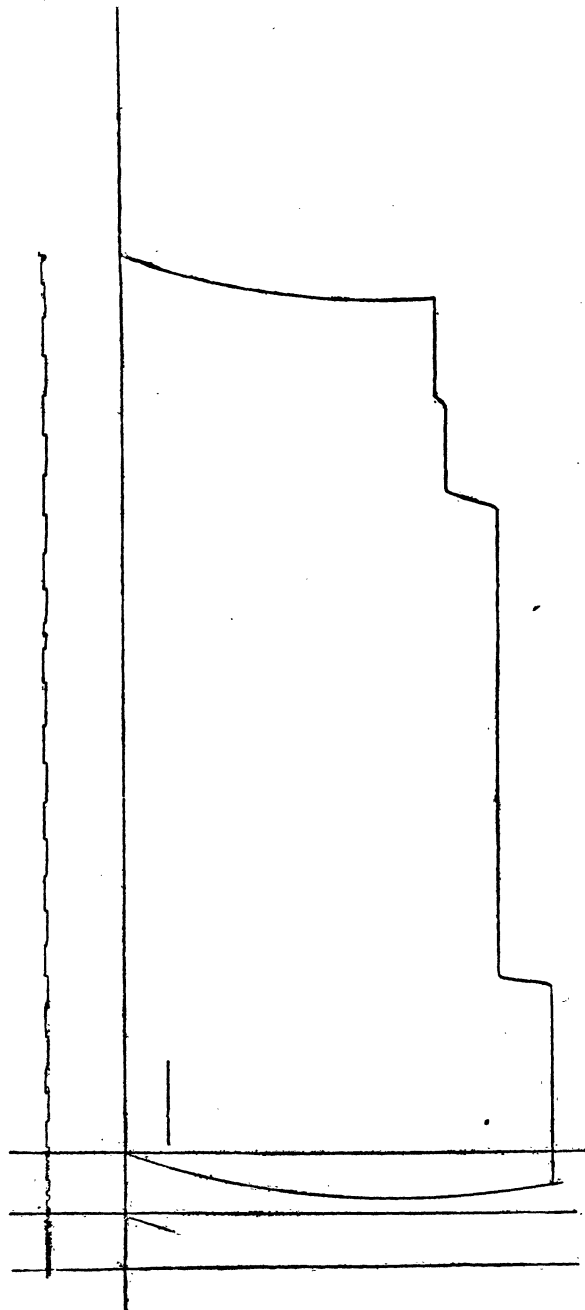


FIG. 47. — Fermetures partielles et instantanées. — Expérience : IE-145-7. — Inscription de l'index du robinet. L'examen de l'inscription du signal permet d'établir la correspondance entre les deux graphiques.

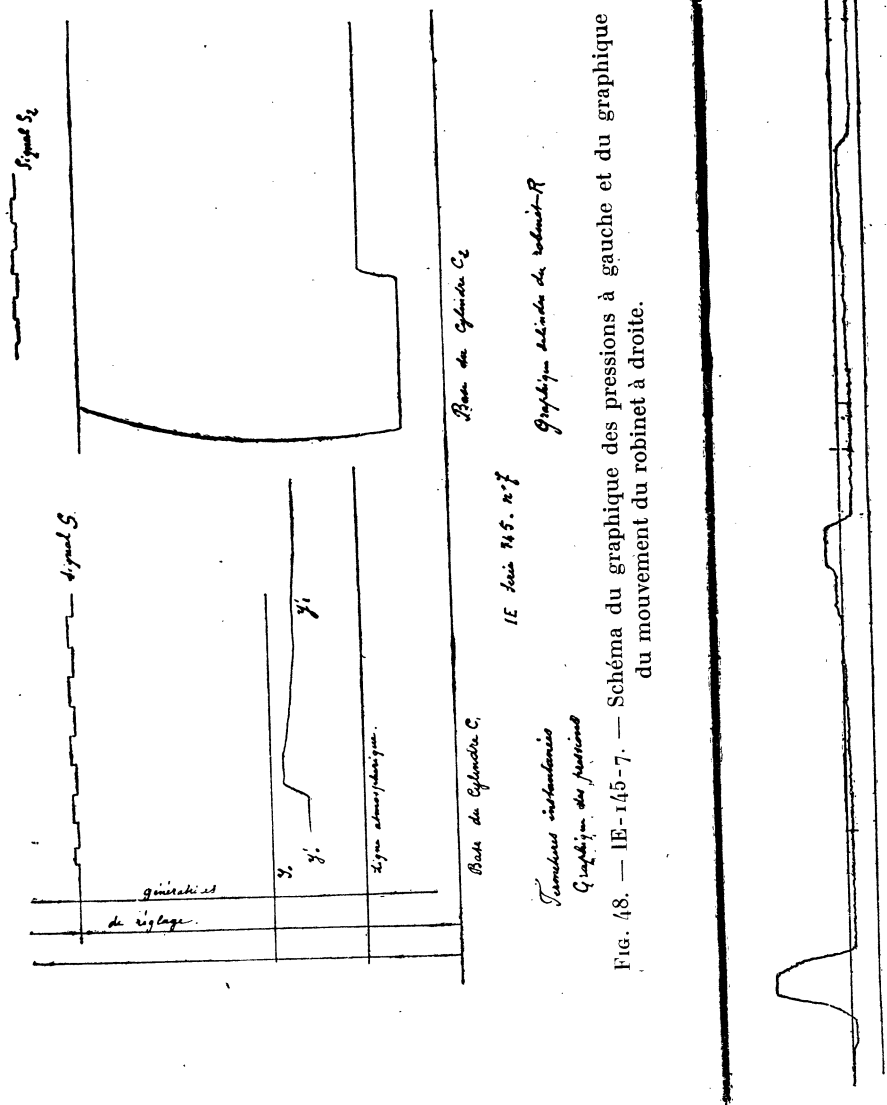


Fig. 48. — IE-145-7. — Schéma du graphique des pressions à gauche et du graphique du mouvement du robinet à droite.

Fig. 49. — Fermetures partielles et instantanées. — Expérience : IE-147-5. Une erreur s'est produite dans la reproduction de ce graphique : c' est la figure symétrique qui représente en réalité le diagramme des pressions ; la gauche et la droite du diagramme sont interverties. Le schéma représenté figure 50 permettra au lecteur de rétablir le diagramme réel.

Autre expérience : IE-147-5 de β à γ .

Le coup de bélier étant nettement plus élevé que y'_0 , on emploie la formule (20); on a :

$$\begin{aligned} v_0 &= 1 \text{ m. } 386, & v_1 &= 0 \text{ m. } 963, & y'_0 &= 10 \text{ m. } 2, & y'_1 &= 14 \text{ m. } 0, \\ \log M &= 3,18491, & \log N &= 4,34006, \\ \xi \text{ calculé} &= 14 \text{ m. } 5, & \xi \text{ observé} &= 15 \text{ m. } 5. \end{aligned}$$

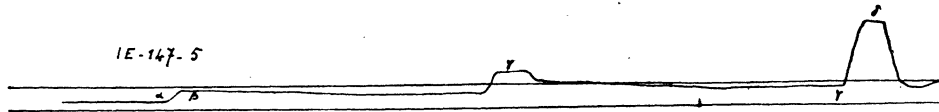


FIG. 50. — IE-147-5. Graphique de fermetures partielles et instantanées; schéma du graphique.

Autre expérience : IE-147-5 de γ à δ .

On emploie toujours l'équation (20); on a :

$$\begin{aligned} v_0 &= 0 \text{ m. } 963, & v_1 &= 0 \text{ m. } 301, & y'_0 &= 14 \text{ m. } 0, & y'_1 &= 16 \text{ m. } 7, \\ \log M &= 2,54432, & \log N &= 4,17478, \\ \xi \text{ calculé} &= 50 \text{ m. } 0, & \xi \text{ observé} &= 48 \text{ m. } 9. \end{aligned}$$

Ces expériences mettent en évidence l'exactitude des formules employées.

30. Fermetures lentes avec pertes de charge.

Étudions l'influence de la perte de charge dans le cas des fermetures lentes. Les notations employées sont les mêmes que plus haut : on part seulement de la pression y'_0 qui existe au temps 0 au distributeur et qui est égale à y_0 , pression statique, diminuée de la perte de charge; on a :

$$y_1 = y'_0 + F_1, \quad v = v_0 - \frac{g}{a}(y - y'_0), \text{ etc. ;} \quad (22)$$

On calcule les coups de bélier aux époques :

$$\frac{L}{a}, \frac{3L}{a}, \frac{5L}{a}, \frac{7L}{a}, \frac{9L}{a}, \dots$$

L'expression du dernier terme de l'équation (11) $\frac{av_0}{g} + y'_0 - 2F_{k-1}$ est :

$$\begin{aligned} \frac{av_0}{g} + y'_0 & \dots \dots \dots \text{à l'époque } \frac{L}{a} = \frac{\Theta}{2}, \\ \frac{av_0}{g} + 3y'_0 - 2y_{\frac{L}{a}} & \dots \dots \dots \frac{3L}{a}, \\ \frac{av_0}{g} + 5y'_0 - 2\left(y_{\frac{3L}{a}} + y_{\frac{L}{a}}\right) & \dots \dots \dots \frac{5L}{a}, \\ \frac{av_0}{g} + 7y'_0 - 2\left(y_{\frac{5L}{a}} + y_{\frac{3L}{a}} + y_{\frac{L}{a}}\right) & \dots \dots \dots \frac{7L}{a}, \\ \frac{av_0}{g} + y'_0 & \dots \dots \dots \frac{2L}{a}, \\ \frac{av_0}{g} + 3y'_0 - 2y_{\frac{2L}{a}} & \dots \dots \dots \frac{4L}{a}, \\ \frac{av_0}{g} + 5y'_0 - 2\left(y_{\frac{4L}{a}} + y_{\frac{2L}{a}}\right) & \dots \dots \dots \frac{6L}{a}, \\ \frac{av_0}{g} + 7y'_0 - 2\left(y_{\frac{6L}{a}} + y_{\frac{4L}{a}} + y_{\frac{2L}{a}}\right) & \dots \dots \dots \frac{8L}{a}. \end{aligned} \tag{23}$$

31. Expériences sur les fermetures lentes avec pertes de charge :

IE, séries 143, 144, 145.

A l'extrémité aval de la conduite se trouve un robinet R (*fig. 51*) qui porte un index I, inscrivant, sur un cylindre enregistreur C_2 , le mouvement du robinet R ; le temps est indiqué par un signal S_2 , qui est en série avec le signal S_1 , l'horloge H établissant un contact chaque demi-seconde et une pile P. Les variations de pression sont inscrites par le manomètre M sur le cylindre C_1 . Les pressions peuvent également être mesurées par un manomètre Bourdon B, mis en communication avec la conduite par un robinet r , qu'il faut fermer au moment de faire une expé-

rience, afin d'éviter toute perturbation (voir chap. I) susceptible d'altérer les pressions mesurées par M pendant la manœuvre du robinet R.

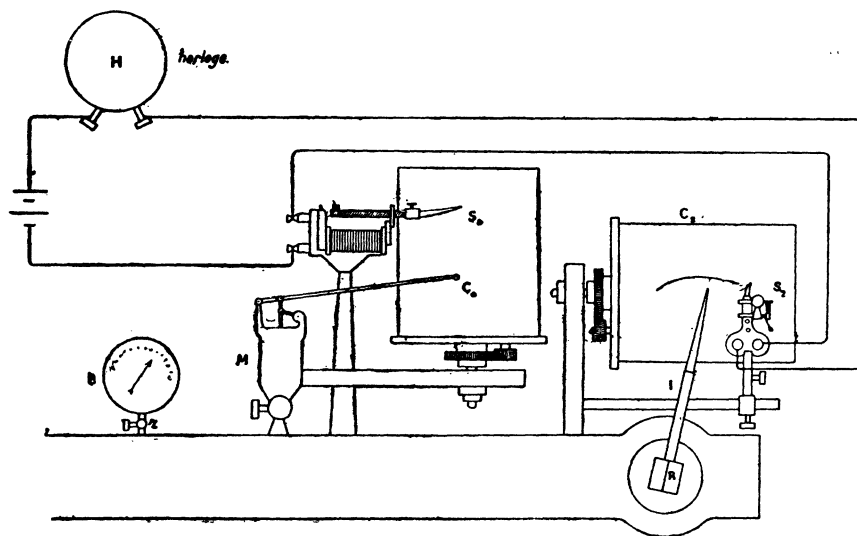


FIG. 51. — Schéma du montage des expériences sur les fermetures et ouvertures : H horloge, B manomètre Bourdon, que le robinet r met en communication avec la conduite; M manomètre Crosby dont le style trace le diagramme des pressions sur le cylindre C_1 ; S_1 signal inscrivant les demi-secondes; C_1 et S_1 sont sur la même génératrice du cylindre; R robinet de l'extrémité aval de la conduite; I tige fixée au robinet R et munie d'un style inscrivant le mouvement du robinet sur le cylindre C_2 ; S_2 signal inscrivant le temps sur le cylindre C_2 ; les signaux S_1 et S_2 sont en série avec l'horloge H et une pile.

La position de l'index I sur le graphique du cylindre C_2 est repérée par rapport à la base de ce cylindre; nous désignerons par d la distance de l'index I à la base du cylindre C_2 (fig. 52).

Diverses précautions sont nécessaires; il faut amener le signal S_1 , le style du manomètre M et la pointe du diapason, qui accompagne en général le signal S_1 , à être exactement sur la même génératrice de ce cylindre; on verra sur les graphiques trois génératrices qui permettent de faire, avec soin, ce réglage. Pour le cylindre C_2 , on procède de la façon suivante: on met l'index I dans la position correspondant à la fermeture complète du robinet R, la distance d doit être toujours la même pour cette position de fermeture; on le vérifie à chaque expérience au moyen d'un compas à pointes sèches; ainsi, pour les expériences IE-145, la distance d correspondant à la fermeture complète du robinet R est 101,0 mm. En faisant tourner à la main le cylindre C_2 , on trace la ligne de fermeture L (fig. 52); en

déplaçant le robinet, l'index décrit sur le cylindre C_2 immobile une courbe C ; on amène l'index du signal S_2 sur la génératrice β du cylindre C_2 passant par le point d'intersection α de L et de C . Dans ces conditions, pour déterminer dans un graphique de fermeture ou d'ouverture l'époque correspondant à une position quelconque m de l'index I du robinet R , on trace la courbe C passant par m , on

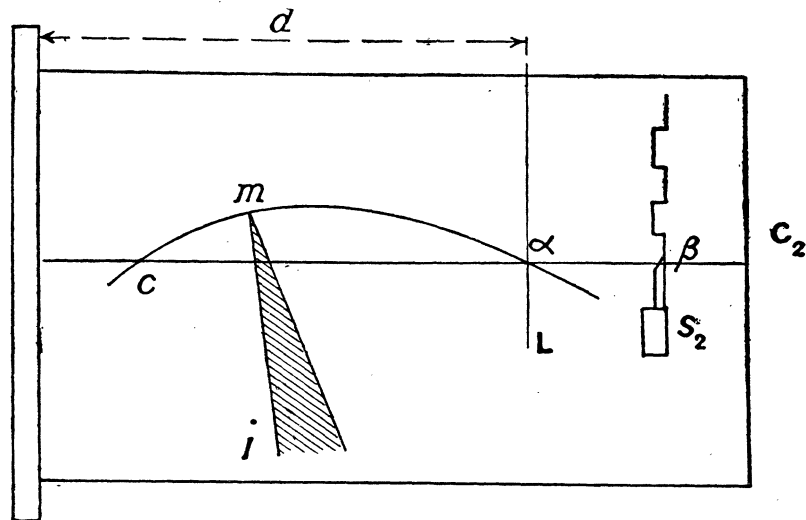


FIG. 52. — Cette figure montre la façon dont les réglages sont effectués en ce qui concerne l'inscription du mouvement du robinet R sur le cylindre C_2 ; m représente l'extrémité du style porté par la tige i , fixée au robinet R ; d distance de l'index i à la base du cylindre C_2 , la valeur de d marquée sur la figure correspond à la fermeture complète du robinet R ; L ligne de fermeture; C courbe décrite par l'index m sur le cylindre C_2 ; α intersection de C et de L ; $\alpha\beta$ génératrice passant par α ; β extrémité de l'index du signal S_2 .

prend son intersection α avec la ligne de fermeture L , on mène la génératrice $\alpha\beta$ et on lit en β l'époque correspondante sur le tracé du signal S_2 .

Les graphiques que l'on trouvera plus loin permettront au lecteur de refaire lui-même ces diverses opérations.

32.

Détermination de la fonction ψ .

On détermine la fonction ψ pour les diverses positions de l'index du robinet R . Pour cela, on ouvre le robinet R d'une certaine quantité, on lit la pression H sur le

manomètre Bourdon, et on détermine par un jaugeage la vitesse correspondante v .
Voici, pour la série IE-144, les valeurs trouvées :

d :	H :	v : en m. p. s.	d :	H :	v : en m. p. s.
7	9 m. 26	»	38,0	14 m. 51	»
7,7	9 m. 6	»	48,5	15 m. 9	0 m. 616
8,6	10 m. 0	1 m. 423	63,4	17 m. 1	0 m. 238
27,4	13 m. 0	1 m. 125	67,8	17 m. 2	0 m. 140
31,0	13 m. 49	»	74,0	17 m. 2	0 m. 044
32,0	13 m. 62	»	77,15	17 m. 3	0 m. 015

On construit la courbe ayant pour abscisse d et comme ordonnée H , et la courbe ayant comme abscisse d et comme ordonnée v (*fig. 53*); on a ainsi tous les éléments nécessaires pour le calcul de $\frac{a^2}{g} \psi^2$:

$$\frac{a^2 \psi^2}{g} = \frac{a^2 v^2}{2g^3 H}, \quad (24)$$

puisque l'on a :

$$\psi = \frac{v}{u} = \frac{v}{\sqrt{2gH}};$$

nous allons donner quelques détails sur une des expériences, par ex. IE-144, 5.

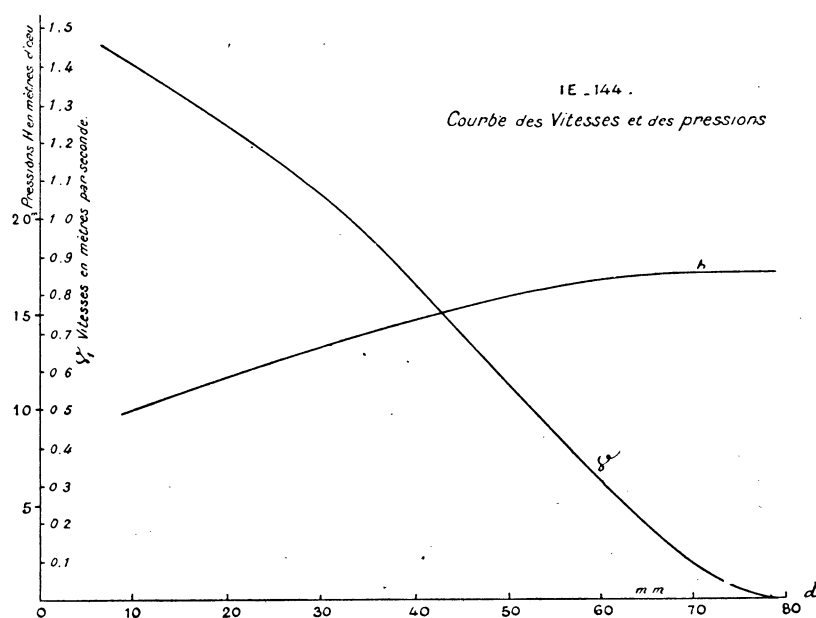
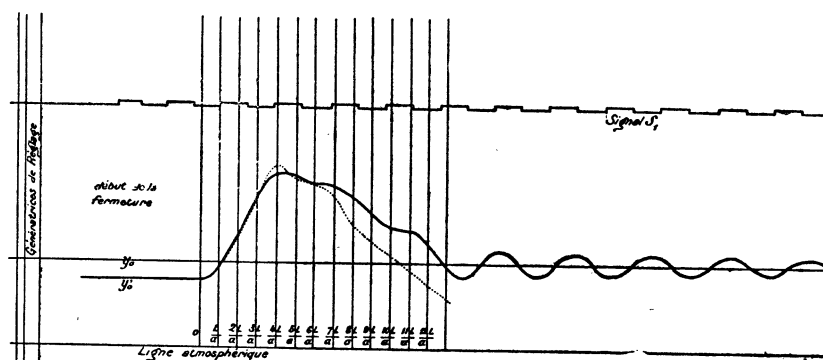


FIG. 53. — Fermetures lentes. Série : IE-144. Courbe des vitesses et des pressions.

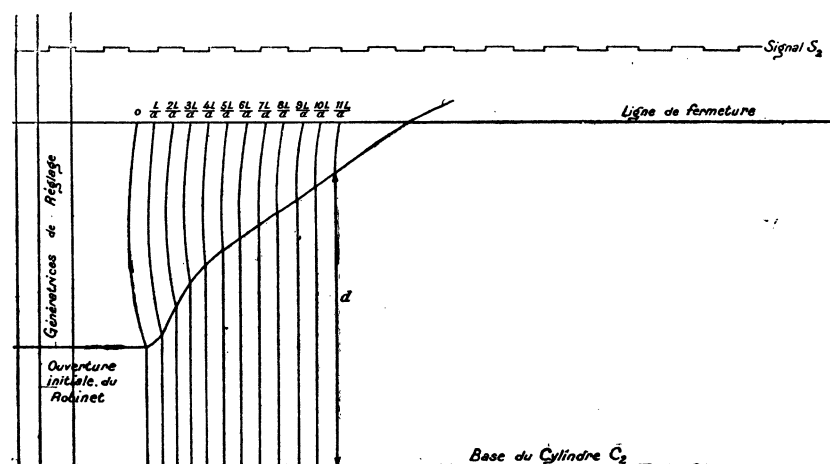
Les deux graphiques représentent l'inscription du manomètre et l'inscription correspondante de l'index I (fig. 54 et 55); à la partie supérieure des graphiques figures 54 et 55, on trouve l'inscription de l'horloge électrique. On subdivise les graphiques en intervalles égaux correspondant aux époques : $\frac{L}{a}$, $\frac{2L}{a}$, $\frac{3L}{a}$, ... à partir



IE - SÉRIE 144 - N°5
Fermetures lentes.. Inscription du manomètre.

FIG. 54. — Fermetures lentes. IE-144-5.

du début de la fermeture. Ce début doit être déterminé avec soin par l'examen des deux graphiques du manomètre et du robinet. On peut, en donnant au commence-



IE - 144 - N°5.
Fermetures lentes - Inscription de l'index I du Robinet R

FIG. 55. — Fermetures lentes. IE-144-5.

ment de la fermeture un mouvement assez brusque au robinet, accuser plus nettement ce point de départ; c'est le cas du graphique IE-143-3 dont nous parlerons plus loin.

Prenons, dans la série IE-144, l'expérience n° 5; nous obtenons, en appliquant les formules (24) et (11) :

33. Expérience : IE-144-5 (fig. 54 et 55).

$$y'_0 = 13 \text{ m. } 62, \quad y_0 = 17 \text{ m. } 4, \quad v_0 = 1 \text{ m. } 025.$$

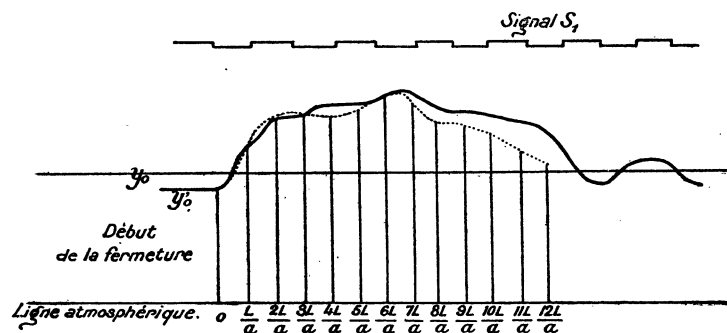
t	$\frac{a^2}{g} \psi^2 :$	$\frac{av_0}{g} + y'_0 - 2F_{k-1} :$	$y \text{ calc.} :$	$y \text{ obs.} :$
$\frac{L}{a}$	531,1	149,4	16 m. 6	16 m. 5
$\frac{2L}{a}$	353,8	149,4	22 m. 7	23 m. 4
$\frac{3L}{a}$	205,5	143,5	30 m. 9	30 m. 75
$\frac{4L}{a}$	120,1	131,3	37 m. 0	35 m. 4
$\frac{5L}{a}$	82,0	108,9	34 m. 1	35 m. 4
$\frac{6L}{a}$	40,5	84,5	32 m. 9	33 m. 5
$\frac{7L}{a}$	22,52	67,9	30 m. 7	32 m. 9
$\frac{8L}{a}$	9,25	45,9	24 m. 6	30 m. 7
$\frac{9L}{a}$	3,09	33,8	22 m. 1	27 m. 2
$\frac{10L}{a}$	0,81	24,0	18 m. 6	24 m. 8

la concordance cesse d'être satisfaisante à partir de l'époque $\frac{6L}{a} = 3\Theta$.

Autre expérience IE-143-3 (fig. 56, 57 et 58).

$$y'_0 = 15 \text{ m. } 16, \quad v_0 = 0 \text{ m. } 81, \quad y_0 = 17 \text{ m. } 4.$$

t	$\frac{a^2}{g} \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} :$	$\frac{av_0}{g} + y'_0 - 2F_{k-1} :$	$y \text{ calc.} :$	$y \text{ obs.} :$
$\frac{L}{a}$	239,3	120,5	20 m. 8	20 m. 9
$\frac{2L}{a}$	178,5	120,5	25 m. 4	24 m. 1
$\frac{3L}{a}$	134,7	108,0	25 m. 30	25 m. 3
$\frac{4L}{a}$	114,6	100,0	24 m. 75	26 m. 6
$\frac{5L}{a}$	78,92	88,9	25 m. 52	26 m. 8
$\frac{6L}{a}$	49,75	80,8	28 m. 0	27 m. 85
$\frac{7L}{a}$	33,28	68,2	26 m. 29	27 m. 5
$\frac{8L}{a}$	19,8	55,1	24 m. 16	25 m. 8
$\frac{9L}{a}$	11,93	45,92	22 m. 62	25 m. 25
$\frac{10L}{a}$	4,78	37,12	22 m. 4	24 m. 75



IE. SÉRIE 143. N°3

Fermétures lentes - Diagramme des pressions.

— Courbe observée
 Courbe calculée.

FIG. 56. — Fermétures lentes. Expérience : IE-143-3.

L'observation et le calcul concordent assez bien jusqu'à l'époque $\frac{8L}{a}$.

Le graphique IE-145-14 correspond à une fermeture plus lente; il va nous donner encore les mêmes conclusions, c'est-à-dire une coïncidence suffisante jusqu'à l'époque $\frac{7L}{a}$; après, discordance très nette entre le calcul et l'observation.

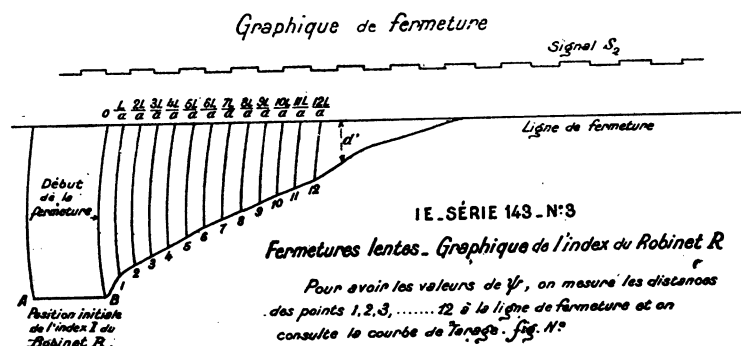


FIG. 57.

Expérience IE-145-14 (fig. 59, 60 et 61).

t	d	v	H	$\frac{a^2}{g} \psi^2$	$\frac{av_0}{g} + y'_0 - 2F_{k-1}$	y calc.	y obs.
0	16 mm. 9	1 m. 28	11 m. 15	»	»	»	»
$\frac{L}{a}$	20 mm. 0	1 m. 23	11 m. 9	1116,0	180,75	12 m. 5	12 m. 4
$\frac{2L}{a}$	25 mm. 5	1 m. 125	12 m. 75	871,6	180,75	16 m. 0	15 m. 3
$\frac{3L}{a}$	29 mm. 5	1 m. 05	13 m. 35	725,1	178,0	17 m. 0	17 m. 5
$\frac{4L}{a}$	34 mm. 5	0 m. 955	13 m. 9	576,1	171,0	19 m. 8	20 m. 6
$\frac{5L}{a}$	38 mm. 4	0 m. 875	14 m. 4	466,8	166,35	21 m. 0	22 m. 3
$\frac{6L}{a}$	42 mm. 2	0 m. 790	14 m. 85	369,0	153,75	23 m. 15	24 m. 4
$\frac{7L}{a}$	45 mm. 4	0 m. 730	15 m. 2	307,8	146,65	25 m. 45	25 m. 8
$\frac{8L}{a}$	49 mm. 2	0 m. 645	15 m. 65	233,4	129,75	23 m. 95	27 m. 85

$\frac{9L}{a}$	52 mm. 8	0 m. 570	15 m. 9	179,4	118,05	24 m. 5	29 m. 2
$\frac{10L}{a}$	55 mm. 7	0 m. 510	16 m. 2	141,0	104,0	23 m. 2	28 m. 9

SÉRIE 1E 143.

Courbes de Tarage permettant de déterminer les Vitesses V et les pressions H correspondant aux diverses valeurs de d' .

La méthode employée n'est pas la même que dans les séries 144 et 145. Pour calculer la fonction ψ , on mesure sur le graphique de fermeture, fig (56) la distance d' de la position de l'index I du robinet R , au temps t , à la ligne de fermeture. On recherche sur les courbes ci-jointes (V, d') et (H, d') les valeurs de V et de H et l'on porte dans la formule :

$$\frac{a^2}{g} \psi^2 = \frac{V^2 a^2}{2g^2 H}$$

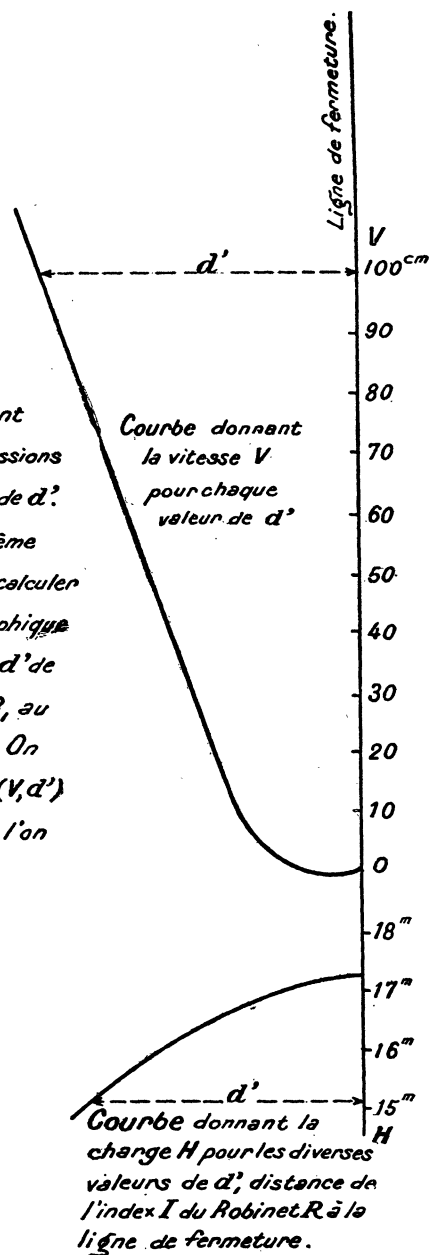


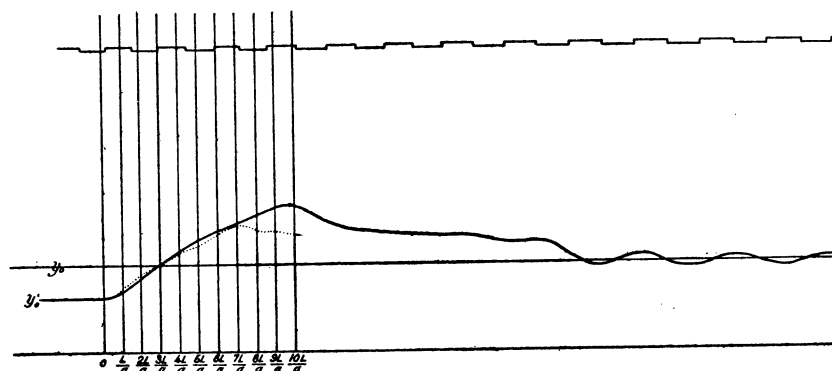
FIG. 58.

La discordance devient très nette à partir de l'époque $\frac{7L}{a}$.

34.

Conclusion.

Il résulte des expériences précédentes que pour la conduite étudiée, ayant 221 m. 90 de longueur, 80 mm. de diamètre intérieur et 5 mm. d'épaisseur, on peut,

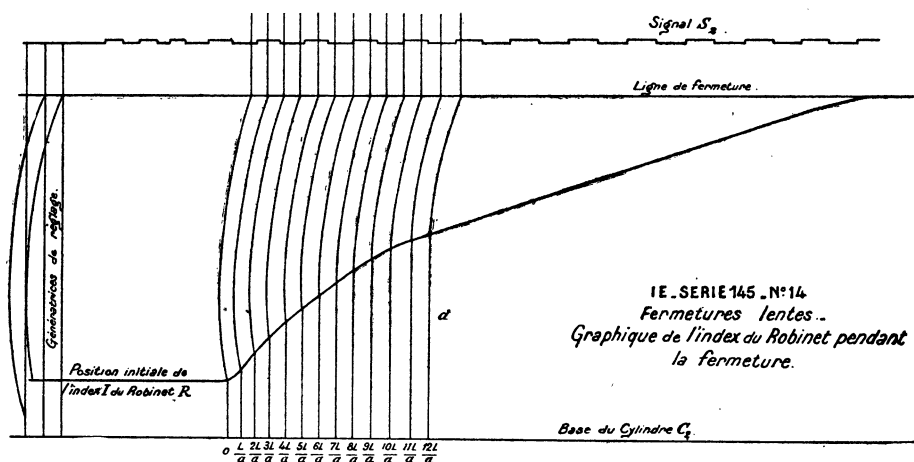


IE. SÉRIE 145. N°14

Fermetures lentes. — Graphique des pressions.

— Courbe observée
..... Courbe calculée

FIG. 59.



IE. SÉRIE 145. N°14

Fermetures lentes.

Graphique de l'index du Robinet pendant la fermeture.

Remarque 1. — Les intervalles $\frac{L}{a}$ sont indiqués sur le graphique en raison des variations de vitesse du cylindre.

FIG. 60.

pour un parcours de l'onde inférieur à 1.800 mètres et trois réflexions avec changement de signe sur la chambre de mise en charge, appliquer les formules de MM. Allievi et de Sparre pour le calcul des coups de bélier en tenant compte des pertes de charge; il faut toutefois prendre comme valeur initiale de la pression la valeur y'_0 , c'est-à-dire la pression statique y_0 , diminuée de la perte de charge, au moment où la fermeture du distributeur commence.

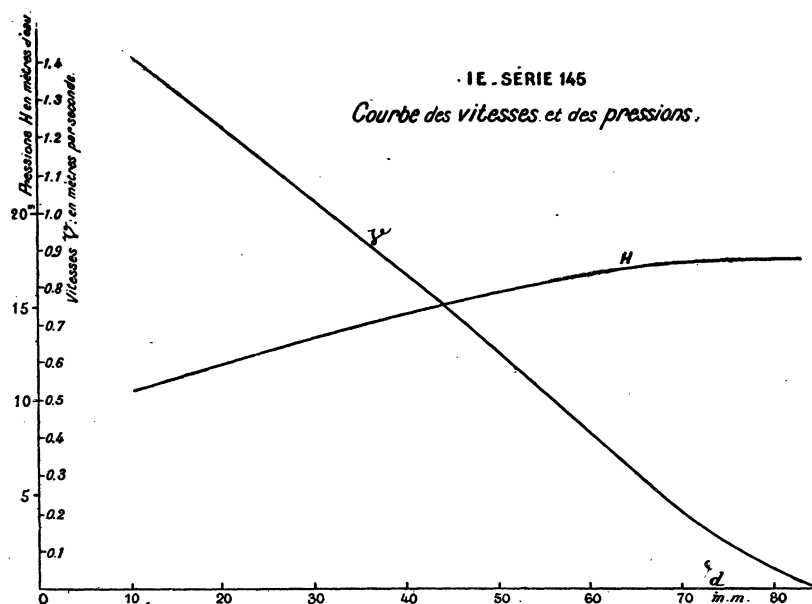


FIG. 61.

Pour les conduites longues et les fermetures lentes, pour lesquelles le maximum de pression, c'est-à-dire l'élément le plus intéressant à déterminer, ne se produit qu'après un long parcours de l'onde et par conséquent une grande déformation de celle-ci, les formules de M. Allievi ne sont plus applicables; c'est alors un problème beaucoup plus complexe qui ne peut être abordé dans le présent mémoire.

35. Ouvertures instantanées avec pertes de charge.

Considérons une ouverture de durée inférieure à $\frac{2L}{a}$, dans une conduite à une seule caractéristique.

Soit y_0 la pression statique, la vitesse initiale est nulle; on a avec les mêmes notations que précédemment :

$$\begin{aligned} y &= y_0 + F_1, & S_0 &= 0, \\ v &= -\frac{g}{a} F_1 = S_1 \sqrt{2gy}, \\ v_1 &= S_1 \sqrt{2gy'_1}, \end{aligned}$$

y'_1 étant comme précédemment la pression constante qui s'établit, au bout d'un certain temps, pour l'ouverture S_1 du distributeur.

On a :

$$\frac{v}{v_1} = \sqrt{\frac{y}{y'_1}}, \quad -\frac{g}{a} F_1 = v_1 \sqrt{\frac{y_0}{y'_1} + \frac{F_1}{y'_1}}, \quad (25)$$

d'où l'on déduit F_1 ou ξ , c'est-à-dire le coup de bélier d'ouverture.

Remarque. — Supposons une perte de charge faible $y'_1 = y_0$, et un coup de bélier inférieur à $\frac{y_0}{2}$, nous avons :

$$-\frac{g}{a} F_1 = v_1 \left(1 + \frac{F_1}{2y_0} \right),$$

d'où :

$$\xi = \frac{-v_1}{\frac{g}{a} + \frac{v_1}{2y_0}}, \quad (26)$$

C'est la formule (13) de M. de Sparre; si $\frac{v_1}{2y_0}$ est faible vis-à-vis de $\frac{g}{a}$, on a :

$$\xi = -\frac{av_1}{g},$$

formule analogue à celle des coups de bélier de fermeture.

Revenons à la formule (25); elle nous donne :

$$\frac{g^2}{a^2} F_1^2 = v_1^2 \frac{y_0 + F_1}{y'_1}$$

ou :

$$F_1^2 - \frac{v_1^2 a^2}{g^2 y'_1} F_1 - \frac{v_1^2 a^2 y_0}{g^2 y'_1} = 0,$$

d'où, en prenant la racine négative :

$$\xi = \frac{1}{2} \frac{v_1^2 a^2}{g^2 y_1'} \left\{ 1 - \sqrt{1 + \frac{4y_0 y_1' g^2}{v_1^2 a^2}} \right\}, \quad (27)$$

formule qui sera applicable dans tous les cas.

Pour des chutes, qui ne sont pas très hautes, par exemple :

$y_0 < 100$ mètres, le terme $\frac{4y_0 y_1' g^2}{v_1^2 a^2}$ est inférieur à $\frac{1}{2}$ pour des vitesses v_1 de l'ordre de grandeur de celles qu'on rencontre dans la pratique industrielle. Prenons, par exemple :

$$y_0 = 50 \text{ mètres}, \quad v_1 = 2 \text{ mètres}, \quad a = 1.000 \text{ mètres},$$

$$\frac{4y_0 y_1' g^2}{v_1^2 a^2} < \frac{4 \times 50^2 \times 10^2}{4 \times 10^6} = 5 \times 10^{-2},$$

on peut alors écrire :

$$\xi = \frac{1}{2} \frac{v_1^2 a^2}{g^2 y_1'} \left\{ 1 - \left(1 + \frac{2y_0 y_1' g^2}{v_1^2 a^2} \right) \right\} = -y_0. \quad (28)$$

Donc, lorsque la vitesse v_1 réalisée par l'ouverture devient suffisante, le coup de bélier d'ouverture est constant, indépendant de l'ouverture et égal à $-y_0$.

Quand la chute est haute, la vitesse v_1 , à partir de laquelle il en est ainsi, n'est pas une vitesse normale; *mais une pareille vitesse peut être produite par une rupture de la conduite à sa partie inférieure.*

Cette ouverture brusque, ou rupture de la conduite, peut entraîner dans les portions élevées de la conduite un aplatissement de celle-ci.

36. Distinction entre les coups de bélier de fermeture et d'ouverture.

Il y a donc entre les coups de bélier de fermeture et d'ouverture une différence caractéristique : tandis que les premiers peuvent, comme nous l'avons vu plus haut, provoquer des pressions inférieures à la pression atmosphérique et accompagnées de rentrées d'air et du dégagement de l'air dissous dans l'eau, les coups de bélier d'ouverture donnent des dépressions ne dépassant jamais y_0 . Ce résultat était d'ailleurs implicitement contenu dans les formules, puisqu'en

écrivait $\sqrt{2gy}$, on suppose y positif; il était, toutefois, nécessaire de le vérifier expérimentalement.

Il n'est pas évident non plus que le coup de bélier deviendra indépendant du degré d'ouverture du distributeur, dès que celle-ci sera suffisante et qu'il sera égal à $-y_0$.

Citons quelques expériences.

37. IE-147-3 (ouverture 5) [fig. 62.]

$$v_1 = 0 \text{ m. } 25, \quad y'_1 = 17 \text{ m. } 0.$$

Appliquons la formule (27), on a :

$$\frac{4v_1^2 a^2 y_0}{g^2 y'_1} = 4493, \quad \frac{v_1^2 a^2}{g^2 y'_1} = 64,6,$$

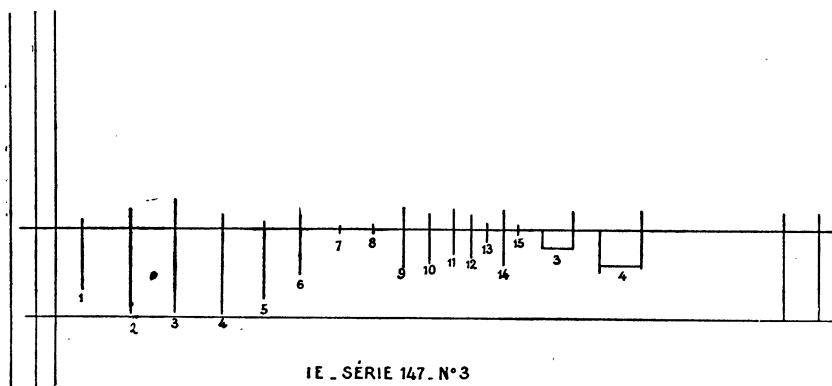
$$\xi \text{ calculé} = -14 \text{ m. } 25, \quad \xi \text{ observé} = -13 \text{ m. } 9.$$

Même expérience (ouverture 6).

$$v_1 = 0 \text{ m. } 102, \quad y'_1 = 17 \text{ m. } 3,$$

$$\frac{v_1^2 a^2}{g^2 y'_1} = 10,6, \quad \frac{4v_1^2 a^2 y_0}{g^2 y'_1} = 731,$$

$$\xi \text{ calculé} = -9 \text{ m. } 2, \quad \xi \text{ observé} = -8 \text{ m. } 9.$$



IE - SÉRIE 147. N°3
Coup de bélier d'ouverture.
On voit qu'il tend vers $-y_0$.

FIG. 62.

38. Démonstration expérimentale de la formule (28).

Pour mettre en évidence expérimentalement la propriété démontrée plus haut de l'indépendance du coup de bélier par rapport à l'ouverture du distributeur, quand la vitesse v_1 dépasse une valeur telle que l'on ait $\frac{4y_0 y'_1 g^2}{v_1^2 a^3} < 1$, nous avons effectué des ouvertures diverses (*fig. 63*) : en ab , on a réalisé l'ouverture à gueule bée de la conduite, le coup de bélier est bien égal à $-y_0$; on trouve également sur le graphique IE-147-4 les expériences suivantes (*fig. 63*) :

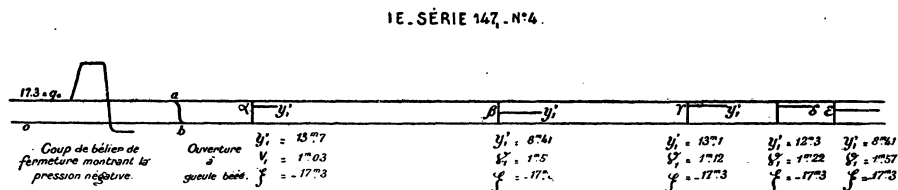


FIG. 63.

Expérience IE-147-4.

α :	$y'_1 = 13 \text{ m. } 7$	$v_1 = 1 \text{ m. } 03$	} la dépression est toujours égale à -17 m. 3.
γ :	$y'_1 = 13 \text{ m. } 1$	$v_1 = 1 \text{ m. } 12$	
δ :	$y'_1 = 12 \text{ m. } 3$	$v_1 = 1 \text{ m. } 22$	
β :	$y'_1 = 8 \text{ m. } 41$	$v_1 = 1 \text{ m. } 57$	

Le terme

$$\frac{4y_0 y'_1 g^2}{v_1^2 a^3} = \frac{4 \times 17,3 \times 13,7 \times 10^2}{1,03^2 \times 1,300^2}$$

est très faible.

Les graphiques de la figure 63 indiquent nettement comment l'expérience est faite en α , β , γ , δ , ϵ : le cylindre enregistreur est immobile, on ouvre brusquement le robinet situé à l'extrémité aval de la conduite, le style du manomètre se déplace de A en B, il remonte ensuite *lentement* de B en C et indique alors la pression statique diminuée de la perte de charge correspondant à l'ouverture qui a été réalisée.

Dans la figure 64 :

La ligne horizontale passant par A représente la pression statique;

La ligne horizontale passant par C correspond à la pression à l'extrémité aval (distributeur) quand le régime permanent correspondant à l'ouverture s'est établi;

Quant à la ligne horizontale passant par B, elle représente la pression atmosphérique;

AC représente la perte de charge.

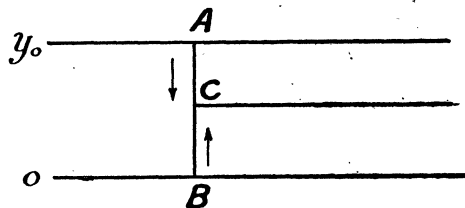


FIG. 64. — Schéma du graphique d'une ouverture instantanée, expériences α , β , γ , δ , ϵ de la figure 63; y_0 pression statique à l'extrémité de la conduite au moment de l'ouverture; A B déplacement du style du manomètre au moment de l'ouverture, la dépression est $-y_0$; le style du manomètre revient ensuite lentement de B en C et indique une pression égale à la pression statique y_0 diminuée de la perte de charge; quand l'index du manomètre est bien immobile en C, on fait tourner légèrement le cylindre, à fin de tracer sur le diagramme la droite correspondant à C.

Sur la même figure, se trouve au début un coup de bélier de fermeture qui montre nettement l'existence de pressions inférieures à la pression atmosphérique. Cette expérience a été faite en laissant déplacer le cylindre; il en est de même de l'ouverture ab , écoulement à gueule bée; les autres expériences du même graphique (IE-147-4) ont été faites le cylindre étant immobile.

39. Ouvertures lentes avec pertes de charge.

Les formules déjà indiquées s'appliquent sans modification. Si nous partons de la fermeture complète, nous prendrons comme valeur initiale de la pression la pression statique y_0 , *quelle que soit la perte de charge correspondant à l'ouverture qu'on va réaliser.*

Les équations seront :

$$\text{à l'époque : } t = \tau < \Theta, \quad y = y_0 + F_1, \quad v = -\frac{g}{a} F_1 = \psi \sqrt{2gy}, \quad \frac{s}{S} = \psi;$$

l'équation donnant y sera :

$$y^2 - 2y \left(y_0 + \frac{a^2}{g} \psi^2 \right) + y_0^2 = 0; \quad (29)$$

on aura de même :

$$\text{pour : } (k-1) \frac{2L}{a} < t < k \frac{2L}{a}, \text{ ou : } t = \tau + (k-1) \frac{2L}{a},$$

$$y = y_0 + F_k - F_{k-1},$$

$$v = -\frac{g}{a} (F_k + F_{k-1}) = \psi \sqrt{2gy}$$

et :

$$y^2 - 2y \left(y_0 - 2F_{k-1} + \frac{a^2}{g} \psi^2 \right) + (y_0 - 2F_{k-1})^2 = 0; \quad (30)$$

on aura d'ailleurs :

$$\psi^2 = \frac{v^2}{2gy'_1} \quad \text{et} \quad \frac{a^2 \psi^2}{g} = \frac{a^2 v^2}{2g^2 y'_1}; \quad (31)$$

en effet, en régime permanent, on a :

$$u^2 = 2gy'_1 \quad \text{et} \quad \psi^2 = \frac{v^2}{u^2},$$

nous ferons donc usage de cette formule (31) et de l'équation (30), dans laquelle on a :

$$y_0 - 2F_{k-1} = (2k-1)y_0 - 2\Sigma y_i, \quad (32)$$

y_i représentant les valeurs des pressions aux époques :

$$\tau + (k-2)\Theta, \quad \tau + (k-3)\Theta, \quad \dots, \quad \tau.$$

40. Expériences sur les ouvertures lentes avec pertes de charge : IE-148-18
(fig. 65 et 66).

Époques :	$v :$	$y'_1 :$	$\frac{a^2 v^2}{2g^2 y'_1} :$	y calc. :	y obs. :
0	0	17 m. 3	0	»	»
$\frac{L}{a}$	0 m. 015	17 m. 3	0 m. 114	15 m. 5	15 m. 7
$\frac{2L}{a}$	0 m. 075	17 m. 3	2 m. 85	9 m. 82	12 m. 15
$\frac{3L}{a}$	0 m. 175	17 m. 3	15 m. 6	6 m. 64	7 m. 95
$\frac{4L}{a}$	0 m. 32	17 m. 0	52 m. 9	4 m. 8	6 m. 2
$\frac{5L}{a}$	0 m. 39	16 m. 85	79 m. 3	7 m. 6	6 m. 5
$\frac{6L}{a}$	0 m. 49	16 m. 7	126 m. 2	8 m. 3	7 m. 54
$\frac{7L}{a}$	0 m. 57	16 m. 3	175 m. 0	8 m. 2	7 m. 7
$\frac{8L}{a}$	0 m. 64	15 m. 85	226 m. 9	8 m. 8	7 m. 8
$\frac{9L}{a}$	0 m. 70	15 m. 65	275 m. 0	9 m. 1	8 m. 2
$\frac{10L}{a}$	0 m. 74	15 m. 35	313 m. 2	10 m. 0	8 m. 7
$\frac{12L}{a}$	0 m. 785	15 m. 1	358 m. 3	11 m. 8	10 m. 2

L'ouverture est constante après $12\frac{L}{a}$.

La figure ci-jointe (fig. 65) représente en traits pleins la courbe des pressions observées, et en pointillé les pressions calculées.

On voit, comme il est facile de le prévoir, que la pression calculée tend vers y_0 .

La courbe, figure 66, représente l'enregistrement en fonction du temps du déplacement de l'index du robinet.

On remarquera que les deux courbes de pression observées et calculées ne diffè-

rent pas beaucoup, jusqu'à l'époque $\frac{8L}{a}$. Les différences peuvent être attribuées surtout à des erreurs des expériences; celles-ci sont, en effet, assez délicates.

Nous citerons encore l'expérience : IE-148-7.

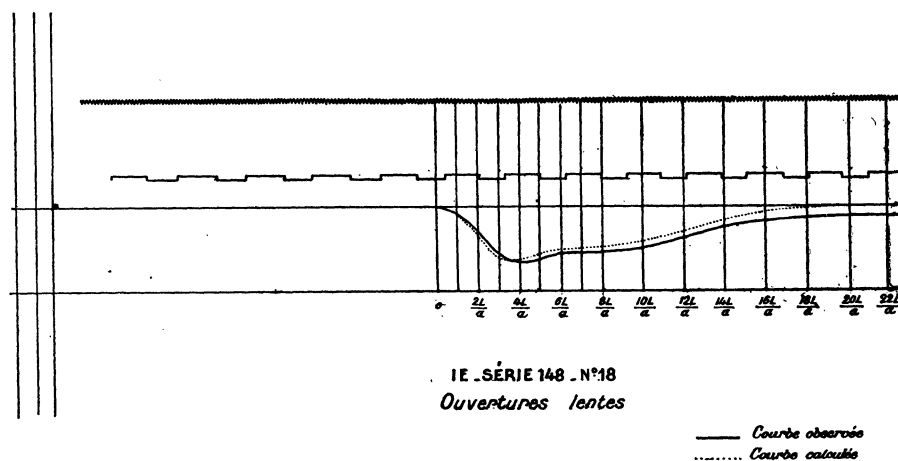


FIG. 65.

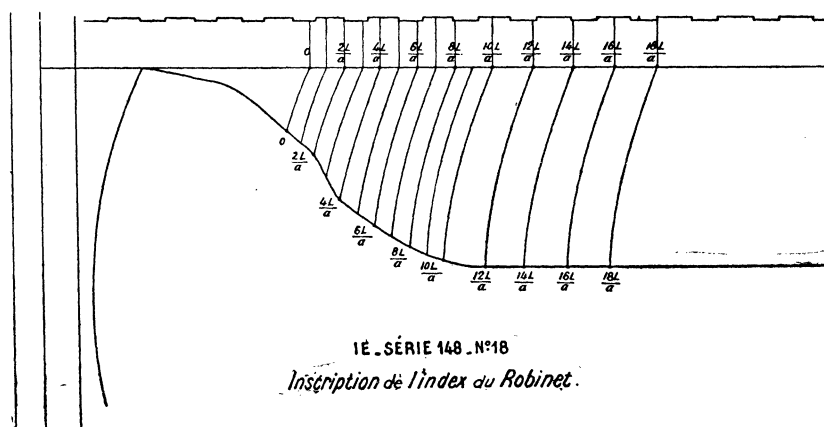


FIG. 66.

Expérience IE-148-7 (*fig. 68, 69 et fig. 67*).

t	v	y'	$\frac{a^2}{g} \psi^2$	y calc. :	y obs.
0	0	17,3	0	»	»
$\frac{L}{a}$	0,04	17,3	0,81	12 m. 8	12 m. 8
$\frac{2L}{a}$	0,235	17,2	28,2	3 m. 4	4 m. 2
$\frac{3L}{a}$	0,54	16,35	156,6	1 m. 9	2 m. 1
$\frac{4L}{a}$	0,74	15,35	311,2	2 m. 9	2 m. 6
$\frac{5L}{a}$	0,90	14,35	495,6	3 m. 0	2 m. 6
$\frac{6L}{a}$	1,015	13,5	670,1	3 m. 7	3 m. 2
$\frac{7L}{a}$	1,115	12,8	852,8	3 m. 9	3 m. 34
$\frac{8L}{a}$	1,119	12,2	1027,8	4 m. 4	4 m. 12

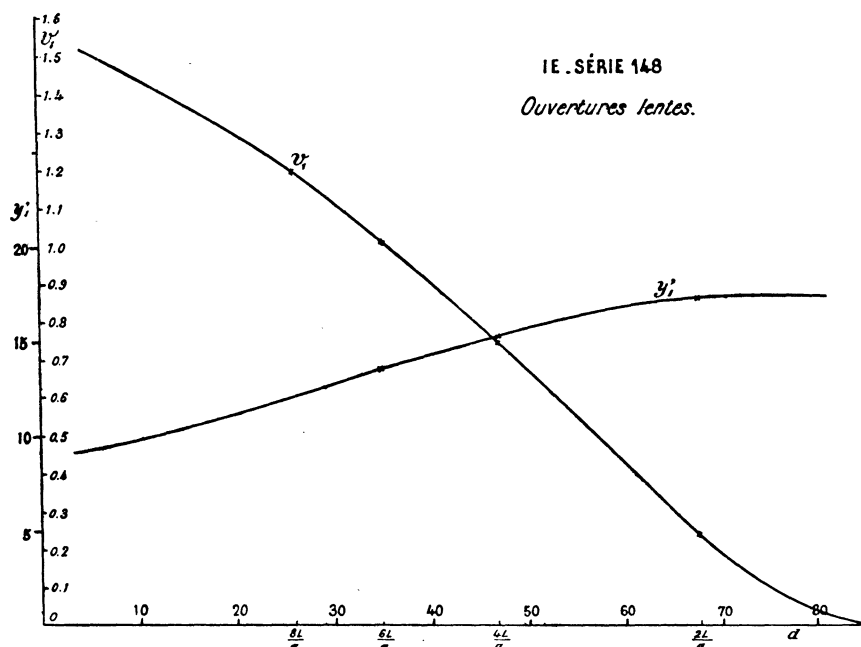
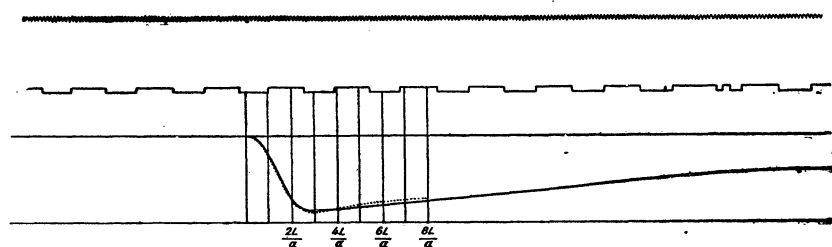


FIG. 67. — Courbe des vitesses et des pressions. Expérience : IE, série 148.
Fac. des Sc., t. VIII.

Remarque sur les coups de bélier d'ouverture réalisés dans les séries d'expériences IE.

M. de Sparre a montré (*Bulletin spécial de la Société hydrotechnique de France*, 1895, p. 8) que les coups de bélier d'ouverture forment, à partir de l'époque $t_1 + \frac{2L}{a}$,



IE. SÉRIE 148. N°7.

Ouverture lente

— Courbe observée
..... Courbe calculée.

FIG. 68. — Diagramme des pressions. Expérience : IE-148-7. Ouvertures lentes.

t_1 désignant l'époque à laquelle on arrête la vanne, une progression géométrique décroissante de raison :

$$-\frac{1 - \rho\lambda'}{1 + \rho\lambda'}$$

λ' désignant le rapport entre la surface ouverte du distributeur au moment de la fin de la manœuvre, et la surface ouverte du distributeur, quand l'ouverture est totale.

Cette progression est alternée tant que l'on a :

$$\rho\lambda' < 1.$$

Dans les expériences que nous avons faites, on a :

$$\rho\lambda' > 1.$$

Soit v_1 la vitesse correspondant à l'ouverture totale, v' la vitesse correspondant à l'ouverture qui a lieu à la fin de la manœuvre :

$$\lambda' = \frac{v'}{v_1}, \quad \rho\lambda' = \frac{av_1}{2gy_0} \frac{v'}{v_1} = \frac{av'}{2gy_0}.$$

Prenons par exemple :

$$v' = 1 \text{ mètre}, \quad a = 1.300, \quad g = 9,8, \quad \gamma_0 = 17,3,$$

on a :

$$\rho\lambda' = \frac{1.300 \times 1}{2 \times 9,8 \times 17,3} = 3,7.$$

41.

Conclusions.

Les conclusions sont donc les mêmes que pour les fermetures lentes ; tant que le parcours total de l'onde ne dépasse pas 7 ou $\frac{8L}{a}$, la différence entre le calcul et

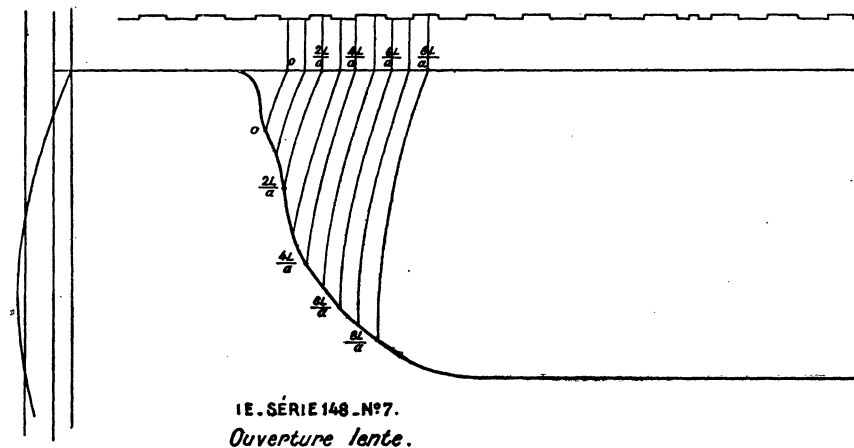


FIG. 69. — Diagramme de l'inscription de l'index du robinet. Expérience : IE-148-7.
Ouvertures lentes.

l'observation est faible ; au bout d'un certain temps, par exemple $\frac{20L}{a}$, la différence s'étant progressivement accentuée, le calcul donne comme valeur de γ , 17 m. 3 et l'observation 10 m. 1 (voir fig. 68).

On voit donc que les formules de MM. Allievi et de Sparre rendent compte pendant un temps, en général suffisant, des pressions observées, même quand les pertes de charge sont 40 % de la pression statique.

Pour les conduites à caractéristiques variables, il faudrait utiliser les formules de M. de Sparre relatives aux conduites subdivisées en deux ou trois tronçons en appliquant les remarques qui ont été signalées plus haut pour le choix de la pression initiale.

CHAPITRE V

Répartition du coup de bélier dans une conduite à caractéristique unique.

SOMMAIRE : Importance de cette question. — Calcul des pressions en un point quelconque de la conduite. — Répartition des maxima. — Expérience : IE-127-8. — Répartition sinusoïdale. — Expérience : IE-128-4.

42. Importance de cette question.

L'étude de la transmission du coup de bélier le long de la conduite est une de celles qui présente peut-être le plus d'importance pratique. En fait, cette question était encore récemment une des plus controversées et des moins nettement connues.

La théorie de Joukowski-Allievi (¹) indique (chap. II) qu'une surpression instantanée produite au voisinage du distributeur se propage sans affaiblissement jusqu'à la chambre d'eau avec une vitesse a ; elle s'y réfléchit et revient changée de signe au distributeur. Les coups de bélier produits par des fermetures instantanées se propagent donc intégralement tout le long de la conduite; c'est-à-dire que si l'on a 25 mètres de surpression au distributeur, on aura les mêmes 25 mètres jusqu'à l'embouchure de la conduite dans la chambre d'eau. Si l'on considère les surpressions relatives au lieu des surpressions absolues, les premières deviennent énormes dans les parties hautes de la conduite où la pression statique est faible. On voit immédiatement les dangers qui peuvent en résulter pour la sécurité des conduites.

Mais les fermetures ne sont jamais instantanées; elles ont en réalité toujours une certaine durée. Dès lors le coup de bélier en un point de la conduite résulte de la composition de l'onde qui vient du distributeur et de l'onde qui revient changée de signe de la chambre d'eau.

La théorie de M. Allievi permet de calculer facilement les valeurs de la pression en un point quelconque de la conduite, à une époque déterminée, en fonctions des valeurs de la pression au distributeur.

43. Calcul des pressions en un point quelconque de la conduite.

Considérons la pression en un point très voisin du distributeur; elle est donnée par la formule :

$$y - y_0 = F(t) - F\left(t - \frac{2L}{a}\right).$$

1. *Loc. cit.*

Pour déterminer la fonction $F(t)$, on opère de la façon suivante : Prenons : $\tau < \Theta = \frac{2L}{a}$, en désignant par ξ les coups de bélier, on a :

$$\begin{array}{lll} \text{à l'époque} & \tau, & \gamma_1 - \gamma_0 = \xi_1 = F_1, \\ \text{»} & \tau + \Theta, & \gamma_2 - \gamma_0 = \xi_2 = F_2 - F_1, \\ \text{»} & \tau + 2\Theta, & \gamma_3 - \gamma_0 = \xi_3 = F_3 - F_2, \\ & \vdots & \vdots \\ \text{»} & \tau + (k-1)\Theta, & \gamma_k - \gamma_0 = \xi_k = F_k - F_{k-1}, \end{array}$$

d'où :

$$F_k = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_k. \quad (33)$$

Dès lors, on peut calculer la fonction F pour une époque quelconque, en utilisant les valeurs des pressions trouvées au distributeur. On détermine ensuite le coup de bélier ξ_x à une époque t , et en un point de la conduite séparé du distributeur par une distance x en appliquant la formule (4) :

$$\xi_x = F\left(t - \frac{x}{a}\right) - F\left(t - \frac{2L-x}{a}\right).$$

Nous verrons, chapitre VII, des vérifications de cette formule pour la conduite C_1 en prenant une valeur de a moyenne. Cette vérification fera partie du premier chapitre relatif aux conduites à caractéristiques variables.

44. Répartition des maxima.

M. de Sparre (*) a étudié la répartition des maxima. Il distingue deux cas :

1° L'ouverture ou la fermeture se fait dans un temps T supérieur à Θ :

$$T > \Theta$$

M. de Sparre démontre que, dans ce cas, le coup de bélier maximum ξ_{mx} en un point d'abscisse x est sensiblement égal à celui qui se produit à la vanne multiplié par $\frac{L-x}{L}$;

$$\xi_{mx} = \frac{L-x}{L} \xi_m; \quad (34)$$

(*) De Sparre, *Bulletin technique de la Société hydrotechnique*, 1915.

il est donc proportionnel à la distance, $L - x$, du point considéré à la prise d'eau. On pourra dire que le coup de bélier maximum a une répartition linéaire le long de la conduite.

2° L'ouverture ou la fermeture ont lieu dans un temps T inférieur à Θ :

$$T < \Theta.$$

Dans ce cas, si la distance du point considéré à la prise d'eau est supérieur à $\frac{aT}{2}$:

$$L - x > \frac{aT}{2},$$

le coup de bélier maximum a la même valeur qu'à la vanne;

$$\xi_{xm} = \xi_m. \quad (35)$$

Si, au lieu de cela, la distance du point considéré à la chambre de mise en charge est inférieure à $\frac{aT}{2}$:

$$L - x < \frac{aT}{2},$$

on a :

$$\xi_{xm} = \frac{L - x}{L - x_i} \cdot \xi_m \quad (36)$$

dans laquelle $L - x_i = \frac{aT}{2}$; en langage ordinaire, on dira que le coup de bélier maximum à une distance $L - x$ de la chambre d'eau est égal au coup de bélier maximum au distributeur multiplié par le rapport $\frac{L - x}{L - x_i}$ des distances comptées à partir de la chambre d'eau du point considéré et du point le plus éloigné du distributeur pour lequel le coup de bélier maximum a la même valeur qu'au distributeur (*).

En langage abrégé, on pourra dire qu'il y a transmission intégrale du coup de bélier maximum du distributeur jusqu'au point B (*fig. 70*) d'abscisse x_i , et que du point B en C, chambre d'eau, on a répartition linéaire du maximum du coup de bélier. Nous verrons, à propos des réservoirs d'air, d'autres exemples de répartitions linéaires des maxima de surpression.

(*) De Sparre, *loc. cit.*

45. Vérifications expérimentales.

La vérification expérimentale de la transmission intégrale du coup de bélier, dans les conditions que nous venons de préciser, a été faite par l'un de nous. La figure 71. montre l'inscription d'un coup de bélier de fermeture brusque à l'extrémité aval et au premier tiers amont de la conduite IE. Les pressions statiques en ces points étaient respectivement 16 mètres et 13 m. 5; le coup de bélier a été

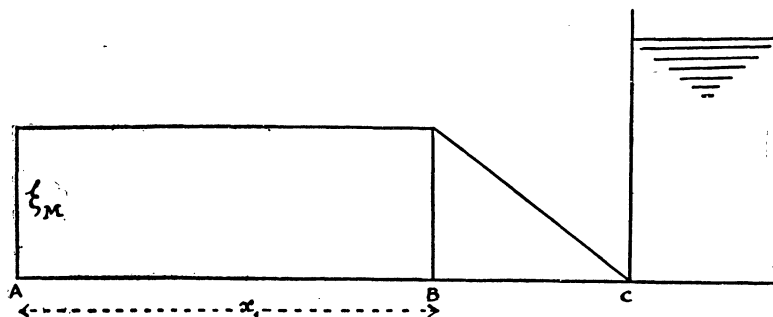


Fig. 70. — Répartition des maxima de surpression.

21 m. 6 en bas et 21 m. 8 au premier tiers amont. La conduite avait 105 mètres de longueur totale. La figure 19 donne les graphiques d'une expérience analogue. On remarquera sur ces derniers que la pression inférieure à la pression atmosphérique a pour effet de faire rentrer dans la conduite de l'air qui produit des dentelures. Dans cette expérience, le coup de bélier était 28 m. 8 à l'extrémité aval et 29 m. 1 au premier tiers amont.

On trouvera, au chapitre VI, les expériences sur la répartition du fondamental et des harmoniques impairs le long de la conduite.

On trouvera, chapitre VII, les expériences de vérification des répartitions le long de la conduite C_1 , et dans la troisième partie de ce mémoire la répartition dans le cas des réservoirs d'air.

46. Répartition sinusoïdale.

L'un de nous a donné ce nom à la répartition qui prend naissance dans une conduite, au bout d'un certain temps, par suite de la déformation des ondes.

Considérons une conduite entièrement purgée d'air, étudions les pressions à

l'extrémité aval et au premier tiers amont. Quand on produit une fermeture brusque et qu'on observe les surpressions pendant un certain nombre de périodes Θ , par exemple une trentaine pour IE, les courbes de surpression à l'extrémité aval qui étaient primitivement formées de portions de rectangles (*fig. 18*) s'arrondissent et se rapprochent de la forme sinusoïdale; les courbes de surpression au premier tiers amont qui étaient, au début, pointues s'arrondissent aussi et deviennent également sinusoïdales (*fig. 71 et 72*).

Les variations de pression aux deux postes sont, au bout d'un certain temps, en concordance de phase.

Considérons la pression y_k à l'extrémité aval, on a les équations :

$$\left. \begin{aligned} y_k &= y_0 + F_k - F_{k-1} \\ 0 &= \frac{av_0}{g} - (F_k + F_{k-1}), \end{aligned} \right\} \text{ puisque la conduite est fermée,}$$

on en déduit :

$$F_k = \frac{av_0}{2g} + \frac{y_k - y_0}{2}.$$

Si la courbe $y_k - y_0$ est sinusoïdale, il en sera de même de $F_k - \frac{av_0}{2g}$; posons :

$$F_k = F(t) = A \sin 2\pi \frac{t}{T'} + \frac{av_0}{2g},$$

$T' = 2\Theta$ est la période fondamentale de la conduite; nous aurons en un point d'abscisse x , en appliquant la formule (4 bis) :

$$y = y_0 + A \left[\sin \frac{2\pi}{T'} \left(t - \frac{x}{a} \right) - \sin \frac{2\pi}{T'} \left(t - \frac{2L-x}{a} \right) \right],$$

d'où :

$$y = y_0 + 2A \cos \frac{\pi x}{2L} \sin 2\pi \frac{t}{T'}. \quad (37)$$

On a de même :

$$v = v_0 - \frac{g}{a} \left[\frac{av_0}{g} + A \sin \frac{2\pi}{T'} \left(t - \frac{x}{a} \right) + A \sin \frac{2\pi}{T'} \left(t - \frac{2L-x}{a} \right) \right],$$

car si la vitesse est nulle à l'extrémité aval, elle n'est pas nécessairement nulle en un point quelconque de la conduite; on en déduit :

$$v = \frac{2g}{a} A \sin \frac{\pi x}{2L} \cos 2\pi \frac{t}{T'}; \quad (38)$$

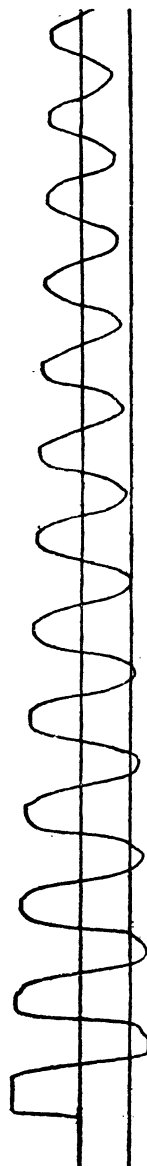


FIG. 71. — Expérience : IE-128-4. Coup de bélier de fermeture enregistré à l'extrémité aval.

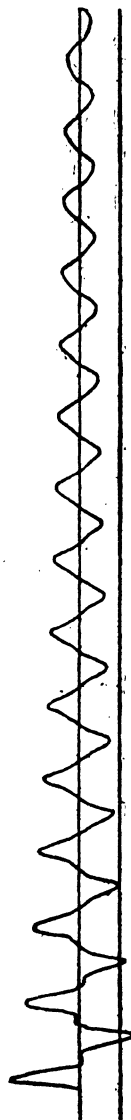


FIG. 71. — Expérience : IE-128-4. Coup de bélier de fermeture enregistré au deuxième poste, premier tiers amont.



FIG. 72. — Expérience : IE-128-3. Coup de bélier de fermeture brusque enregistré à l'extrémité aval.

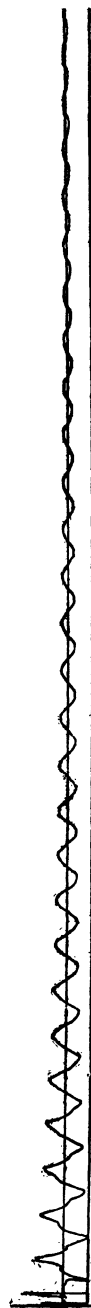


FIG. 72. — Expérience : IE-128-3. Coup de bélier de fermeture brusque enregistré au deuxième poste, premier tiers amont.

On voit donc que l'amplitude du coup de bélier sera maximum à l'extrémité aval et minimum et nulle à l'extrémité amont. Quant à la vitesse, elle sera maximum à l'extrémité amont ($x = L$) et minimum et nulle à l'extrémité aval. L'amplitude de la pression et de la vitesse ont une répartition sinusoïdale le long de la conduite.

On peut le vérifier, en prenant les inscriptions à l'extrémité aval et au premier tiers amont pour lequel on a $x = \frac{2L}{3}$; donc, en ce dernier point, on a :

$$y = y_0 + 2A \sin \frac{2\pi t}{T'} \cos \frac{\pi}{3} = y_0 + A \sin \frac{2\pi t}{T'};$$

à l'extrémité aval, on a :

$$x = 0,$$

$$y = y_0 + 2A \sin \frac{2\pi t}{T'}.$$

On voit donc que le rapport des amplitudes des surpressions à l'extrémité aval et au premier tiers amont doit devenir, au bout d'un certain temps, égal à 2. C'est ce que vérifie complètement l'expérience; citons, par exemple : IE-128-4.

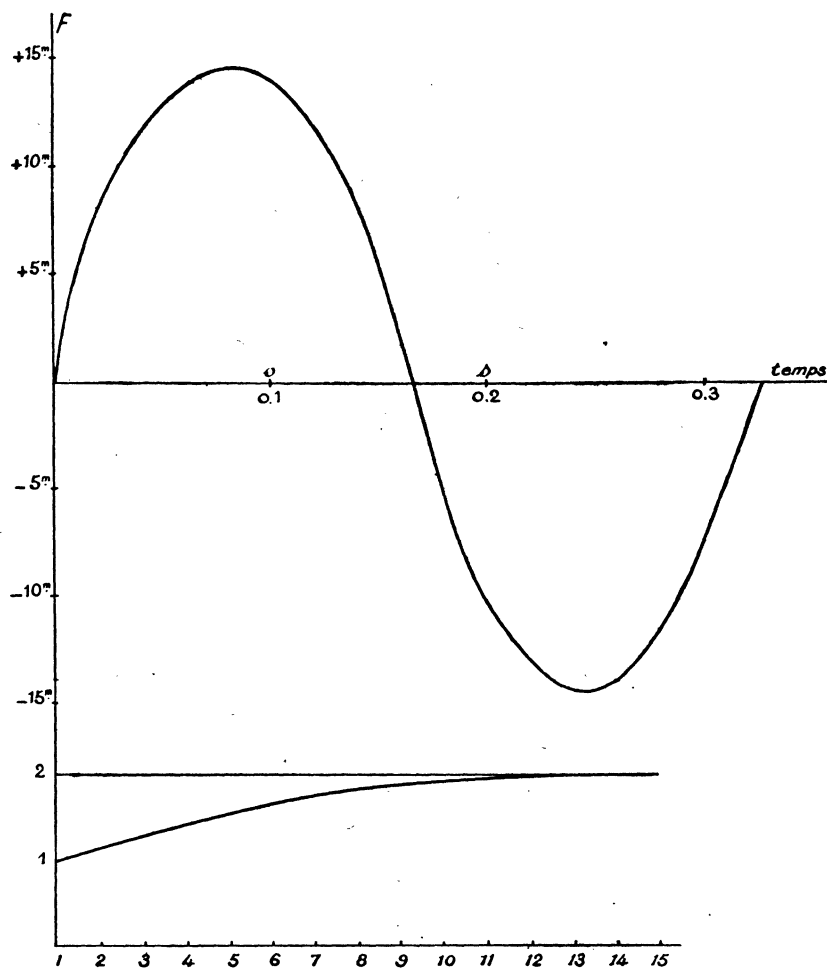
Cette expérience a été faite sur la conduite IE de 80-90 en fer ayant 105 m. 24 de longueur (*fig. 71*).

On a marqué dans le tableau ci-joint les valeurs des surpressions maxima aux deux postes, et leur rapport. On voit que ce rapport est, au début, égal à 1 (transmission intégrale du coup de bélier); mais ce rapport augmente ensuite et tend asymptotiquement vers 2.

47. Expérience : IE-128-4. — Tableau des surpressions (*fig. 71 et 73*).

N ^{os}	Extrémité aval.	Premier tiers amont.	Rapport.
1	8 mm. 8	8,8	1
2	8 mm. 5	6,8	1,25
3	7 mm. 8	5,9	1,32
4	7 mm. 2	5,2	1,38
5	6 mm. 7	4,5	1,49
6	6 mm. 25	4,1	1,52
7	5 mm. 9	3,7	1,59
8	5 mm. 7	3,3	1,73
9	5 mm. 25	3,0	1,75

N ^{os}	Extrémité aval.	Premier tiers amont.	Rapport.
10	4 mm. 9	2,75	1,78
11	4 mm. 4	2,5	1,76
12	4 mm. 25	2,3	1,85
13	3 mm. 9	2,05	1,92
14	3 mm. 6	1,9	1,89
15	3 mm. 3	1,7	1,94



IE. SÉRIE 128. N^o 4.

*Rapport des amplitudes des pressions à l'extrémité
aval et au premier tiers amont.*

FIG. 73.

La courbe (*fig. 72*) représente les variations du rapport des amplitudes aux deux postes.

Dans le tableau précédent, au lieu de marquer les pressions, on a indiqué les valeurs des élongations en mm.; ce qui est correct, les deux manomètres ayant exactement la même sensibilité.

L'expérience montre aussi que les variations de pression aux deux postes sont en concordance de phase. Donc, au bout d'un certain temps, l'eau prend un *mouvement d'ensemble*.

La figure 72 représente les graphiques d'une expérience analogue à celle de la figure 71.

Cette répartition sinusoïdale des pressions se produit heureusement dans les conduites au bout d'un temps assez long, représentant un parcours assez grand de l'onde dans son trajet aller et retour d'un bout à l'autre de la conduite; à ce moment-là, l'amplitude des pressions a été beaucoup atténuée. S'il n'en était pas ainsi, il en résulterait pour la conduite un grave danger, car, en général, on la calcule comme si elle devait supporter des surpressions linéairement réparties.

Remarque. — Dans l'expérience citée et dans beaucoup d'expériences analogues, il est essentiel que la conduite soit entièrement purgée d'air; on le vérifie par la forme du diagramme de fermeture, qui doit avoir, *au début*, une forme bien rectangulaire. En même temps, pour que la transmission intégrale se réalise, il faut que le poste amont se trouve dans les conditions précisées par M. de Sparre, et que nous avons rappelées page 86.

CHAPITRE VI

Résonances dans les conduites à caractéristique unique.

SOMMAIRE : Analyse d'une conduite. — Résonances des divers harmoniques. — Expériences de résonance : UG-80-34, 1^{er} poste; UG-80-41, 1^{er} et 2^e postes; UG-80-44, 1^{er} poste. — Amplitude des harmoniques impairs. — Expériences : IE-120-23; IE-121-13; IE-121-11; IE-121-12. — Minimum de débit au moment de la résonance. — Expériences : IE-126. — Répartition du fondamental le long de la conduite. — Expériences : IE-120-23; IE-120-14. — Enregistrement du fondamental au premier tiers amont et à l'extrémité aval, dans une conduite qui n'est pas horizontale. — Expériences : IE-138-8. — Répartition de l'harmonique 3 le long de la conduite. — Expériences : IE-120-14; IE-121-2. — Enregistrement de l'harmonique 3 à l'extrémité aval et au premier tiers amont, dans une conduite qui n'est pas horizontale. — Expériences : IE-134-9. — Battements. — Expériences : IE-121-5. — Ondes entretenues; clapet automatique. — Expériences : IE-119-7; IE-119-4; IE-121-21. — Moteur hydraulique (*) synchrone.

48. Analyse d'une conduite. — Résonance des divers harmoniques.

Quand une conduite est bien purgée d'air et qu'elle donne une vitesse a bien constante, on peut en faire l'analyse et déterminer la période fondamentale et les divers harmoniques qu'elle donne de préférence.

L'un de nous a indiqué la méthode qu'on peut utiliser dans ce but et qui lui a permis de mettre en évidence les divers harmoniques d'une conduite. On munit celle-ci, à son extrémité aval, d'un petit robinet R entraîné par un moteur M dont on fait varier lentement la vitesse. Le manomètre I branché à côté de ce robinet met en évidence les diverses résonances (*fig. 74*).

Les expériences ont été faites d'abord à l'usine à gaz de Toulouse; la figure 75 représente la résonance du fondamental, les sinusoïdes qui apparaissent à la fin du cliché ont une période correspondant à 14 mm. 5; la seconde représentée en regard occupe 30 mm. 5; on a (*),

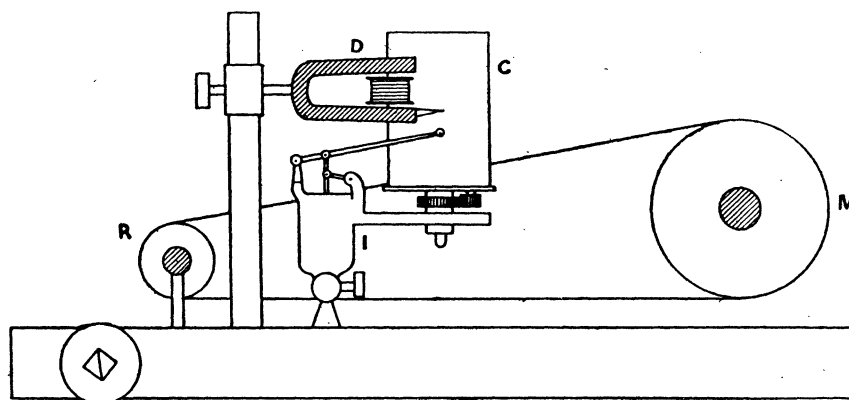
(*) Le chapitre VI est la reproduction des articles publiés par M. C. Camichel dans les numéros des 9, 16 septembre et du 7 octobre 1916 de la *Lumière électrique*.

(*) On remarquera que l'évaluation des longueurs correspondant à la période cherchée et à la seconde se fait dans la même région du graphique; cette précaution est indispensable en raison des variations de vitesse de l'appareil enregistreur; ces variations sont mises en évidence par les sinusoïdes du diapason; exemple : figure n° 26.

T' désignant la période du fondamental :

$$\frac{4 \times L}{aT'} = \frac{4 \times 154,5 \times 30,5}{1,280 \times 14,5} = 1,016 \text{ au lieu de } 1 ;$$

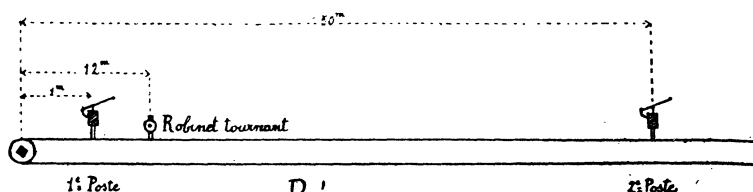
on prend pour a 1,280 mètres, comme l'indique pour la conduite de l'usine à gaz la méthode de la dépression brusque ⁽¹⁾.



*Expérience du Robinet tournant.
Analyse d'une conduite.*

FIG. 74.

Le tuyau présente, au moment de la résonance, un nœud à l'extrémité aval et un ventre à l'extrémité amont.



*Résonances.
Usine à Gaz de Toulouse
Série: UG 80.*

FIG. 74. — Schéma de l'expérience avec les deux postes.

⁽¹⁾ Nous avons pris dans chaque série la valeur de a , résultant de l'expérience de la dépression brusque, au moment où les déterminations sont faites; d'ailleurs les valeurs de a ainsi adoptées sont toujours très voisines de la valeur théorique.

Au moment de la résonance, l'oscillation s'épure et la courbe devient sinusoïdale; la même remarque s'applique aux harmoniques.

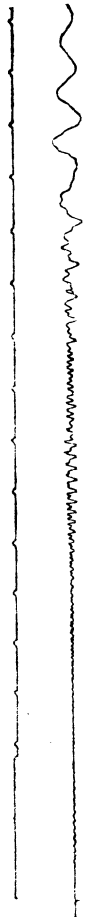


FIG. 75. — Expérience : UG-80-34. Résonance du fondamental.

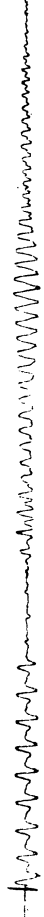
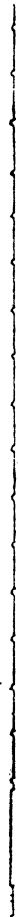


FIG. 76. — Expérience : UG-80-41. Résonance des harmoniques 2, 3, 4. Diagramme pris au 1^{er} poste.



FIG. 76. — Expérience : UG-80-41. 2^e poste.

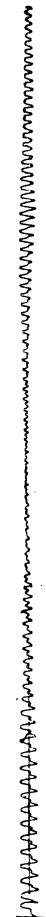


FIG. 77. — Expérience : UG-80-44. Résonance du 5^e harmonique.

La figure 76, 1^{er} poste, représente diverses résonances enregistrées toujours à l'extrémité de la conduite. La ligne d'inscription des secondes étant en haut et la figure étant

parcourue de gauche à droite, on trouve d'abord un premier minimum très net. Pour déterminer la période correspondant à ce minimum, on ne peut faire usage du graphique pris à l'extrémité de la conduite; on a enregistré en même temps la pression en un poste situé à 50 mètres de l'extrémité aval de la conduite (*fig. 76, 2^e poste*). Un contact, qu'on établit au début de l'inscription et qui correspond à un signal visible au commencement des divers graphiques sur la ligne des secondes, permet de faire correspondre entre elles les secondes marquées au premier poste et au deuxième poste. On a, en se servant du deuxième graphique :

$$\theta_1 = \frac{8,5}{36} = \frac{4 \times 154,5}{x \times 1.280};$$

on a : $x = 2,045$ au lieu de 2; θ_2 désignant la période trouvée au deuxième poste. C'est à l'époque 2 secondes environ, que cette résonance se produit.

On a donc :

$$\theta_2 = \frac{2L}{a}.$$

C'est le deuxième harmonique; le tuyau comprend alors un ventre à chaque extrémité et un nœud au milieu.

Le maximum qu'on remarque ensuite dans la figure 76 correspond au troisième harmonique; on trouve en effet que cinq sinusoïdes au voisinage du maximum occupent 21 mm. 7, la seconde occupe 27 mm. 5. On a :

$$\frac{4 \times L}{a \times \theta_3} = \frac{4 \times 154,5 \times 5 \times 27,5}{1.280 \times 21,7} = 3,06 \text{ au lieu de 3,}$$

θ_3 étant la période cherchée.

En prenant pour a la vitesse 1.310 mètres qui est la vitesse théorique on aurait, au lieu de 3,06, 2,98.

On voit donc que le maximum situé à droite sur le graphique (*fig. 76*) correspond bien à l'harmonique 3; on a alors un ventre à la chambre de mise en charge, un nœud au premier tiers amont, un ventre au deuxième tiers aval, et un nœud à l'extrémité aval de la conduite.

Le minimum qui est situé tout à fait à l'extrémité droite de la figure 76 correspond au quatrième harmonique; on a trouvé, en effet, qu'au voisinage de ce minimum 6 sinusoïdes correspondent à 20 mm. 5, une seconde correspondant à la même région à 28 mm. 0, on trouve :

$$\frac{L}{a\theta_4} = \frac{154,5 \times 6 \times 28}{1.280 \times 20,5} = 0,989 \text{ au lieu de 1.}$$

C'est bien le quatrième harmonique. La conduite présente alors trois ventres situés aux deux extrémités et au milieu et deux nœuds intermédiaires.

La figure 77 montre la résonance du cinquième harmonique : 10 périodes au voisinage du maximum correspondent à 25 mm. 3, une seconde correspond à 26 millimètres. On a :

$$\frac{4L}{a\theta_5} = \frac{4 \times 154,5 \times 26}{1,280 \times 2,53} = 4,96 \text{ au lieu de } 5,$$

θ_5 étant la période du cinquième harmonique.

La conduite, quand l'harmonique 5 résonne, présente trois ventres dont un à la chambre de mise en charge, et trois nœuds dont un à l'extrémité aval.

Remarque. — La conduite dont nous venons de parler avait la forme d'une équerre rectangulaire ; le petit côté amont ayant 20 m. 0, la longueur totale étant 154 m. 5. C'est à cette forme simple qu'on doit attribuer la facilité avec laquelle se produisent les divers harmoniques pairs et impairs.

Les divers harmoniques impairs peuvent être mis en évidence, non seulement par la méthode précédente, c'est-à-dire *artificiellement*, mais encore *naturellement*, c'est-à-dire, par exemple, par la simple fermeture d'une vanne : nous reviendrons ailleurs sur ce point.

49. Amplitude des harmoniques impairs.

On doit à MM. de Sparre et Allievi de remarquables travaux sur les phénomènes de résonance ; M. de Sparre (*Houille blanche*, 9 septembre 1907) a étudié, en particulier, le cas suivant :

Il envisage des périodes successives de longueur $\frac{2L}{a}$ et suppose que la fermeture brusque du distributeur donne un coup de bélier $\frac{av_0}{g}$ inférieur à la hauteur de chute y_0 ; dans ces conditions, on ferme le distributeur au début de la première période et on le tient fermé pendant toute cette période ; on ouvre ensuite brusquement le distributeur, au début de la deuxième période, et on le tient ouvert pendant toute la durée de cette période ; on le ferme de nouveau au début de la troisième période et on le laisse fermé pendant toute cette période, etc...

M. de Sparre a démontré que, dans ces conditions, le coup de bélier devient, par suite des résonances, toujours au moins égal à la hauteur de chute.

L'un de nous a pu vérifier expérimentalement ce résultat et en même temps l'étendre en indiquant, non seulement la valeur maximum, mais encore la valeur minimum de la pression et envisager aussi les harmoniques impairs.

Supposons que le régime permanent de résonance soit établi. Cette hypothèse seule étant admise, on peut démontrer que la pression à l'extrémité de la conduite au moment de la résonance varie de la pression atmosphérique P au double de la pression statique, plus la pression atmosphérique, en d'autres termes, varie de

P , distributeur ouvert,

à $P + 2\gamma_0$, distributeur fermé,

P étant la pression atmosphérique.

L'hypothèse du régime permanent se traduit par :

$$\gamma_{2n+1} = \text{constante} = \alpha \quad \gamma_{2n} = \text{constante} = \beta$$

γ_{2n+1} étant la pression pendant la $(2n+1)^{\text{e}}$ période, γ_{2n} étant la pression pendant la $(2n)^{\text{e}}$ période à l'extrémité de la conduite.

La fermeture du distributeur a lieu aux époques impaires :

$$\begin{aligned} \gamma_0 + F_{2n+1} - F_{2n} &= \gamma_0 + F_{2n-1} - F_{2n-2} = \gamma_{2n+1} = \alpha, \\ v_0 - \frac{g}{a}(F_{2n+1} + F_{2n}) &= v_0 - \frac{g}{a}(F_{2n-1} + F_{2n-2}) = 0, \end{aligned} \quad (39)$$

$$\left. \begin{aligned} F_{2n+1} - F_{2n} &= F_{2n-1} - F_{2n-2} \\ F_{2n+1} + F_{2n} &= F_{2n-1} + F_{2n-2} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} F_{2n+1} &= F_{2n-1} = \dots \\ F_{2n} &= F_{2n-2} = \dots \end{aligned} \quad (40)$$

Ecrivons qu'aux époques paires le distributeur est complètement ouvert, il vient :

$$v_0 - \frac{g}{a}(F_{2n} + F_{2n-1}) = v_0 \sqrt{1 + \frac{F_{2n} - F_{2n-1}}{\gamma_0}} \quad (41)$$

en appliquant le théorème de Bernouilli.

Or, le premier membre est nul en vertu des équations (1) et (2), donc :

$$F_{2n} - F_{2n-1} = -\gamma_0 \quad F_{2n} + F_{2n-1} = \frac{av_0}{g},$$

ce qui donne :

$$\left. \begin{aligned} F_{2n} &= \frac{av_0}{2g} - \frac{\gamma_0}{2} \\ F_{2n-1} &= \frac{av_0}{2g} + \frac{\gamma_0}{2} \end{aligned} \right\}$$

et enfin en remplaçant dans :

$$\left\{ \begin{aligned} \gamma_{2n+1} &= \gamma_0 + F_{2n+1} - F_{2n} \\ \gamma_{2n} &= \gamma_0 + F_{2n} - F_{2n-1} \end{aligned} \right.$$

F_{2n+1} et F_{2n} par leurs valeurs, on a :

$$\begin{cases} y_{2n-1} = 2y_0 \\ y_{2n} = 0; \end{cases} \quad (42)$$

donc, pourvu que la relation $y_0 > \frac{w_0}{g}$ soit satisfaite, la résonance du fondamental a pour effet de faire varier la pression à l'extrémité de la conduite de 0 à $2y_0$; la pression statique est doublée quelle que soit l'ouverture du distributeur; nous en verrons plus loin une démonstration directe par le clapet automatique.

La figure 78 représente le résultat de l'expérience qui a été faite à l'Institut électrotechnique de Toulouse sur une conduite en fer ayant la même épaisseur et le

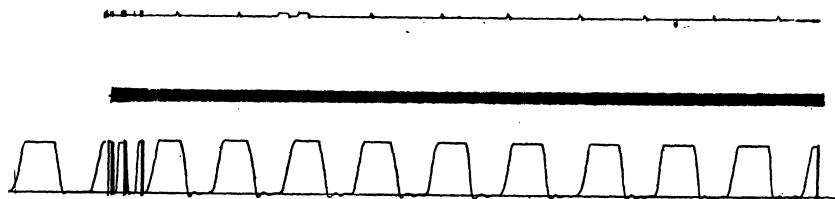


FIG. 78. — Expérience : IE-120-23. Résonance du fondamental par robinet tournant; réglage au tachymètre.

même diamètre que celle de l'usine à gaz déjà signalée, mais ayant comme longueur 186 m. 8 et comme pression statique 17 m. 3 d'eau ⁽¹⁾.

La ligne horizontale inférieure du cliché 78 représente la pression atmosphérique; la ligne médiane représente la pression statique $y_0 = 17$ m. 3; on voit que cette pression est exactement doublée par la résonance.

L'expérience a été faite au moyen d'un robinet tournant; l'ouverture de ce robinet était telle que sa fermeture brusque donnait un coup de bélier inférieur à la pression statique, c'est-à-dire inférieur à $y_0 = 17$ m. 3.

⁽¹⁾ Dans tous les clichés qui suivent, la ligne horizontale inférieure correspond à la pression atmosphérique; la deuxième ligne horizontale correspond à la pression statique dans la conduite 17 m. 3 d'eau; la troisième ligne horizontale, qui n'est pas tracée dans tous les clichés, correspond au double de la pression statique. On trouve également sur certains clichés les centièmes de seconde indiqués par un diapason et les demi-secondes indiquées par un signal actionné par une horloge dont la période était exactement pendant les expériences 1,01 seconde. Enfin quand on prend simultanément deux clichés en des points différents de la conduite, ou correspondant à des phénomènes différents. exemple : figures 96, 97, on établit une correspondance entre les secondes des deux clichés au moyen d'un courant très faible qui est envoyé au début de l'expérience dans les signaux placés aux deux postes.

La vitesse du robinet était réglée par l'observation du tachymètre. Un tour complet du robinet correspondait à une durée de 1,14 seconde, il y avait deux ouvertures par tour, la période des ouvertures et fermetures était donc 0,57 secondes, ce qui correspond à la vitesse a théorique de 1.310 mètres.

En triplant la vitesse du robinet, on a fait apparaître la résonance correspondant à l'harmonique 3; en quintuplant la vitesse du robinet, on a produit la résonance correspondant à l'harmonique 5.

Il faut remarquer que le calcul, qui nous a permis de démontrer le doublement de la pression statique par la résonance du fondamental, s'applique également aux harmoniques impairs.

Considérons, en effet, l'harmonique de rang $2n + 1$; le robinet tournant qui met en évidence cet harmonique fonctionne de la façon suivante : la période de ses ouvertures et fermetures est $\frac{T}{2n + 1}$; soit $T' = \frac{4L}{a} = 2\Theta$ la période fondamentale de la conduite :

Au temps 0 le robinet est complètement ouvert;

Au temps $\frac{T'}{2(2n + 1)}$ le robinet est complètement fermé;

Au temps $2 \frac{T'}{2(2n + 1)}$ le robinet est complètement ouvert;

Au temps $(2n + 1) \frac{T'}{2(2n + 1)} = \frac{T'}{2}$ le robinet est complètement fermé;

Au temps $2(2n + 1) \frac{T'}{2(2n + 1)} = T'$ le robinet est complètement ouvert.

On se trouve donc exactement dans les conditions du calcul précédent.

L'expérience a vérifié complètement qu'il en est ainsi, l'harmonique 3 et l'har-

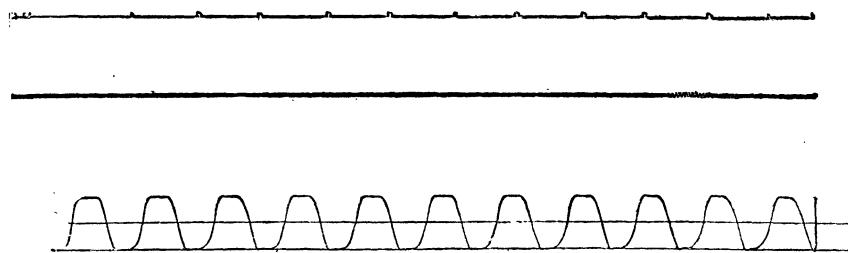


FIG. 79. — Expérience : IE-121-13. Résonance du fondamental par robinet tournant; réglage par minimum de débit.

monique 5 ont donné le même résultat que le fondamental. Les photographies 80 et 81 le montrent sans qu'il soit nécessaire d'ajouter d'autres explications.

L'expérience ne présente pas de grandes difficultés; néanmoins certains harmo-

niques sont plus difficiles à obtenir que d'autres probablement à cause des coudes que renferme la conduite de l'Institut électrotechnique; celle-ci donne difficilement l'harmonique 3 et au contraire très facilement l'harmonique 5.

* Les résonances des clichés 79, 80 et 81 ont été obtenues au moyen d'une pro-

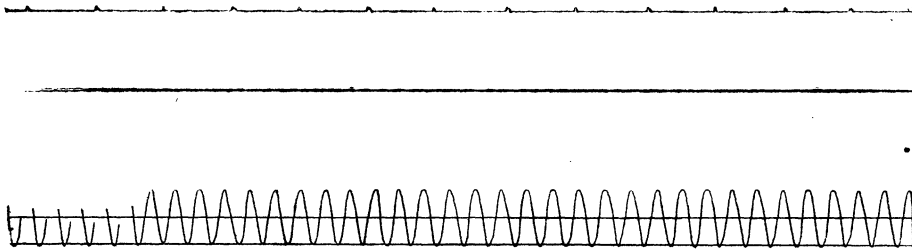


FIG. 80. — Expérience : IE-121-11. Résonance du 3^e harmonique par robinet tournant; réglage par minimum de débit.

priété très intéressante à bien des points de vue : *au moment de la résonance des harmoniques impairs le débit passe par un minimum.*

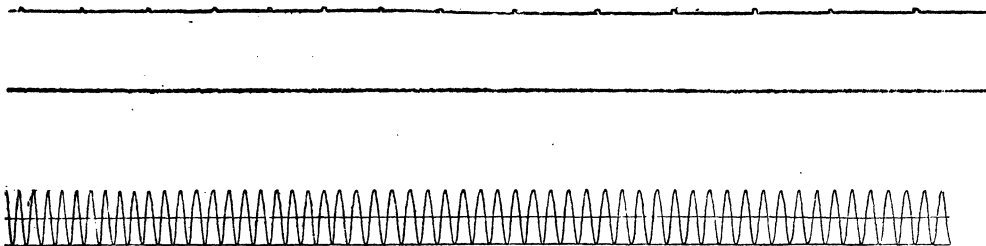


FIG. 81. — Expérience : IE-121-12. Résonance du 5^e harmonique par robinet tournant; réglage par minimum de débit.

Les résonances des harmoniques impairs peuvent être réglées par quatre procédés : 1^o le tachymètre; 2^o la lecture de la pression; 3^o le minimum de débit; 4^o la différence de phase des pressions en divers postes sur la conduite (voir plus loin). Le troisième procédé (minimum de débit) est de beaucoup le plus précis.

50. Minimum de débit au moment de la résonance.

Il paraît utile d'indiquer comment on peut vérifier expérimentalement ce minimum de débit.

La conduite étudiée était en fer, elle avait 105 m. 24 de longueur, une épaisseur constante d'un bout à l'autre de 5 millimètres et 80 millimètres de diamètre sur toute sa longueur. On l'a munie à son extrémité d'un robinet entraîné par un moteur électrique dont la vitesse pouvait varier très lentement; pour chaque vitesse déterminée au tachymètre sur le robinet lui-même, on a mesuré le débit par minute. Le tableau suivant résume une expérience relative à la résonance du fondamental.

La courbe est représentée par la figure 82.

En adoptant une vitesse dans la conduite de 1.300 mètres par seconde, la résonance doit correspondre à un nombre d'ouvertures par seconde égal à $\frac{1.300}{4 \times 105,24} = 3,09$ par seconde, c'est-à-dire à un nombre de tours du robinet égal à 1,55, puisque le robinet lui-même s'ouvre deux fois par tour.

Minimum de débit.

Résonance du fondamental.

NOMBRE DE TOURS DU ROBINET PAR SECONDE	DÉBIT PAR MINUTE
	Centimètres cubes.
1,153	5 755
1,320	5 150
1,320	5 055
1,425	3 105
1,425	3 255
1,480	1 550
1,560	1 240
1,630	1 180
1,570	1 050
1,630	1 410
1,640	1 330
1,670	1 870
1,690	2 130
1,720	2 437
1,740	2 987
1,750	3 950
1,800	4 500

Le minimum de débit sur la courbe correspond à un nombre de tours de robinet par seconde égal à 1,57.

On voit donc que la concordance est très satisfaisante.

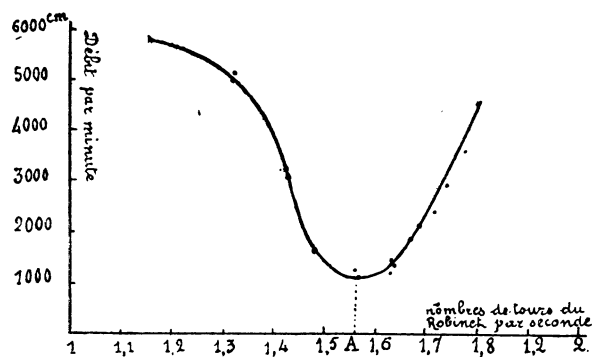


FIG. 82. — Expérience : IE-126. Minimum de débit; résonance du fondamental.

La même expérience a été répétée pour l'harmonique 3 sur la même conduite; elle a donné les chiffres suivants :

Minimum de débit.

Résonance de l'harmonique 3.

NOMBRE DE TOURS DU ROBINET PAR SECONDE	DÉBIT PAR MINUTE
	Centimètres cubes.
4,150	5 600
4,400	4 777
4,430	3 985
4,550	3 337
4,530	2 912
4,550	2 790
4,570	2 837
4,600	2 620
4,650	2 585
4,680	2 930
4,700	3 500
4,780	4 530
4,830	5 280
4,850	5 127

La courbe est représentée par la figure 83.

Le minimum de débit est indiqué en A, il correspond à un nombre de tours par seconde du robinet de 4,63.

Or, la résonance doit correspondre à

$$\frac{3 \times 1.300}{4 \times 105,24} = 9,27 \text{ p. s. ,}$$

c'est-à-dire à un nombre de tours du robinet de 4,63 par seconde, exactement le même chiffre que donne la courbe de minimum de débit.

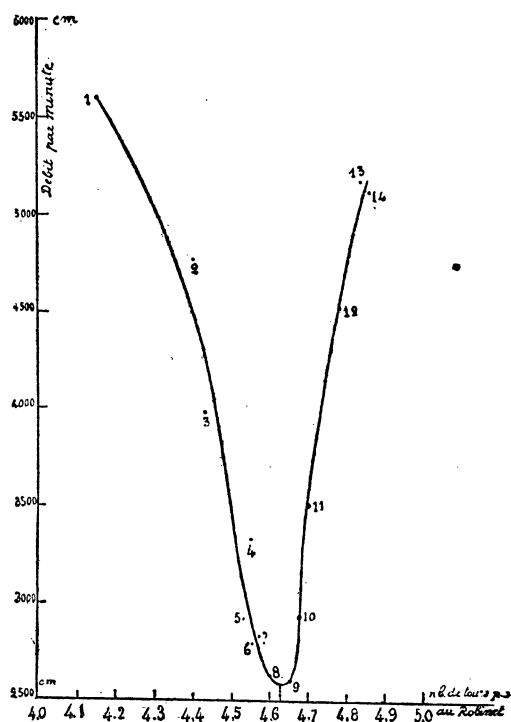


FIG. 83. — Expérience : IE-126. Minimum de débit; résonance du 3° harmonique.

51. Répartition du fondamental le long de la conduite.

La comparaison de la conduite à un tuyau sonore nous indique que, pendant la résonance du fondamental, la phase pour tous les points de la conduite sera la même. L'expérience est facile à réaliser; on dispose deux manomètres, l'un à l'extrémité aval, l'autre au premier tiers amont de la conduite; on fait résonner le fonda-

mental; en visant à la fois les équipages mobiles des deux manomètres, on vérifie que leur différence de phase est nulle.

On peut trouver la répartition de la pression au moment de la résonance du fondamental.

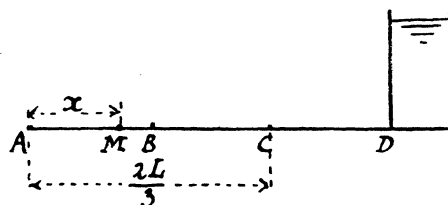


FIG. 84.

Figurons la conduite ABCD (fig. 84) : D est l'extrémité amont, A l'extrémité aval. Nous avons pour la valeur de la pression en A :

$$y_{2n+1} = y_0 + F_{2n+1} - F_{2n}.$$

D'après ce que nous avons démontré, la fonction a les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} \text{pour } t \text{ compris entre : } & \begin{cases} 0 \text{ et } \frac{2L}{a}, \\ \frac{4L}{a} \text{ et } \frac{6L}{a}, \\ \frac{8L}{a} \text{ et } \frac{10L}{a}; \end{cases} & F(t) = \frac{av_0}{2g} + \frac{y_0}{2}, \\ \\ \text{pour } t \text{ compris entre : } & \begin{cases} \frac{2L}{a} \text{ et } \frac{4L}{a}, \\ \frac{6L}{a} \text{ et } \frac{8L}{a}. \end{cases} & F(t) = \frac{av_0}{2g} - \frac{y_0}{2}, \end{aligned}$$

D'ailleurs, en un point quelconque M de la conduite situé à une distance x de l'extrémité aval, on a :

$$y = y_0 + F\left(t - \frac{x}{a}\right) - E\left(t - \frac{2L}{a} + \frac{x}{a}\right).$$

Étudions par exemple le graphique des pressions en C, premier tiers amont. Le manomètre est placé en C :

$$x = AC = \frac{2L}{3},$$

on a :

$$\text{époque } \frac{2L}{a}, y = y_0 + F\left(\frac{2L}{a} - \frac{2L}{3a}\right) - F\left(\frac{2L}{a} - \frac{2L}{a} + \frac{2L}{3a}\right) = y_0 \quad (43)$$

$$\text{époque } \frac{3L}{a}, y = y_0 + F\left(\frac{3L}{a} - \frac{2L}{3a}\right) - F\left(\frac{3L}{a} - \frac{2L}{a} + \frac{2L}{3a}\right) = 0 \quad (44)$$

$$\text{époque } \frac{4L}{a}, y = y_0 + F\left(\frac{4L}{a} - \frac{2L}{3a}\right) - F\left(\frac{4L}{a} - \frac{2L}{a} + \frac{2L}{3a}\right) = y_0 \quad (45)$$

$$\text{époque } \frac{5L}{a}, y = y_0 + F\left(\frac{5L}{a} - \frac{2L}{3a}\right) - F\left(\frac{5L}{a} - \frac{2L}{a} + \frac{2L}{3a}\right) = 2y_0. \quad (46)$$

Le cliché 86 donne l'inscription de la pression en c ; au moyen du graphique 86

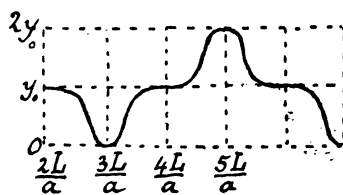


FIG. 85.

et du graphique correspondant pris à l'extrémité aval, on peut, en distinguant les secondes par un signal, vérifier la concordance des phases.



FIG. 86. — Expérience : IE-126-23. Résonance du fondamental ; 1^{er} tiers amont.

52. Enregistrement du fondamental au premier tiers amont et à l'extrémité aval, dans une conduite qui n'est pas horizontale.

L'expérience a été faite comme précédemment. La pression statique au premier tiers amont était 10 m. 60 et la pression statique à l'extrémité aval était 15 m. 70. On a réglé la résonance du fondamental et on a obtenu les deux graphiques correspondant à la figure 89. On voit dans le graphique de l'extrémité aval que la pression statique est doublée par le phénomène de résonance comme précédemment. Au

premier tiers amont la courbe de résonance correspond aux mêmes amplitudes qu'à l'extrémité inférieure; il en résulte que la pression devient négative, comme l'indique la figure.

53. Répartition de l'harmonique 3 le long de la conduite supposée horizontale.

La répartition de cet harmonique est évidente; il présente un nœud en A et en C et un ventre en B et en D.

La pression au deuxième tiers aval B sera constante et égale à y_0 dans le cas d'une conduite horizontale.

Les formules l'indiquent également.

On a en B :

$$y_b = y_0 + F\left(t - \frac{L}{3a}\right) - F\left(t - \frac{2L}{a} + \frac{L}{3a}\right) = y_0, \quad (47)$$

puisque la fonction F a $\frac{4L}{3a}$ comme période.

Le cliché 87 représente l'inscription de la pression au deuxième tiers aval au moment de la résonance de l'harmonique 3.

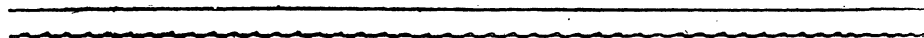


FIG. 87. — Expérience : IE-120-14. Résonance du 3^e harmonique au 2^e tiers aval.

Prenons le premier tiers amont C. Les surpressions en A et C seront décalées d'une demi-période, c'est-à-dire constamment égales et de signes contraires.

La pression en A est :

$$y_a = y_0 + F(t) - F\left(t - \frac{2L}{a}\right); \quad (48)$$

en C :

$$y_c = y_0 + F\left(t - \frac{2L}{3a}\right) - F\left(t - \frac{2L}{a} + \frac{2L}{3a}\right). \quad (49)$$

Or :

$$F(t) - F\left(t - \frac{2L}{a}\right) = -F\left(t - \frac{2L}{3a}\right) + F\left(t - \frac{2L}{a} + \frac{2L}{3a}\right), \quad (50)$$

toujours pour la même raison.

Donc :

$$\begin{cases} y_A = y_0 + \delta. \\ y_C = y_0 - \delta. \end{cases}$$

Pendant la résonance de l'harmonique 3, l'amplitude de la surpression est donc la même au premier tiers amont et à l'extrémité aval de la conduite.

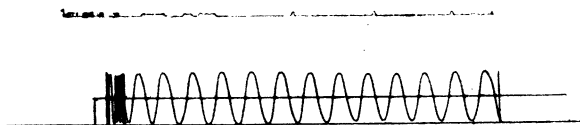


FIG. 88. — Expérience : IE-121-12. Résonance du 3^e harmonique au 1^{er} tiers amont.

Le décalage d'une demi-période des pressions en A et C se vérifie aisément en observant, au moment de la résonance de l'harmonique 3, les équipages mobiles des deux manomètres placés en A et C ; c'est même un procédé qui permet de

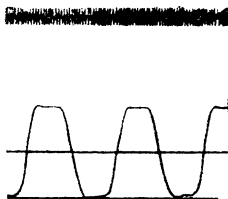


FIG. 89. — Expérience : IE-134-8. Résonance du fondamental dans une conduite qui n'est pas horizontale; diagramme pris à l'extrémité aval.

régler avec précision la vitesse du robinet tournant pour obtenir la résonance de cet harmonique.

Le cliché 88 représente l'inscription de la pression en C au premier tiers amont.

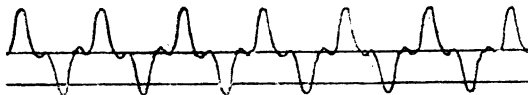


FIG. 89. — Expérience : IE-134-8. Diagramme pris au 1^{er} tiers amont.

La pression est sensiblement doublée par la résonance comme à l'extrémité aval.

Le graphique 88 montre la nécessité du renforcement des conduites au premier tiers amont, lorsque l'harmonique 3 a une tendance marquée à se produire.

54. Enregistrement de l'harmonique 3 à l'extrémité aval et au premier tiers amont, dans une conduite qui n'est pas horizontale.

Les figures 90 indiquent les résultats obtenus. La pression statique était à l'extrémité aval 15 m. 70 et au premier tiers amont 10 m. 60. On voit encore, comme dans le cas précédent, que la courbe de résonance au premier tiers donne les

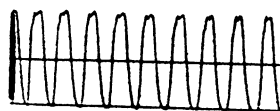


FIG. 90. — Expérience : IE-134-9. Résonance du 3^e harmonique dans une conduite qui n'est pas horizontale; diagramme pris à l'extrémité aval.

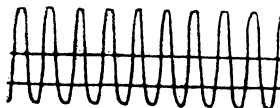


FIG. 90. — Expérience : IE-134-9. Diagramme pris au 1^{er} tiers amont.

mêmes amplitudes qu'à l'extrémité inférieure. D'où pression négative au premier tiers amont; les résultats que donne la théorie sont par conséquent complètement vérifiés.

Les pressions inférieures à la pression atmosphérique qui apparaissent ainsi pendant la résonance rendent l'expérience assez délicate; elles ont pour effet de produire des rentrées et des dégagements d'air, et au bout de peu de temps la conduite doit de nouveau être purgée. Il faut donc faire l'expérience rapidement.

55. Battements.

Le réglage du robinet tournant se fait en modifiant convenablement la vitesse du moteur électrique qui l'entraîne; malgré le nombre considérable de plots du rhéostat employé, il est difficile de régler la vitesse exactement; il en résulte qu'on a dans la conduite, au voisinage de la résonance, deux oscillations de périodes voisines : l'harmonique pour lequel on fait le réglage, et la perturbation rythmique provoquée par la rotation du robinet.

Il en résulte des battements qui sont très gênants et qui pourraient, si l'on n'y

prenait garde, masquer complètement le phénomène du doublement de la pression statique au moment de la résonance des harmoniques impairs, ou bien donner des valeurs légèrement erronées de la vitesse a .

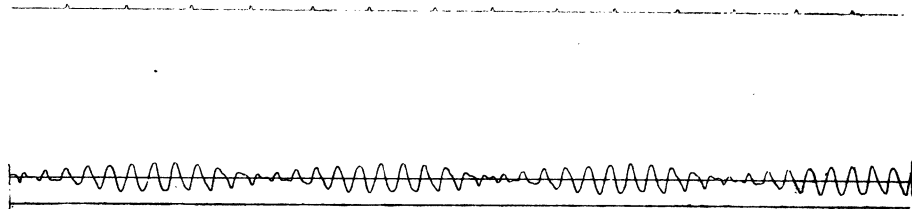


FIG. 92. — Expérience IE-121-15. Battements entre le 3^e harmonique de période 0^s,19, et la période 0^s,21; inscription au premier tiers amont.

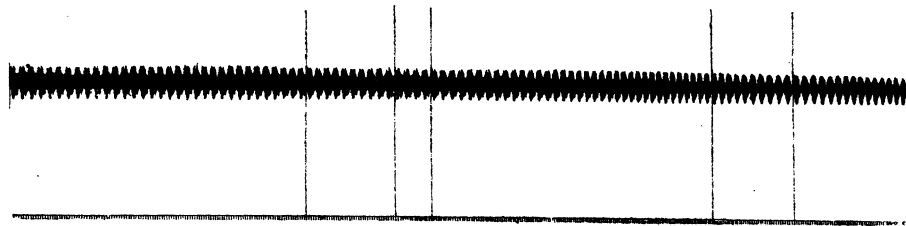


FIG. 93. — Expérience : IE-121-15. Le même battement enregistré à l'extrémité aval sur un cylindre tournant plus lentement.

Les clichés 92 et 93 représentent le battement du troisième harmonique,

$$\text{période } 0^s,19 = \frac{0^s,57}{3} = \frac{4 \times 186,8}{3 \times 1.310}$$

et de la période 0,21 seconde.

La période résultante est : 1,9 seconde.

Les clichés 79 et 80 ont été pris simultanément à l'extrémité aval et au premier tiers amont de la conduite; les demi-secondes sont marquées en regard.

L'inscription de la figure 80 a été faite plus lentement que celle de la figure 77.

56.

Ondes entretenues. Clapet automatique.

Les coups de bélier de fermeture ou d'ouverture s'amortissent, ceux-ci plus rapidement que les premiers. Il peut y avoir intérêt à produire, dans une conduite, des

oscillations entretenues : on y arrive facilement au moyen d'un clapet ou robinet automatique.

La figure 94 représente un robinet automatique; il est constitué par une soupape entièrement métallique (*) fixée à un levier horizontal. Celui-ci peut être plus ou

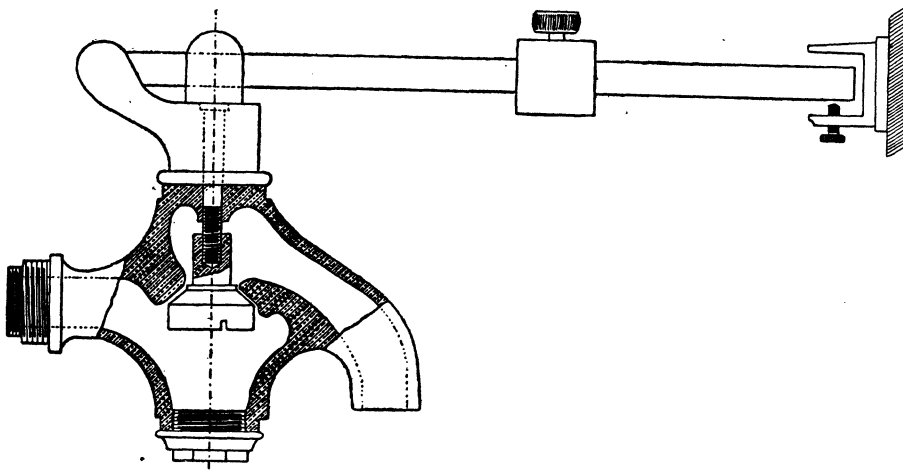


FIG. 94. — Robinet automatique. On distingue facilement sur le dessin le contre-poids et le réglage de la course de la soupape.

moins chargé, et sa course est limitée vers le bas par un arrêt réglable. Tous ces détails sont visibles sur la figure 94.

En appuyant le levier sur l'arrêt et le ramenant brusquement vers le haut, on produit un coup de bélier brusque dont la valeur $\frac{av_0}{g}$ doit être inférieure à γ_0 . Au moyen d'une vis de réglage visible sur le schéma, on limite la course de la soupape et par conséquent son ouverture.

La figure 95 représente un clapet automatique; la soupape également entièrement métallique et exactement rodée sur son siège est guidée verticalement comme le montre le dessin; elle est chargée à sa partie supérieure au moyen de rondelles de plomb serrées entre deux plateaux. La position du plateau inférieur permet de faire varier la course du clapet et, par conséquent, le débit. On réalise avec cet appareil comme avec le précédent la condition $\frac{av_0}{g} < \gamma_0$.

Les figures 96 et 97 permettent de se rendre compte du fonctionnement du robinet automatique.

(*) L'interposition d'un cuir ou d'un caoutchouc suffit pour augmenter notablement la période, comme si un réservoir d'air avait été placé à l'extrémité de la conduite.

Les deux clichés de la figure 96 représentent l'expérience suivante :

On abaisse à la main le levier du robinet automatique et on l'amène contre son arrêt; on attend que les variations de pression, provenant du coup de bélier d'ouverture, soient complètement amorties; on laisse aller le levier, le robinet se ferme, revient sur lui-même et prend un mouvement alternatif. Les surpressions et dépressions augmentent, comme l'indique le cliché, et, quand le régime permanent est établi, la pression varie de 0 à $2\gamma_0$.

Le diagramme obtenu donne exactement le même graphique que la résonance du fondamental obtenue au moyen du robinet tournant (*fig. 78 et 79*).

La période du clapet est $\frac{4L}{a}$. La mesure de cette période permet de suivre la purge de la conduite : à mesure que l'air est chassé le mouvement du clapet s'accélère et, quand le clapet donne la période 0,57 seconde, on peut considérer que la conduite est complètement purgée. Toutefois, il est nécessaire de limiter la course du clapet; quand le coup de bélier $\frac{av_0}{g}$ dépasse γ_0 , on ne se trouve plus dans les conditions que nous avons supposé réalisées; la période du clapet augmente alors légèrement avec l'amplitude de la course du robinet.

En voici un exemple :

La course du robinet était, dans cette expérience, réglée par une cale qu'on éloignait pour augmenter l'ouverture du robinet.

l désignant la distance de l'axe de la soupape à cette cale, on a le tableau suivant :

$l = 97 \text{ mm. } 5$	période : 0 ^s ,564;
$l = 101 \text{ mm. } 5$	période : 0 ^s ,565 ⁽¹⁾ ;
$l = 105 \text{ mm. } 5$	période : 0 ^s ,584.

Le clapet automatique est en somme un bélier ordinaire, avec cette différence essentielle qu'il fonctionne, la conduite étant entièrement purgée.

Nous laisserons entièrement de côté, dans ce travail, le fonctionnement du clapet automatique sur une conduite renfermant des réservoirs d'air. C'est une question sur laquelle nous reviendrons.

L'enregistrement des mouvements de levier permet de se rendre compte du fonctionnement du robinet automatique.

Le robinet et le clapet s'ouvrent et se ferment sous l'influence des variations de pression dans la conduite; on peut dire qu'ils sont synchrones avec la conduite, c'est-à-dire que leur période est égale à celle du fondamental de la conduite.

La comparaison des deux figures 96, où les secondes sont distinguées par un

(¹) Le coup de bélier initial est alors égal à γ_0 .

signal qu'on voit à gauche, c'est-à-dire au début du cliché, montre que c'est pendant la fermeture que la pression devient $2\gamma_0$; elle est égale à la pression atmosphérique quand le clapet est ouvert. L'écoulement de l'eau qui entretient le mouvement se produit au moment où le clapet s'ouvre.

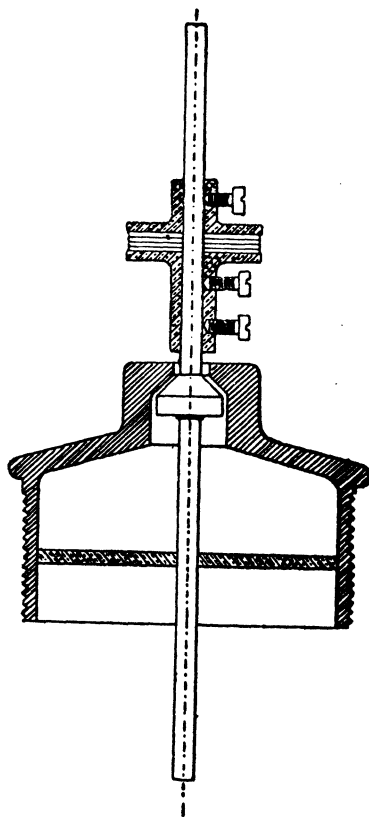


FIG. 95. — Clapet automatique. On distingue facilement sur le dessin le poids chargeant la soupape et le réglage de la course de la soupape.

Le doublement de la pression se produit quel que soit le débit, pourvu que la relation $\gamma_0 > \frac{av_0}{g}$ soit réalisée.

On l'a vérifié de la façon suivante :

On a mesuré le débit en maintenant le clapet ouvert d'une façon permanente et jaugeant l'eau écoulee; on a recommencé le même jaugeage en augmentant plus ou moins la course du clapet. Voilà quelques chiffres, les débits ont été :

Durée :	Eau écoulée :
En 100 secondes	16 ^k ,480
» »	38 ^k ,600
» »	57 ^k ,000

Dans ces trois expériences, la pression a toujours été exactement doublée; c'est-à-dire qu'elle a varié de la pression atmosphérique (ouverture du clapet) à la pression atmosphérique + $2\gamma_0$ (fermeture du clapet).

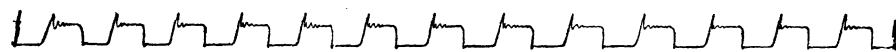


FIG. 96. — Expérience : IE-119-7. Enregistrement du mouvement du levier du robinet automatique; l'examen de l'enregistrement du signal permettra d'établir la correspondance de ce graphique et du suivant; il suffira pour cela d'examiner la perturbation inscrite à gauche de la figure.

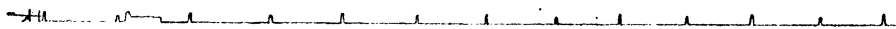


FIG. 96. — Expérience : IE-119-7. Fonctionnement du robinet automatique, à partir du début de l'expérience; diagramme des pressions à l'extrémité aval.

La vitesse limite est :

$$v_0 = \frac{g\gamma_0}{a} = 0 \text{ m. } 132;$$

la section de la conduite étant 50 centimètres carrés, on a comme débit limite :

$$13,2 \times 50 \times 100^{\text{sr}} = 66^{\text{kg}} \text{ pour 100 secondes.}$$

Le débit qu'il ne faut pas dépasser est donc 66 kilogrammes en 100 secondes.

Les deux clichés 97 montrent le fonctionnement du clapet automatique, quand le régime permanent est établi.

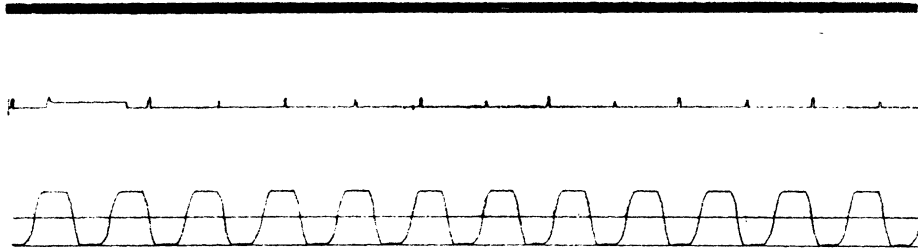


FIG. 97. — Expérience : IE-119-4. Fonctionnement du robinet automatique; diagramme des pressions à l'extrémité aval; le régime permanent étant établi (ondes entretenues).



FIG. 97. — Expérience : IE-119-4. Enregistrement du mouvement du levier du robinet automatique dans la même expérience.

Enfin, le cliché 98 donne une démonstration très nette des propriétés précédemment indiquées.

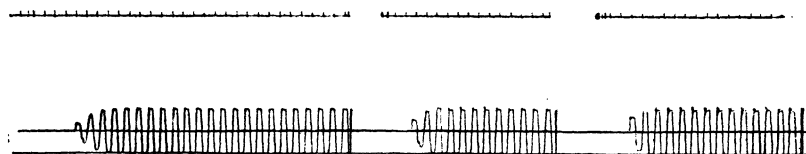


FIG. 98. — Expérience : IE-121-21. Démonstration expérimentale des propriétés du clapet automatique; constance de la période, doublement de la pression quel que soit le débit, pourvu que l'on ait : $\frac{dv_0}{g} > y_0$.

Dans la première expérience, enregistrée à gauche du cliché 98, on a une course du clapet donnant un coup de bélier initial de 5 m. 86; dans la seconde, on a augmenté la course de façon à rendre le coup de bélier initial égal à 9 m. 34; dans la troisième, le coup de bélier initial est 11 m. 98; le doublement de la pression se

produit dans chaque cas d'une façon tout à fait rigoureuse et la période est constante.

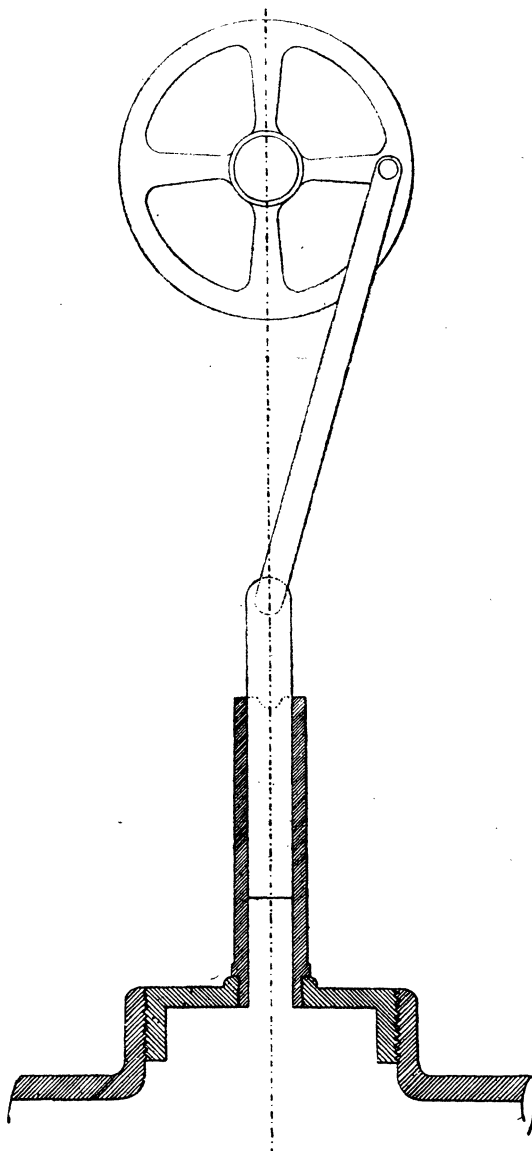


FIG. 99. — Schéma du moteur synchrone.

La pression statique $\gamma_0 = 17 \text{ m. } 3$ correspond à $6 \text{ mm. } 5$.

EXPÉRIENCE	COUP DE BÉLIER INITIAL sur le graphique.	COUP DE BÉLIER INITIAL EN MÈTRES D'EAU	PÉRIODE	LA PRESSION VARIE
1	2 ^{mm} ,2	$\frac{17,3 \times 2,2}{6,5} = 5^m,86$	0 ^s ,57	de 0 à 2 × 17 ^m ,3
2	3 ^{mm} ,5	$\frac{17,3 \times 3,5}{6,5} = 9^m,34$	0 ^s ,575	de 0 à 2 × 17 ^m ,3
3	4 ^{mm} ,5	$\frac{17,3 \times 4,5}{6,5} = 11^m,98$	0 ^s ,57	de 0 à 2 × 17 ^m ,3

57. Moteur hydraulique synchrone.

Le clapet automatique peut commander un moteur; la figure 99 indique le croquis d'une pareille machine.

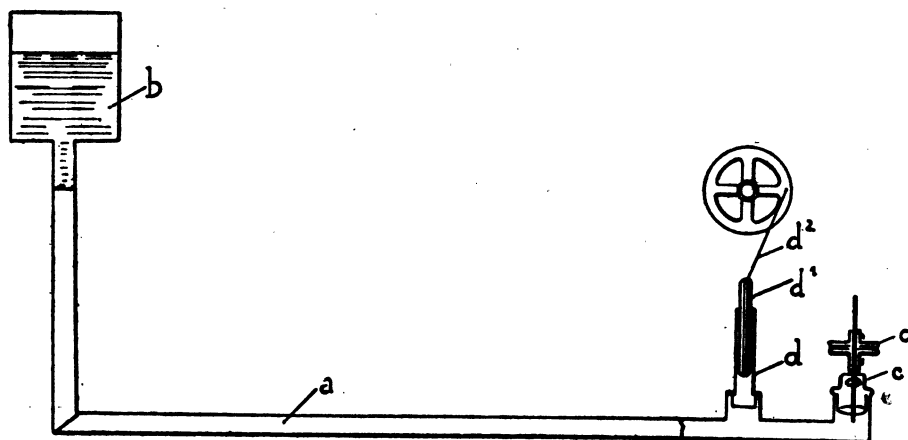


FIG. 100. — Schéma du montage du moteur synchrone : *a* conduite; *b* chambre de mise en charge; *c* clapet automatique; *d* moteur synchrone.

Elle est constituée par un simple piston plein actionnant une manivelle.

La figure 100 indique le schéma du montage : une chambre de mise en charge *b*, une conduite *a*, le clapet automatique est placé en *c*; quant au moteur, il est figuré

en d d' d'' ; pour le mettre en marche on fait tourner la manivelle d'' de façon à synchroniser son mouvement avec celui du clapet; on arrive ainsi à l'accrocher de la même façon que les moteurs synchrones électriques.

On peut objecter, à l'emploi des coups de bélier dans les moteurs hydrauliques et turbines, la faible vitesse qui en résulte pour ces machines, en raison de la longueur L des conduites reliée à la période T' des moteurs par la relation $T' = \frac{4L}{a}$ et dire que ces moteurs ne sont pas conformes à l'évolution actuelle des machines hydrauliques et autres dont on cherche à augmenter de plus en plus la vitesse. Il n'en est rien, car il est possible, au moyen d'une poche d'air de volume suffisant, de découper dans une conduite un tronçon de la longueur que l'on veut : les réflexions des ondes, au lieu de se produire sur la chambre de mise en charge, se font sur cette poche d'air. Il en résulte une répartition linéaire des surpressions le long de la conduite, condition avantageuse pour la protection de celle-ci. Toutefois il faut reconnaître que les variations rythmiques de la pression peuvent altérer à la longue le métal et que, sous la forme où nous l'avons décrit, le moteur hydraulique synchrone ne paraît pas susceptible d'applications pratiques immédiates, mais il n'est pas impossible que l'avenir ne modifie certains points de vue à ce sujet.

DEUXIÈME PARTIE

CHAPITRE VII

Conduites à caractéristiques multiples. — Représentation des phénomènes au moyen d'une vitesse moyenne.

SOMMAIRE : Vitesse moyenne de propagation dans une conduite à caractéristiques variables; application aux conduites de Soulom. — Nomenclature des épaisseurs de la conduite P_3 . — Nomenclature des épaisseurs de la conduite C_4 . — Emploi d'une vitesse moyenne a pour l'étude du coup de bélier de fermeture au voisinage du distributeur dans une conduite à caractéristiques variables. — Étude par les équations d'Allievi : accord de l'expérience et du calcul effectué en prenant une vitesse a moyenne. — Conduite C_4 de Soulom; tableau des valeurs de la fonction $\frac{a^2 \psi^2(t)}{g}$ de l'équation d'Allievi. — Calculs relatifs au diagramme US- C_4 -56-4 par les formules d'Allievi. — Méthode de M. de Sparre. — Calculs relatifs au diagramme US- C_4 -56-4 par les formules simplifiées de M. de Sparre. — Calcul en un tronçon de la conduite C_4 , pour le diagramme US- C_4 -56-8. — Indications sur les graphiques calculés par les méthodes précédentes : US- C_4 -51-5; US- C_4 -56-8; US- C_4 -56-7; US- C_4 -55-4; US- C_4 -54-7; US- C_4 -56-4; US- C_4 -55-3; US- C_4 -54-5; US- C_4 -54-1; US- C_4 -52-9; US- C_4 -52-8; US- C_4 -55-2; US- C_4 -56-1; US- C_4 -55-1. — Transmission du coup de bélier le long de la conduite; calcul avec une vitesse a moyenne. — Calcul en un tronçon de la conduite C_4 pour le diagramme des pressions au poste de Pau; expériences : US- C_4 -56-4; US- C_4 -56-5; US- C_4 -56-7; US- C_4 -56-8. — Diagrammes des pressions à l'amont du Venturi : US- C_4 -55-2; US- C_4 -55-3; US- C_4 -55-4. — Vérification expérimentale de la formule (34) relative à la répartition des maxima de pression. — Coups de bélier d'ouverture; calcul avec une vitesse a moyenne; expériences : US- C_4 -56-9; US- C_4 -56-10; US- C_4 -52-14.

58. Vitesse moyenne de propagation dans une conduite à caractéristiques variables. — Application aux conduites de Soulom.

Les conduites à caractéristiques variables sur lesquelles nous avons fait des expériences sont les conduites P_3 et C_4 de l'usine de Soulom ⁽¹⁾; on trouvera, chapitre 1^{er}, leur description sommaire; les figures 20 et 21 représentent leur profil en long. Les tableaux ci-joints donnent les épaisseurs de leurs divers tronçons :

(1) C. Camichel, D. Eydoux et M. Gariel, *C. R.*, T. 165, pp. 548 et 626.

Nomenclature des épaisseurs de la conduite C₁.

(DIAMÈTRE INTÉRIEUR : 810 m/m).

N° des TRONÇONS	ÉPAIS- SEUR	LONGUEUR APPLICABLE	LONGUEUR TOTALE par épaisseurs.	OBSERVATIONS	VALEURS DE a CALCULÉES d'après la formule d'Allievi.	$(t) = \frac{l}{a}$
2	20	4,70				
7 bis	20	12,50				
7	20	11,62				
8	20	3,64				
8 bis	20	3,64	36,10 (20)	Origine aval du		
Venturi 9				Venturi à 36 ^m , 10.		
et 9 bis	20	10,21	10,21 (20)	Diamètre moyen		
10	20	18,46		sur le Venturi: 610.		
11	20	18,46				
12	20	13,25	50,17	96,48	1198	0,0805
13	22	13,59	13,59 (22)	sous la route.	1215	0,0112
14	19	11,88	11,88 (19)		1188	0,0100
»	18	5,90				
15	18	14,83	20,73 (18)		1178	0,0176
16	17	18,47	18,47 (17)		1165	0,0159
17	16	18,47				
18	16	1,90	20,37 (16)		1155	0,0177
19	15	18,46	18,46 (15)		1140	0,0162
20	14	18,46	18,46 (14)		1120	0,0165
21	13	17,61				
22	13	6,00	23,61 (13)		1105	0,0214
	12	12,46				
23	12	12,46	24,92 (12)		1090	0,0229
	11	6,00				
24	11	18,47	24,47 (11)		1070	0,0229
25	10	18,46				
26	10	12,46	30,92 (10)		1055	0,0293
	9	6,00				
27	9	18,46				
28	9	1,80	26,26 (9)		1030	0,0255
29	8	18,46	18,46 (8)		1000	0,0185
30	7	18,47				
31	7	15,24				
32	7	17,63				
33	7	18,47				
34	7	10,50				
35	7	18,44				
36	7	18,46				
37	7	18,47				
38	7	9,60				
39	7	12,00				
40	7	12,00	169,28 (7)		962	0,1760
TOTAL			536,36			T = 0,5021
<p>Vitesse moyenne : $a = \frac{L}{T} = \frac{536,36}{0,5021} = 1.068 \text{ m/s.}$</p>						

Considérons une conduite à caractéristiques variables.

Pour chaque tronçon de longueur l_i on peut déterminer la vitesse de propagation a_i , en appliquant la formule (5) de M. Allievi, chapitre II. On obtient ainsi le temps θ_i que met l'onde pour parcourir la longueur l_i de ce tronçon. Si l'on désigne par T le temps mis par l'onde pour aller du distributeur à la chambre d'eau, T est donné par la formule :

$$T = \sum \frac{l_i}{a_i} \text{ en posant} \quad (51)$$

$$L = \sum l_i. \quad (52)$$

La vitesse moyenne a est donnée par la formule :

$$a = \frac{L}{T} = \frac{\sum l_i}{\sum \frac{l_i}{a_i}}. \quad (53)$$

On trouve ainsi pour la conduite P_3 :

$$a = 949 \text{ mm/s}, \quad T = 0,365$$

et pour la conduite C_4 :

$$a = 1068 \text{ m/s}, \quad T = 0,502.$$

Nous verrons au chapitre suivant comment la méthode de la dépression brusque permet de déterminer la vitesse a expérimentalement.

59. Emploi d'une vitesse moyenne a pour l'étude du coup de bélier de fermeture au voisinage du distributeur dans une conduite à caractéristiques variables.

Nous étudierons dans ce chapitre les diagrammes qui ont été relevés immédiatement avant le robinet-vanne de la turbine, c'est-à-dire dans une section très voisine du distributeur.

Afin de ne pas compliquer immédiatement la question, nous nous en tiendrons aux ouvertures pour lesquelles la perte de charge dans la conduite est d'un ordre tout à fait négligeable. Ainsi qu'on peut s'en rendre compte sur les diagrammes, jusqu'à des ouvertures de l'ordre de 72 mm. la perte de charge ne dépasse guère 1 mètre à 1 m. 25, soit 1/2 % de la chute. Nous avons d'ailleurs étudié dans le chapitre IV le cas des débits plus importants et l'influence de la perte de charge.

Ceci posé, nous appliquerons tout d'abord aux diagrammes relevés la théorie d'Allievi en supposant la conduite formée d'un seul tronçon d'épaisseur constante, ce qui conduit à admettre une vitesse de propagation constante et égale, nous l'avons vu, à 1.068' mètres/secondes. Ensuite, et afin de tenir compte des variations d'épaisseur, nous supposerons la conduite divisée en deux tronçons et même trois tronçons et appliquerons à ce cas la méthode de M. de Sparre.

60. Étude par les équations d'Allievi (1) : Accord de l'expérience et du calcul effectué en prenant une vitesse a moyenne.

Afin que l'on puisse suivre aisément les calculs relatifs aux divers graphiques, nous rappellerons d'abord la méthode à suivre pour le calcul des coups de bélier d'après M. Allievi :

Soit y la valeur de la pression en mètres d'eau au voisinage de la vanne de fermeture au temps t ;

y_0 la valeur de cette même pression au temps 0, c'est-à-dire à l'instant où la vanne encore immobile commence son mouvement ;

v_0 la vitesse initiale de l'eau dans la conduite en mètres/secondes, au voisinage du distributeur ;

$\psi(t)$ le rapport à l'instant t (c'est-à-dire pour l'ouverture de la vanne au temps t), entre la section variable s de l'orifice d'écoulement et la section constante S de la conduite ;

L la longueur de la conduite ;

a la vitesse de propagation de la perturbation définie, comme nous l'avons dit au chapitre précédent.

On se propose de calculer la valeur de y pour une valeur quelconque de t . Nous avons déjà indiqué, chapitre III, comment on opère ; reprenons, avec quelques détails, cette question :

Il faut d'abord pour cela diviser le temps t en intervalles de $\frac{2L}{a}$. On trace ensuite, d'après le calcul indiqué ci-dessous, le diagramme du coup de bélier dans le premier intervalle de temps $\frac{2L}{a}$, puis dans le second, puis dans le troisième, et ainsi de suite de proche en proche.

Voici comment se fait le calcul dans chaque intervalle de temps $\frac{2L}{a}$:

(1) Allievi, *Revue de mécanique*, 1904.

1° *Premier intervalle*, $t < \frac{2L}{a}$, y est donné en fonction de t par l'équation suivante :

$$y^2 - 2y \left[y_0 + \frac{av_0}{g} + \frac{a^2 \psi^2(t)}{g} \right] + \left[y_0 + \frac{av_0}{g} \right]^2 = 0. \quad (54)$$

Cette équation, identique à celle du chapitre III, donne la valeur de y pour tous les temps inférieurs à $\frac{2L}{a}$. Nous pouvons donc tracer la courbe représentative du coup de bélier $\xi_1 = y - y_0$ pendant toute la première période.

Nous trouverons par exemple une courbe telle que celle indiquée ci-contre (*fig. 101*).

2° *Second intervalle*, $\frac{2L}{a} < t \leq \frac{4L}{a}$, y est donné en fonction de t par l'équation suivante :

$$y^2 - 2y \left[y_0 + \frac{av_0}{g} - 2\xi_1 + \frac{a^2 \psi^2(t)}{g} \right] + \left[y_0 + \frac{av_0}{g} - 2\xi_1 \right]^2 = 0. \quad (55)$$

équation dans laquelle ξ_1 est la valeur du coup de bélier à l'instant du premier intervalle antérieur de $\frac{2L}{a}$ à l'instant du second intervalle considéré (voir figure ci-dessus). Cette équation se déduit immédiatement de l'équation (11), chapitre III, puisqu'on a, avec les mêmes notations :

$$\xi_1 = F_1.$$

Nous pouvons donc tracer la courbe du coup de bélier ξ_2 pendant tout le second intervalle de temps $\frac{2L}{a}$.

3° *Troisième intervalle*, $\frac{4L}{a} < t \leq \frac{6L}{a}$, y est donné en fonction de t par l'équation suivante :

$$y^2 - 2y \left[y_0 + \frac{av_0}{g} - 2(\xi_1 + \xi_2) + \frac{a^2 \psi^2(t)}{g} \right] + \left[y_0 + \frac{av_0}{g} - 2(\xi_1 + \xi_2) \right]^2 = 0, \quad (56)$$

équation dans laquelle ξ_1 est la valeur du coup de bélier à l'instant du premier intervalle antérieur de $\frac{4L}{a}$ à l'instant du troisième intervalle considéré, et où ξ_2 est la valeur du coup de bélier à l'instant du deuxième intervalle antérieur de $\frac{2L}{a}$ à l'instant du troisième intervalle considéré (*voir fig. 101*). Cette équation se déduit immédiatement de l'équation (11), chapitre III, en remarquant qu'on a :

$$\xi_1 = F_1, \quad \xi_2 = F_2 - F_1.$$

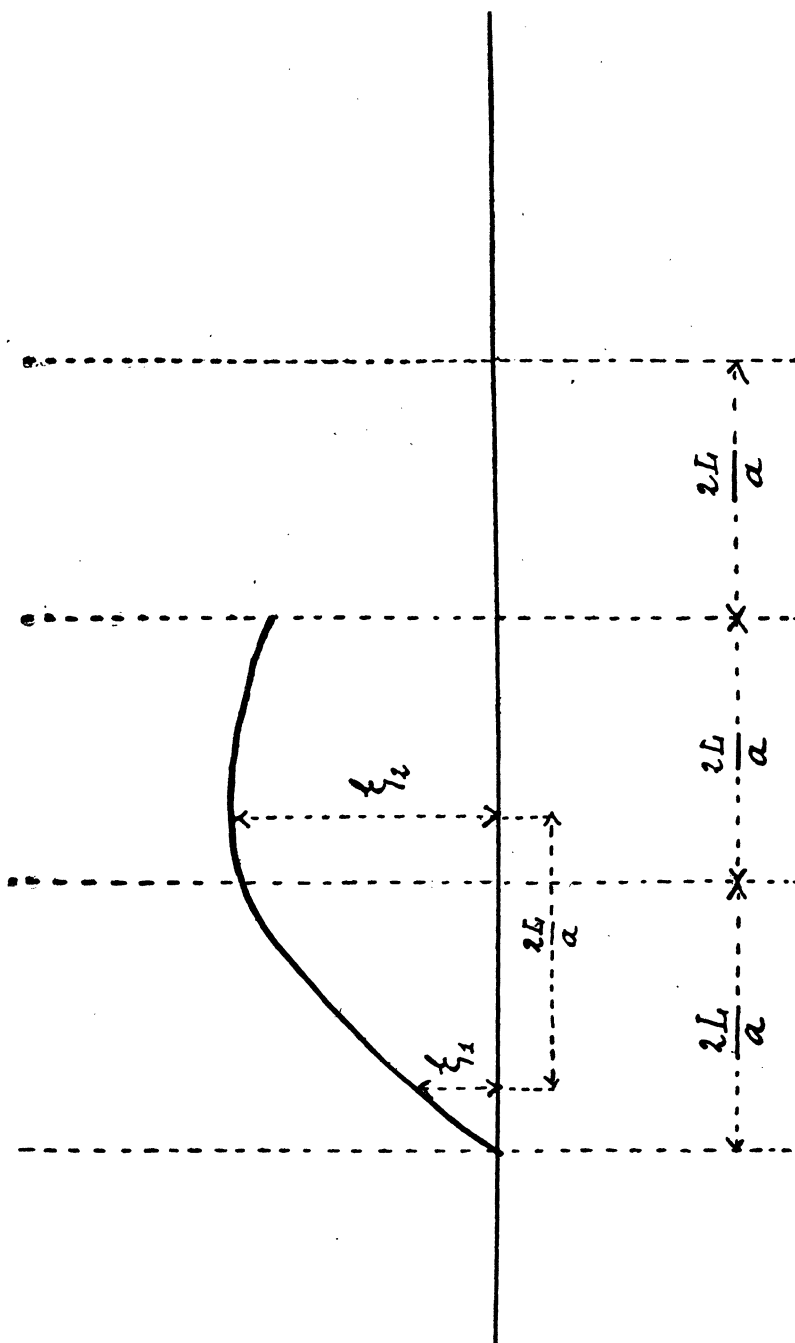


FIG. 101.

Nous pouvons donc tracer la courbe du coup de bélier ξ_3 pendant tout le troisième intervalle de temps $\frac{2L}{a}$.

4° n^{me} intervalle, $\frac{2(n-1)L}{a} < t \leq \frac{2nL}{a}$. Pour faire le calcul du coup de bélier ξ_n il est nécessaire de connaître au préalable toutes les valeurs $\xi_1 \dots \xi_2 \dots \xi_{n-1}$ des coups de bélier ayant précédé celui considéré à des instants antérieurs de

$$\frac{2L}{a}, \frac{4L}{a}, \dots, \frac{2(n-1)L}{a}$$

à l'instant considéré.

En fonction de $\xi_1 \dots \xi_2 \dots \xi_{n-1}$ y est donné pendant la n° période par :

$$y^2 - 2y \left[y_0 + \frac{av_0}{g} - 2(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{n-1}) + \frac{a^2 \psi^2(t)}{g} \right] + \left[y_0 + \frac{av_0}{g} - 2(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{n-1}) \right]^2 = 0, \quad (57)$$

qui se déduit immédiatement de l'équation (11) en remarquant que :

$$F_{n-1} = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{n-1}.$$

Toutes ces formules s'appliquent soit lorsque la vanne se meut, soit lorsqu'elle est immobile dans une position quelconque qui peut être la position de fermeture complète.

Les diagrammes US-56-4 (*fig. 103*) représentent la courbe des pressions relevée au manomètre enregistreur et la courbe calculée par la méthode d'Allievi que nous venons d'exposer. Sur ce diagramme est figurée également la courbe des ouvertures du régulateur et celle des débits en fonction du temps. On a également reproduit (*fig. 103*) la courbe représentant l'enregistrement du vannage du régulateur; ce graphique porte la photographie d'un décimètre qui permet de déterminer exactement les déplacements de l'index du régulateur.

Dans le calcul on a supposé que la conduite avait une épaisseur moyenne constante et que la valeur de la vitesse de propagation était de 1.068 mètres/secondes, vitesse théorique confirmée par les diagrammes (*voir paragraphe précédent*).

Afin que le lecteur puisse se rendre compte dans le détail de l'application des équations d'Allievi, nous donnons ci-dessous les calculs complets relatifs au diagramme US-C₄-56-4. Afin de simplifier les calculs on a tracé au préalable un tableau des valeurs de la fonction $\frac{a^2 \psi^2(t)}{g}$ pour les différents débits et une courbe

traduisant ce tableau. Pour calculer la fonction ψ on remarque que l'on a :

$$\frac{v^2}{2g} + \gamma_0 = \frac{u^2}{2g}. \quad (58)$$

Or $\frac{v^2}{2g}$ est négligeable vis-à-vis de γ_0 ; on peut donc écrire :

$$\psi = \frac{s}{S} = \frac{v}{u} = \frac{v}{\sqrt{2g\gamma_0}}. \quad (59)$$

C'est la formule qu'on applique.

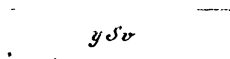


FIG. 36. — γ pression dans la conduite, à l'extrémité aval, au temps t ; v vitesse de l'eau dans la conduite, à l'extrémité aval, au temps t ; S section de la conduite; s surface de l'ouverture du distributeur; u vitesse de l'eau au distributeur, au temps t .

61. Conduite C₄ de Soulom;

Tableau des valeurs de la fonction $\frac{a^2 \psi^2(t)}{g}$ de l'équation d'Allievi.

Longueur de la conduite.....	= 536 m. 36
Diamètre intérieur de la conduite.....	= 0 m. 810
Section libre de la conduite.....	= 0 m ² , 515

Le tableau ci-dessous a été établi en supposant :

$$a = 1.068 \text{ met./sec.}$$

$$a^2 = 1.140.624 \quad \frac{a^2}{g} = 116.271.$$

Pression statique : 252 m. 50 = γ_0 (fig. 102).

DÉBIT lit./sec.	VITESSE dans la conduite v	$\sqrt{2g\gamma_0}$	γ_0	$\psi(t) = \frac{v}{\sqrt{2g\gamma_0}}$	$\psi^2(t)$	$\frac{a^2 \psi^3(t)}{g}$
25	0,048	70,5	252,50	$6,88 \times 10^{-4}$	$47,33 \times 10^{-8}$	0,055
50	0,097	»	»	13,77	189,3	0,220
75	0,146	»	»	20,64	426,0	0,495
100	0,194	»	»	27,52	757,3	0,880
125	0,243	»	»	34,40	1.183	1,375
150	0,291	»	»	41,28	1.704	1,98
175	0,340	»	»	48,16	2.319	2,695
200	0,388	»	»	55,04	3.029	3,52
225	0,437	»	»	61,92	3.834	4,455
250	0,485	»	»	68,80	4.733	5,50
275	0,534	»	»	75,68	5.727	6,655
300	0,582	»	»	82,56	6.816	7,92
325	0,631	»	»	89,44	7.999	9,295
350	0,679	»	»	96,32	9.277	10,78
375	0,728	»	»	103,2	10.650	12,375
400	0,777	»	»	110,1	12.120	14,08
425	0,825	»	»	117,0	13.680	15,895
450	0,874	»	»	123,8	15.330	17,82
475	0,922	»	»	130,7	17.090	19,855
500	0,971	»	»	137,6	18.930	22,00
525	1,019	»	»	144,5	20.870	24,255
550	1,068	»	»	151,4	22.910	26,62
575	1,116	»	»	158,2	25.040	29,095
600	1,164	»	»	165,1	27.370	31,68
625	1,212	»	»	172,0	29.620	34,37
650	1,260	»	»	178,9	32.040	37,18
675	1,308	»	»	185,8	34.550	40,10
700	1,356	»	»	192,6	37.160	43,12
725	1,404	»	»	199,5	39.860	46,25
750	1,452	»	»	206,4	42.660	49,50
775	1,500	»	»	213,3	45.550	52,85
800	1,548	»	»	220,2	48.540	56,32
825	1,596	»	»	227,0	51.620	59,90
850	1,644	»	»	233,9	54.790	63,58
900	1,740	»	»	247,7	61.430	71,28
950	1,836	»	»	261,4	68.440	79,42
1.000	1,932	»	»	275,2	75.840	88,00

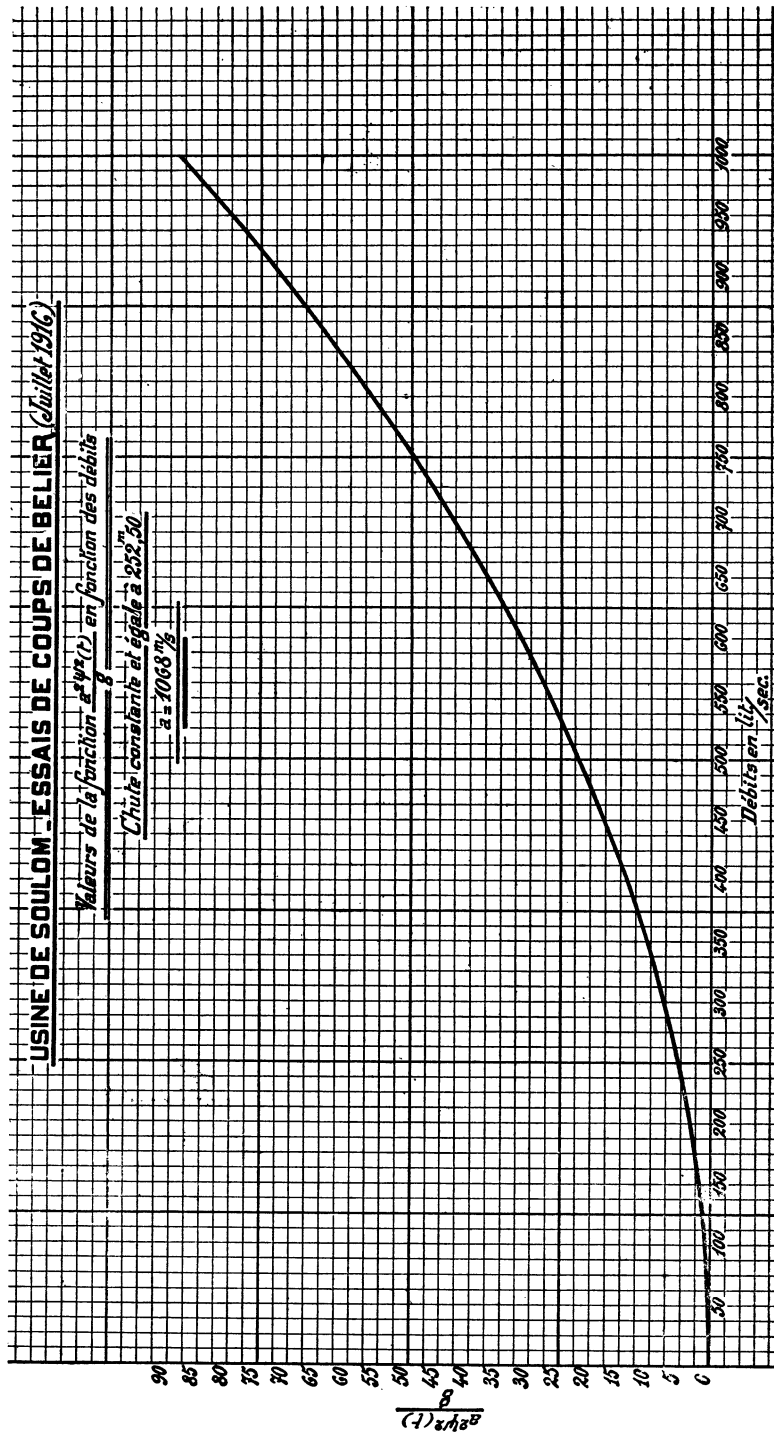


FIG. 102.

Une fois établi le tableau des valeurs successives de la fonction $\frac{a^2 \psi^2(t)}{g}$, voici quelle est la suite des calculs à effectuer.

**62. Calculs relatifs au diagramme US-C₄-56-4 (fig. 103)
par les formules d'Allievi.**

Longueur de la conduite..... $L = 536 \text{ m. } 36$
 Ouverture initiale du régulateur..... $= 58$
 Débit initial..... $= 565 \text{ litres}$
 Diamètre intérieur de la conduite..... $= 0 \text{ m. } 810$
 Section libre de la conduite..... $= 0 \text{ m}^2, 515$
 $a = 1.068 \text{ met./sec.}$ Pression statique $\gamma_0 = 252 \text{ m. } 50$

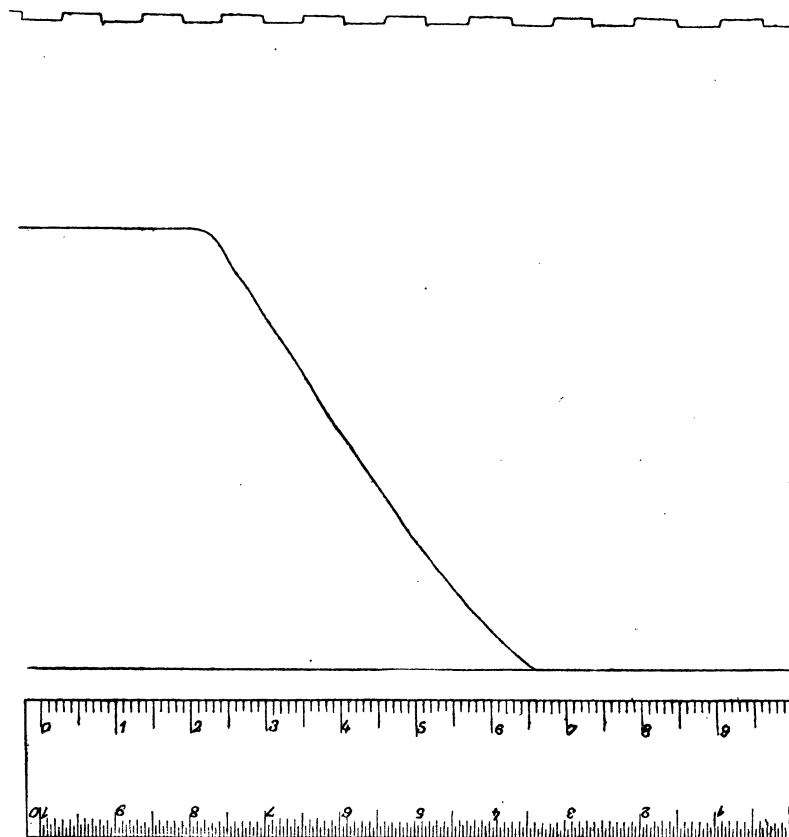


FIG. 103. — Expérience : US-C₄-56-4. Reproduction photographique de l'enregistrement de l'index du régulateur. Le décimètre placé à la partie inférieure de la figure permet de déterminer exactement les déplacements de l'index.

Calcul de $\frac{av_0}{g}$.

$$\frac{av_0}{g} = \frac{1.068 \times v_0}{9.81}, \quad v_0 = \frac{565}{51.5} = 1 \text{ m. } 097$$

$$\frac{av_0}{g} = \frac{1.068 \times 1.097}{9.81} = 119 \text{ m. } 50.$$

$$1^{\text{re}} \text{ PÉRIODE } t \leq \frac{2L}{a}.$$

$$1^{\text{er}} \text{ point : } \frac{1}{6} \frac{L}{a}$$

$$\begin{aligned} \text{Ouverture} &= 57,25 \\ \text{Débit} &= 557 \text{ l. } 5 \\ \frac{a^2 \psi^2(t)}{g} &= 27,25 \end{aligned}$$

La pression y est donnée par :

$$y^2 - 2y \left[y_0 + \frac{av_0}{g} + \frac{a^2 \psi^2(t)}{g} \right] + \left[y_0 + \frac{av_0}{g} \right]^2 = 0$$

$$\begin{aligned} y &= 399,25 - 144,95 = 254,30 \\ \xi &= 254,30 - 252,50 = \underline{1 \text{ m. } 80} \end{aligned}$$

$$2^{\text{e}} \text{ point} = \frac{1}{3} \frac{L}{a}$$

$$\begin{aligned} \text{Ouverture} &= 55,25 \\ \text{Débit} &= 535 \text{ lit.} \\ \frac{a^2 \psi^2(t)}{g} &= 25,1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= 397,1 - 138,9 = 258,20 \\ \xi &= 258,20 - 252,50 = \underline{5 \text{ m. } 70} \end{aligned}$$

$$3^{\text{e}} \text{ point : } \frac{1}{2} \frac{L}{a}$$

$$\begin{aligned} \text{Ouverture} &= 52,5 \\ \text{Débit} &= 507 \text{ lit.} \\ \frac{a^2 \psi^2(t)}{g} &= 22,5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= 394,5 - 131,3 = 263,20 \\ \xi &= 263,20 - 252,50 = \underline{10 \text{ m. } 70} \end{aligned}$$

$$4^{\circ} \text{ point : } \frac{L}{a}$$

$$\begin{aligned} \text{Ouverture} &= 43,5 \\ \text{Débit} &= 408 \text{ lit.} \\ \frac{a^3 \psi^2(t)}{g} &= 14,6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma &= 386,6 - 105,2 = 281,40 \\ \xi &= 281,40 - 252,50 = \underline{28 \text{ m. } 90} \end{aligned}$$

$$5^{\circ} \text{ point : } \frac{L}{a} + \frac{1}{2} \frac{L}{a}$$

$$\begin{aligned} \text{Ouverture} &= 34,75 \\ \text{Débit} &= 317 \text{ lit.} \\ \frac{a^3 \psi^2(t)}{g} &= 8,9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma &= 380,9 - 81,8 = 299,10 \\ \xi &= 299,10 - 252,50 = \underline{46 \text{ m. } 60} \end{aligned}$$

$$6^{\circ} \text{ point : } \frac{2L}{a}$$

$$\begin{aligned} \text{Ouverture} &= 26,5 \\ \text{Débit} &= 240 \text{ lit.} \\ \frac{a^3 \psi^2(t)}{g} &= 5,0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma &= 377 - 61,2 = 315,80 \\ \xi &= 315,8 - 252,5 = \underline{63 \text{ m. } 30} \end{aligned}$$

$$2^{\circ} \text{ PÉRIODE : } \frac{2L}{a} < t \leq \frac{4L}{a}.$$

$$7^{\circ} \text{ point : } \frac{2L}{a} + \frac{1}{6} \frac{L}{a}$$

$$\begin{aligned} \text{Ouverture} &= 24,0 \\ \text{Débit} &= 215 \text{ lit.} \\ \frac{a^3 \psi^2(t)}{g} &= 4,0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma &= 372,4 - 54,4 = 318,0 \\ \xi &= 318,0 - 252,5 = \underline{65 \text{ m. } 50} \end{aligned}$$

$$8^{\circ} \text{ point : } \frac{2L}{a} + \frac{1}{3} \frac{L}{a}$$

$$\gamma = 363,85 - 48,55 = 315,30$$

$$\xi = 315,30 - 252,5 = \underline{62 \text{ m. } 80}$$

$$9^{\circ} \text{ point : } \frac{2L}{a} + \frac{1}{2} \frac{L}{a}$$

$$\gamma = 353,2 - 42,7 = 310,5$$

$$\xi = 310,5 - 252,5 = \underline{58 \text{ mètres.}}$$

$$10^{\circ} \text{ point : } \frac{3L}{a}$$

$$\gamma = 315,2 - 25 = 290,20$$

$$\xi = 290,2 - 252,5 = \underline{37 \text{ m. } 70}$$

$$11^{\circ} \text{ point : } \frac{3L}{a} + \frac{1}{2} \frac{L}{a}$$

$$\gamma = 278,98 - 10 = 268,98$$

$$\xi = 269 - 252,5 = \underline{16 \text{ m. } 50}$$

$$12^{\circ} \text{ point : } \frac{4L}{a}$$

$$\gamma = 245,4 - 1 = 244,4$$

$$\xi = 244,4 - 252,5 = \underline{-8 \text{ m. } 10}$$

$$\begin{aligned} \text{Ouverture} &= 21,5 \\ \text{Débit} &= 193 \text{ lit.} \\ \frac{a^2 \psi^2(t)}{g} &= 3,25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ouverture} &= 19,25 \\ \text{Débit} &= 172 \text{ lit.} \\ \frac{a^2 \psi^2(t)}{g} &= 2,6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ouverture} &= 11,75 \\ \text{Débit} &= 104 \text{ lit.} \\ \frac{a^2 \psi^2(t)}{g} &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ouverture} &= 5,25 \\ \text{Débit} &= 45 \text{ lit.} \\ \frac{a^2 \psi^2(t)}{g} &= 0,18 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ouverture} &= 0,5 \\ \text{Débit} &= 5 \text{ lit.} \\ \frac{a^2 \psi^2(t)}{g} &= 0,0022 \end{aligned}$$

$$13^{\circ} \text{ point : } \frac{4L}{a} + \frac{1}{6} \frac{L}{a}$$

Ouverture = 0

$$y = 372 - 134,6 = 237,40$$

$$\xi = 237,40 - 252,5 = \underline{-15 \text{ m. } 10}$$

$$14^{\circ} \text{ point : } \frac{4L}{a} + \frac{1}{3} \frac{L}{a}$$

$$y = 372 - 137 = 235$$

$$\xi = 235 - 252,5 = \underline{-17 \text{ m. } 50}$$

$$15^{\circ} \text{ point : } \frac{4L}{a} + \frac{1}{2} \frac{L}{a}$$

$$y = 372 - 137,4 = 234,60$$

$$\xi = 234,60 - 252,5 = \underline{-17 \text{ m. } 90}$$

$$16^{\circ} \text{ point : } \frac{5L}{a}$$

$$y = 372 - 133,2 = 238,80$$

$$\xi = 238,80 - 252,5 = \underline{-13 \text{ m. } 70}$$

$$17^{\circ} \text{ point : } \frac{5L}{a} + \frac{1}{2} \frac{L}{a}$$

$$y = 372 - 126,2 = 245,80$$

$$\xi = 245,8 - 252,5 = \underline{-6 \text{ m. } 70}$$

$$18^{\circ} \text{ point : } \frac{6L}{a}$$

$$y = 372 - 110,4 = 261,60$$

$$\xi = 261,60 - 252,50 = \underline{9 \text{ m. } 10}$$

$$19^{\circ} \text{ point : } \frac{6L}{a} + \frac{1}{6} \frac{L}{a}$$

$$y = 372 - 104,4 = 267,60$$

$$\xi = 267,60 - 252,5 = \underline{15 \text{ m. } 10}$$

$$20^{\circ} \text{ point : } \frac{6L}{a} + \frac{1}{3} \frac{L}{a}$$

$$y = 372 - 102 = 270$$

$$\xi = 270 - 252,5 = \underline{17 \text{ m. } 50}$$

$$21^{\circ} \text{ point : } \frac{6L}{a} + \frac{1}{2} \frac{L}{a}$$

$$\gamma = 372 - 101,6 = 270,40$$

$$\xi = 270,4 - 252,5 = \underline{17 \text{ m. } 90}$$

$$22^{\circ} \text{ point : } \frac{7L}{a}$$

$$\gamma = 372 - 105,8 = 266,20$$

$$\xi = 266,20 - 252,5 = \underline{13 \text{ m. } 70}$$

$$23^{\circ} \text{ point : } \frac{7L}{a} + \frac{1}{2} \frac{L}{a}$$

$$\gamma = 372 - 112,8 = 259,20$$

$$\xi = 259,2 - 252,5 = \underline{6 \text{ m. } 70}$$

$$24^{\circ} \text{ point : } \frac{8L}{a}$$

$$\gamma = 372 - 128,6 = 243,40$$

$$\xi = 243,40 - 252,5 = \underline{-9 \text{ m. } 10}$$

$$25^{\circ} \text{ point : } \frac{8L}{a} + \frac{1}{6} \frac{L}{a}$$

$$\gamma = 372 - 134,6 = 237,40$$

$$\xi = 237,40 - 252,5 = \underline{-15 \text{ m. } 10}$$

$$26^{\circ} \text{ point : } \frac{8L}{a} + \frac{1}{3} \frac{L}{a}$$

$$\gamma = 372 - 137 = 235$$

$$\xi = 235,0 - 252,5 = \underline{-17 \text{ m. } 50}$$

$$27^{\circ} \text{ point : } \frac{8L}{a} + \frac{1}{2} \frac{L}{a}$$

$$\gamma = 372 - 137,4 = 234,60$$

$$\xi = 234,6 - 252,5 = \underline{-17 \text{ m. } 90}$$

$$28^{\circ} \text{ point : } \frac{9L}{a}$$

$$\gamma = 372 - 133,2 = 238,80$$

$$\xi = 238,80 - 252,5 = \underline{-13 \text{ m. } 70}$$

$$29^{\circ} \text{ point : } \frac{9L}{a} + \frac{1}{2} \frac{L}{a}$$

$$y = 372 - 126,2 = 245,80$$

$$\xi = 245,80 - 252,5 = \underline{-6 \text{ m. } 70}$$

$$30^{\circ} \text{ point : } \frac{10L}{a}$$

$$y = 372 - 110,4 = 261,60$$

$$\xi = 261,60 - 252,5 = \underline{9 \text{ m. } 10}$$

Le diagramme US-56-4 donne la courbe résultant des calculs ci-dessus (*fig. 103*).

63.

Méthode de M. de Sparre.

Ainsi que l'on a pu s'en rendre compte, le calcul complet d'un diagramme par la méthode d'Allievi est assez long, surtout à cause des nombreuses extractions de racines carrées qu'il présente. On doit à M. de Sparre une méthode simplifiée qui donne dans la pratique des résultats très largement suffisants tant que le coup de bélier ne dépasse pas la moitié de la hauteur de chute. Afin d'économiser du temps nous avons calculé bon nombre de graphiques par la méthode de M. de Sparre ⁽¹⁾. Nous croyons donc utile de rappeler celle-ci et les formules très simples auxquelles elle conduit.

La marche du calcul est exactement la même que dans le cas des formules d'Allievi, c'est-à-dire que le calcul se fait de proche en proche en considérant des périodes de temps égales à $\frac{2L}{a}$.

$$1^{\circ} \text{ PÉRIODE : } t \leq \frac{2L}{a}.$$

En appelant :

ξ_1 le coup de bélier à l'instant t de la première période,

v_0 la vitesse initiale dans la conduite en mètres/secondes;

v_1 la vitesse dans la conduite pour l'ouverture existant à l'instant t et pour le débit correspondant à la pression statique;

y_0 la pression statique en mètres d'eau;

⁽¹⁾ De Sparre, *Bulletin de la Société hydrotechnique*, 1915.

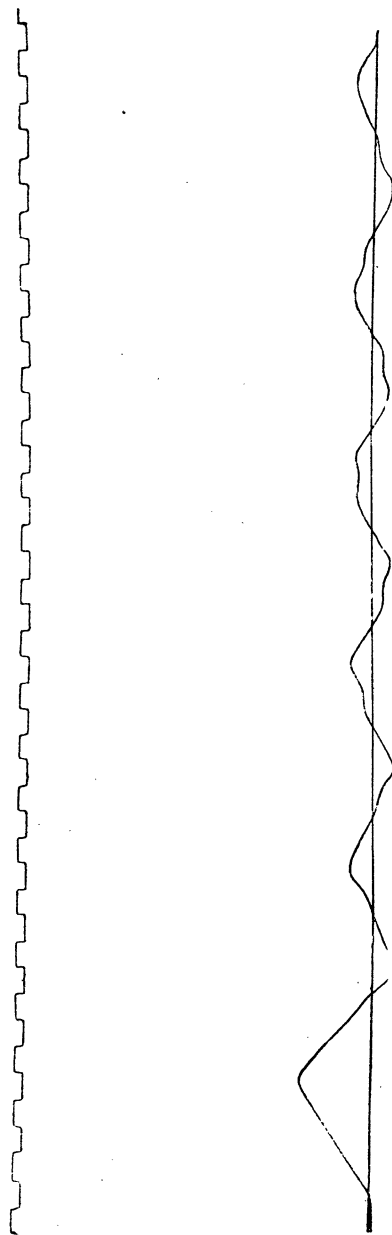


FIG. 103. — Reproduction photographique de la courbe des pressions dans l'expérience US-C₁-56-4.

g l'accélération due à la pesanteur exprimée en met.-sec.²,
on a :

$$\xi_1 = \frac{a}{g} \frac{v_0 - v_1}{1 + \frac{av_1}{2gY_0}}. \quad (60)$$

$$2^{\text{e}} \text{ PÉRIODE : } \frac{2L}{a} < t \leq \frac{4L}{a}.$$

Soit ξ_2 le coup de bélier à l'instant t de la seconde période ;

ξ_1 le coup de bélier à l'instant $\frac{2L}{a}$ avant l'instant t ;

v_0 la vitesse dans la conduite à l'instant initial ;

v_1 la vitesse dans la conduite à l'instant $t - \frac{2L}{a}$ pour l'ouverture existant et le débit correspondant à la pression statique ;

v_2 la vitesse dans la conduite pour l'ouverture existant à l'instant t et le débit correspondant à la pression statique ;

ξ_2 sera donné par :

$$\xi_2 = \frac{a}{g} \frac{v_1 - v_2}{1 + \frac{av_2}{2gY_0}} - \xi_1 \times \frac{1 - \frac{av_1}{2gY_0}}{1 + \frac{av_2}{2gY_0}}. \quad (61)$$

$$n^{\text{e}} \text{ PÉRIODE : } \frac{2(n-1)L}{a} < t \leq \frac{2nL}{a}.$$

Soit ξ_n le coup de bélier à l'instant t de la n^{e} période ;

ξ_{n-1} le coup de bélier au temps $t - \frac{2L}{a}$;

v_0 la vitesse dans la conduite à l'instant initial ;

v_{n-1} la vitesse dans la conduite pour l'ouverture existant à l'instant $t - \frac{2L}{a}$ et le débit correspondant à la pression statique ;

v_n la vitesse dans la conduite pour l'ouverture existant à l'instant t et le débit correspondant à la pression statique ;

ξ_n sera donné par :

$$\xi_n = \frac{a}{g} \frac{v_{n-1} - v_n}{1 + \frac{av_n}{2gY_0}} - \xi_{n-1} \frac{1 - \frac{av_{n-1}}{2gY_0}}{1 + \frac{av_n}{2gY_0}}. \quad (62)$$

Comme nous l'avons fait pour les formules d'Allievi, nous donnons ci-dessous le détail des calculs relatifs au diagramme US-C₁-56-4, calculs traités par la méthode simplifiée de De Sparre que nous venons d'exposer.

64. Calculs relatifs au diagramme US-C₁-56-4 (fig. 103) par les formules simplifiées de De Sparre.

Longueur de la conduite.....	536 m. 36
Ouverture initiale du régulateur.....	58
Débit initial.....	565 lit.
Diamètre intérieur de la conduite.....	0 m. 810
Section fibre de la conduite.....	0 m ² 515

$$a = 1.068 \text{ met./sec.}$$

$$\frac{a}{g} = \frac{1.068}{9.81} = 108,8$$

$$v_0 = \frac{565}{51,5} = 1 \text{ m. } 097$$

$$2gy_0 = 2 \times 9,81 \times 252,5 = 4.950.$$

$$1^{\text{re}} \text{ PÉRIODE : } t \leq \frac{2L}{a}.$$

Le coup de bélier ξ_1 est donné par la formule (60) :

$$1^{\text{er}} \text{ point : } \frac{1}{6} \frac{L}{a}$$

$$\text{Ouverture} = 57,25$$

$$\text{Débit} = 557 \text{ l. } 5$$

$$v_1 = 1,081$$

$$\xi = 108,8 \times \frac{1,097 - 1,081}{1 + \frac{1.068 \times 1,081}{4.950}} = 1 \text{ m. } 40$$

$$2^{\text{e}} \text{ point : } \frac{1}{3} \frac{L}{a}$$

$$\text{Ouverture} = 55,25$$

$$\text{Débit} = 535 \text{ litres}$$

$$v_1 = 1,037$$

$$\xi = 108,8 \times \frac{1,097 - 1,037}{1 + \frac{1.068 \times 1,037}{4.950}} = 5 \text{ m. } 35$$

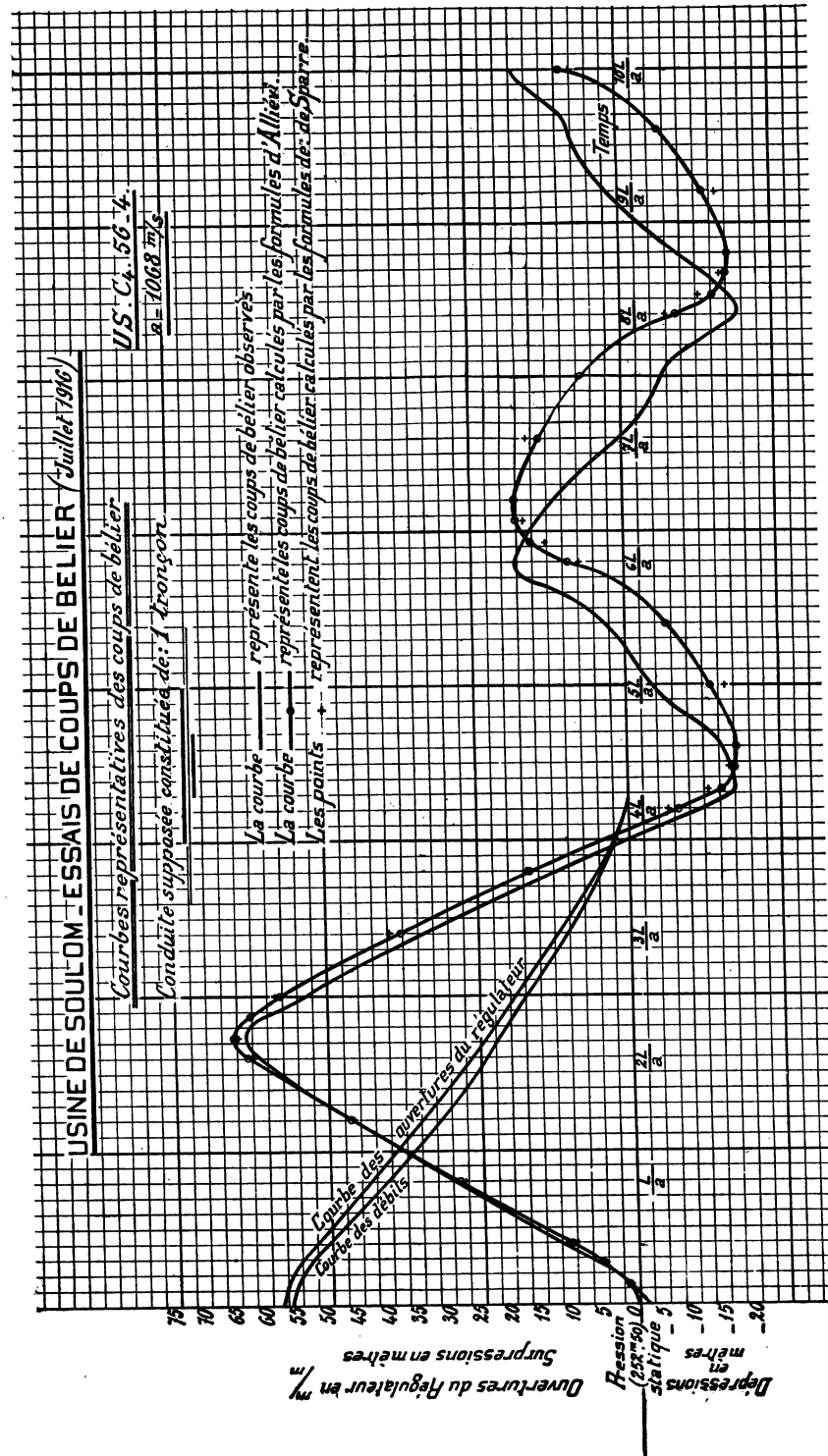


Fig. 103.

$$3^{\circ} \text{ point : } \frac{1}{2} \frac{L}{a}$$

$$\begin{aligned} \text{Ouverture} &= 52,5 \\ \text{Débit} &= 507 \text{ litres} \\ v_1 &= 0,985 \end{aligned}$$

$$\xi = 108,8 \times \frac{1,097 - 0,985}{1 + \frac{1,068 \times 0,985}{4,950}} = 10 \text{ m. } 0$$

$$4^{\circ} \text{ point : } \frac{L}{a}$$

$$\begin{aligned} \text{Ouverture} &= 43,5 \\ \text{Débit} &= 408 \text{ litres} \\ v_1 &= 0,795 \end{aligned}$$

$$\xi = 108,8 \times \frac{1,097 - 0,795}{1 + \frac{1,068 \times 0,795}{4,950}} = 28 \text{ m. } 0$$

$$5^{\circ} \text{ point : } \frac{L}{a} + \frac{1}{2} \frac{L}{a}$$

$$\begin{aligned} \text{Ouverture} &= 34,75 \\ \text{Débit} &= 317 \text{ litres} \\ v_1 &= 0,615 \end{aligned}$$

$$\xi = 108,8 \times \frac{0,097 - 1,615}{1 + \frac{1,068 \times 0,615}{4,950}} = 46 \text{ m. } 60$$

$$6^{\circ} \text{ point : } \frac{2L}{a}$$

$$\begin{aligned} \text{Ouverture} &= 26,5 \\ \text{Débit} &= 240 \text{ litres} \\ v_1 &= 0,466 \end{aligned}$$

$$\xi = 108,8 \times \frac{1,097 - 0,466}{1 + \frac{1,068 \times 0,466}{4,950}} = 62 \text{ m. } 20$$

$$2^{\circ} \text{ PÉRIODE : } \frac{2L}{a} < t \leq \frac{4L}{a}.$$

Le coup de bélier ξ_2 est donné par la formule (61).

$$7^{\circ} \text{ point : } \frac{2L}{a} + \frac{1}{6} \frac{L}{a}$$

$$\text{Ouverture} = 24$$

$$v_1 = 1,081$$

$$\text{Débit} = 215 \text{ litres}$$

$$v_2 = 0,418$$

$$\xi = 108,8 \times \frac{1,081 - 0,418}{1 + \frac{1,068 \times 0,418}{4,950}} - 1,4 \times \frac{1 - \frac{1,068 \times 1,081}{4,950}}{1 + \frac{1,068 \times 0,418}{4,950}}$$

$$\xi = \underline{64 \text{ m. } 82}$$

$$8^{\circ} \text{ point : } \frac{2L}{a} + \frac{1}{3} \frac{L}{a}$$

$$\text{Ouverture} = 21,5$$

$$v_1 = 1,037$$

$$\text{Débit} = 193 \text{ litres}$$

$$v_2 = 0,375$$

$$\xi = 108,8 \times \frac{1,037 - 0,375}{1 + \frac{1,068 \times 0,375}{4,950}} - 5,35 \times \frac{1 - \frac{1,068 \times 1,037}{4,950}}{1 + \frac{1,068 \times 0,375}{4,950}}$$

$$\xi = \underline{62 \text{ m. } 70}$$

$$9^{\circ} \text{ point : } \frac{2L}{a} + \frac{1}{2} \frac{L}{a}$$

$$\text{Ouverture} = 19,25$$

$$v_1 = 0,985$$

$$\text{Débit} = 172 \text{ l. } 50$$

$$v_2 = 0,334$$

$$\xi = 108,8 \times \frac{0,985 - 0,334}{1 + \frac{1,068 \times 0,334}{4,950}} - 10 \times \frac{1 - \frac{1,068 \times 0,985}{4,950}}{1 + \frac{1,068 \times 0,334}{4,950}}$$

$$\xi = \underline{58 \text{ m. } 70}$$

$$10^{\circ} \text{ point : } \frac{3L}{a}$$

$$\begin{aligned} v_1 &= 0,795 & \text{Ouverture} &= 11,75 \\ & & \text{Débit} &= 104 \text{ litres} \\ v_2 &= 0,202 \end{aligned}$$

$$\xi = 108,8 \times \frac{0,795 - 0,202}{1 + \frac{1,068 \times 0,202}{4,950}} - 28 \times \frac{1 - \frac{1,068 \times 0,795}{4,950}}{1 + \frac{1,068 \times 0,202}{4,950}}$$

$$\xi = \underline{39 \text{ m. } 70}$$

$$11^{\circ} \text{ point : } \frac{3L}{a} + \frac{1}{2} \frac{L}{a}$$

$$\begin{aligned} v_1 &= 0,615 & \text{Ouverture} &= 5,25 \\ & & \text{Débit} &= 45 \text{ litres} \\ v_2 &= 0,0875 \end{aligned}$$

$$\xi = 108,8 \times \frac{0,615 - 0,0875}{1 + \frac{1,068 \times 0,0875}{4,950}} - 46,60 \times \frac{1 - \frac{1,068 \times 0,615}{4,950}}{1 + \frac{1,068 \times 0,0875}{4,950}}$$

$$\xi = \underline{16 \text{ m. } 70}$$

$$12^{\circ} \text{ point : } \frac{4L}{a}$$

$$\begin{aligned} v_1 &= 0,466 & \text{Ouverture} &= 0,5 \\ & & \text{Débit} &= 5 \text{ litres} \\ v_2 &= 0,0097 \end{aligned}$$

$$\xi = 108,8 \times \frac{0,466 - 0,0097}{1 + \frac{1,068 \times 0,0097}{4,950}} - 62,20 \times \frac{1 - \frac{1,068 \times 0,466}{4,950}}{1 + \frac{1,068 \times 0,0097}{4,950}}$$

$$\xi = \underline{-6 \text{ m. } 5}$$

$$3^{\circ} \text{ PÉRIODE : } \frac{4L}{a} < t \leq \frac{6L}{a}.$$

Le coup de bélier ξ_3 est donné par la formule :

$$\xi_3 = \frac{a}{g} \times \frac{v_2 - v_3}{1 + \frac{av_3}{2gy_0}} - \xi_2 \times \frac{1 - \frac{av_2}{2gy_0}}{1 + \frac{av_3}{2gy_0}}$$

$$13^{\circ} \text{ point : } \frac{4L}{a} + \frac{1}{6} \frac{L}{a}$$

Ouverture = 0

$$v_2 = 0,418$$

$$v_3 = 0$$

$$\xi = 108,8 \times 0,418 - 64,82 \left(1 - \frac{1,068 \times 0,418}{4,950} \right)$$

$$\xi = 45,5 - 58,5 = \underline{\underline{-13 \text{ m. } 0}}$$

$$14^{\circ} \text{ point : } \frac{4L}{a} + \frac{1}{3} \frac{L}{a}$$

$$v_2 = 0,375$$

$$v_3 = 0$$

$$\xi = 108,8 \times 0,375 - 62,7 \times 0,919$$

$$\xi = 41 - 57,5 = \underline{\underline{-16 \text{ m. } 50}}$$

$$15^{\circ} \text{ point : } \frac{4L}{a} + \frac{1}{2} \frac{L}{a}$$

$$v_2 = 0,334$$

$$v_3 = 0$$

$$\xi = 108,8 \times 0,334 - 58,7 \times 0,928$$

$$\xi = 36,4 - 54,4 = \underline{\underline{-18 \text{ m. } 0}}$$

$$16^{\circ} \text{ point : } \frac{5L}{a}$$

$$v_2 = 0,202$$

$$v_3 = 0$$

$$\xi = 108,8 \times 0,202 - 39,7 \times 0,957$$

$$\xi = 22 - 38 = \underline{-16 \text{ m. } 0}$$

$$17^{\circ} \text{ point : } \frac{5L}{a} + \frac{1}{2} \frac{L}{a}$$

$$v_2 = 0,0875$$

$$v_3 = 0$$

$$\xi = 108,8 \times 0,0875 - 16,70 \times 0,981$$

$$\xi = 9,55 - 16,35 = \underline{-6 \text{ m. } 80}$$

$$18^{\circ} \text{ point : } \frac{6L}{a}$$

$$v_2 = 0,0097$$

$$v_3 = 0$$

$$\xi = 108,8 \times 0,0097 - (-6,5) \times 0,998$$

$$\xi = 1,05 + 6,45 = \underline{7 \text{ m. } 50}$$

$$4^{\circ} \text{ PÉRIODE : } \frac{6L}{a} < t \leq \frac{8L}{a}.$$

A partir de cette époque $\frac{6L}{a}$, on a :

$$\xi_n = -\xi_{n-1}.$$

$$19^{\circ} \text{ point : } \frac{6L}{a} + \frac{1}{6} \frac{L}{a}$$

$$v_3 = 0$$

$$\xi = \underline{13 \text{ m. } 0}$$

$$20^\circ \text{ point : } \frac{6L}{a} + \frac{1}{3} \frac{L}{a}$$

$$\xi = \underline{16 \text{ m. } 50}$$

$$21^\circ \text{ point : } \frac{6L}{a} + \frac{1}{2} \frac{L}{a}$$

$$\xi = \underline{18 \text{ m. } 0}$$

$$22^\circ \text{ point : } \frac{7L}{a}$$

$$\xi = \underline{16 \text{ m. } 0}$$

$$23^\circ \text{ point : } \frac{7L}{a} + \frac{1}{2} \frac{L}{a}$$

$$\xi = \underline{6 \text{ m. } 80}$$

$$24^\circ \text{ point : } \frac{8L}{a}$$

$$\xi = \underline{-7 \text{ m. } 50}$$

$$5^\circ \text{ PÉRIODE : } \frac{8L}{a} < t \leq \frac{10L}{a}.$$

$$25^\circ \text{ point : } \frac{8L}{a} + \frac{1}{6} \frac{L}{a}$$

$$\xi = \underline{-13 \text{ m. } 0}$$

$$26^\circ \text{ point : } \frac{8L}{a} + \frac{1}{3} \frac{L}{a}$$

$$\xi = \underline{-16 \text{ m. } 50}$$

$$27^{\circ} \text{ point : } \frac{8L}{a} + \frac{1}{2} \frac{L}{a}$$

$$\xi = \underline{-18 \text{ m. } 0}$$

$$28^{\circ} \text{ point : } \frac{9L}{a}$$

$$\xi = \underline{-16 \text{ m. } 0}$$

$$29^{\circ} \text{ point : } \frac{9L}{a} + \frac{1}{2} \frac{L}{a}$$

$$\xi = \underline{-6 \text{ m. } 80}$$

$$30^{\circ} \text{ point : } \frac{10L}{a}$$

$$\xi = \underline{7 \text{ m. } 50}$$

Nous avons reporté sur le diagramme US-56-4 (*fig. 103*) les points calculés par la méthode simplifiée de De Sparre; ils sont marqués d'une croix, alors que les points déterminés par le calcul rigoureux d'Allievi sont marqués d'un petit cercle. Comme on peut s'en rendre compte, les différences existant entre les deux catégories de points sont d'un ordre que l'on peut parfaitement négliger en pratique.

Nous allons donner un autre exemple de calcul par la méthode de M. de Sparre.

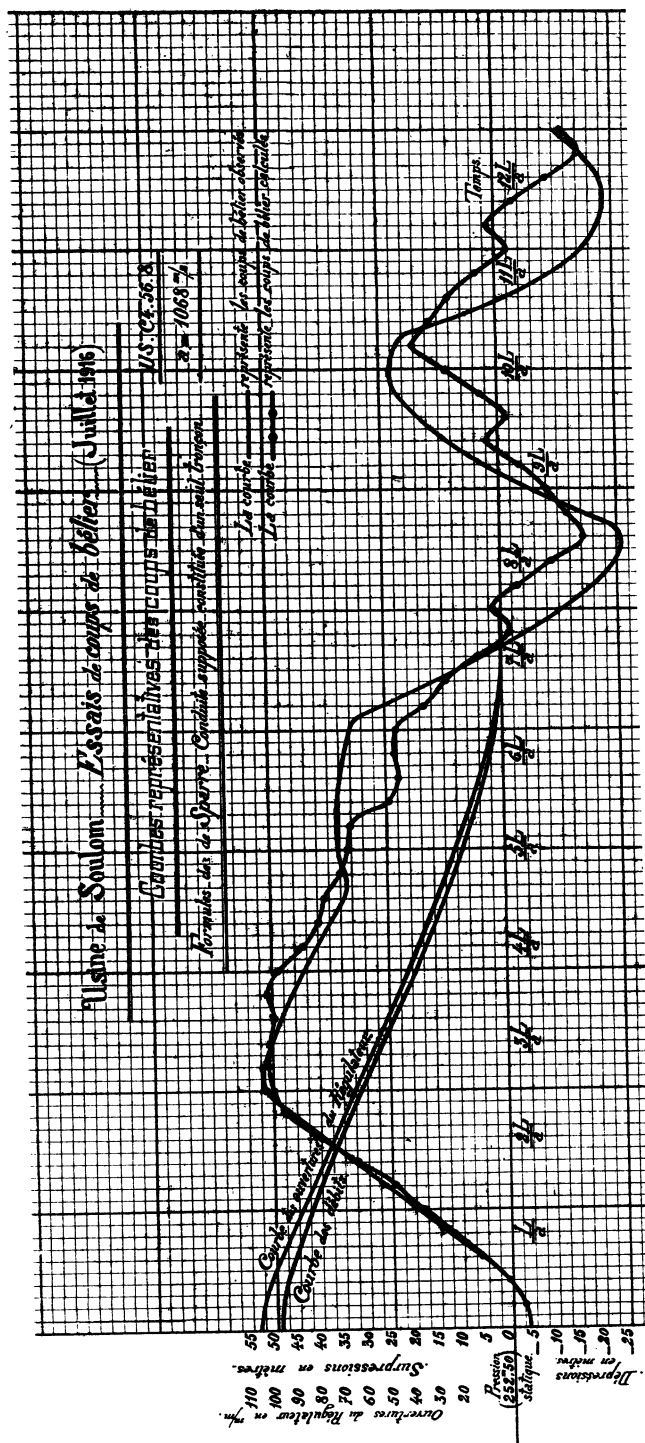
65. Calcul en un tronçon de la conduite C₄
 pour le diagramme US-C₄-56-8 (*fig. 104*). Formules de De Sparre ⁽¹⁾.

Longueur de la conduite.....	= 536 m. 36
Diamètre intérieur.....	= 0 m. 810
Section libre.....	= 0 m ² , 515
Ouverture du régulateur.....	= 107
Débit.....	= 980 litres.

$$a = 1.068 \text{ met./sec.}$$

Pression statique : 252 m. 50.

⁽¹⁾ Il faut remarquer que l'ouverture maximum réalisée dans cette expérience correspond à une perte de charge déjà notable. Pour en tenir compte, nous avons, dans cet exemple, adopté le mode de calcul suivant : nous avons retranché, en chaque point, de la pression calculée par les formules de M. de Sparre, la perte de charge correspondant en régime permanent à l'ouverture réalisée en ce point.



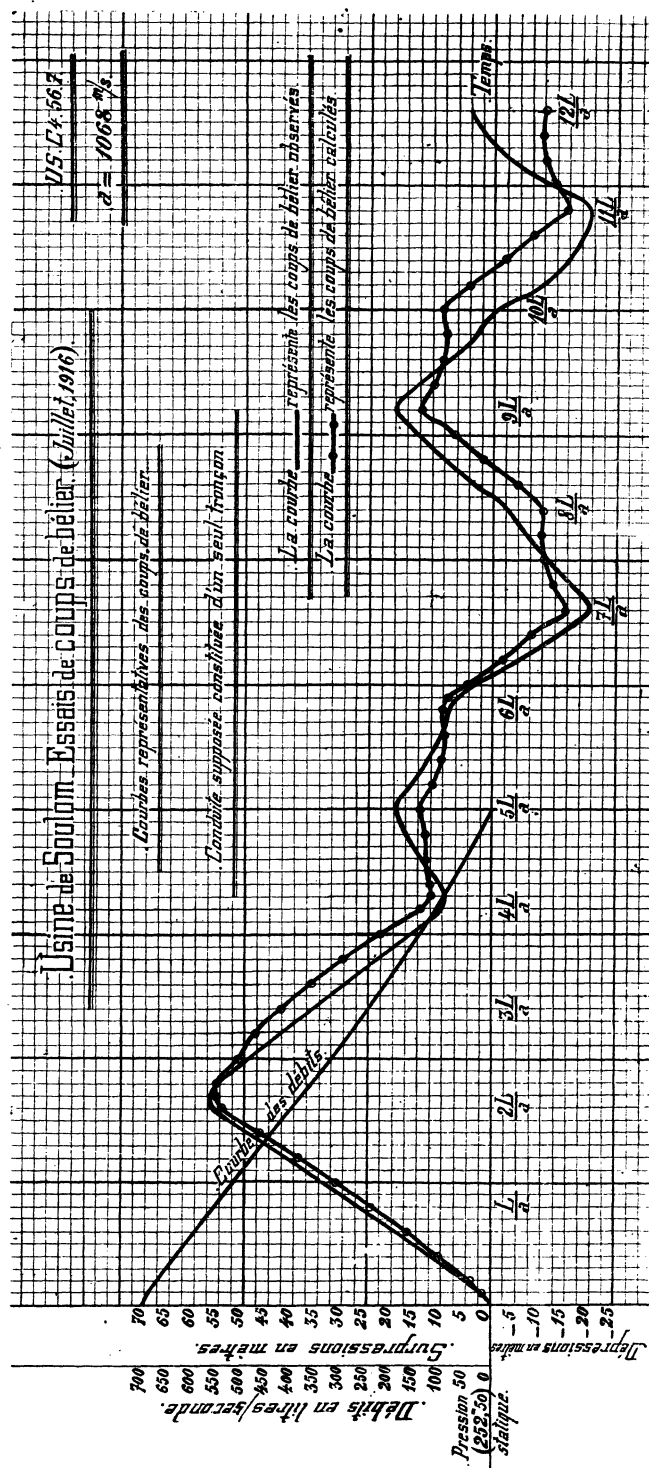


FIG. 105.

$$1^{\text{re}} \text{ PÉRIODE : } t \leq \frac{2L}{a}.$$

Le coup de bélier ξ_1 est donné par :

$$\xi_1 = \frac{a}{g} \times \frac{v_0 - v_1}{1 + \frac{av_1}{2g\gamma_0}}, \quad \frac{a}{g} = \frac{1.068}{9.81} = 108,8, \quad v_0 = \frac{980}{51,5} = 1 \text{ m. } 900.$$

$$1^{\text{er}} \text{ point : } \frac{1}{4} \frac{L}{a}$$

Ouverture = 106

Débit = 975 litres

$v_1 = 1 \text{ m. } 89$

$$\xi = 108,8 \times \frac{1,90 - 1,89}{1 + \frac{1.068 \times 1,89}{4.950}} = 108,8 \times \frac{0,01}{1,408}$$

$$\xi = 108,8 \times 0,0071 = \underline{0 \text{ m. } 80}, \quad 0 \text{ m. } 80 - 3 \text{ m. } 45 = \underline{-2 \text{ m. } 65}.$$

$$2^{\text{e}} \text{ point : } \frac{1}{2} \frac{L}{a}$$

Ouverture = 103

Débit = 955 litres

$v_1 = 1 \text{ m. } 85$

$$\xi = 108,8 \times \frac{1,90 - 1,85}{1 + \frac{1.068 \times 1,85}{4.950}} = 108,8 \times \frac{0,05}{1,40}$$

$$\xi = 108,8 \times 0,0356 = \underline{3 \text{ m. } 90}, \quad 3,90 - 3,35 = \underline{0 \text{ m. } 55}.$$

$$3^{\text{e}} \text{ point : } \frac{3}{4} \frac{L}{a}$$

Ouverture = 98

Débit = 920 litres

$v_1 = 1 \text{ m. } 78$

$$\xi = 108,8 \times \frac{1,90 - 1,78}{1 + \frac{1.068 \times 1,78}{4.950}} = 108,8 \times \frac{0,12}{1,384}$$

$$\xi = 108,8 \times 0,087 = \underline{9 \text{ m. } 50}, \quad 9,50 - 3,10 = \underline{6 \text{ m. } 40}.$$

$$4^{\circ} \text{ point : } \frac{L}{a}$$

$$\text{Ouverture} = 93,2$$

$$\text{Débit} = 885 \text{ litres}$$

$$v_1 = 1 \text{ m. } 71$$

$$\xi = 108,8 \times \frac{1,90 - 1,71}{1 + \frac{1,068 \times 1,71}{4,950}} = 108,8 \times \frac{0,19}{1,37}$$

$$\xi = 108,8 \times 0,139 = \underline{15 \text{ m. } 10}, \quad 15,10 - 2,95 = \underline{12 \text{ m. } 15}.$$

$$5^{\circ} \text{ point : } \frac{L}{a} + \frac{1}{4} \frac{L}{a}$$

$$\text{Ouverture} = 88,5$$

$$\text{Débit} = 848 \text{ litres}$$

$$v_1 = 1 \text{ m. } 64$$

$$\xi = 108,8 \times \frac{1,90 - 1,64}{1 + \frac{1,068 \times 1,64}{4,950}} = 108,8 \times \frac{0,26}{1,354}$$

$$\xi = 108,8 \times 0,192 = \underline{20 \text{ m. } 90}, \quad 20,90 - 2,75 = \underline{18 \text{ m. } 15}.$$

$$6^{\circ} \text{ point : } \frac{L}{a} + \frac{1}{2} \frac{L}{a}$$

$$\text{Ouverture} = 84$$

$$\text{Débit} = 810 \text{ litres}$$

$$v_1 = 1 \text{ m. } 57$$

$$\xi = 108,8 \times \frac{1,90 - 1,57}{1 + \frac{1,068 \times 1,57}{4,950}} = 108,8 \times \frac{0,33}{1,34}$$

$$\xi = 108,8 \times 0,246 = \underline{26 \text{ m. } 80}, \quad 26,80 - 2,50 = \underline{24 \text{ m. } 30}.$$

$$7^{\circ} \text{ point : } \frac{L}{a} + \frac{3}{4} \frac{L}{a}$$

$$\text{Ouverture} = 79$$

$$\text{Débit} = 765 \text{ litres}$$

$$v_1 = 1 \text{ m. } 48$$

$$\xi = 108,8 \times \frac{1,90 - 1,48}{1 + \frac{1,068 \times 1,48}{4,950}} = 108,8 \times \frac{0,42}{1,32}$$

$$\xi = 108,8 \times 0,318 = \underline{34 \text{ m. } 60}, \quad 34,60 - 2,30 = \underline{32 \text{ m. } 30}.$$

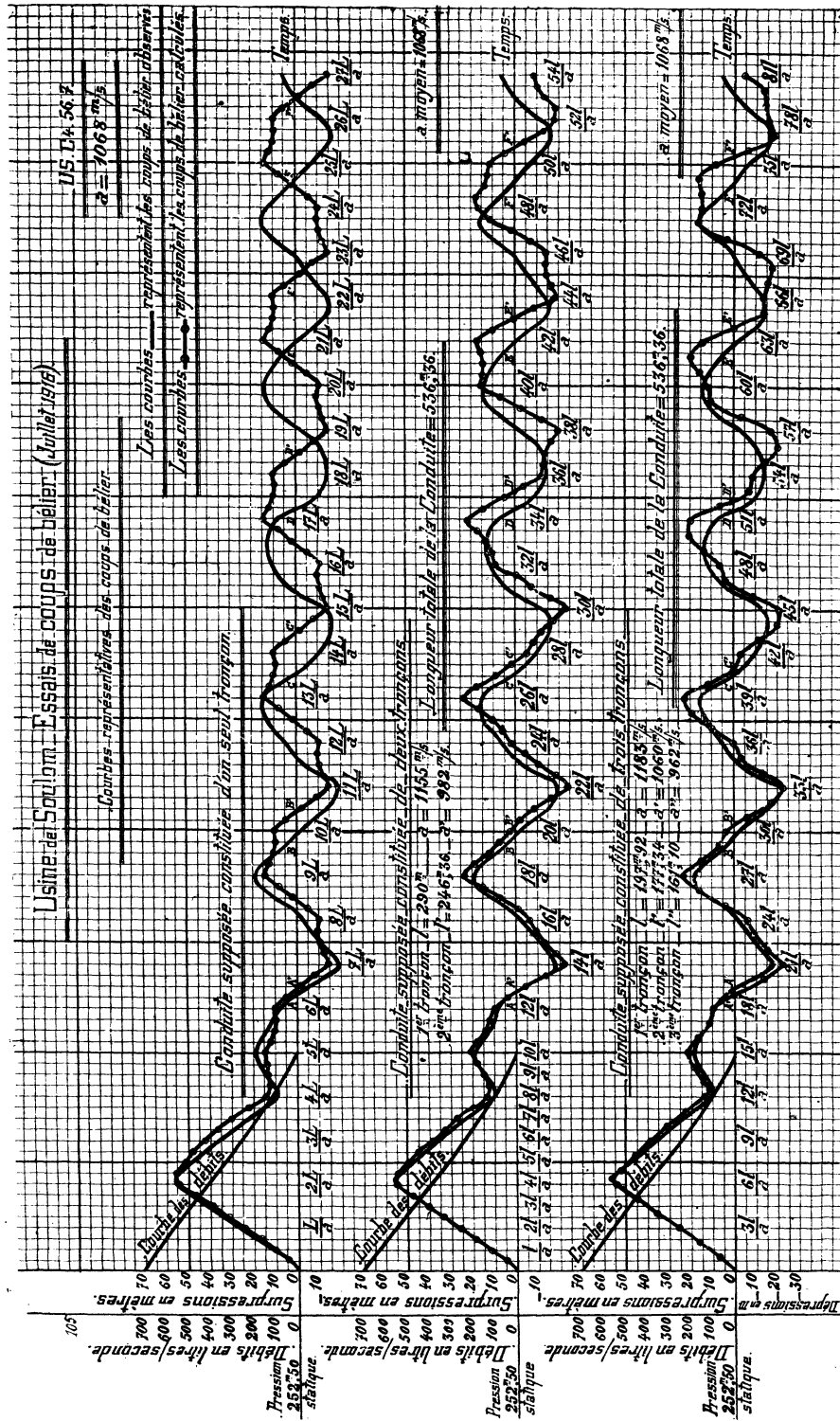


Fig. 105.

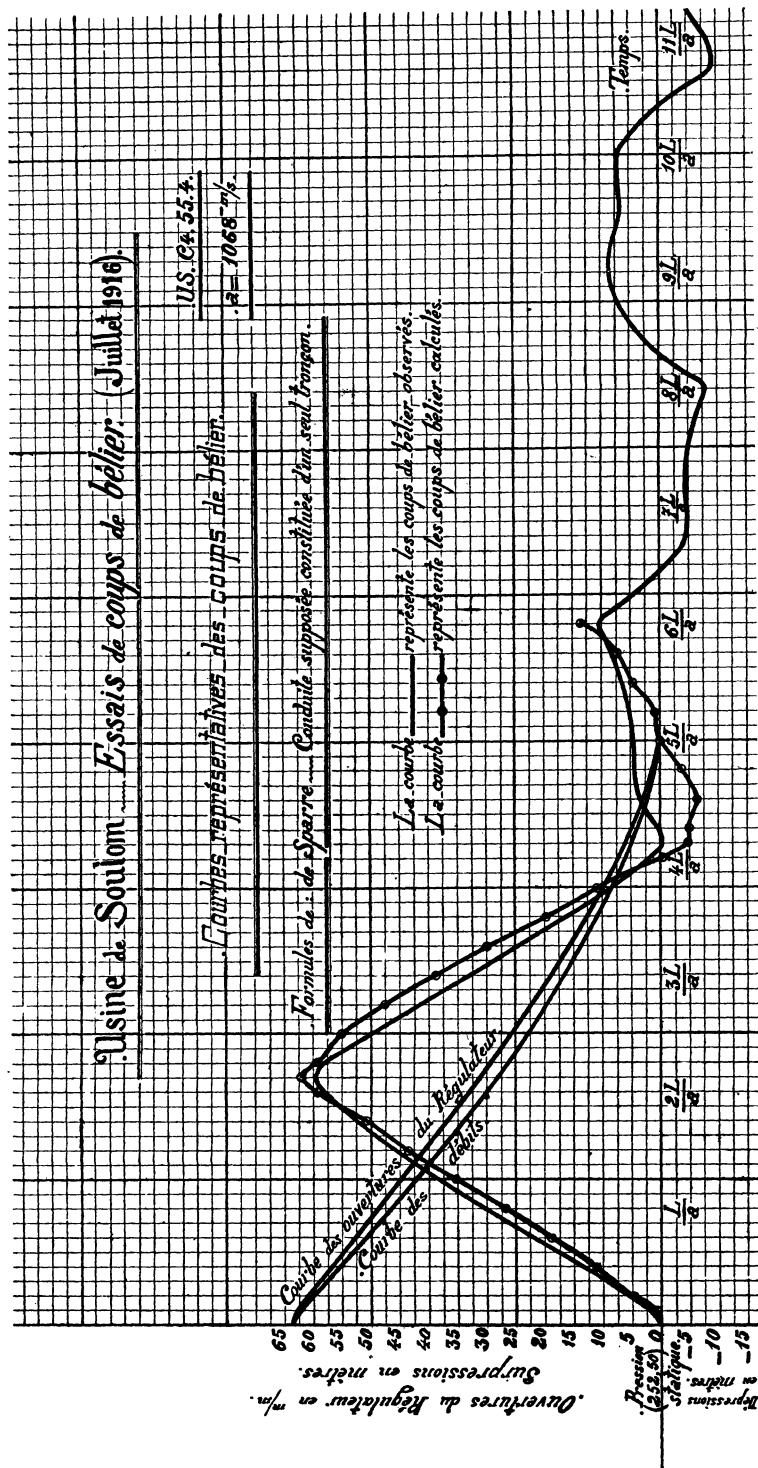


Fig. 106.

$$8^{\circ} \text{ point : } \frac{2L}{a}$$

$$\text{Ouverture} = 74$$

$$\text{Débit} = 720 \text{ litres}$$

$$v_1 = 1 \text{ m. } 395$$

$$\xi = 108,8 \times \frac{1,90 - 1,395}{1 + \frac{1,068 \times 1,39}{4,950}} = 108,8 \times \frac{0,505}{1,3}$$

$$\xi = 108,8 \times 0,388 = \underline{41 \text{ m. } 70}, \quad 41,70 - 2,05 = \underline{39 \text{ m. } 65}.$$

$$2^{\circ} \text{ PÉRIODE : } \frac{2L}{a} < t \leq \frac{4L}{a}.$$

Le coup de bélier ξ_2 est donné par :

$$\xi_2 = \frac{a}{g} \times \frac{v_1 - v_2}{1 + \frac{av_2}{2gy_0}} - \xi_1 \times \frac{1 - \frac{av_1}{2gy_0}}{1 + \frac{av_2}{2gy_0}}.$$

$$9^{\circ} \text{ point : } \frac{2L}{a} + \frac{1}{4} \frac{L}{a}$$

$$\text{Ouverture} = 69,5$$

$$v_1 = 1,89$$

$$\text{Débit} = 678 \text{ litres}$$

$$v_2 = 1 \text{ m. } 31$$

$$\xi = 108,8 \times \frac{1,89 - 1,31}{1 + \frac{1,068 \times 1,31}{4,950}} - 0,80 \times \frac{0,592}{1,283}$$

$$\xi = 108,8 \times \frac{0,58}{1,283} - 0,8 \times \frac{0,592}{1,283} = 108,8 \times 0,451 - 0,8 \times 0,46$$

$$\xi = 49,17 - 0,37 = \underline{48 \text{ m. } 80}, \quad 48,80 - 1,8 = \underline{47 \text{ m. } 00}.$$

$$10^{\circ} \text{ point : } \frac{2L}{a} + \frac{1}{2} \frac{L}{a}$$

$$\text{Ouverture} = 64,5$$

$$v_1 = 1,85$$

$$\text{Débit} = 632 \text{ litres}$$

$$v_2 = 1 \text{ m. } 23$$

$$\xi = 108,8 \times \frac{1,85 - 1,23}{1 + \frac{1,068 \times 1,23}{4,950}} - 3,90 \times \frac{1 - 0,4}{1,266}$$

$$\xi = 108,8 \times \frac{0,62}{1,266} - 3,90 \times \frac{0,6}{1,266} = 108,8 \times 0,49 - 3,90 \times 0,475$$

$$\xi = 53,3 - 1,85 = \underline{51 \text{ m. } 45}, \quad 51,45 - 1,60 = \underline{49 \text{ m. } 85}.$$

$$11^{\circ} \text{ point : } \frac{2L}{a} + \frac{3}{4} \frac{L}{a}$$

$$\text{Ouverture} = 60$$

$$v_1 = 1,78$$

$$\text{Débit} = 585 \text{ litres}$$

$$v_2 = 1 \text{ m. } 13$$

$$\xi = 108,8 \times \frac{1,78 - 1,13}{1 + \frac{1,068 \times 1,13}{4,950}} - 9,5 \times \frac{1 - 0,384}{1,244}$$

$$\xi = 108,8 \times \frac{0,65}{1,244} - 9,5 \times \frac{0,616}{1,244} = 108,8 \times 0,521 - 9,5 \times 0,495$$

$$\xi = 56,80 - 4,75 = \underline{52 \text{ m. } 10}, \quad 52,10 - 1,40 = \underline{50 \text{ m. } 70}.$$

$$12^{\circ} \text{ point : } \frac{3L}{a}$$

$$\text{Ouverture} = 55,5$$

$$v_1 = 1,71$$

$$\text{Débit} = 537 \text{ litres}$$

$$v_2 = 1 \text{ m. } 04$$

$$\xi = 108,8 \times \frac{1,71 - 1,04}{1 + \frac{1,068 \times 1,04}{4,950}} - 15,10 \times \frac{1 - 0,37}{1,225}$$

$$\xi = 108,8 \times \frac{0,67}{1,225} - 15,10 \times \frac{0,63}{1,225} = 108,8 \times 0,546 - 15,10 \times 0,515$$

$$\xi = 59,50 - 7,80 = \underline{51 \text{ m. } 70}, \quad 51,70 - 1,15 = \underline{50 \text{ m. } 55}.$$

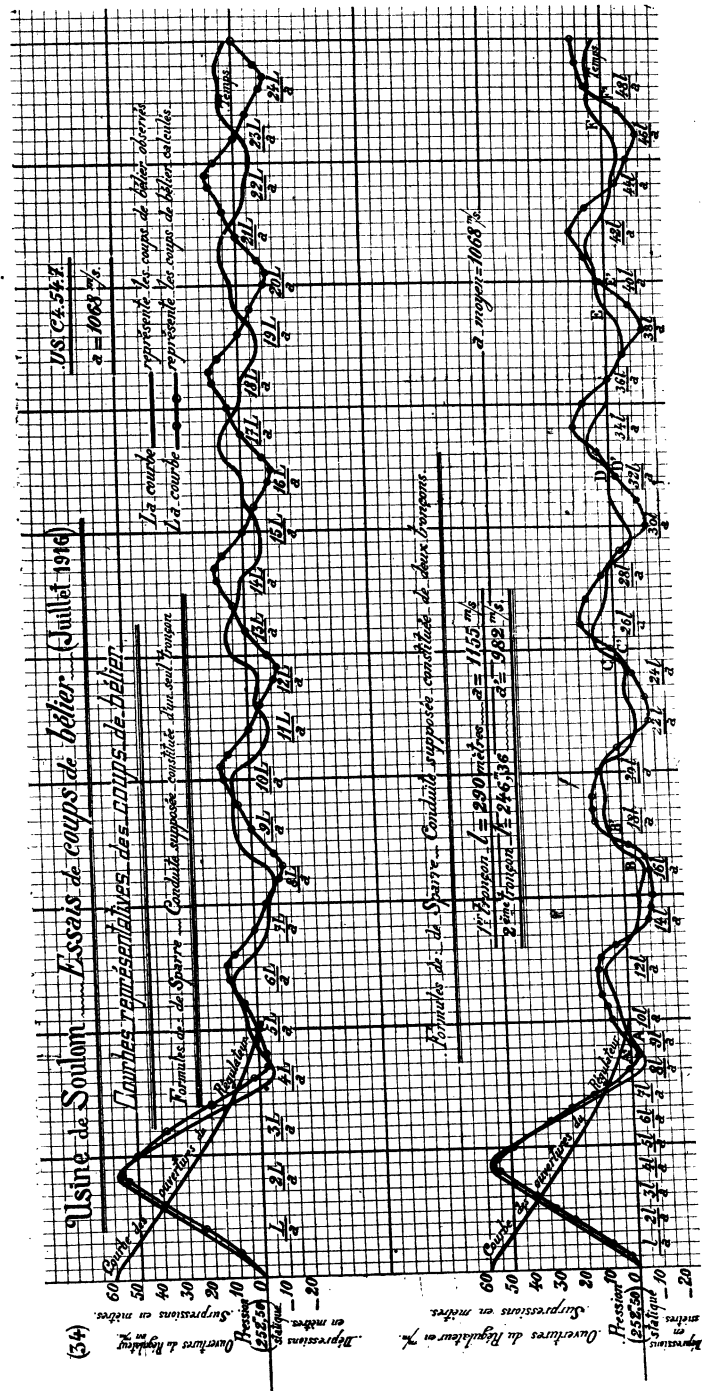


FIG. 107.

$$13^{\circ} \text{ point : } \frac{3L}{a} + \frac{1}{4} \frac{L}{a}$$

$$\text{Ouverture} = 51$$

$$v_1 = 1,64$$

$$\text{Débit} = 490 \text{ litres}$$

$$v_2 = 0,955$$

$$\xi = 108,8 \times \frac{1,64 - 0,955}{1 + \frac{1,068 \times 0,955}{4,950}} - 20,90 \times \frac{1 - 0,354}{1,206}$$

$$\xi = 108,8 \times \frac{0,685}{1,206} - 20,90 \times \frac{0,646}{1,206} = 108,8 \times 0,567 - 20,90 \times 0,535$$

$$\xi = 61,80 - 11,30 = \underline{50 \text{ m. } 50}, \quad 50,50 - 0,95 = \underline{49 \text{ m. } 55}.$$

$$14^{\circ} \text{ point : } \frac{3L}{a} + \frac{1}{2} \frac{L}{a}$$

$$\text{Ouverture} = 46$$

$$v_1 = 1,57$$

$$\text{Débit} = 435 \text{ litres}$$

$$v_2 = 0,845$$

$$\xi = 108,8 \times \frac{1,57 - 0,845}{1 + \frac{1,068 \times 0,845}{4,950}} - 26,80 \times \frac{1 - 0,34}{1,183}$$

$$\xi = 108,8 \times \frac{0,725}{1,183} - 26,80 \times \frac{0,66}{1,183} = 108,8 \times 0,612 - 26,8 \times 0,557$$

$$\xi = 66,6 - 14,9 = \underline{51 \text{ m. } 70}, \quad 51,70 - 0,70 = \underline{51 \text{ m. } 00}.$$

$$15^{\circ} \text{ point : } \frac{3L}{a} + \frac{3}{4} \frac{L}{a}$$

$$\text{Ouverture} = 41$$

$$v_1 = 1,48$$

$$\text{Débit} = 385 \text{ litres}$$

$$v_2 = 0,745$$

$$\xi = 108,8 \times \frac{1,48 - 0,745}{1 + \frac{1,068 \times 0,745}{4,950}} - 34,60 \times \frac{1 - 0,32}{1,161}$$

$$\xi = 108,8 \times \frac{0,735}{1,161} - 34,60 \times \frac{0,68}{1,161} = 108,8 \times 0,633 - 34,60 \times 0,585$$

$$\xi = 68,70 - 20,20 = \underline{48 \text{ m. } 50}, \quad 48,50 - 0,50 = \underline{48 \text{ m. } 00}.$$

$$16^{\text{e}} \text{ point : } \frac{4L}{a}$$

$$\text{Ouverture} = 37$$

$$v_1 = 1,395$$

$$\text{Débit} = 342 \text{ litres}$$

$$v_2 = 0,665$$

$$H = 108,8 \times \frac{1,395 - 0,665}{1 + \frac{1,068 \times 0,665}{4,950}} - 41,70 \times \frac{1 - 0,3}{1,143}$$

$$H = 108,8 \times \frac{0,73}{1,143} - 41,70 \times \frac{0,70}{1,143} = 108,8 \times 0,639 - 41,70 \times 0,612$$

$$H = 69,00 - 25,60 = \underline{43 \text{ m. } 40}, \quad 43,40 - 0,35 = \underline{43 \text{ m. } 05}.$$

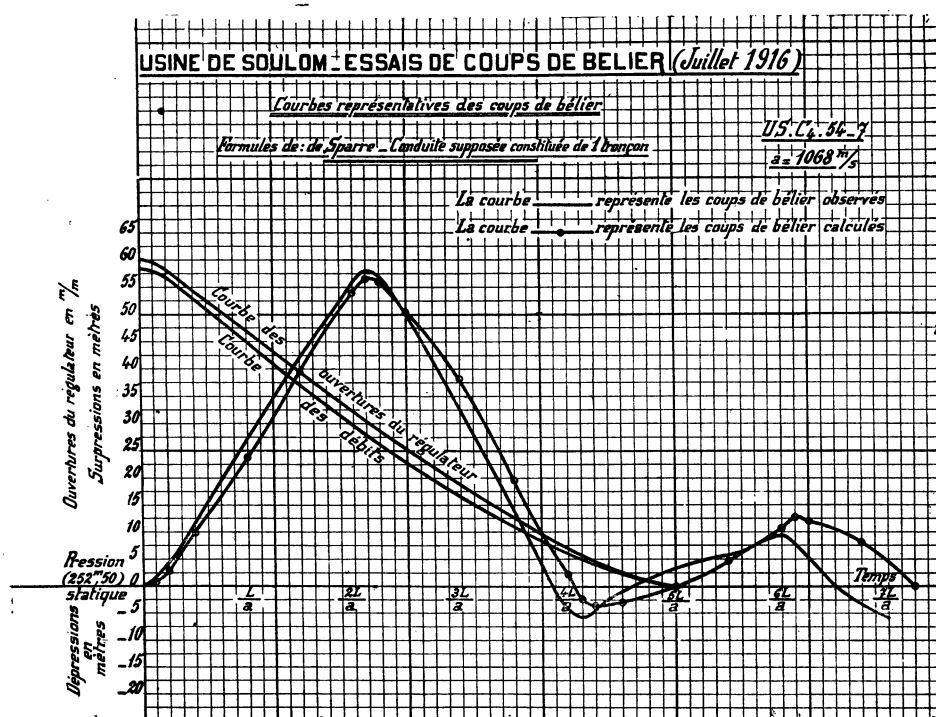


FIG. 107.

$$3^{\text{e}} \text{ PÉRIODE : } \frac{4L}{a} < t \leq \frac{6L}{a}.$$

$$17^{\text{e}} \text{ point : } \frac{4L}{a} + \frac{1}{4} \frac{L}{a}$$

$$\text{Ouverture} = 32,2$$

$$v_2 = 1,31$$

$$\text{Débit} = 295 \text{ litres}$$

$$v_3 = 0,575$$

$$\xi = 108,8 \times \frac{1,31 - 0,575}{1 + \frac{1,068 \times 0,575}{4,950}} - 48,80 \times \frac{1 - 0,283}{1,124}$$

$$\xi = 108,8 \times \frac{0,735}{1,124} - 48,80 \times \frac{0,717}{1,124} = 108,8 \times 0,654 - 48,8 \times 0,636$$

$$\xi = 71,00 - 31,00 = \underline{40 \text{ m. } 00}, \quad 40,00 - 0,20 = \underline{39 \text{ m. } 80}.$$

$$18^{\text{e}} \text{ point : } \frac{4L}{a} + \frac{1}{2} \frac{L}{a}$$

$$\text{Ouverture} = 28$$

$$v_2 = 1,23$$

$$\text{Débit} = 252 \text{ litres}$$

$$v_3 = 0,49$$

$$\xi = 108,8 \times \frac{1,23 - 0,49}{1 + \frac{1,068 \times 0,49}{4,950}} - 51,45 \times \frac{1 - 0,266}{1,105}$$

$$\xi = 108,8 \times \frac{0,74}{1,105} - 51,45 \times \frac{0,734}{1,105} = 108,8 \times 0,67 - 51,45 \times 0,665$$

$$\xi = 72,8 - 34,2 = \underline{38 \text{ m. } 60}.$$

$$19^{\text{e}} \text{ point : } \frac{4L}{a} + \frac{3}{4} \frac{L}{a}$$

$$\text{Ouverture} = 24$$

$$v_2 = 1,13$$

$$\text{Débit} = 215 \text{ litres}$$

$$v_3 = 0,418$$

$$\xi = 108,8 \times \frac{1,13 - 0,418}{1 + \frac{1,068 \times 0,418}{4,950}} - 52,10 \times \frac{1 - 0,244}{1,091}$$

$$\xi = 108,8 \times \frac{0,712}{1,091} - 52,10 \times \frac{0,756}{1,091} = 108,8 \times 0,654 - 52,10 \times 0,694$$

$$\xi = 71,00 - 36,00 = \underline{35 \text{ m. } 00}.$$

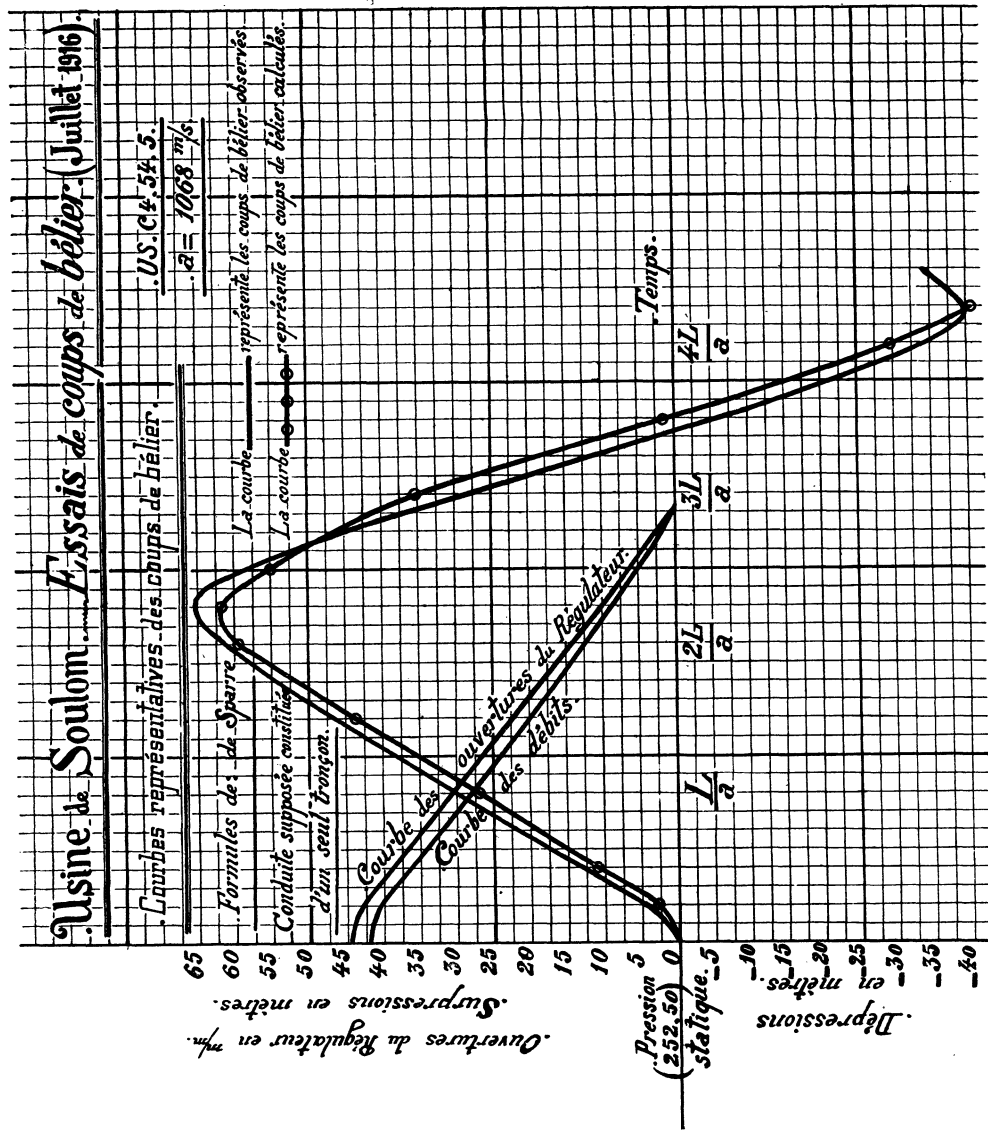


FIG. 108.

$$20^{\text{e}} \text{ point : } \frac{5L}{a}$$

$$\text{Ouverture} = 20$$

$$v_2 = 1,04$$

$$\text{Débit} = 177 \text{ litres}$$

$$v_3 = 0,34$$

$$\xi = 108,8 \times \frac{1,04 - 0,34}{1 + \frac{1,068 \times 0,34}{4,950}} - 51,70 \times \frac{1 - 0,225}{1,073}$$

$$\xi = 108,8 \times \frac{0,70}{1,073} - 51,70 \times \frac{0,775}{1,073} = 108,8 \times 0,652 - 51,70 \times 0,72$$

$$\xi = 70,80 - 37,40 = \underline{33 \text{ m. } 40.}$$

$$21^{\text{e}} \text{ point : } \frac{5L}{a} + \frac{1}{4} \frac{L}{a}$$

$$\text{Ouverture} = 16$$

$$v_2 = 0,955$$

$$\text{Débit} = 140 \text{ litres}$$

$$v_3 = 0,272$$

$$\xi = 108,8 \times \frac{0,955 - 0,272}{1 + \frac{1,068 \times 0,272}{4,950}} - 50,50 \times \frac{1 - 0,206}{1,059}$$

$$\xi = 108,8 \times \frac{0,683}{1,059} - 50,50 \times \frac{0,794}{1,059} = 108,8 \times 0,644 - 50,50 \times 0,75$$

$$\xi = 70,40 - 37,80 = \underline{32 \text{ m. } 60.}$$

$$22^{\text{e}} \text{ point : } \frac{5L}{a} + \frac{1}{2} \frac{L}{a}$$

$$\text{Ouverture} = 13$$

$$v_2 = 0,845$$

$$\text{Débit} = 115 \text{ litres}$$

$$v_3 = 0,224$$

$$\xi = 108,8 \times \frac{0,845 - 0,224}{1 + \frac{1,068 \times 0,224}{4,950}} - 51,70 \times \frac{1 - 0,183}{1,048}$$

$$\xi = 108,8 \times \frac{0,621}{1,048} - 51,70 \times \frac{0,817}{1,048} = 108,8 \times 0,592 - 51,70 \times 0,78$$

$$\xi = 64,50 - 40,40 = \underline{24 \text{ m. } 10.}$$

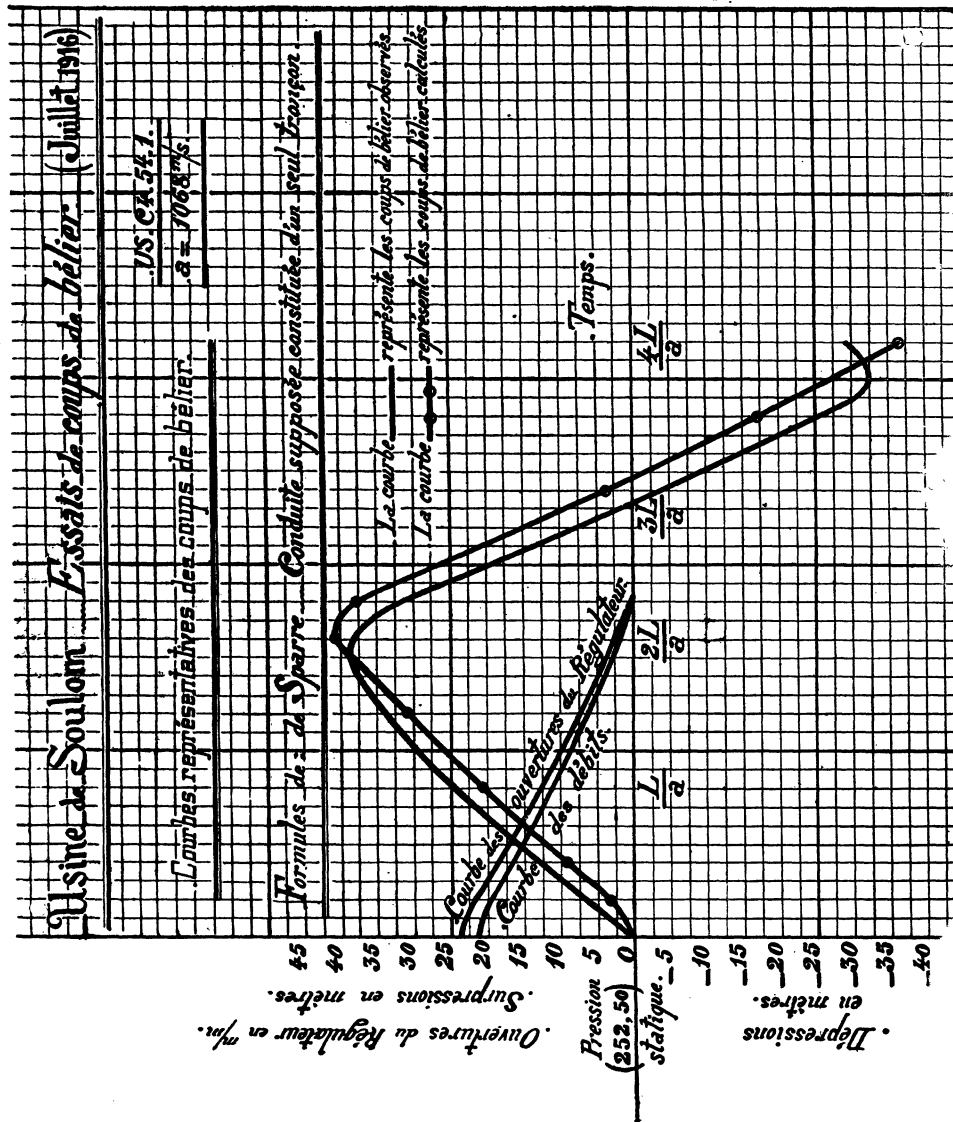


Fig. 109.

$$23^{\circ} \text{ point : } \frac{5L}{a} + \frac{3}{4} \frac{L}{a}$$

$$\text{Ouverture} = 9,3$$

$$v_2 = 0,745$$

$$\text{Débit} = 83 \text{ litres}$$

$$v_3 = 0,161$$

$$\xi = 108,8 \times \frac{0,745 - 0,161}{1 + \frac{1,068 \times 0,161}{4,950}} - 48,50 \times \frac{1 - 0,161}{1,035}$$

$$\xi = 108,8 \times \frac{0,584}{1,035} - 48,50 \times \frac{0,839}{1,035} = 108,8 \times 0,565 - 48,50 \times 0,81$$

$$\xi = 61,40 - 39,20 = \underline{22 \text{ m. } 20.}$$

$$24^{\circ} \text{ point : } \frac{6L}{a}$$

$$\text{Ouverture} = 6$$

$$v_2 = 0,665$$

$$\text{Débit} = 55 \text{ litres}$$

$$v_3 = 0,106$$

$$\xi = 108,8 \times \frac{0,665 - 0,106}{1 + \frac{1,068 \times 0,106}{4,950}} - 43,40 \times \frac{1 - 0,143}{1,023}$$

$$\xi = 108,8 \times \frac{0,559}{1,023} - 43,40 \times \frac{0,857}{1,023} = 108,8 \times 0,545 - 43,40 \times 0,836$$

$$\xi = 59,40 - 36,30 = \underline{23 \text{ m. } 10.}$$

$$4^{\circ} \text{ PÉRIODE : } \frac{6L}{a} < t \leq \frac{8L}{a}$$

$$25^{\circ} \text{ point : } \frac{6L}{a} + \frac{1}{4} \frac{L}{a}$$

$$\text{Ouverture} = 2,5$$

$$v_2 = 0,575$$

$$\text{Débit} = 22 \text{ litres}$$

$$v_3 = 0,043$$

$$\xi = 108,8 \times \frac{0,575 - 0,043}{1 + \frac{1,068 \times 0,043}{4,950}} - 40,00 \times \frac{1 - 0,124}{1,009}$$

$$\xi = 108,8 \times \frac{0,532}{1,009} - 40 \times \frac{0,876}{1,009} = 108,8 \times 0,527 - 40 \times 0,867$$

$$\xi = 57,30 - 34,70 = \underline{22 \text{ m. } 60.}$$

$$26^{\circ} \text{ point : } \frac{6L}{a} + \frac{1}{2} \frac{L}{a}$$

$$\text{Ouverture} = 1$$

$$v_3 = 0,49$$

$$\text{Débit} = 10 \text{ litres}$$

$$v_4 = 0,019$$

$$\xi = 108,8 \times \frac{0,49 - 0,019}{1 + \frac{1,068 \times 0,019}{4,950}} - 38,60 \times \frac{1 - 0,105}{1,004}$$

$$\xi = 108,8 \times \frac{0,471}{1,004} - 38,60 \times \frac{0,895}{1,004} = 108,8 \times 0,469 - 38,60 \times 0,892$$

$$\xi = 51,00 - 34,40 = \underline{16 \text{ m. } 60.}$$

$$27^{\circ} \text{ point : } \frac{6L}{a} + \frac{3}{4} \frac{L}{a}$$

$$\text{Ouverture} = 0,8$$

$$v_3 = 0,418$$

$$\text{Débit} = 8 \text{ litres}$$

$$v_4 = 0,015$$

$$\xi = 108,8 \times \frac{0,418 - 0,015}{1 + \frac{1,068 \times 0,015}{4,950}} - 35 \times \frac{1 - 0,091}{1,003}$$

$$\xi = 108,8 \times \frac{0,403}{1,003} - 35 \times \frac{0,909}{1,003} = 108,8 \times 0,401 - 35 \times 0,907$$

$$\xi = 43,50 - 31,50 = \underline{12 \text{ m. } 00.}$$

$$28^{\circ} \text{ point : } \frac{7L}{a}$$

$$\text{Ouverture} = 0,5$$

$$v_3 = 0,34$$

$$\text{Débit} = 5 \text{ litres}$$

$$v_4 = 0,009$$

$$\xi = 108,8 \times \frac{0,34 - 0,009}{1 + \frac{1,068 \times 0,009}{4,950}} - 33,40 \times \frac{1 - 0,073}{1,002}$$

$$\xi = 108,8 \times \frac{0,331}{1,002} - 33,40 \times \frac{0,927}{1,002} = 108,8 \times 0,33 - 33,40 \times 0,926$$

$$\xi = 36,00 - 30,80 = \underline{5 \text{ m. } 20.}$$

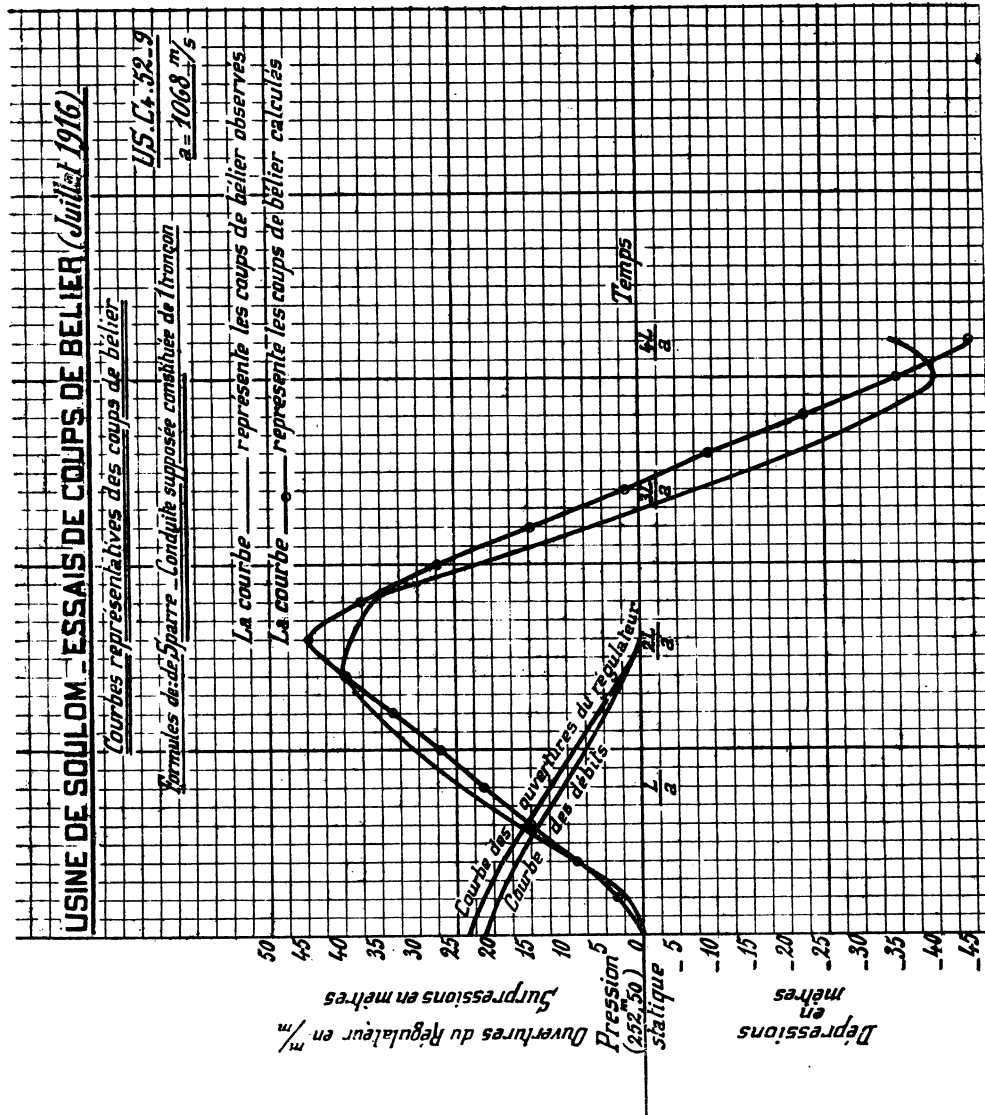


FIG. III.

$$29^{\circ} \text{ point : } \frac{7L}{a} + \frac{1}{4} \frac{L}{a}$$

$$\text{Ouverture} = 0,3$$

$$v_3 = 0,272$$

$$\text{Débit} = 3 \text{ litres}$$

$$v_4 = 0,006$$

$$\xi = 108,8 \times \frac{0,272 - 0,006}{1 + \frac{1,068 \times 0,006}{4,950}} - 32,60 \times \frac{1 - 0,059}{1,001}$$

$$\xi = 108,8 \times \frac{0,266}{1,001} - 32,60 \times \frac{0,941}{1,001} = 108,8 \times 0,265 - 32,60 \times 0,94$$

$$\xi = 29,00 - 30,60 = \underline{\underline{-1 \text{ m. } 60.}}$$

$$30^{\circ} \text{ point : } \frac{7L}{a} + \frac{1}{2} \frac{L}{a}$$

$$v_3 = 0,224$$

$$\text{Ouverture} = 0$$

$$\xi = 108,8 \times 0,224 - 24,10 \times 0,952 = 24,40 - 22,80 = \underline{\underline{1 \text{ m. } 60.}}$$

$$31^{\circ} \text{ point : } \frac{7L}{a} + \frac{3}{4} \frac{L}{a}$$

$$v_3 = 0,161.$$

$$\xi = 108,8 \times 0,161 - 22,20 \times 0,965 = 17,50 - 21,30 = \underline{\underline{-3 \text{ m. } 80.}}$$

$$32^{\circ} \text{ point : } \frac{8L}{a}$$

$$v_3 = 0,106$$

$$\xi = 108,8 \times 0,106 - 23,10 \times 0,977 = 11,50 - 22,50 = \underline{\underline{-11 \text{ m. } 00.}}$$

$$5^{\circ} \text{ PÉRIODE : } \frac{8L}{a} < t \leq \frac{10L}{a}.$$

$$33^{\circ} \text{ point : } \frac{8L}{a} + \frac{1}{4} \frac{L}{a}$$

$$v_4 = 0,043$$

$$\xi = 108,8 \times 0,043 - 22,60 \times 0,991 = 4,70 - 22,40 = \underline{\underline{-17 \text{ m. } 70.}}$$

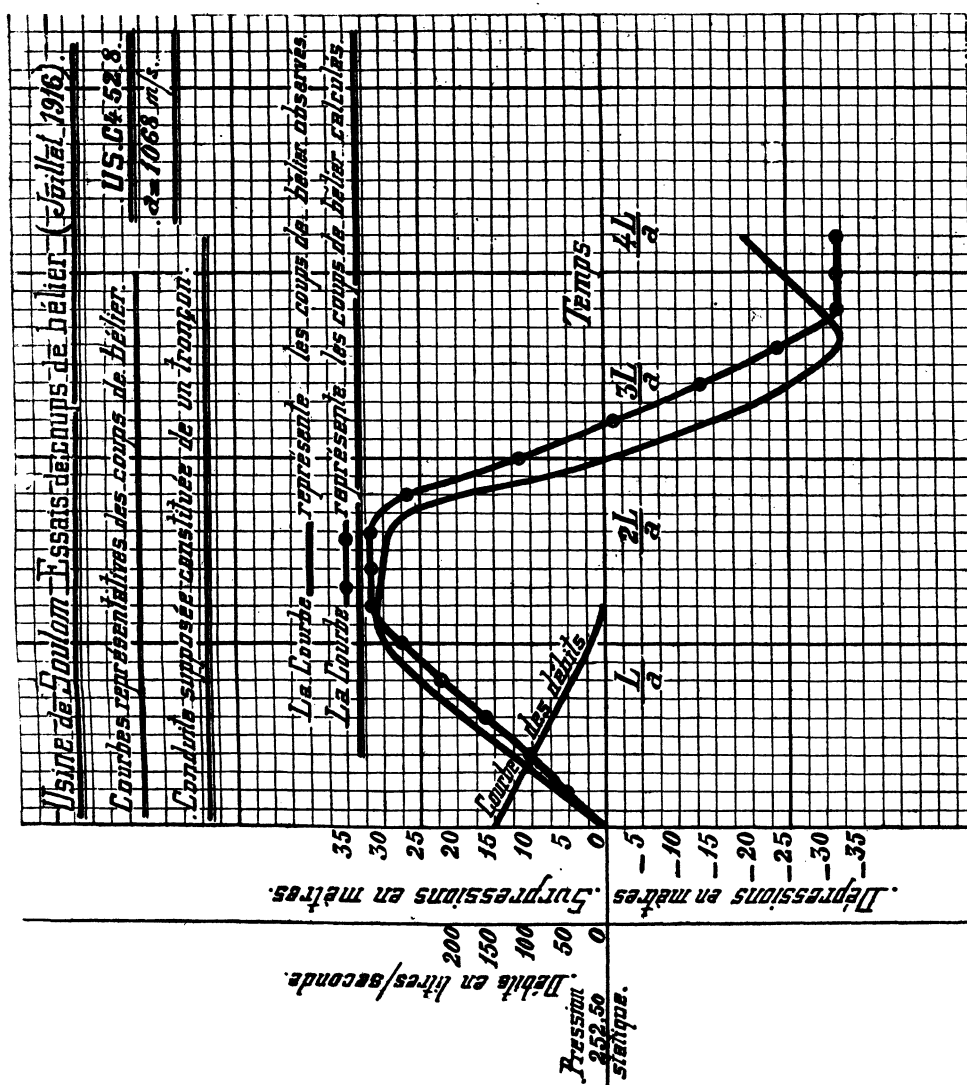


FIG. 112.

$$34^{\circ} \text{ point : } \frac{8L}{a} + \frac{1}{2} \frac{L}{a}$$

$$v_1 = 0,019$$

$$\xi = 108,8 \times 0,019 - 16,60 \times 0,996 = 2,06 - 16,50 = \underline{-14 \text{ m. } 44.}$$

$$35^{\circ} \text{ point : } \frac{8L}{a} + \frac{3}{4} \frac{L}{a}$$

$$v_1 = 0,015$$

$$\xi = 108,8 \times 0,015 - 12 \times 0,997 = 1,63 - 11,93 = \underline{-10 \text{ m. } 30.}$$

$$36^{\circ} \text{ point : } \frac{9L}{a}$$

$$v_1 = 0,009$$

$$\xi = 108,8 \times 0,009 - 5,20 \times 0,998 = 0,98 - 5,18 = \underline{-4 \text{ m. } 20.}$$

$$37^{\circ} \text{ point : } \frac{9L}{a} + \frac{1}{4} \frac{L}{a}$$

$$v_1 = 0,006$$

$$\xi = 108,8 \times 0,006 + 1,6 \times 0,999 = 0,65 + 1,60 = \underline{2 \text{ m. } 25.}$$

$$38^{\circ} \text{ point : } \frac{9L}{a} + \frac{1}{2} \frac{L}{a}$$

$$v_1 = 0,00$$

$$\xi = \underline{-1 \text{ m. } 60.}$$

$$39^{\circ} \text{ point : } \frac{9L}{a} + \frac{3}{4} \frac{L}{a}$$

$$\xi = \underline{3 \text{ m. } 80.}$$

$$40^{\circ} \text{ point : } \frac{10L}{a}$$

$$\xi = \underline{11 \text{ m. } 00.}$$

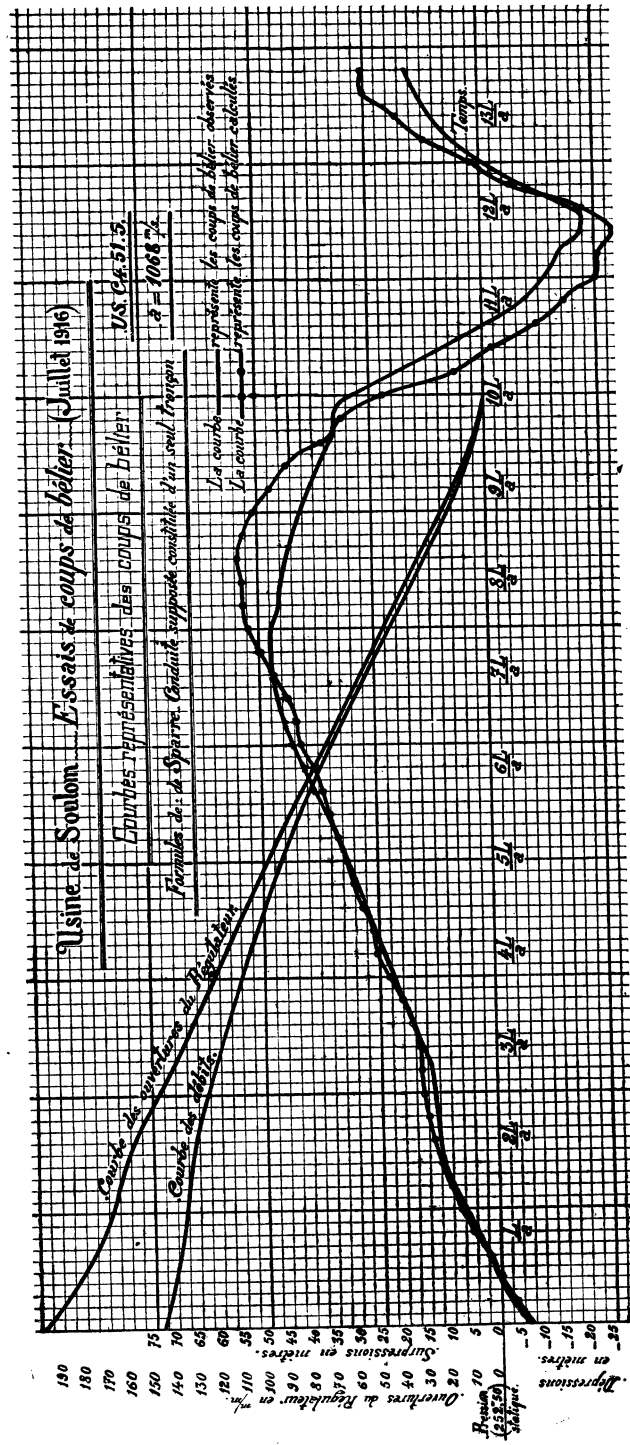


Fig. 113.

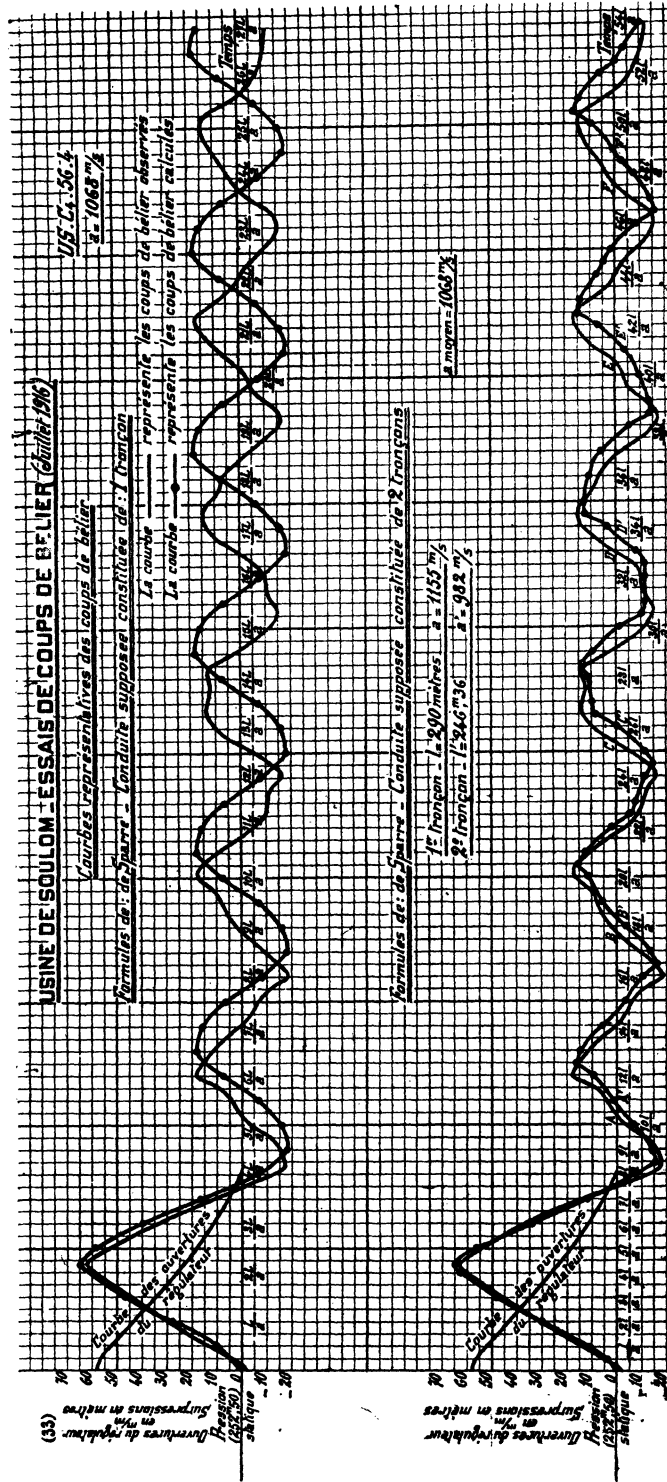


Fig. 114.

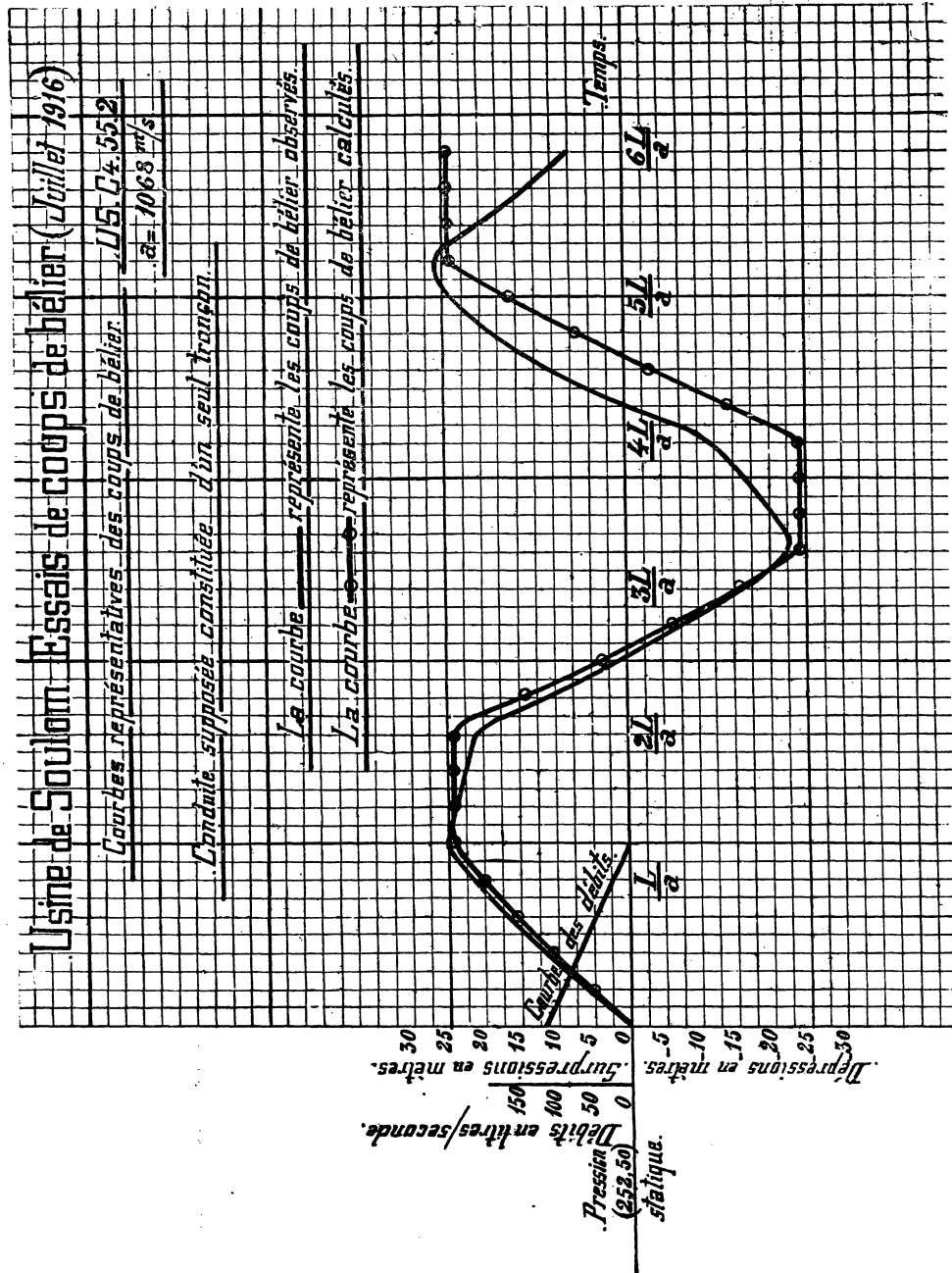


FIG. 115.

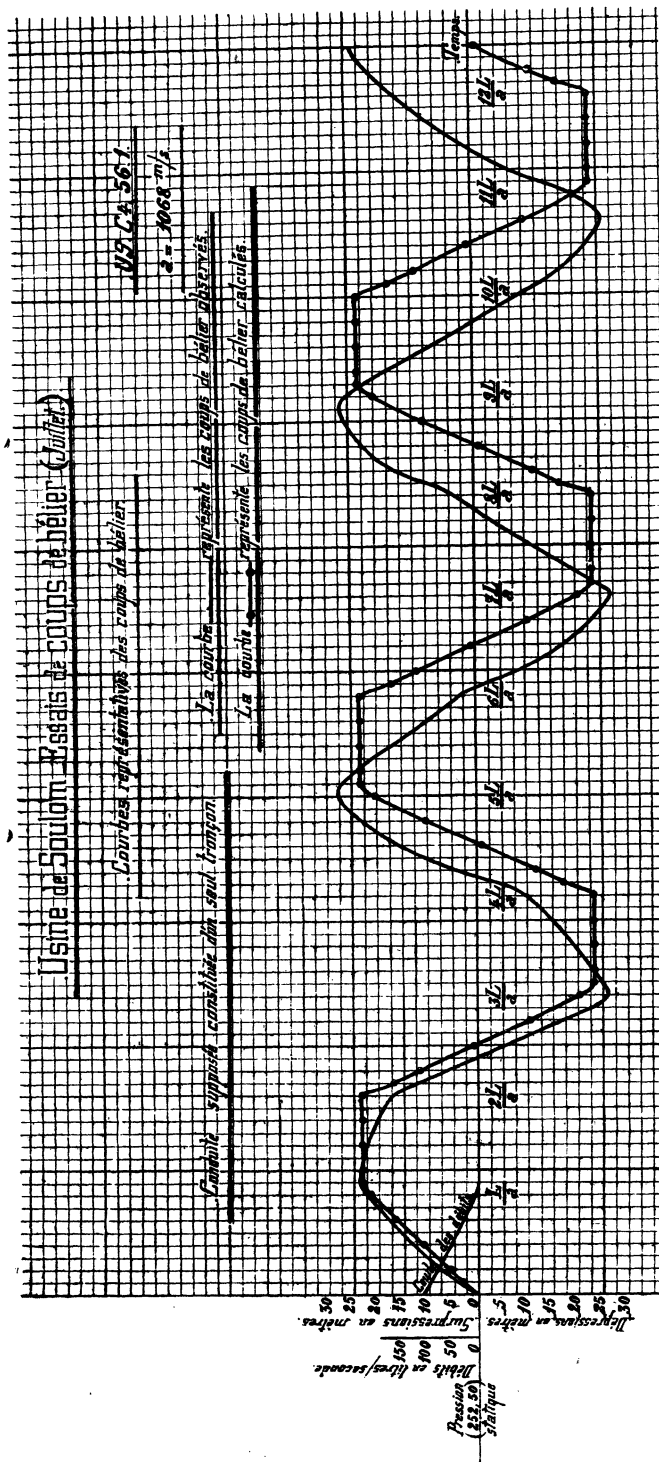


FIG. 116.

66. Indications sur les graphiques calculés par les méthodes précédentes.

Ayant ainsi exposé les modes de calcul que nous avons employés, nous analyserons maintenant les résultats obtenus sur un certain nombre d'expériences, au cours desquelles avaient été relevés les diagrammes.

US-C_s-56-4 (*fig. 103*)

(fermeture en un temps voisin de $\frac{4L}{a}$)

US-C_s-56-7 (*fig. 105*, 1^{er} graphique)

(fermeture en un temps voisin de $\frac{5L}{a}$)

US-C_s-55-4 (*fig. 106*)

(fermeture en un temps égal à $\frac{5L}{a}$)

US-C_s-54-7 (*fig. 107*)

(fermeture en un temps égal à $\frac{5L}{a}$)

US-C_s-54-5 (*fig. 108*)

(fermeture en un temps égal à $\frac{3L}{a}$)

US-C_s-54-1 (*fig. 109*)

(fermeture en un temps un peu supérieur à $\frac{2L}{a}$)

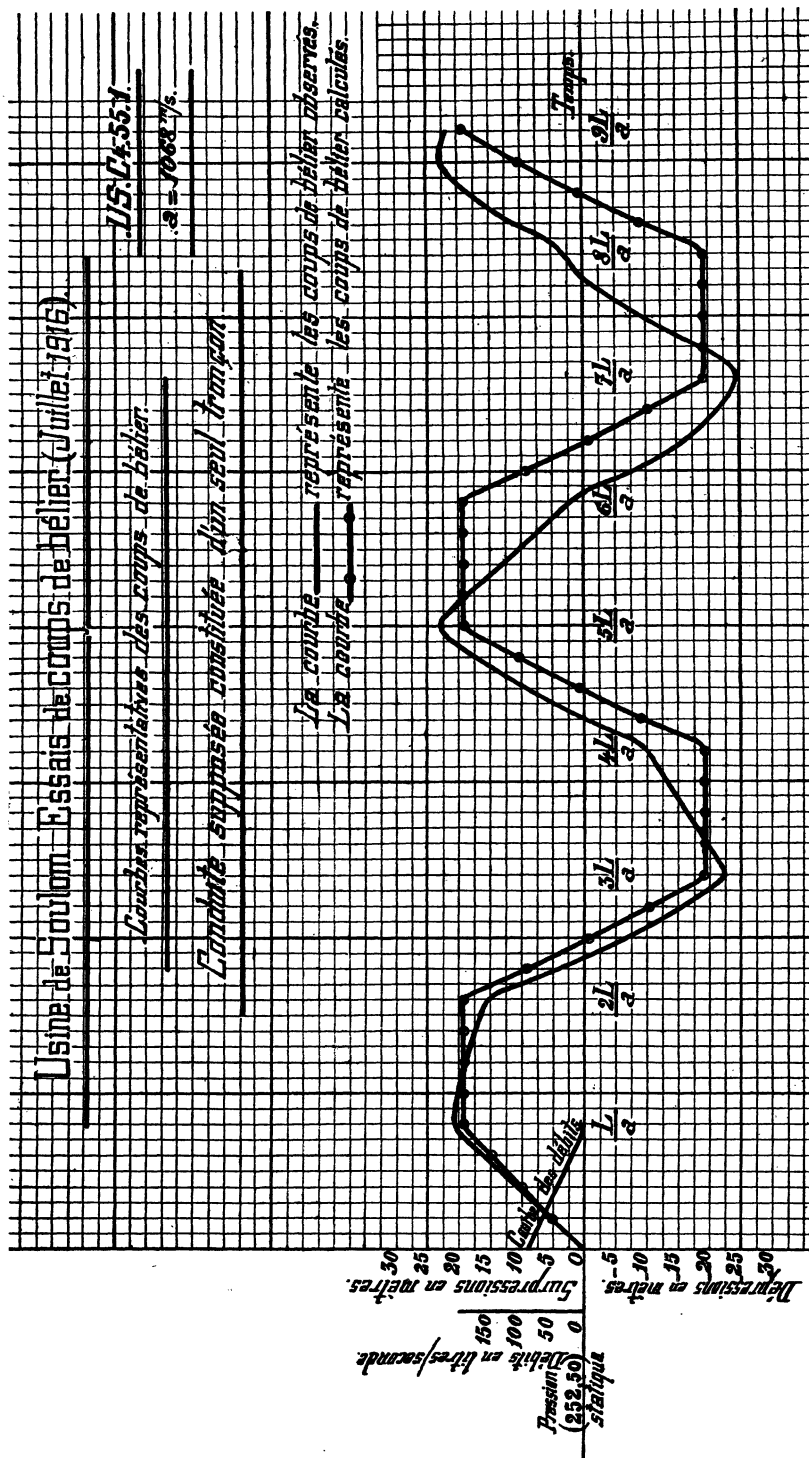


FIG. 117.

US-C_s-55-3 (*fig. 110*)

(fermeture en un temps égal à $\frac{3L}{a}$)

US-C_s-52-9 (*fig. 111*)

(fermeture en un temps égal à $\frac{2L}{a}$)

US-C_s-52-8 (*fig. 112*)

(fermeture en un temps un peu inférieur à $\frac{2L}{a}$)

Tableau relatif au calcul en un tronçon des coups de bélier au distributeur dans la conduite C₁ de Souloim.

NUMÉROS des FIGURES	NUMÉROS des GRAPHIQUES	$\frac{L}{a}$		$\frac{2L}{a}$		$\frac{3L}{a}$		$\frac{4L}{a}$		$\frac{5L}{a}$		$\frac{6L}{a}$		$\frac{7L}{a}$		$\frac{8L}{a}$		$\frac{9L}{a}$		$\frac{10L}{a}$		$\frac{11L}{a}$		$\frac{12L}{a}$		$\frac{13L}{a}$	
		OBS.	CAL.	OBS.	CAL.	OBS.	CAL.	OBS.	CAL.	OBS.	CAL.	OBS.	CAL.	OBS.	CAL.	OBS.	CAL.	OBS.	CAL.	OBS.	CAL.	OBS.	CAL.	OBS.	CAL.	OBS.	CAL.
Fig. 113	US-C ₁ -51-5	5,0	5,5	12,5	14,0	16,0	16,5	24,0	25,5	32,0	32,0	38,5	38,5	47,0	47,0	45,0	53,5	38,5	47,5	28,5	22,5	-8,5	-18,0	-20,0	-22,5	10,5	18,0
Fig. 104	US-C ₁ -56-8	13,0	12,0	40,0	40,0	50,0	50,5	40,0	43,0	35,5	33,0	33,5	28,0	3,5	5,0	-25,0	-11,0	3,0	-5,0	22,5	11,0	-12,0	4,5	-22,5	-11,0	.	.
Fig. 105	US-C ₁ -56-7	26,5	24,5	56,5	55,0	36,5	42,5	10,0	14,5	19,5	14,5	8,5	10,0	-19,5	-14,5	-2,5	-10,0	19,5	14,5	-0,5	10,0	-19,5	-14,5	5,0	-10,0	15,0	15,0
Fig. 106	US-C ₁ -55-4	30,0	27,0	58,0	59,0	33,0	38,5	2,0	-0,5	4,5	0,0	10,0	13,0														
Fig. 107	US-C ₁ -54-7	27,5	23,5	56,5	54,0	32,5	38,0	-4,5	2,0	3,0	0,0	9,5	11,0	-6,0	4,5	-8,5	-10,5	7,0	0,0	7,0	10,0	-8,0	0,0	-4,5	-10,5	7,5	0,0
Fig. 114	US-C ₁ -56-4	29,0	28,0	61,0	63,3	33,5	37,7	-12,0	-8,1	-4,5	-13,7	18,0	9,1	0,5	-13,7	-19,0	-9,1	2,0	-13,7	17,0	9,1	-5,0	13,7	16,0	-9,1	10,0	-13,7
Fig. 110	US-C ₁ -55-3	27,0	23,5	48,0	47,5	8,5	15,0	-28,5	-32,5																		
Fig. 108	US-C ₁ -54-5	30,0	27,0	61,0	59,5	28,5	35,0	-34,5	-30,0																		
Fig. 109	US-C ₁ -54-1	24,5	20,5	38,0	40,5	-3,5	3,5	-29,0	-37,0																		
Fig. 111	US-C ₁ -52-9	24,0	21,0	39,0	44,5	-8,0	2,0	-34,5	-44,5																		
Fig. 112	US-C ₁ -52-8	25,0	22,4	29,5	31,8	-25,0	-13,1	-19,0	-31,8																		
Fig. 115	US-C ₁ -55-2	21,5	20,0	21,0	24,3	-16,2	-16,0	-12,0	-24,3	23,5	16,0	7,5	24,3														
Fig. 116	US-C ₁ -56-1	22,5	21,5	17,5	23,3	-26,0	-20,5	-10,0	-23,3	27,5	20,5	3,0	23,3	-27,0	-20,5	4,0	-23,3	25,5	20,5	-9,5	23,3	-20,5	-20,5	15,0	-23,3	16,0	20,5
Fig. 117	US-C ₁ -55-1	20,5	19,1	15,5	19,1	-22,5	-19,1	-10,0	-19,1	23,0	19,1	2,0	19,1	-24,5	-19,1	3,0	-19,1	22,0	19,1								

Comme on le verra en examinant ces graphiques, nous avons tenu à varier les circonstances de l'expérience, en particulier en faisant varier la durée de fermeture. L'ensemble de ces diagrammes montre une coïncidence vraiment remarquable entre le calcul et l'expérience. Leur examen montre que, pendant les premières périodes, le phénomène se passe très sensiblement suivant les lois théoriques *et comme si la conduite avait une épaisseur moyenne constante correspondant à une vitesse de propagation de 1.068 mètres/secondes*.

Ce résultat n'était pas évident *a priori* et il n'eût pas été absurde de croire qu'une autre vitesse eût donné des résultats plus favorables. Afin d'encadrer les résultats obtenus avec la vitesse 1.068 entre ceux correspondant à d'autres vitesses, nous avons, pour le diagramme 54-7, refait le calcul d'Allievi-de Sparre avec les valeurs suivantes de a :

$$a = 1.000 \quad (\text{fig. 118})$$

$$a = 1.138 \quad (\text{fig. 119}).$$

Ces vitesses ne correspondent à aucune idée théorique. Ainsi que nous l'avons vu plus haut, la valeur $a = 1.138$ est celle que l'on obtient sensiblement en observant le temps moyen qui s'écoule entre deux maxima consécutifs constatés au manomètre.

La comparaison des courbes obtenues avec ces diverses valeurs de a montre que la représentation la plus fidèle du phénomène est celle correspondant à la valeur théorique $a = 1.068$.

L'influence du choix de a se fait particulièrement sentir au voisinage du point $t = \frac{2L}{a}$. En ce point, en effet, l'onde-surpression initiale revient changée de signe de la chambre d'eau. Il en résulte, comme le montrent d'ailleurs les formules, un changement d'allure de la courbe au point $t = \frac{2L}{a}$. Ce point est donc en général un point singulier, souvent maximum et généralement point anguleux. Une vérification excellente de la vitesse de propagation consiste donc à observer si ce point singulier coïncide dans les diagrammes observés et calculés. Mais ici une difficulté se présente : la discontinuité de la courbure au point $\frac{2L}{a}$ peut en effet être assez peu marquée si le démarrage de l'organe de fermeture du distributeur a été lent. Dans ce cas le coup de bélier est en effet très faible au début, et par conséquent sa réflexion avec changement de signe ne produit, lorsqu'elle arrive au distributeur, qu'une perturbation insignifiante dans l'allure de la courbe. Celle-ci peut en particulier fort bien continuer à monter après le temps $\frac{2L}{a}$, comme on le voit sur les diagrammes relevés cités plus haut

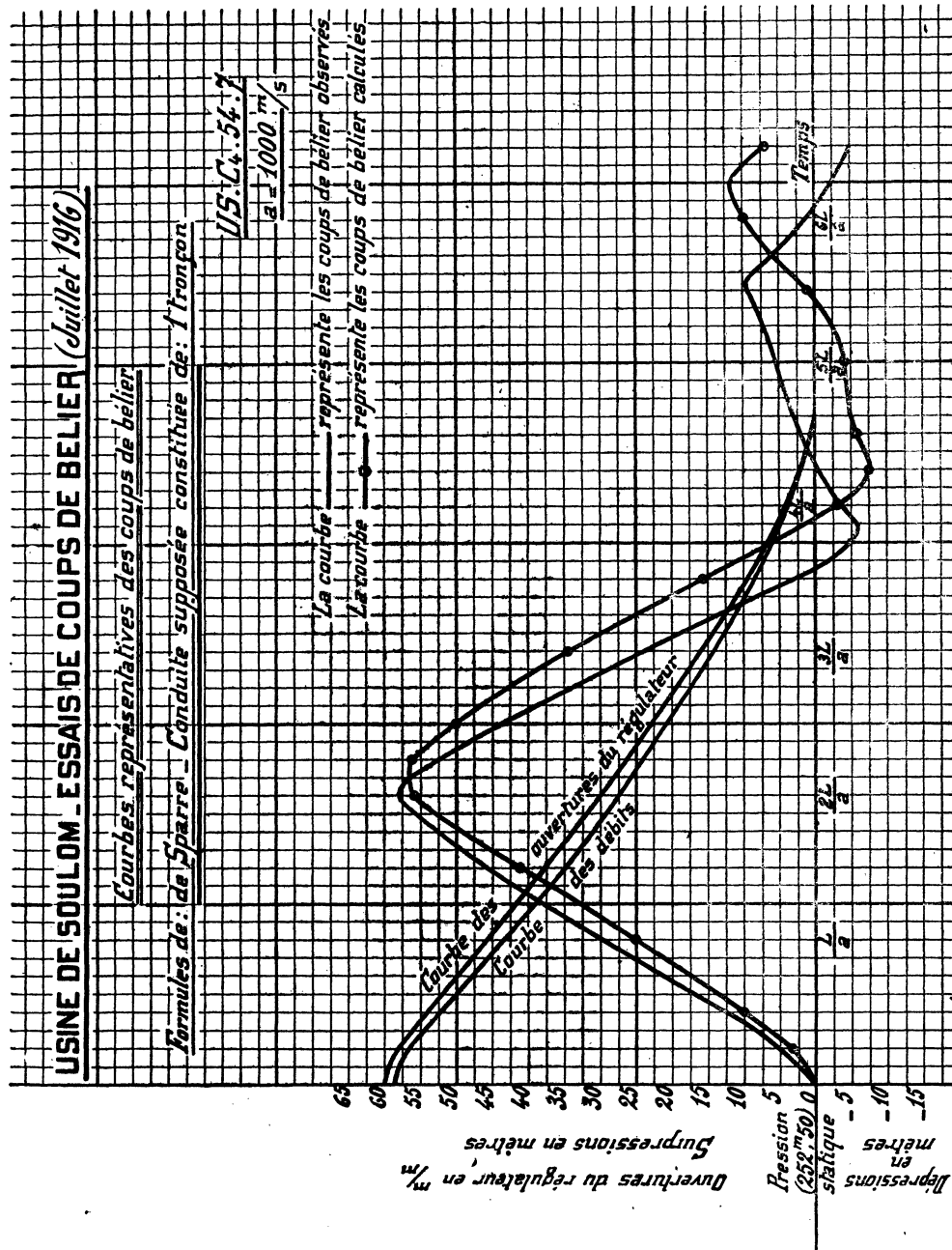


FIG. 118.

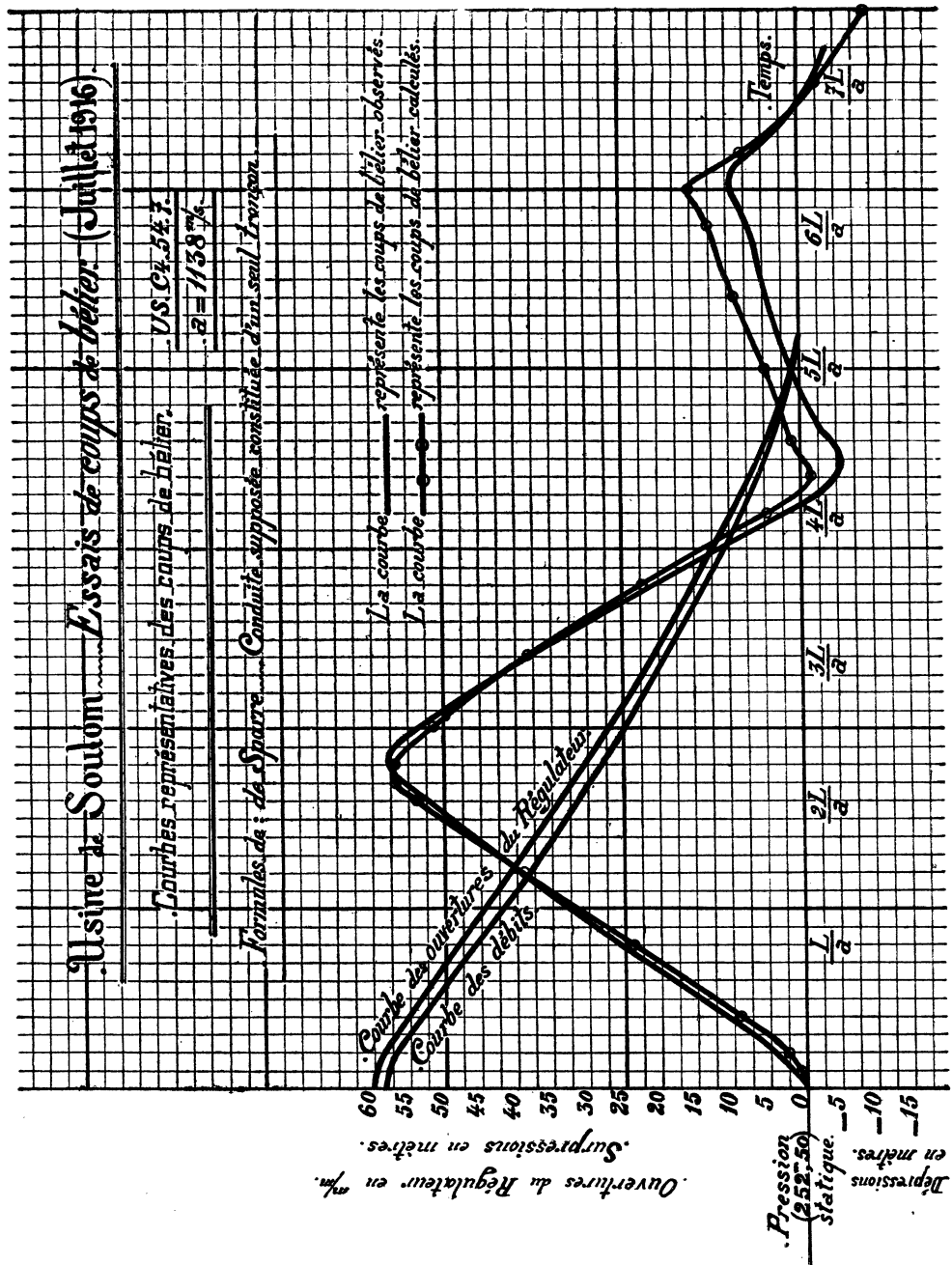


FIG. 119.

Toutefois, si l'on observe ceux-ci de près on constate au temps $t = 1''$ environ un changement de courbure plus ou moins accentué résultant du phénomène de réflexion indiqué ci-dessus. Or ce temps $t = 1''$ est précisément égal à $\frac{2L}{a}$ si $a = 1068$, ce qui confirme une fois de plus l'exactitude de cette valeur moyenne.

Remarque. — Il faut remarquer que le Venturi ne permet pas d'apprécier avec une précision suffisante les débits faibles peu inférieurs à 100 litres par seconde; il ne faut donc pas s'étonner des différences entre le calcul et l'observation que présentent les fermetures rapides, correspondant nécessairement à des débits minimes.

Des anomalies se présentent si l'on observe non plus seulement les premières périodes du phénomène, mais celles qui suivent la fermeture totale; le calcul d'Allievi avec un a moyen conduit, en effet, à des fonctions rigoureusement périodiques. Or, celles observées ne le sont pas. Nous allons donc être obligés d'avoir recours à d'autres hypothèses pour serrer de plus près la réalité. Avant de les formuler, résumons les conclusions que nous pouvons tirer du paragraphe précédent.

Pour les fermetures de débits importants et moyens les formules d'Allievi (ou d'Allievi-de Sparre) calculées avec un a moyen égal à sa valeur théorique 1068 donnent une représentation remarquablement exacte du phénomène pendant les premières périodes, en particulier au point de vue du maximum de la surpression.

67. Transmission du coup de bélier le long de la conduite; calcul avec une vitesse a moyenne.

On fait usage des formules données au chapitre v, en prenant comme valeur de la vitesse a moyen défini, comme nous l'avons dit plus haut.

Appliquons, à titre d'exemple, cette méthode au diagramme US-C₁-56-4. Nous avons donné plus haut les calculs relatifs à cette expérience en ce qui concerne les coups de bélier au distributeur.

En nous servant des points ainsi calculés, nous avons déterminé les valeurs successives de la fonction $F(t)$ et par suite les surpressions dans la section où se faisait l'observation, c'est-à-dire à 290 mètres du distributeur.

Voici le détail des calculs relatifs à cette expérience :

68. Calcul en un tronçon de la conduite C₄ pour le diagramme des pressions au poste de Pau. US-C₄-56-4 (fig. 120).

Courbe de la fonction F(t) en fonction du temps (formule 33).

1 ^{er} point:	$\frac{0L}{a}$		=	<u>0</u>
2 ^e »	$\frac{1}{6} \frac{L}{a}$		=	<u>1^m,80</u>
3 ^e »	$\frac{1}{3} \frac{L}{a}$		=	<u>5^m,70</u>
4 ^e »	$\frac{1}{2} \frac{L}{a}$		=	<u>10^m,70</u>
5 ^e »	$\frac{L}{a}$		=	<u>28^m,90</u>
6 ^e »	$\frac{L}{a} + \frac{1}{2} \frac{L}{a}$		=	<u>46^m,60</u>
7 ^e »	$\frac{2L}{a}$		=	<u>63^m,30</u>
8 ^e »	$\frac{2L}{a} + \frac{1}{6} \frac{L}{a}$	= 1,80 + 65,50	=	<u>67^m,30</u>
9 ^e »	$\frac{2L}{a} + \frac{1}{3} \frac{L}{a}$	= 5,70 + 62,80	=	<u>68^m,50</u>
10 ^e »	$\frac{2L}{a} + \frac{1}{2} \frac{L}{a}$	= 10,70 + 58	=	<u>68^m,70</u>
11 ^e »	$\frac{3L}{a}$	= 28,90 + 37,70	=	<u>66^m,60</u>
12 ^e »	$\frac{3L}{a} + \frac{1}{2} \frac{L}{a}$	= 46,60 + 16,50	=	<u>63^m,10</u>
13 ^e »	$\frac{4L}{a}$	= 63,30 + (-8,10)	=	<u>55^m,20</u>
14 ^e »	$\frac{4L}{a} + \frac{1}{6} \frac{L}{a}$	= 67,30 - 15,10	=	<u>52^m,20</u>
15 ^e »	$\frac{4L}{a} + \frac{1}{3} \frac{L}{a}$	= 68,50 - 17,50	=	<u>51^m,00</u>
16 ^e »	$\frac{4L}{a} + \frac{1}{2} \frac{L}{a}$	= 68,70 - 17,90	=	<u>50^m,80</u>

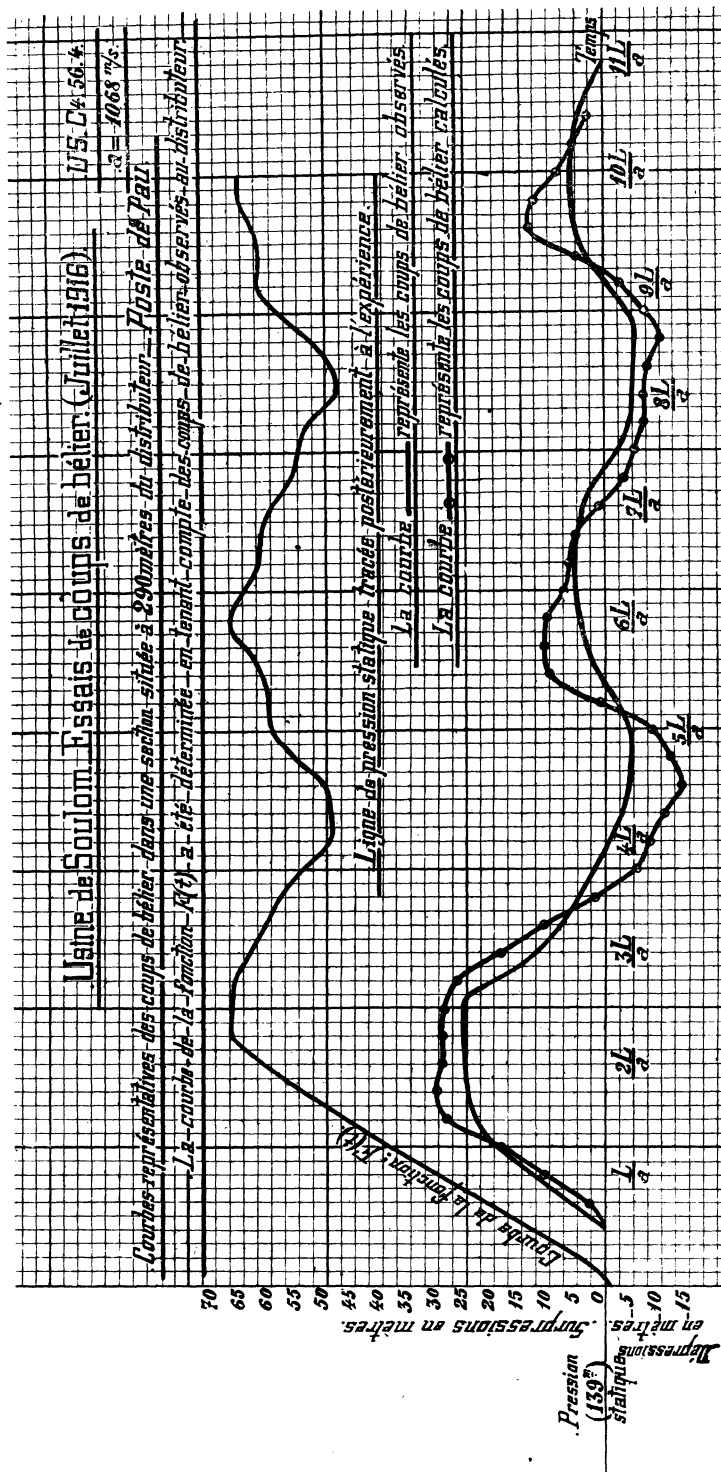


FIG. 120.

17°	»	$\frac{5L}{a}$	$= 66,60 - 13,70$	$= \underline{52^m,90}$
18°	»	$\frac{5L}{a} + \frac{1}{2} \frac{L}{a}$	$= 63,10 - 6,70$	$= \underline{56^m,40}$
19°	»	$\frac{6L}{a}$	$= 55,20 + 9,10$	$= \underline{64^m,30}$
20°	»	$\frac{6L}{a} + \frac{1}{6} \frac{L}{a}$	$= 52,20 + 15,10$	$= \underline{67^m,30}$
21°	»	$\frac{6L}{a} + \frac{1}{3} \frac{L}{a}$	$= 51,00 + 17,50$	$= \underline{68^m,50}$
22°	»	$\frac{6L}{a} + \frac{1}{2} \frac{L}{a}$	$= 50,80 + 17,90$	$= \underline{68^m,70}$
23°	»	$\frac{7L}{a}$	$= 52,90 + 13,70$	$= \underline{66^m,60}$
24°	»	$\frac{7L}{a} + \frac{1}{2} \frac{L}{a}$	$= 56,40 + 6,70$	$= \underline{63^m,10}$
25°	»	$\frac{8L}{a}$	$= 64,30 - 9,10$	$= \underline{55^m,20}$
26°	»	$\frac{8L}{a} + \frac{1}{6} \frac{L}{a}$	$= 67,30 - 15,10$	$= \underline{52^m,20}$
27°	»	$\frac{8L}{a} + \frac{1}{3} \frac{L}{a}$	$= 68,50 - 17,50$	$= \underline{51^m,00}$
28°	»	$\frac{8L}{a} + \frac{1}{2} \frac{L}{a}$	$= 68,70 - 17,90$	$= \underline{50^m,80}$

Courbe des surpressions dans une section située à 290^m,60 du distributeur

La pression y est donnée par :

$$y - y_0 = F\left(t - \frac{x}{a}\right) - F\left(t - \frac{2L - x}{a}\right).$$

$$x = 290,60, \quad L = 536,36, \quad a = 1.068,$$

$$\frac{x}{a} = \frac{290,60}{1.068} = 0^{\circ},272, \quad \frac{L}{a} = \frac{536,36}{1.068} = 0^{\circ},502;$$

$$\text{point d'origine de la courbe : } t = \frac{x}{a} = \frac{0,272}{0,502} \times \frac{L}{a} = 0,545 \frac{L}{a}$$

$$2^{\circ} \text{ point : } t = \frac{L}{a}$$

$$s = F\left(\frac{L}{a} - \frac{0,545L}{a}\right) = F\left(0,455 \frac{L}{a}\right) = \underline{9 \text{ m. } 00}$$

$$3^{\circ} \text{ point : } t = \frac{L}{a} + \frac{1}{4} \frac{L}{a}$$

$$s = F\left(\frac{5L}{4a} - \frac{2,18L}{4a}\right) = F\left(2,82 \frac{L}{4a}\right) = \underline{18 \text{ m. } 50}$$

$$4^{\circ} \text{ point : } t = \frac{L}{a} + \frac{1}{2} \frac{L}{a}$$

$$\begin{aligned} s &= F\left(\frac{6L}{4a} - \frac{2,18L}{4a}\right) - F\left(\frac{6L}{4a} - \frac{8L - 2,18L}{4a}\right) \\ &= F\left(3,82 \frac{L}{4a}\right) - F\left(0,18 \frac{L}{4a}\right) = 27,50 - 0,50 = \underline{27 \text{ m. } 00} \end{aligned}$$

$$5^{\circ} \text{ point : } t = \frac{L}{a} + \frac{3}{4} \frac{L}{a}$$

$$\begin{aligned} s &= F\left(\frac{7L}{4a} - \frac{2,18L}{4a}\right) - F\left(\frac{7L}{4a} - \frac{8L - 2,18L}{4a}\right) \\ &= F\left(4,82 \frac{L}{4a}\right) - F\left(1,18 \frac{L}{4a}\right) = 36,50 - 4,70 = \underline{31 \text{ m. } 80} \end{aligned}$$

$$6^{\circ} \text{ point : } t = \frac{2L}{a}$$

$$s = F\left(5,82 \frac{L}{4a}\right) - F\left(2,18 \frac{L}{4a}\right) = 45,00 - 12,50 = \underline{32 \text{ m. } 50}$$

$$7^{\circ} \text{ point : } t = \frac{2L}{a} + \frac{1}{4} \frac{L}{a}$$

$$s = F\left(6,82 \frac{L}{4a}\right) - F\left(3,18 \frac{L}{4a}\right) = 53,50 - 21,50 = \underline{32 \text{ m. } 00}$$

$$8^{\circ} \text{ point : } t = \frac{2L}{a} + \frac{2}{4} \frac{L}{a}$$

$$s = F\left(7,82 \frac{L}{4a}\right) - F\left(4,18 \frac{L}{4a}\right) = 62,00 - 30,50 = \underline{31 \text{ m. } 50}$$

$$9^{\circ} \text{ point : } t = \frac{2L}{a} + \frac{3}{4} \frac{L}{a}$$

$$s = F\left(8,82 \frac{L}{4a}\right) - F\left(5,18 \frac{L}{4a}\right) = 67,80 - 39,50 = \underline{28 \text{ m. } 30}$$

$$10^{\circ} \text{ point : } t = \frac{3L}{a}$$

$$s = F\left(9,82 \frac{L}{4a}\right) - F\left(6,18 \frac{L}{4a}\right) = 68,60 - 48,10 = \underline{20 \text{ m. } 50}$$

$$11^{\circ} \text{ point : } t = \frac{3L}{a} + \frac{1}{4} \frac{L}{a}$$

$$s = F\left(10,82 \frac{L}{4a}\right) - F\left(7,18 \frac{L}{4a}\right) = 68,10 - 56,60 = \underline{11 \text{ m. } 50}$$

$$12^{\circ} \text{ point : } t = \frac{3L}{a} + \frac{1}{2} \frac{L}{a}$$

$$s = F\left(11,82 \frac{L}{4a}\right) - F\left(8,18 \frac{L}{4a}\right) = 67,00 - 64,50 = \underline{2 \text{ m. } 50}$$

$$13^{\circ} \text{ point : } t = \frac{3L}{a} + \frac{3}{4} \frac{L}{a}$$

$$s = F\left(12,82 \frac{L}{4a}\right) - F\left(9,18 \frac{L}{4a}\right) = 65,50 - 68,50 = \underline{-3 \text{ m. } 00}$$

$$14^{\circ} \text{ point : } t = \frac{4L}{a}$$

$$s = F\left(13,82 \frac{L}{4a}\right) - F\left(10,18 \frac{L}{4a}\right) = 63,50 - 68,50 = \underline{-5 \text{ m. } 00}$$

$$15^{\circ} \text{ point : } t = \frac{4L}{a} + \frac{1}{4} \frac{L}{a}$$

$$s = F\left(14,82 \frac{L}{4a}\right) - F\left(11,18 \frac{L}{4a}\right) = 60,75 - 67,75 = \underline{-7 \text{ m. } 00}$$

$$16^{\circ} \text{ point : } t = \frac{4L}{a} + \frac{1}{2} \frac{L}{a}$$

$$s = F\left(15,82 \frac{L}{4a}\right) - F\left(12,18 \frac{L}{4a}\right) = 56,30 - 66,50 = \underline{-10 \text{ m. } 20}$$

$$17^{\circ} \text{ point : } t = \frac{4L}{a} + \frac{3}{4} \frac{L}{a}$$

$$s = F\left(16,82 \frac{L}{4a}\right) - F\left(13,18 \frac{L}{4a}\right) = 52,00 - 65,00 = \underline{-13 \text{ m. } 00}$$

$$18^{\circ} \text{ point : } t = \frac{5L}{a}$$

$$s = F\left(17,82 \frac{L}{4a}\right) - F\left(14,18 \frac{L}{4a}\right) = 50,70 - 62,70 = \underline{-12 \text{ m. } 00}$$

$$19^{\circ} \text{ point : } t = \frac{5L}{a} + \frac{1}{4} \frac{L}{a}$$

$$s = F\left(18,82 \frac{L}{4a}\right) - F\left(15,18 \frac{L}{4a}\right) = 51,40 - 59,20 = \underline{-7 \text{ m. } 80}$$

$$20^{\circ} \text{ point : } t = \frac{5L}{a} + \frac{1}{2} \frac{L}{a}$$

$$s = F\left(19,82 \frac{L}{4a}\right) - F\left(16,18 \frac{L}{4a}\right) = 52,50 - 54,00 = \underline{-1 \text{ m. } 50}$$

$$21^{\circ} \text{ point : } t = \frac{5L}{a} + \frac{3}{4} \frac{L}{a}$$

$$s = F\left(20,82 \frac{L}{4a}\right) - F\left(17,18 \frac{L}{4a}\right) = 54,00 - 51,20 = \underline{2 \text{ m. } 80}$$

$$22^{\circ} \text{ point : } t = \frac{6L}{a}$$

$$s = F\left(21,82 \frac{L}{4a}\right) - F\left(18,18 \frac{L}{4a}\right) = 56,00 - 50,70 = \underline{5 \text{ m. } 30}$$

$$23^{\circ} \text{ point : } t = \frac{6L}{a} + \frac{1}{4} \frac{L}{a}$$

$$s = F\left(22,82 \frac{L}{4a}\right) - F\left(19,18 \frac{L}{4a}\right) = 58,70 - 51,70 = \underline{7 \text{ m. } 00}$$

$$24^{\circ} \text{ point : } t = \frac{6L}{a} + \frac{1}{2} \frac{L}{a}$$

$$s = F\left(23,82 \frac{L}{4a}\right) - F\left(20,18 \frac{L}{4a}\right) = 63,20 - 53,00 = \underline{10 \text{ m. } 20}$$

$$25^\circ \text{ point : } t = \frac{6L}{a} + \frac{3}{4} \frac{L}{a}$$

$$s = F\left(24,82 \frac{L}{4a}\right) - F\left(21,18 \frac{L}{4a}\right) = 67,60 - 54,60 = \underline{13 \text{ m. } 00}$$

$$26^\circ \text{ point : } t = \frac{7L}{a}$$

$$s = F\left(25,82 \frac{L}{4a}\right) - F\left(22,18 \frac{L}{4a}\right) = 68,70 - 57,00 = \underline{11 \text{ m. } 70}$$

$$27^\circ \text{ point : } t = \frac{7L}{a} + \frac{1}{4} \frac{L}{a}$$

$$s = F\left(26,82 \frac{L}{4a}\right) - F\left(23,18 \frac{L}{4a}\right) = 68,10 - 60,00 = \underline{8 \text{ m. } 10}$$

$$28^\circ \text{ point : } t = \frac{7L}{a} + \frac{1}{2} \frac{L}{a}$$

$$s = F\left(27,82 \frac{L}{4a}\right) - F\left(24,18 \frac{L}{4a}\right) = 67,00 - 65,50 = \underline{1 \text{ m. } 50}$$

$$29^\circ \text{ point : } t = \frac{7L}{a} + \frac{3}{4} \frac{L}{a}$$

$$s = F\left(28,82 \frac{L}{4a}\right) - F\left(25,18 \frac{L}{4a}\right) = 65,50 - 68,50 = \underline{-3 \text{ m. } 00}$$

$$30^\circ \text{ point : } t = \frac{8L}{a}$$

$$s = F\left(29,82 \frac{L}{4a}\right) - F\left(26,18 \frac{L}{4a}\right) = 63,50 - 68,50 = \underline{-5 \text{ m. } 00}$$

$$31^\circ \text{ point : } t = \frac{8L}{a} + \frac{1}{4} \frac{L}{a}$$

$$s = F\left(30,82 \frac{L}{4a}\right) - F\left(27,18 \frac{L}{4a}\right) = 60,75 - 67,75 = \underline{-7 \text{ m. } 00}$$

$$32^\circ \text{ point : } t = \frac{8L}{a} + \frac{1}{2} \frac{L}{a}$$

$$s = F\left(31,82 \frac{L}{4a}\right) - F\left(28,18 \frac{L}{4a}\right) = 56,30 - 66,50 = \underline{-10 \text{ m. } 20}$$

$$33^{\circ} \text{ point : } t = \frac{8L}{a} + \frac{3}{4} \frac{L}{a}$$

$$s = F\left(32,82 \frac{L}{4a}\right) - F\left(29,18 \frac{L}{4a}\right) = 52,00 - 65,00 = \underline{-13 \text{ m. } 00}$$

$$34^{\circ} \text{ point : } t = \frac{9L}{a}$$

$$s = F\left(33,82 \frac{L}{4a}\right) - F\left(30,18 \frac{L}{4a}\right) = 50,70 - 62,70 = \underline{-12 \text{ m. } 00}$$

$$35^{\circ} \text{ point : } t = \frac{9L}{a} + \frac{1}{4} \frac{L}{a}$$

$$s = F\left(34,82 \frac{L}{4a}\right) - F\left(31,18 \frac{L}{4a}\right) = 51,40 - 59,20 = \underline{-7 \text{ m. } 80}$$

$$36^{\circ} \text{ point : } t = \frac{9L}{a} + \frac{1}{2} \frac{L}{a}$$

$$s = F\left(35,82 \frac{L}{4a}\right) - F\left(32,18 \frac{L}{4a}\right) = 52,50 - 54,00 = \underline{-1 \text{ m. } 50}$$

$$37^{\circ} \text{ point : } t = \frac{9L}{a} + \frac{3}{4} \frac{L}{a}$$

$$s = F\left(36,82 \frac{L}{4a}\right) - F\left(33,18 \frac{L}{4a}\right) = 54,00 - 51,20 = \underline{2 \text{ m. } 80}$$

$$38^{\circ} \text{ point : } t = \frac{10L}{a}$$

$$s = F\left(37,82 \frac{L}{4a}\right) - F\left(34,18 \frac{L}{4a}\right) = 56,00 - 50,70 = \underline{5 \text{ m. } 30}$$

$$39^{\circ} \text{ point : } t = \frac{10L}{a} + \frac{1}{4} \frac{L}{a}$$

$$s = F\left(38,82 \frac{L}{4a}\right) - F\left(35,18 \frac{L}{4a}\right) = 58,70 - 51,70 = \underline{7 \text{ m. } 00}$$

$$40^{\circ} \text{ point : } t = \frac{10L}{a} + \frac{1}{2} \frac{L}{a}$$

$$s = F\left(39,82 \frac{L}{4a}\right) - F\left(36,18 \frac{L}{4a}\right) = 63,20 - 53,00 = \underline{10 \text{ m. } 20}$$

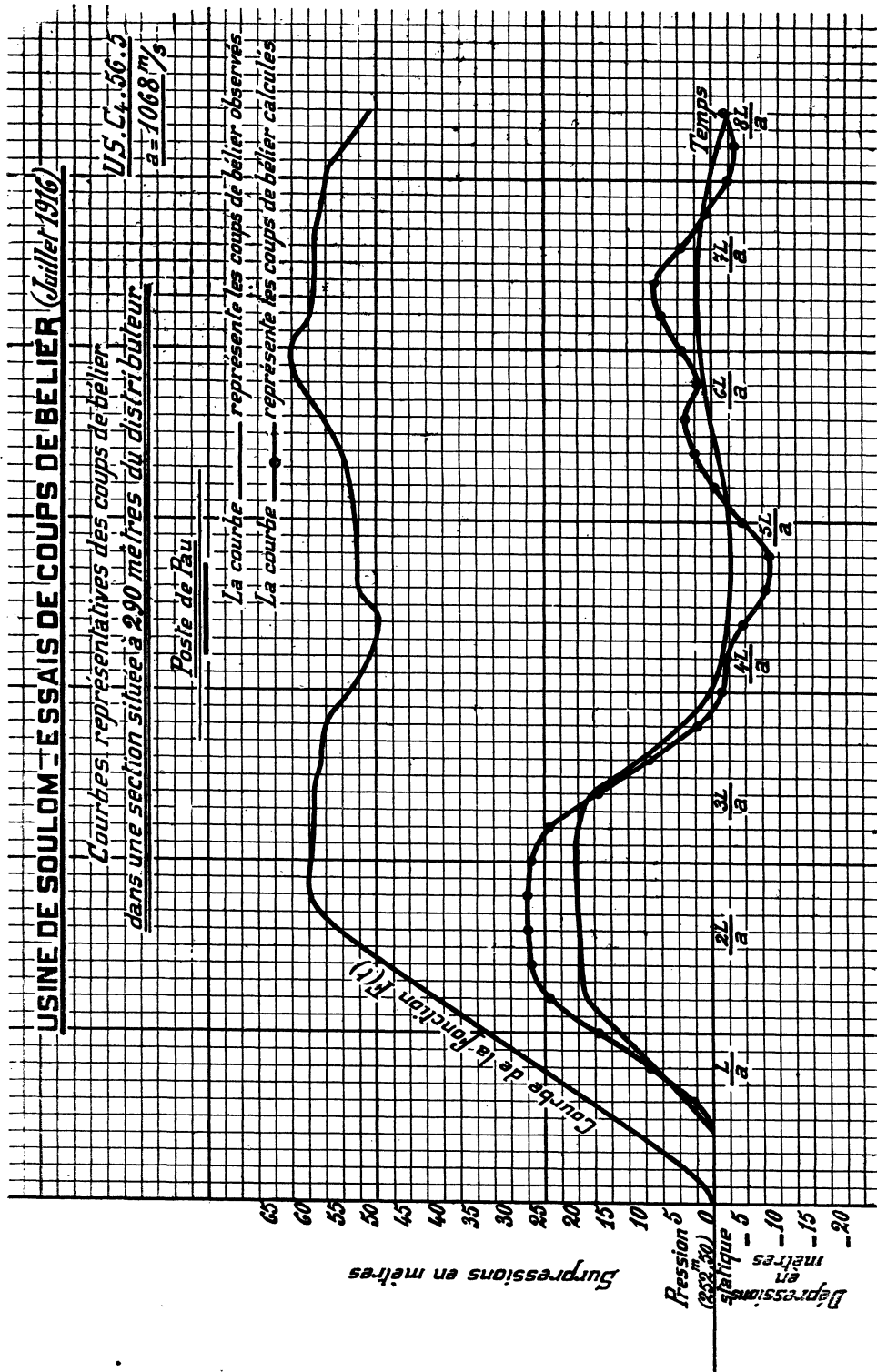


FIG. 121.

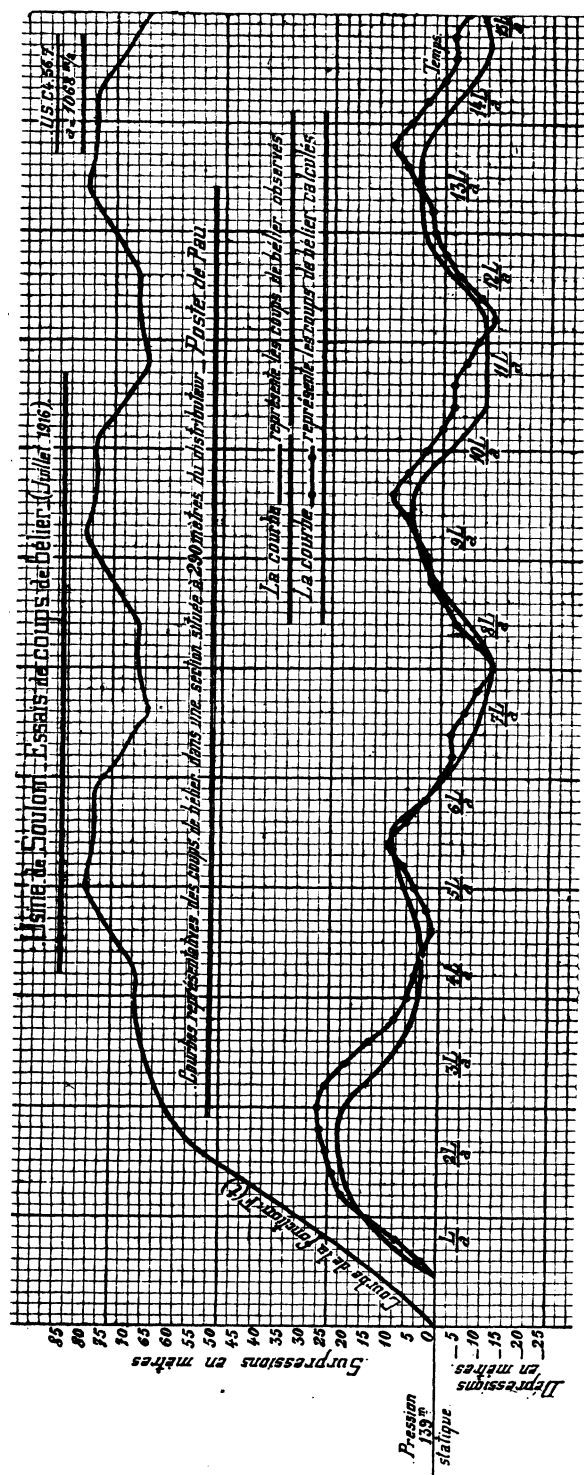


FIG. 122

$$41^{\text{er}} \text{ point: } t = \frac{10L}{a} + \frac{3}{4} \frac{L}{a}$$

$$s = F\left(40,82 \frac{L}{4a}\right) - F\left(37,18 \frac{L}{4a}\right) = 67,60 - 54,60 = 13 \text{ m. } 00$$

Nous avons reporté sur le diagramme (fig. 120) la courbe représentant la fonction $F(t)$ et celles représentant les coups de bélier calculés et observés. Bien que l'allure générale de ces deux dernières courbes soit la même, la concordance est cependant moins satisfaisante que pour les diagrammes représentant le même phénomène au distributeur.

Nous avons étudié par la même méthode et pour la même section située à 290 mètres du distributeur (poste de Pau) les diagrammes suivants :

US-C₄-56-5 (fig. 121),

US-C₄-56-7 (fig. 122),

US-C₄-56-8 (fig. 123).

La même remarque que ci-dessus doit être faite au sujet de ces trois diagrammes : concordance moins parfaite qu'au distributeur. Ces expériences, pour lesquelles

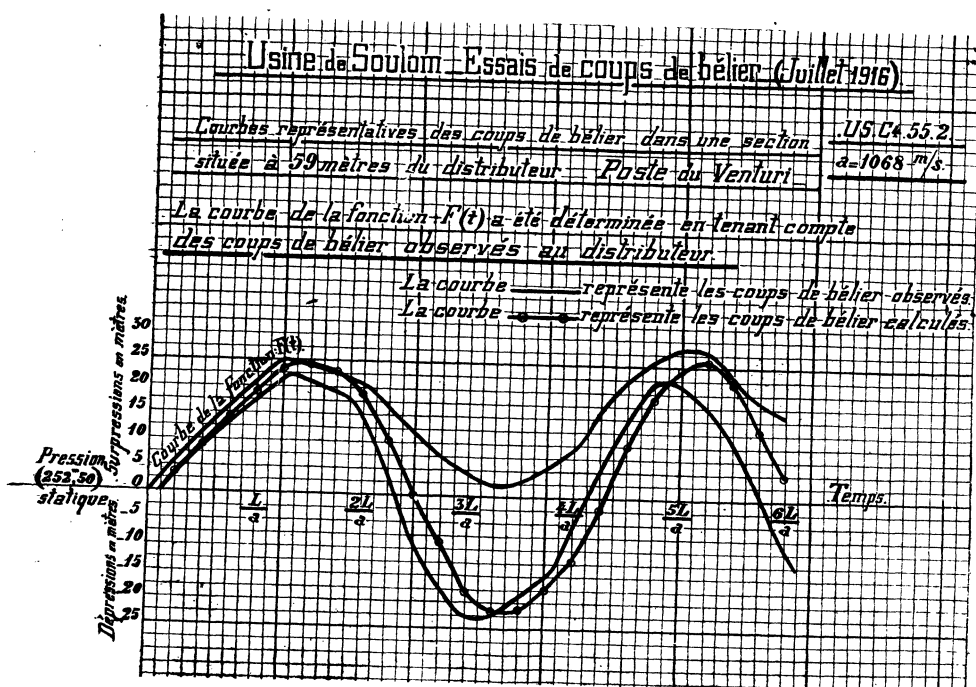


FIG. 124.

nous n'avons disposé que de très peu de temps, ont été faites sur le flanc d'une montagne abrupte, dans des conditions très pénibles; il ne faut donc pas s'étonner des différences notables que présentent le calcul et l'observation et de la dissymétrie de la fin des graphiques (par rapport à la pression statique). Cette dissymétrie, comme nous avons pu nous en assurer, tient à un certain jeu de l'équipage mobile

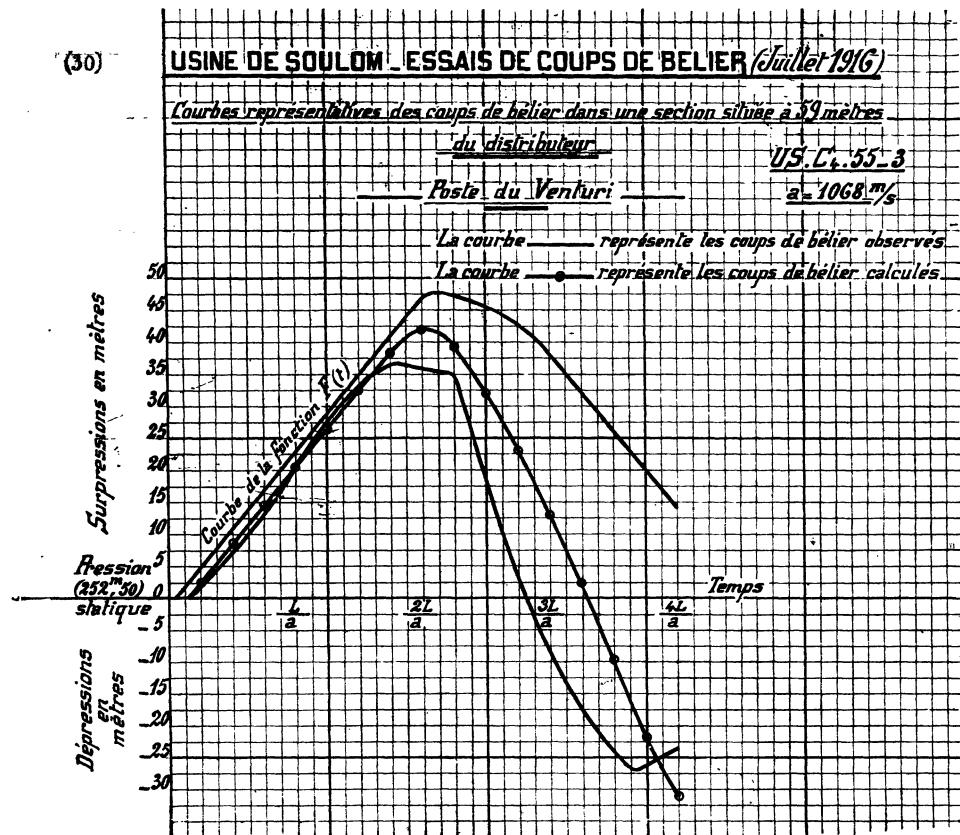


FIG. 125.

du manomètre et à des frottements. Quand nous nous sommes aperçus de cette cause d'erreur, il était trop tard pour y remédier, car il était impossible d'arrêter l'exécution des diverses séries qui se faisaient suivant un programme que les divers opérateurs avaient fixé à l'avance avant de se répartir entre les divers postes placés à l'usine et sur la longueur de la conduite.

Malgré ces imperfections, nous avons cru néanmoins utile de publier les résultats obtenus.

69. Diagrammes des pressions à l'amont du Venturi.

Nous avons appliqué le même mode de calcul aux diagrammes relevés immédiatement à l'amont du Venturi, c'est-à-dire à 59 mètres du distributeur. Ces diagrammes sont les suivants :

US-C₄-55-2 (fig. 124),

US-C₄-55-3 (fig. 125),

US-C₄-55-4 (fig. 126).

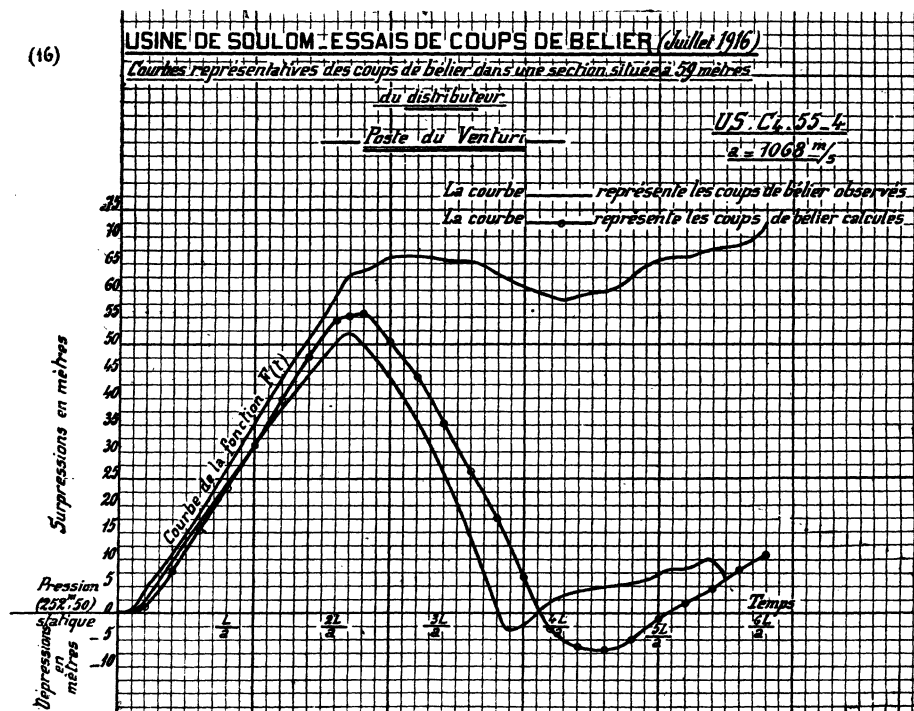


FIG. 126.

70. Vérification expérimentale de la formule (34) relative à la répartition des maxima de pression.

Nous avons vérifié, au moyen des expériences précédentes, la formule (34) donnée par M. de Sparre. Les deux tableaux suivants résument les résultats obtenus.

NUMÉROS des GRAPHIQUES	DURÉE de FERMETURE en secondes.	SURPRESSION RELEVÉE sur la courbe calculée au distributeur S_m .		SURPRESSION RELEVÉE sur la courbe calculée au poste de Pau ou au Venturi.		SURPRESSION CALCULÉE par la formule $\frac{L-x}{L} S_m$.	
		En valeur absolue.	En $\%$ de 252 ^m ,50.	En valeur absolue.	En $\%$ de 252 ^m ,50.	En valeur absolue.	En $\%$ de 252 ^m ,50.
US-C ₄ -56-4	2 ^s ,00	64 ^m ,82	25,60	30 ^m ,50	12,10	29 ^m ,85	11,85
US-C ₄ -56-7	2 ^s ,50	56 ^m ,70	22,40	27 ^m ,50	10,90	26 ^m ,10	10,35
US-C ₄ -56-8	3 ^s ,37	50 ^m ,70	20,10	26 ^m ,50	10,50	23 ^m ,15	9,25
US-C ₄ -55-2	0 ^s ,63	24 ^m ,30	9,65	24 ^m ,30	9,65	21 ^m ,70	8,65
US-C ₄ -55-3	1 ^s ,50	47 ^m ,30	18,70	42 ^m ,00	16,70	42 ^m ,10	16,70
US-C ₄ -55-4	2 ^s ,50	62 ^m ,00	24,50	55 ^m ,70	22,10	55 ^m ,20	21,90
US-C ₄ -56-5	2 ^s ,25	55 ^m ,50	22,00	27 ^m ,00	10,70	25 ^m ,50	10,15

NUMÉROS des GRAPHIQUES	DURÉE de FERMETURE en secondes.	SURPRESSION RELEVÉE sur la courbe observée au distributeur S'_m .		SURPRESSION RELEVÉE sur la courbe observée au poste de Pau ou au Venturi.		SURPRESSION CALCULÉE par la formule $\frac{L-x}{L} S_m^{(*)}$.	
		En valeur absolue.	En $\%$ de 252 ^m ,50.	En valeur absolue.	En $\%$ de 252 ^m ,50.	En valeur absolue.	En $\%$ de 252 ^m ,50.
US-C ₄ -56-4	2 ^s ,00	63 ^m ,50	25,20	25 ^m ,50	10,10	29 ^m ,85	11,85
US-C ₄ -56-7	2 ^s ,50	57 ^m ,00	22,60	23 ^m ,00	9,15	26 ^m ,10	10,35
US-C ₄ -56-8	3 ^s ,37	52 ^m ,00	20,60	22 ^m ,00	8,75	23 ^m ,15	9,25
US-C ₄ -55-2	0 ^s ,63	25 ^m ,00	10,00	22 ^m ,00	8,75	21 ^m ,70	8,65
US-C ₄ -55-3	1 ^s ,50	49 ^m ,00	19,40	36 ^m ,70	14,50	42 ^m ,10	16,70
US-C ₄ -55-4	2 ^s ,50	60 ^m ,00	23,80	52 ^m ,00	20,60	55 ^m ,20	21,90
US-C ₄ -56-5	2 ^s ,25	57 ^m ,50	22,80	20 ^m ,50	7,85	25 ^m ,50	10,15

(*) S_m étant la surpression maxima calculée au distributeur par les équations générales d'Alliévi, surpression que l'on trouve sur le tableau précédent.

71. Coups de bélier d'ouverture; calcul avec une vitesse a moyenne.

Nous n'avons jusqu'ici considéré que les phénomènes qui se produisent dans une conduite lorsqu'on ferme le distributeur de la turbine qu'elle alimente. Nous allons considérer maintenant ce qui se passe lorsque l'on ouvre le distributeur d'une certaine quantité.

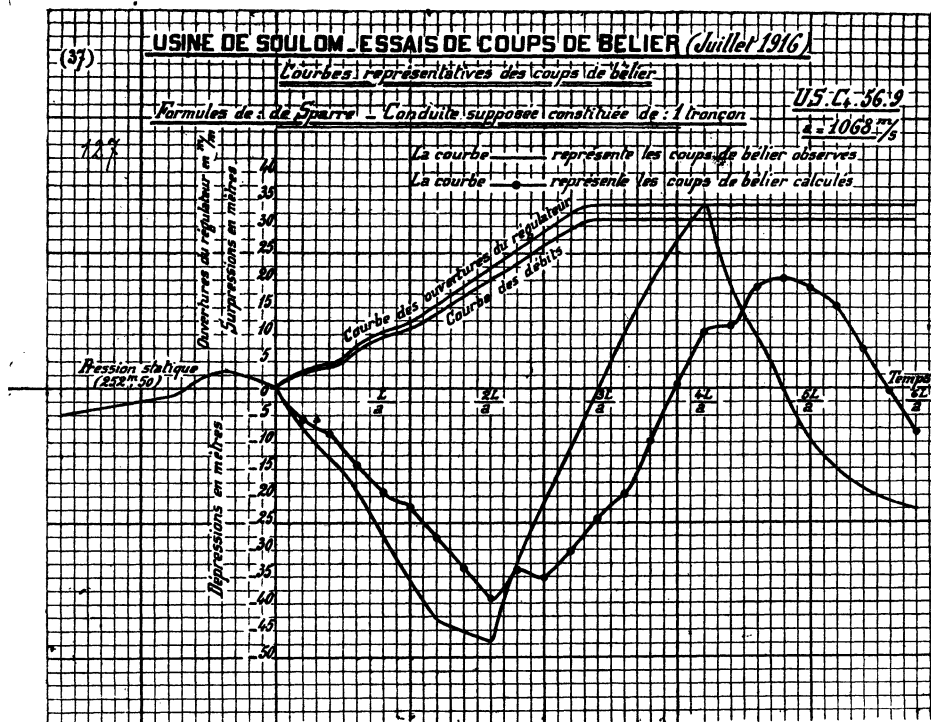


FIG. 127.

Disons immédiatement que les théories d'Allievi-de Sparre s'appliquent dans le cas des ouvertures comme dans celui des fermetures. Nous n'avons donc rien à changer aux indications que nous avons données plus haut concernant soit l'équation générale d'Allievi, soit les formules simplifiées de de Sparre.

Nous avons appliqué les formules simplifiées de de Sparre aux graphiques suivants :

$$\text{US-C}_4\text{-56-9} \quad (\text{fig. 127})^{(1)},$$

⁽¹⁾ Ce graphique est défectueux, car la conduite était déjà en oscillation au moment de l'ouverture.

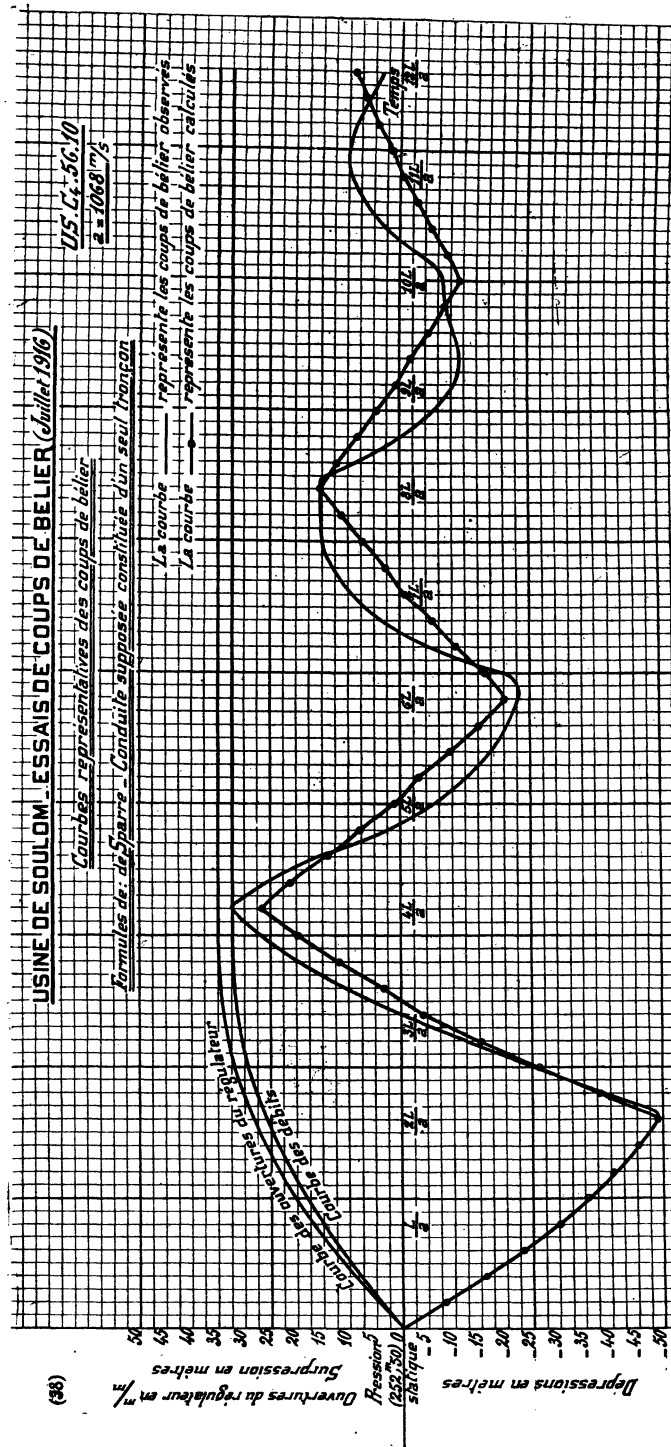


Fig. 128.

Il faut remarquer que, pour ce graphique US-C₄-56-10, le mouvement de vannage n'a pas été enregistré, mais reconstitué *a posteriori* d'après le diagramme des pressions dans les premières périodes.

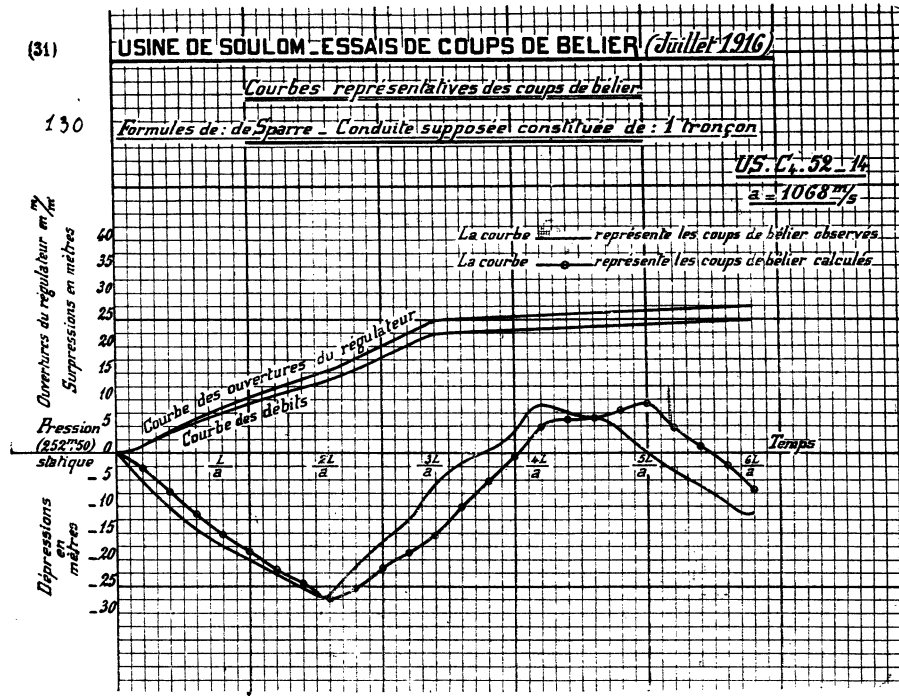


FIG. 130.

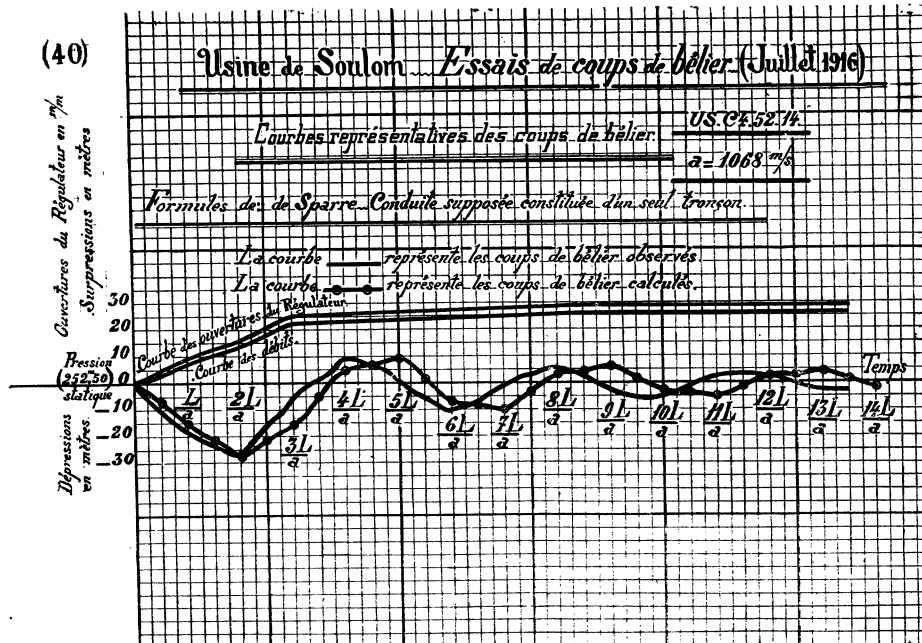


FIG. 131.

US-C_a-56-10 (*fig. 128 et 129*),

US-C_a-52-14 (*fig. 130 et 131*).

Pour ce dernier graphique, la concordance entre l'observation et la théorie est très satisfaisante. Cependant on constate sur les périodes successives le même décalage que celui étudié plus haut dans le cas des fermetures.

CHAPITRE VIII

Conduites à caractéristiques multiples (*suite*).

SOMMAIRE : Formules de M. de Sparre; coup de bélier dans une conduite formée de deux tronçons, pour lesquels la durée de propagation est la même. — Généralisation du calcul précédent pour une conduite formée de deux tronçons de longueur quelconque et de diamètre et d'épaisseurs différents. — Coup de bélier dans une conduite formée de trois tronçons pour lesquels la durée de propagation est la même. — Application des formules précédentes. — Détermination de la vitesse de propagation de l'onde dans les conduites formées de tronçons à caractéristiques différents. — Conduite de Fully. — Conduite de l'Akersand. — Méthode de la dépression brusque dans les conduites à caractéristiques variables. — Vérifications expérimentales de la dépression brusque dans les conduites à caractéristiques variables. — Expériences sur la conduite IE, à 3 tronçons; IE-146-4. — Période apparente; expérience : IE-146-6. — Expériences de dépression brusque faites sur la conduite P₃ de Soulom. — Instruments employés pour la mesure des pressions. — Conduite P₃ de Soulom. — Expériences : US-P₃-24-1; US-P₃-16-7; US-P₃-18-2; US-P₃-16-8. — Détermination de a en étudiant les réflexions successives à la chambre de mise en charge et à l'extrémité aval d'une perturbation donnant une discontinuité dans le diagramme; accord de l'expérience et de la théorie. — Expériences : US-C₁-50-12; US-C₁-51-3; US-C₁-50-10; US-C₁-50-4; US-C₁-50-15; US-C₁-51-2. — Période apparente et période théorique : Soulom, Pau, Cauterets, Eget. — Réflexions dans une conduite à caractéristiques variables à l'extrémité des tronçons. — Expériences : US-P₃-35-4; US-P₃-12-11. — Généralisation des équations de la page 27; a fonction de x .

Pour étudier avec plus de précision une conduite, au lieu de prendre une valeur moyenne de la vitesse, on peut employer la méthode indiquée par M. de Sparre et dans laquelle on assimile la conduite à caractéristique variable à une conduite formée de deux ou trois tronçons. Nous montrerons plus loin comment on fait cette schématisation; nous allons d'abord résumer les résultats les plus importants établis par M. de Sparre (¹).

(¹) De Sparre, Rapport au 2^me Congrès de la Houille blanche, 1914.

72. Coup de bélier dans une conduite formée de deux tronçons, pour lesquels la durée de propagation est la même; calculs et formules de M. de Sparre.

Les notations employées sont les suivantes :

Soit : γ_0 la pression statique au distributeur;
 v_1 la vitesse de régime pour le distributeur complètement ouvert;
 λ la fraction dont le distributeur est ouvert;
 a la vitesse de propagation dans le tronçon voisin du distributeur;
 a' cette même vitesse dans le 2^m tronçon;
 l et l' les longueurs de ces deux tronçons;
 d et d' leurs diamètres.

M. de Sparre traite cette question de la façon suivante :

Il suppose que l'on a :

$$\frac{l}{a} = \frac{l'}{a'}$$

et que l'ouverture ou la fermeture a lieu dans un temps inférieur à Θ , c'est-à-dire au temps que l'onde met à parcourir l'un des tronçons aller et retour.

$$\Theta = \frac{2l}{a} = \frac{2l'}{a'}. \quad (63)$$

En désignant par x la distance du point considéré de la conduite au distributeur, on a :

$$\begin{aligned} y &= \gamma_0 + F\left(t - \frac{x}{a}\right) - f\left(t + \frac{x}{a}\right) \\ v &= \lambda_0 v_1 - \frac{g}{a} \left[F\left(t - \frac{x}{a}\right) + f\left(t + \frac{x}{a}\right) \right], \end{aligned} \quad (64)$$

équations analogues aux équations (4) du chapitre II, λ_0 désignant la valeur initiale de λ .

En posant :

$$\xi = y - \gamma_0,$$

on a, à l'extrémité aval :

$$\begin{aligned} \xi &= F(t) - f(t) \\ v &= \lambda_0 v_1 - \frac{g}{a} [F(t) + f(t)] = \lambda v_1 \sqrt{1 + \frac{\xi}{\gamma_0}} = \lambda v_1 \left(1 + \frac{\xi}{2\gamma_0}\right), \end{aligned} \quad (65)$$

en supposant que le coup de bélier ξ ne dépasse pas la moitié de la pression statique.

En posant :

$$\varphi = \frac{av_1}{2g\gamma_0}, \quad (66)$$

on obtient :

$$\left. \begin{aligned} F(t) &= \varphi\gamma_0(\lambda_0 - \lambda) + \frac{1}{2}\xi(1 - \varphi\lambda) \\ f(t) &= \varphi\gamma_0(\lambda_0 - \lambda) - \frac{1}{2}\xi(1 + \varphi\lambda) \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

Dans la deuxième section, on aura :

$$\left. \begin{aligned} \gamma' &= \gamma_0 + F'\left(t - \frac{x'}{a'}\right) - f'\left(t + \frac{x'}{a'}\right) \\ v' &= v'_0 - \frac{g}{a'} \left[F'\left(t - \frac{x'}{a'}\right) + f'\left(t + \frac{x'}{a'}\right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

en écrivant que la pression $\gamma' = \gamma_0$, pour $x = l'$, c'est-à-dire à l'extrémité amont de la conduite, on a :

$$f'(t) = F'(t - \theta). \quad (69)$$

Enfin la pression doit être la même dans les deux sections à leur jonction, et l'équation de continuité est :

$$sv = s'v',$$

on obtient :

$$\left. \begin{aligned} F'(t) &= \frac{1+\alpha}{2} F\left(t - \frac{\theta}{2}\right) - \frac{1-\alpha}{2} f\left(t + \frac{\theta}{2}\right) \\ F'(t - \theta) &= \frac{1+\alpha}{2} f\left(t + \frac{\theta}{2}\right) - \frac{1-\alpha}{2} F\left(t - \frac{\theta}{2}\right) \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

avec :

$$\alpha = \frac{a's}{as'} = \frac{a'd^2}{ad'^2}. \quad (71)$$

Après une série de calculs que le lecteur trouvera dans le mémoire cité, M. de Sparre arrive à l'équation fondamentale :

$$\xi_1 = 2\varphi\gamma_0 \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{1 + \varphi\lambda_1}. \quad (72)$$

$$\xi(t) = 2\varphi\gamma_0 \frac{\lambda(t - 2\theta) - \lambda t}{1 + \varphi\lambda(t)} - 2 \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \frac{\xi(t - \theta)}{1 + \varphi\lambda(t)} - \frac{1 - \varphi\lambda(t - 2\theta)}{1 + \varphi\lambda(t)} \xi(t - 2\theta), \quad (73)$$

que nous aurons l'occasion d'appliquer à plusieurs reprises.

73. Généralisation de la formule précédente.

M. de Sparre ⁽¹⁾ a étudié également le cas d'une conduite formée de deux tronçons de longueur *quelconque* et de diamètres et d'épaisseurs différents, la loi de fermeture étant également *quelconque*. Les notations étant les mêmes que précédemment, c'est-à-dire l, d, a , désignant la longueur, le diamètre et la vitesse de propagation pour le tronçon voisin du distributeur; l', d', a' , les mêmes quantités pour le tronçon voisin de la chambre de mise en charge; λ le rapport de la surface ouverture du distributeur, à un instant quelconque, à celle correspondant à l'ouverture complète; v_1 étant la vitesse dans le premier tronçon voisin du distributeur quand celui-ci est complètement ouvert; v étant cette vitesse à un instant quelconque en outre :

$$\frac{l}{a} \neq \frac{l'}{a'}, \quad \theta = \frac{2l}{a}, \quad \theta' = \frac{2l'}{a'} \quad (74)$$

$$\varphi = \frac{av_1}{2g\gamma_0}, \quad \alpha = \frac{a's}{as'}, \quad \mu = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \quad (75)$$

M. de Sparre arrive à la formule suivante :

$$\left. \begin{aligned} \xi(t) = 2\varphi\gamma_0 & \frac{\lambda(t-\theta-\theta') - \lambda(t) + \mu\lambda(t-\theta) - \mu\lambda(t-\theta')}{1 + \varphi\lambda(t)} \\ & - \frac{1 - \varphi\lambda(t-\theta-\theta')}{1 + \varphi\lambda(t)} \xi(t-\theta-\theta') \\ & - \mu \frac{1 + \varphi\lambda(t-\theta')}{1 + \varphi\lambda(t)} \xi(t-\theta') - \mu \frac{1 - \varphi\lambda(t-\theta)}{1 + \varphi\lambda(t)} \xi(t-\theta). \end{aligned} \right\} \quad (76)$$

Cette formule est absolument générale; elle permet de calculer, quelle que soit la loi d'ouverture ou de fermeture, le coup de bélier à un instant quelconque.

En faisant $\theta = \theta'$ dans cette formule, on retrouve la formule précédente.

74. Coups de bélier dans une conduite formée de trois tronçons pour lesquels la durée de propagation est la même.

M. de Sparre ⁽²⁾ a également étudié ce cas, qui se rapproche beaucoup plus de la réalité, puisque, dans la plupart des cas, les tôles ont une épaisseur constante

⁽¹⁾ De Sparre, C. R., T. 163, p. 959.

⁽²⁾ C. R., t. 164, p. 683.

sur une assez grande longueur, soit près de la prise d'eau, soit près du distributeur. Ainsi, dans la conduite P_3 , chapitre VII, on trouve, sur une longueur totale de 346 m. 51 : près du distributeur, 164 m. 47 ⁽¹⁾ ayant une épaisseur constante de 13 mm., et près de la chambre de mise en charge, 114 m. 32 ayant une épaisseur constante de 7 mm.; le diamètre est constant pour tous les tronçons et égal à 1.200 mm. — Pour C_4 , on trouve à l'extrémité aval 86 m. 27 ⁽²⁾ ayant une épaisseur de 20 mm., et à l'extrémité amont 169 m. 28 ayant une épaisseur de 7 mm., sur une longueur totale de 536 m. 36. Le diamètre est partout de 810 mm. On voit que la subdivision en trois tronçons sera plus voisine de la réalité pour P_3 que pour C_4 .

Les notations pour la subdivision en trois tronçons sont les mêmes que précédemment : l, d, a désignent la longueur, le diamètre et la vitesse de propagation pour le tronçon voisin du distributeur; l', d', a' et l'', d'', a'' les mêmes quantités pour les deux autres tronçons; $\lambda(t)$ représente le rapport de la surface ouverture du distributeur à l'instant t à celle correspondant à l'ouverture complète; v_1 désigne la vitesse de régime dans le premier tronçon, quand le distributeur est complètement ouvert; γ_0 est la pression statique au distributeur.

On pose :

$$\theta = \frac{2l}{a}, \quad \theta' = \frac{2l'}{a'}, \quad \theta'' = \frac{2l''}{a''}, \quad \theta = \theta' = \theta''. \quad (77)$$

$$\alpha = \frac{a'd'^2}{ad''^2}, \quad \beta = \frac{a''d''^2}{a'd'^2}, \quad \varphi = \frac{av_1}{2g\gamma_0}, \quad \mu = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}; \quad (78)$$

On a pour : $t \leq \theta$:

$$\xi(t) = 2\varphi\gamma_0 \frac{\lambda_0 - \lambda(t)}{1 + \varphi\lambda(t)}; \quad (79)$$

pour : $\theta < t < 2\theta$:

$$\xi(t) = 2\varphi\gamma_0 \frac{\lambda_0 - \lambda(t) - \mu[\lambda_0 - \lambda(t - \theta)]}{1 + \varphi\lambda(t)} - \xi(t - \theta)\mu \frac{1 - \varphi\lambda(t - \theta)}{1 + \varphi\lambda(t)}; \quad (80)$$

pour : $2\theta < t \leq 3\theta$, en posant $v = \frac{1-\beta}{1+\beta}$:

$$\xi(t) = \frac{2\varphi\gamma_0}{1 + \varphi\lambda(t)} \left[\frac{4\lambda_0\alpha\beta}{(1+\alpha)(1+\beta)} - \lambda(t) + \frac{2\mu\beta}{1+\beta} \lambda(t - \theta) + v\lambda(t - 2\theta) \right] - \frac{2\mu\xi(t - \theta)}{1 + \varphi\lambda(t)} \left[\frac{1}{1+\beta} - \frac{\varphi\beta}{1+\beta} \lambda(t - \theta) \right] - v \frac{\xi(t - 2\theta)}{1 + \varphi\lambda(t)} [1 - \varphi\lambda(t - 2\theta)]; \quad (81)$$

(1) et (2). Il y a, en outre, 10 m. 21 correspondant au Venturi.

pour : $t > 3\theta$ et pour les périodes suivantes :

$$\begin{aligned} \xi(t) = & \frac{2\rho Y_0}{1 + \rho\lambda(t)} \left\{ \lambda(t-3\theta) - \lambda(t) + \left[1 - \frac{4\alpha}{(1+\alpha)(1+\beta)} \right] [\lambda(t-2\theta) - \lambda(t-\theta)] \right\} \quad (82) \\ & - \frac{1 - \rho\lambda(t-3\theta)}{1 + \rho\lambda(t)} \xi(t-3\theta) - \left[\frac{4}{(1+\alpha)(1+\beta)} - 1 \right] \frac{\xi(t-\theta) + \xi(t-2\theta)}{1 + \rho\lambda(t)} \\ & - \rho \left[1 - \frac{4\beta}{(1+\alpha)(1+\beta)} \right] \frac{\xi(t-\theta)\lambda(t-\theta) - \xi(t-2\theta)\lambda(t-2\theta)}{1 + \rho\lambda(t)}, \end{aligned}$$

formules qui s'appliquent quelle que soit la loi de fermeture.

Nous indiquerons plus loin la façon dont M. de Sparre transforme ces formules pour les rendre plus aisément calculables.

Nous possédons maintenant les éléments nécessaires pour traiter la question tout à fait fondamentale de la détermination de la vitesse de propagation dans une conduite à caractéristiques variables.

75. Application des formules précédentes. — Détermination de la vitesse de propagation de l'onde dans les conduites formées de tronçons à caractéristiques différentes.

Dans les expériences faites sur les hautes chutes les divers expérimentateurs ont trouvé constamment une vitesse supérieure à celle déduite de la formule théorique; en d'autres termes, la vitesse de propagation semble croître avec la pression; soient

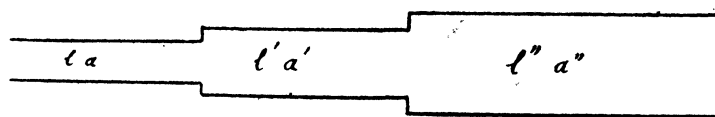


FIG. 132.

l la longueur d'un premier tronçon dans lequel le diamètre et l'épaisseur sont constants; a la vitesse correspondante; l' , a' les mêmes quantités pour un deuxième tronçon; l'' , a'' pour un troisième, etc..., la durée totale d'aller et de retour de l'onde est :

$$2 \left(\frac{l}{a} + \frac{l'}{a'} + \frac{l''}{a''} + \dots \right),$$

et pour qu'une perturbation partie de l'extrémité aval y revienne avec le même signe, il faut une durée :

$$T = 4 \left(\frac{l}{a} + \frac{l'}{a'} + \frac{l''}{a''} + \dots \right) = 4 \sum \frac{l_i}{a_i}; \quad (83)$$

nous appelons T la période théorique.

Or l'expérience montre que la période expérimentale observée est plus petite que T . La détermination expérimentale de cette période peut se faire de la façon suivante : Par exemple, M. Boucher, à Fully, observait le manomètre placé à l'extré-

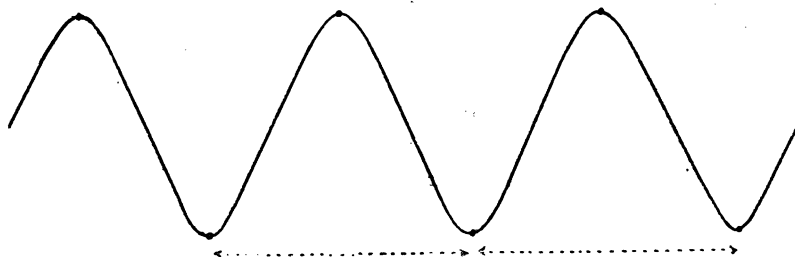


FIG 133.

mité aval de la conduite et déterminait la durée séparant deux maxima successifs du manomètre. La raison de ce choix est facile à comprendre : on détermine assez facilement le moment du maximum de l'élongation de l'aiguille du manomètre. Il serait au contraire assez malaisé de déterminer le moment où la pression passe par sa valeur initiale, car il faudrait tenir compte de l'influence de la perte de charge, assez difficile à déterminer et variable d'ailleurs dans chaque cas suivant les conditions de l'expérience. (Lettre de M. de Sparre du 10 oct. 1916.)

M. Boucher trouve ainsi à Fully, chute de 1.650 mètres, une période de 13,5, alors que la valeur théorique de T est 15,97.

La valeur théorique dépasse donc la valeur expérimentale de 15,5 %.

Dans les essais de l'Ackersand, où la chute a une hauteur de 720 mètres, la période calculée a été trouvée de 4,7 % supérieure à la valeur expérimentale.

M. de Sparre cite également les expériences d'Allevard, où la hauteur de chute était de 200 mètres environ; la vitesse expérimentale est légèrement supérieure à celle déduite de la formule d'Allievi.

De même dans les expériences faites en Suisse en 1906 avec une chute de 345 mètres, la vitesse expérimentale a dépassé de 2 % la vitesse théorique.

L'un de nous ⁽¹⁾ a montré qu'on expliquait parfaitement cette différence en faisant usage des formules de M. de Sparre relatives à une conduite formée de deux tronçons pour lesquels la durée de propagation est la même, formules indiquées plus haut. Voici comment il a opéré :

Considérons la formule (73) : en prenant une fermeture ou une ouverture faisant varier λ de λ_0 à λ_1 dans un temps inférieur à θ et en posant :

$$v = \frac{1 - \rho\lambda_1}{1 + \rho\lambda_1}, \quad (84)$$

on a, en désignant par ξ'_n la valeur ξ_n à la fin de la n^{e} période :

$$\xi'_n + \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} (1 + v) \xi'_{n-1} + v \xi'_{n-2} = 0; \quad (85)$$

cette formule de récurrence permet à M. de Sparre, après des calculs assez longs, d'arriver à la formule :

$$\xi'_n = (-1)^{n-1} \frac{v^{\frac{n-1}{2}} \sin n\beta - v^{\frac{n-2}{2}} \sin (n-1)\beta}{\sin \beta} \xi'_1, \quad (86)$$

avec

$$\xi'_1 = 2\rho y_0 \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{1 + \rho\lambda_1};$$

en appliquant cette formule à une fermeture totale, il faut poser $\lambda = 1$, $\lambda_1 = 0$; donc $v = 1$; il en résulte :

$$\begin{aligned} \xi'_1 &= 2\rho y_0 = \frac{av_1}{g}, \\ \xi'_n &= (-1)^{n-1} \frac{av_1}{g} \frac{\cos \frac{2n-1}{2}\beta}{\cos \frac{\beta}{2}} \end{aligned} \quad (87)$$

avec :

$$\cos \beta = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}. \quad (88)$$

⁽¹⁾ C. Camichel, *C. R.*, t. 163, p. 438.

76.

Conduite de Fully.

M. de Sparre a appliqué la formule précédente à la conduite du lac de Fully. Cette chute a 1.650 mètres; elle se compose d'une première section d'une longueur de 2.347 m. 5 et d'un diamètre de 0 m. 50, et pour laquelle la durée de propagation est de 1.87. Cette première section est suivie d'une deuxième d'une longueur de 2.278 mètres, d'un diamètre de 0 m. 60, et pour laquelle la durée de propagation est 2.12.

Afin d'avoir deux tronçons pour lesquels la durée de propagation soit rigoureusement égale, M. de Sparre suppose que les deux sections aient respectivement des longueurs de 2.496,3 mètres et 2.129,2 mètres, les autres données restant les mêmes, on a :

$$\begin{aligned} v_1 &= 1 \text{ m. } 02, & \theta &= 3^{\circ} 97, \\ \frac{\beta}{2} &= 37^{\circ} 35', & \frac{av_1}{g} &= 130,6; \end{aligned}$$

le coup de bélier à la fin de la n^{e} période est :

$$\xi'_n = (-1)^{n-1} 130,6 \frac{\cos \frac{2n-1}{2} \beta}{\cos \frac{\beta}{2}}. \quad (89)$$

En utilisant cette formule, calculons les valeurs de ξ'_n jusqu'à $n = 26$; nous avons le tableau suivant :

n	ξ'_n	n	ξ'_n	n	ξ'_n	n	ξ'_n
1	+ 130 ^m ,6	8	+ 151 ^m	15	+ 162 ^m	22	+ 164 ^m
2	+ 63 ,7	9	+ 25	16	— 141	23	— 53
3	— 163	10	— 164	17	— 155	24	— 137
4	+ 25	11	+ 58	18	+ 93	25	+ 123
5	+ 152	12	+ 134	19	+ 107	26	+ 74
6	— 95	13	— 127	20	— 148		
7	— 105	14	— 69	21	— 31		

La figure 134 représente la courbe obtenue en portant comme abscisse θ (de 0 à 260) et comme ordonnée ξ'_u .

Entre le premier et le huitième maximum, c'est-à-dire pour 7 périodes apparentes, il s'est écoulé un temps égal à 240. En mesurant ainsi la période apparente,

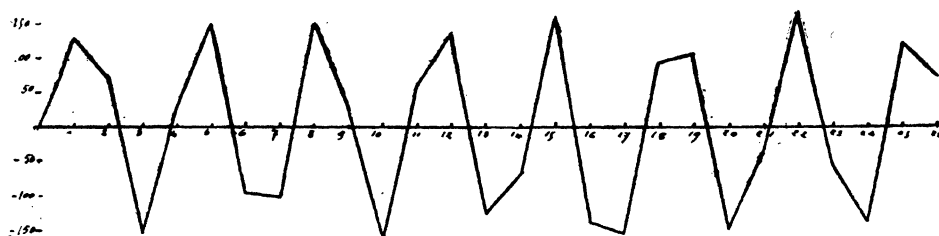


FIG. 134.

on opère comme l'a fait M. Boucher. Il en résulte pour une période la valeur apparente :

$$\frac{240}{7} = \frac{24 \times 3,97}{7} = 13,6.$$

Or M. Boucher a trouvé expérimentalement la valeur 13,5 ; la concordance est donc tout à fait satisfaisante.

77.

Conduite de l'Akersand.

Dans sa lettre du 10 octobre 1916, M. de Sparre nous signale également le calcul analogue qu'il a fait pour la conduite de l'Akersand, calcul qui confirme l'explication précédente.

Pour que les calculs ne soient pas trop compliqués, M. de Sparre suppose un premier tronçon du côté de la prise d'eau de 0,70 mètres de diamètre, de longueur $l_1 = 1.169,3$ mètres (au lieu de 1.157 mètres), et où la vitesse de propagation est : $a_1 = 1.160,6$ mètres, suivie d'un second tronçon du côté du distributeur de 0,50 mètres de diamètre, de longueur $l_2 = 250,7$ mètres (au lieu de 263), et où la vitesse de propagation est : $a_2 = 1.244,2$ mètres. On a, dans ces conditions :

$$\theta = \frac{2l_2}{a_2} = 0,403, \quad \frac{2l_1}{a_1} = 2,015 = 5\theta$$

et la durée totale de propagation est alors :

$$\theta = \frac{2l_1}{a_1} + \frac{2l_2}{a_2} = 2,418 = 6\theta,$$

ce qui correspond à la vitesse de propagation moyenne : $a' = 1.175$ mètres, qui est la valeur théorique indiquée par M. Neeser. En supposant donc un débit initial de 186,3 litres et une fermeture totale en un temps $8\theta = 3^s,224$, puis pour une époque $t = 30\theta = 12^s,09$ une ouverture en un temps $6\theta = 2^s,418$ de 0 à 186,3, M. de Sparre a obtenu les résultats indiqués dans le diagramme (fig. 135).

Pour rechercher la période apparente d'oscillation, il faut considérer une période

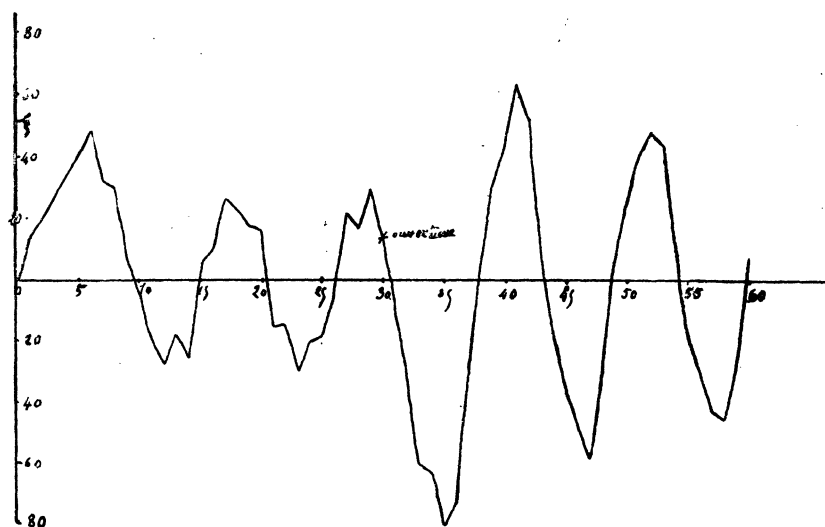


FIG. 135.

qui ne comprenne pas le moment de l'ouverture, puisqu'au moment où l'on remet la vanne en mouvement une nouvelle période commence.

Entre le premier et le troisième maximum on a une durée égale à 230, de même entre le troisième et cinquième minimum, on a également une durée de 230. Le temps qui correspond à chacun de ces intervalles est de deux périodes complètes d'oscillation apparente; on a donc pour la durée d'une période :

$$\frac{1}{2} 230 = 115.$$

M. Neeser donne pour la valeur expérimentale de la durée de cette oscillation apparente 4,62.

L'accord entre le calcul et l'observation est des plus satisfaisants.

On voit donc que l'augmentation de la vitesse avec la hauteur de chute n'est qu'apparente; elle provient de ce que les observateurs ont cru mesurer la vitesse par l'observation de la période d'oscillation du manomètre placé à l'extrémité aval

de la conduite; en réalité ils observaient, comme nous venons de le montrer, une période qui dépend de la structure de la conduite qui est formée de tronçons différents.

Il en résulte que pour mesurer la vitesse le procédé employé jusqu'ici est défectueux.

La méthode de la dépression brusque au contraire convient parfaitement, comme le montre le paragraphe suivant.

Nous verrons plus loin, à propos des conduites IE, P₃, C₄, d'autres vérifications de même nature que celles que nous venons de donner.

78. Méthode de la dépression brusque dans les conduites à caractéristiques variables.

M. de Sparre, dans la même lettre, nous indique l'emploi de sa méthode de calcul à l'étude de la dépression brusque dans une conduite à caractéristiques variables, c'est-à-dire formées de tronçons pour lesquels le diamètre et l'épaisseur sont différents.

La dépression brusque se traduira dans la formule (73) par

$$\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0 \quad (90)$$

et λ_i quelconque, en supposant que l'ouverture de très courte durée de la conduite a lieu à l'époque 0.

Il suffit donc d'appliquer la formule :

$$\xi'_n = 2\rho\gamma_0 \frac{\lambda_{n-1} - \lambda_n}{1 + \rho\lambda_n} - 2 \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \frac{\xi'_{n-1}}{1 + \rho\lambda_n} - \frac{1 - \rho\lambda_{n-1}}{1 + \rho\lambda_n} \xi'_{n-2} \quad (91)$$

avec

$$\xi_0 = 0;$$

on a :

$$\xi'_1 = -2\rho\gamma_0 \frac{\lambda_1}{1 + \rho\lambda_1}, \quad (92)$$

$$\xi'_2 = -2 \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \xi'_1, \quad (93)$$

$$\xi'_3 = 2\rho\gamma_0 \lambda_1 - 2 \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \xi'_2 - (1 - \rho\lambda_1) \xi'_1 = -2\xi'_1 \left[1 - 2 \left(\frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \right)^2 \right], \quad (94)$$

en posant :

$$\cos \beta = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha},$$

il vient :

$$\xi'_2 = -2 \cos \beta \xi'_1, \quad \xi'_3 = -2 \xi'_1 (1 - 2 \cos^2 \beta).$$

Pour

$$n - 2 > 2, \quad n > 4$$

on a :

$$\xi'_n + 2 \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \xi'_{n-1} + \xi'_{n-2} = 0 \quad (95)$$

en posant :

$$u_n = \xi'_n + b \xi'_{n-1} \quad (96)$$

et cherchant à disposer de b et de h de façon que :

$$u_n + h u_{n-1} = 0, \quad (97)$$

on aura :

$$\xi'_n + (b + h) \xi'_{n-1} + b h \xi'_{n-2} = 0; \quad (98)$$

b et h sont donc les racines de l'équation :

$$X^2 - 2 \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} X + 1 = 0. \quad (99)$$

Les racines de cette équation sont imaginaires; on peut donc écrire :

$$X = \cos \beta \pm i \sin \beta,$$

d'où :

$$h = e^{-\beta i}, \quad b = e^{\beta i}; \quad (100)$$

or :

$$u_n = -h u_{n-1}, \quad u_{n-1} = -h u_{n-2}, \dots, u_4 = -h u_3;$$

donc :

$$u_n = (-1)^{n-3} h^{n-3} (\xi'_3 + b \xi'_2), \quad (101)$$

d'où l'on tire :

$$\xi'_n + e^{\beta i} \xi'_{n-1} = (-1)^{n-2} e^{-(n-2)\beta i} 2i \sin \beta \cdot \xi'_1, \quad (102)$$

multipliant par $e^{-\beta i}$, il vient en égalant les coefficients de i dans les deux membres :

$$\xi'_{2n} = (-1)^{n-1} 2 \cos(n-1)\beta \xi'_1. \quad (103)$$

Telle est la formule donnée par M. de Sparre pour la dépression brusque dans le cas d'une conduite à caractéristiques variables, supposée constituée par deux tronçons.

On voit que les diverses surpressions et dépressions observées ne sont pas décalées; en d'autres termes, ont lieu aux époques 2, 3, ... $n\theta$; mais leurs amplitudes varient suivant la formule qui vient d'être démontrée, tandis que dans le cas où la conduite n'a qu'une seule caractéristique, les surpressions et dépressions observées sont constantes pour $n \geq 2$; on peut retrouver ce résultat comme cas particulier de la formule précédente; on a en effet dans une conduite à caractéristique unique :

$$\alpha = 1, \quad \beta = 90^\circ,$$

ou

$$\cos(2p-1)\beta = 0, \quad \cos 2p\beta = (-1)^p,$$

et par suite :

$$\xi'_{2p} = 0, \quad \xi'_{2p-1} = 2(-1)^p \xi'_1, \quad (104)$$

résultat donné par l'un de nous ⁽¹⁾.

Il faut remarquer que dans les calculs précédents, nous avons négligé, comme on le fait constamment dans la théorie de M. Allievi, les déformations que l'onde subit dans son parcours dans la conduite.

79. Application des formules précédentes à la conduite de Fully.

En appliquant les formules précédentes à la conduite de Fully, où $\beta = 75^\circ 10'$, et en supposant une dépression initiale $\xi'_1 = -10$, M. de Sparre trouve pour les valeurs de ξ' correspondant aux diverses valeurs de n :

n	ξ'	n	ξ'	n	ξ'
1	-10	6	19,2	11	-17,0
2	5,1	7	0,3	12	-5,8
3	17,4	8	-19,4	13	20,0
4	-14,0	9	9,6	14	-4,4
5	-10,2	10	14,5	15	-17,7

(1) Camichel, *Lumière électrique*, 16 septembre 1916.

La figure 136 représente les diverses valeurs de ξ' aux diverses époques 0, 20, 150; elle montre que la méthode de la dépression brusque s'étend à une conduite à caractéristiques variables.

En fait, comme le montrent les expériences de Soulom, les époques 20, 40, c'est-

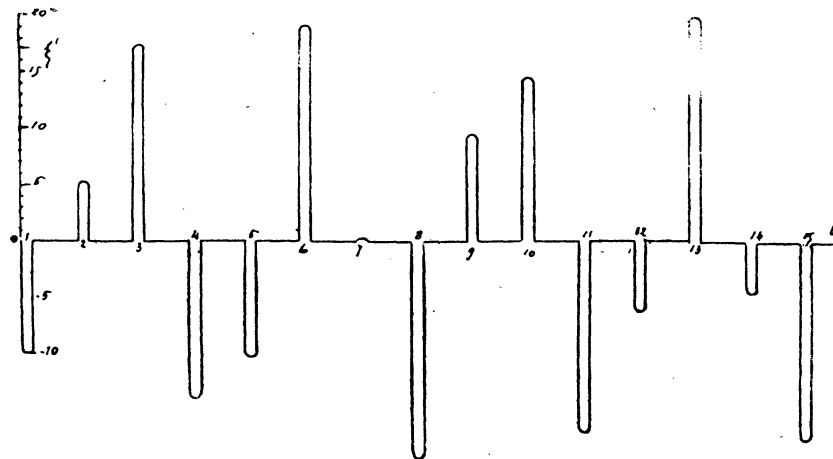


FIG. 136.

à-dire les durées aller et retour de l'onde d'un bout à l'autre de la conduite, sont faciles à distinguer; 1° d'abord parce qu'on connaît leur valeur approchée; 2° ensuite parce que le coefficient de réflexion totale sur la chambre de mise en charge est beaucoup plus grand que le coefficient de réflexion partielle à la jonction de deux tronçons de la conduite.

Dans la même lettre, M. de Sparre indique le calcul de la dépression brusque pour la conduite de l'Akersand dans le cas où la dépression initiale égale 10 mètres. Le calcul a été poussé jusqu'à 240 (*fig. 137*).

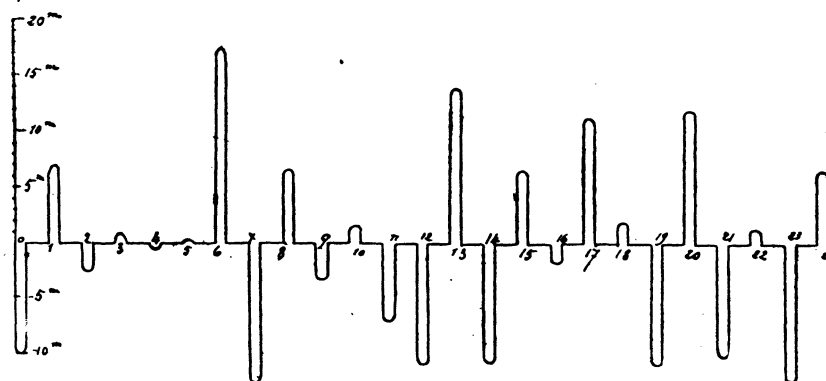


FIG. 137.

80. Vérifications expérimentales de la théorie de la dépression brusque dans les conduites à caractéristiques multiples. — Expériences sur la conduite IE à trois tronçons. — Vérification expérimentale des phénomènes de réflexions sur une conduite formée de deux tronçons.

L'exactitude de l'interprétation donnée par l'un de nous de l'augmentation apparente de la vitesse a dans une conduite formée de tronçons différents est hors de doute. Nous avons tenu néanmoins à réaliser dans une expérience de Laboratoire une conduite formée de deux tronçons. Cette conduite comprenait deux parties

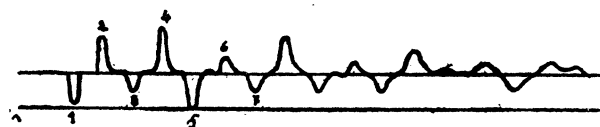


FIG. 138.

placées en série : l'une de $201,86 = l$ mètres ayant 80 mm. de diamètre intérieur et 5 mm. d'épaisseur, dans ce tronçon : $a = 1.300$; l'autre de $101,94 = l'$ mètres ayant 40 mm. de diamètre intérieur et 3 mm. d'épaisseur : $a' = 1.330$; à l'extrémité aval, on avait disposé un indicateur et un robinet permettant de produire une ouverture de courte durée. On a :

$$\frac{l}{a} = 0,155, \quad \frac{2l'}{a'} = 0,153.$$

L'expérience de la dépression brusque a donné le diagramme IE-146-4 (*fig. 138*), qui montre les diverses réflexions qui se produisent soit à l'endroit où la section et l'épaisseur changent, soit à la chambre de mise en charge.

La période théorique est :

$$2 \left(\frac{2l'}{a'} + \frac{2l}{a} \right) = 0,923;$$

on trouve sur le graphique : 0,92.

D'ailleurs les maxima et minima indiqués par les diverses encoches des graphiques sont :

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0,1475 & 0,1475 & 0,15 & 0,165 & 0,16 & 0,15 & \end{array}$$

Nous avons en outre déterminé la période apparente; pour cela nous avons fait une fermeture assez lente et nous avons enregistré les variations de pression au bout d'un certain temps, IE-146-6 (*fig. 139*).

La période apparente a été trouvée égale à 0,69; on voit donc qu'elle est très nettement inférieure à la période théorique.

On a obtenu les mêmes résultats en employant divers ressorts pour l'indicateur, ressorts donnant 4 mm. de déplacement du style par kgm. de pression et 2 mm. par kgm.

Nous n'avons pas songé à pousser plus loin cette étude des phénomènes de réflexion au point où les conduites changent d'épaisseur et de diamètre, parce que



FIG. 139.

les perturbations provenant du déplacement du piston de l'indicateur deviennent notables dans une conduite ayant seulement 39 mm. de diamètre intérieur. Ces perturbations peuvent modifier l'amplitude des pressions, mais elles n'altèrent pas les durées mesurées sur les diagrammes.

81.

Période apparente de IE.

Pour vérifier que la valeur de la période apparente trouvée par l'expérience concorde bien avec le calcul, nous avons construit le diagramme des pressions pour une fermeture linéaire dans un temps $2\theta = 2 \frac{l'}{a'}$.

Nous avons employé les formules données par M. de Sparre dans sa note du 30 avril 1917 (*C. R.*, t. 164, p. 683), au sujet des coups de bélier dans une conduite formée de trois tronçons, pour lesquels la durée de propagation est la même. Dans ce travail, les notations sont les suivantes :

l, d, a désignent la longueur, le diamètre et la vitesse de propagation pour le tronçon voisin du distributeur; l', d', a' et l'', d'', a'' pour les deux autres tronçons; $\lambda(t)$ est le rapport de la surface ouverture du distributeur à l'instant t à celle correspondant à l'ouverture complète; v_1 la vitesse de régime dans le premier tronçon quand le distributeur est complètement ouvert; en outre :

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \frac{2l}{a}, & \theta' &= \frac{2l'}{a'}, & \theta'' &= \frac{2l''}{a''}, \\ \alpha &= \frac{a'd^2}{ad'^2}, & \beta &= \frac{a''d'^2}{a'd''^2}, & \rho &= \frac{qv_1}{2gy_0}, \\ \theta &= \theta' = \theta'', \end{aligned} \right\} \quad (105)$$

on a dans le cas particulier qui nous intéresse :

$$\begin{aligned} \alpha &= 0,25, & \beta &= 1, & m &= 0,6. \\ \log \rho &= T,58319, & \lambda_0 &= 1, & \lambda_1 &= \frac{1}{2}, \\ \lambda_2 &= \lambda_3 = \dots = \lambda_k = 0, \end{aligned}$$

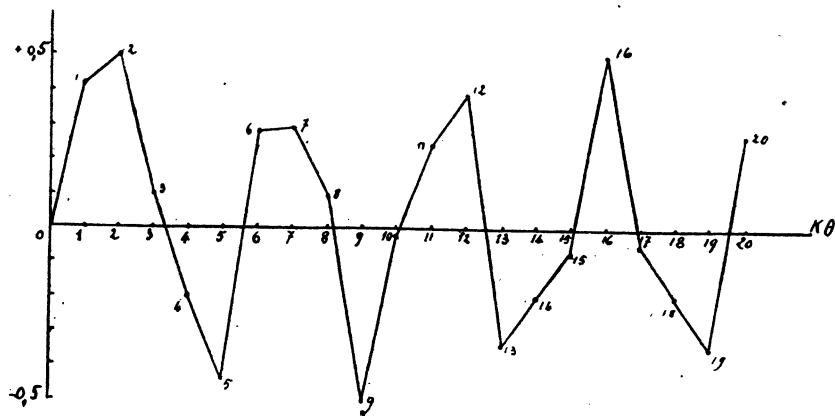


FIG. 140.

En désignant par $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$, les valeurs de la surpression à l'extrémité aval de la conduite aux époques $\theta, 2\theta, \dots, K\theta$; on a :

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= 2\rho y_0 \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{1 + \rho\lambda_1} = \frac{\rho y_0}{1 + \frac{\rho}{2}}, \\ \xi_2 &= 2\rho y_0 \left(1 - \frac{\mu}{2}\right) - \xi_1 \mu \left(1 - \frac{\rho}{2}\right), \\ \xi_3 &= 2\rho y_0 \frac{4\alpha\beta}{(1+\alpha)(1+\beta)} - 2\mu \frac{\xi_2}{1+\beta}, \\ \xi_4 &= \rho y_0 - \left(1 - \frac{\rho}{2}\right) \xi_1 - \left[\frac{4}{(1+\alpha)(1+\beta)} - 1 \right] (\xi_3 + \xi_2), \\ \xi_n &= -\xi_2 - 0,6(\xi_4 + \xi_3), \\ \xi_n &= -\xi_{n-3} - 0,6(\xi_{n-1} + \xi_{n-2}); \end{aligned} \right\} \quad (106)$$

cette formule de récurrence s'applique pour $n \geq 5$. On obtient avec la plus grande facilité le tableau suivant :

IE-146 (*fig. 140*).

Époques $k\theta$	ξ_k	$\eta_k = \frac{\xi_k}{\frac{av_0}{g}}$	Époques $k\theta$	ξ_k	$\eta_k = \frac{\xi_k}{\frac{av_0}{g}}$
$k = 1$	5 ^m ,56	+ 0,42	$k = 11$	+ 3 ^m ,17	+ 0,24
2	6 ^m ,57	+ 0,50	12	+ 5 ^m ,23	+ 0,39
3	1 ^m ,36	+ 0,10	13	— 4 ^m ,47	— 0,34
4	— 2 ^m ,63	— 0,20	14	— 2 ^m ,71	— 0,20
5	— 5 ^m ,81	— 0,44	15	— 0 ^m ,92	— 0,07
6	+ 3 ^m ,71	+ 0,28	16	+ 6 ^m ,65	+ 0,50
7	+ 3 ^m ,89	+ 0,29	17	— 0 ^m ,73	— 0,05
8	+ 1 ^m ,25	+ 0,09	18	— 2 ^m ,64	— 0,20
9	— 6 ^m ,79	— 0,51	19	— 4 ^m ,63	— 0,35
10	— 0 ^m ,56	— 0,04	20	+ 3 ^m ,64	+ 0,27

En prenant la moyenne de 3 périodes apparentes T déterminées sur la figure 140, on trouve que

$$3T = 14,10, \text{ d'où } T = 4,70;$$

en prenant : $\theta = 0^{\circ},15$, on a :

$$T = 0^{\circ},705$$

valeur concordante avec celle que l'expérience a donnée : $0^{\circ},69$.

On voit donc que la vérification est tout à fait satisfaisante.

82. Expériences de dépression brusque faites sur la conduite P_2 de Soulom.

Sur la chute du Gave de Pau, de 110 mètres environ de hauteur, nous avons surtout procédé à des essais de dépression brusque. Les turbines actionnées, du type Francis, étant munies de régulateurs de pression sous forme de vannes compensatrices, la présence de ces appareils viendrait compliquer beaucoup les phénomènes, si l'on utilisait les turbines elles-mêmes. Nous avons donc opéré à l'aide de robinets spéciaux, et en ayant soin de maintenir fermée la vanne qui met en communication la conduite et la turbine.

Sur le Gave de Cauterets, au contraire, les mêmes essais ont été faits à l'aide des turbines elles-mêmes.

Pour bien faire comprendre la façon dont nous avons opéré sur P_3 , il est indispensable de compléter les indications données au chapitre 1^{er} sur cette conduite. La chute du Gave de Pau est constituée, en dehors du canal d'amenée de 6,2 km. environ de longueur, par une chambre de mise en charge précédée d'un réservoir. L'ensemble de ces ouvrages, où le niveau de l'eau peut varier entre les cotes 583 et 586,50 suivant la demande des turbines et l'arrivée de l'eau dans le canal, représente une capacité utilisable de 2.000 mc. environ.

De cette chambre partent trois conduites forcées de 1 m. 20 de diamètre intérieur et dont l'épaisseur varie de 7 à 13 mm. Elles sont respectivement désignées, à partir du centre de l'usine, par les indices P_1 , P_2 et P_3 . Y compris le siphon automatique d'arrêt de débit placé à l'origine amont, ces conduites ont respectivement les longueurs suivantes jusqu'aux robinets-vannes des turbines :

P_1	325,10 m.
P_2	334,30
P_3	346,50

On trouvera à la planche 20 le profil en long schématique de la conduite P_3 sur laquelle ont porté surtout nos essais.

Chacune de ces conduites, fournies par la Maison Bouchayer et Viallet, alimente une turbine du type Francis, de 3.500 HP fournie par la Maison Bouvier et dont l'axe est à la cote 474,90.

Sur le parcours de ces conduites, à 90 mètres en moyenne avant le robinet des turbines (100 mètres exactement pour la conduite P_3), est monté un Venturi Kent pour le jaugeage des débits.

Avant le robinet-vanne qui commande l'arrivée de l'eau dans chaque turbine, existe une prise permettant d'alimenter une canalisation desservant les excitatrices relatives à ces trois groupes de turbines-alternateurs.

Les trois conduites sont ainsi mises normalement en communication entre elles par l'intermédiaire de cette canalisation secondaire; mais un jeu de robinets permet de les isoler de telle façon qu'une conduite peut débiter uniquement sur la turbine principale qui s'y rapporte, sans être en communication avec les autres ni avec les excitatrices. C'est là une condition particulièrement importante pour les expériences à exécuter sur ces conduites.

Immédiatement avant l'entrée des conduites dans l'usine existe un robinet de vidange, du type robinet-vanne, de 100 mm. de diamètre, placé en dessous, à un point où la cote de l'axe de la conduite est 472,63. Ce robinet envoie directement les eaux dans le canal de fuite (*fig. 141*).

C'est la présence de ce robinet de vidange, ainsi que la charge relativement faible existant en ce point (11,5 kgs. par cmq. environ), qui nous a permis de faire les

essais de dépression brusque, de faibles fermetures brusques et de résonances. Pour cela, nous avons monté en aval du robinet de vidange et sur son orifice de sortie un robinet à boisseau en bronze dont on trouvera le croquis sur les planche 142 et 143 ; le diamètre de ce robinet est égal à 38 mm. ; mais au contact du boisseau et du robinet la lumière a la forme d'un trapèze n'ayant que 48 mm. de hauteur avec une

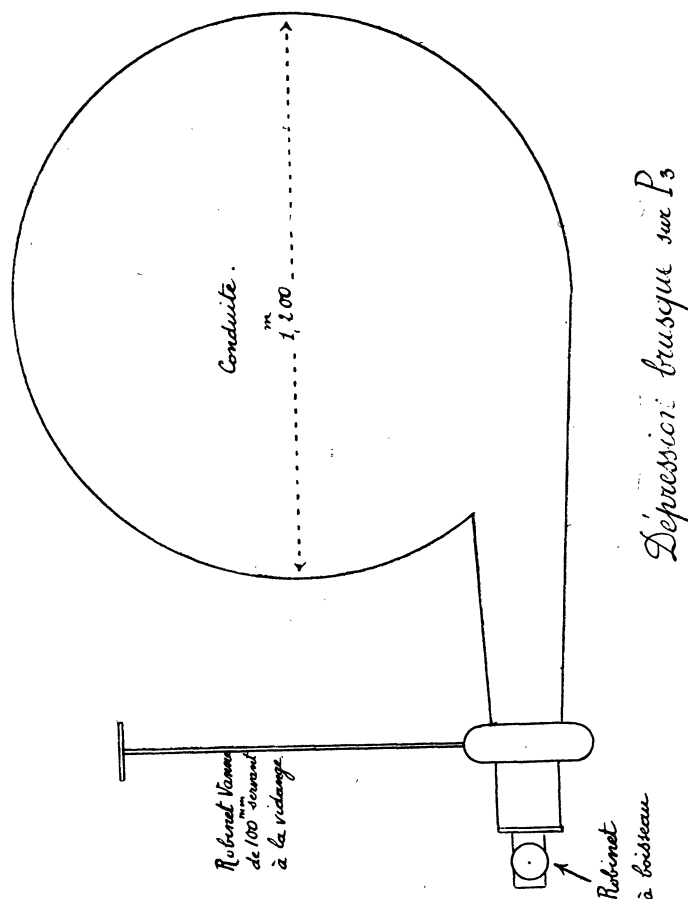


FIG. 141.

grande base de 25 mm. et une petite de 20 mm. On pouvait facilement manœuvrer ce robinet, soit à la main, soit par un moteur électrique, comme nous l'indiquerons plus loin.

Pour faire une expérience, en partant du robinet de vidange fermé, on commençait par ouvrir partiellement ce dernier et l'on établissait ainsi directement la pression sur le petit robinet en bronze.

Il va sans dire que l'on avait eu soin au préalable d'isoler la conduite en fermant

sa communication tant avec le collecteur secondaire des excitatrices qu'avec la turbine.

On procédait alors, à l'aide de ce robinet, aux manœuvres que l'on désirait;

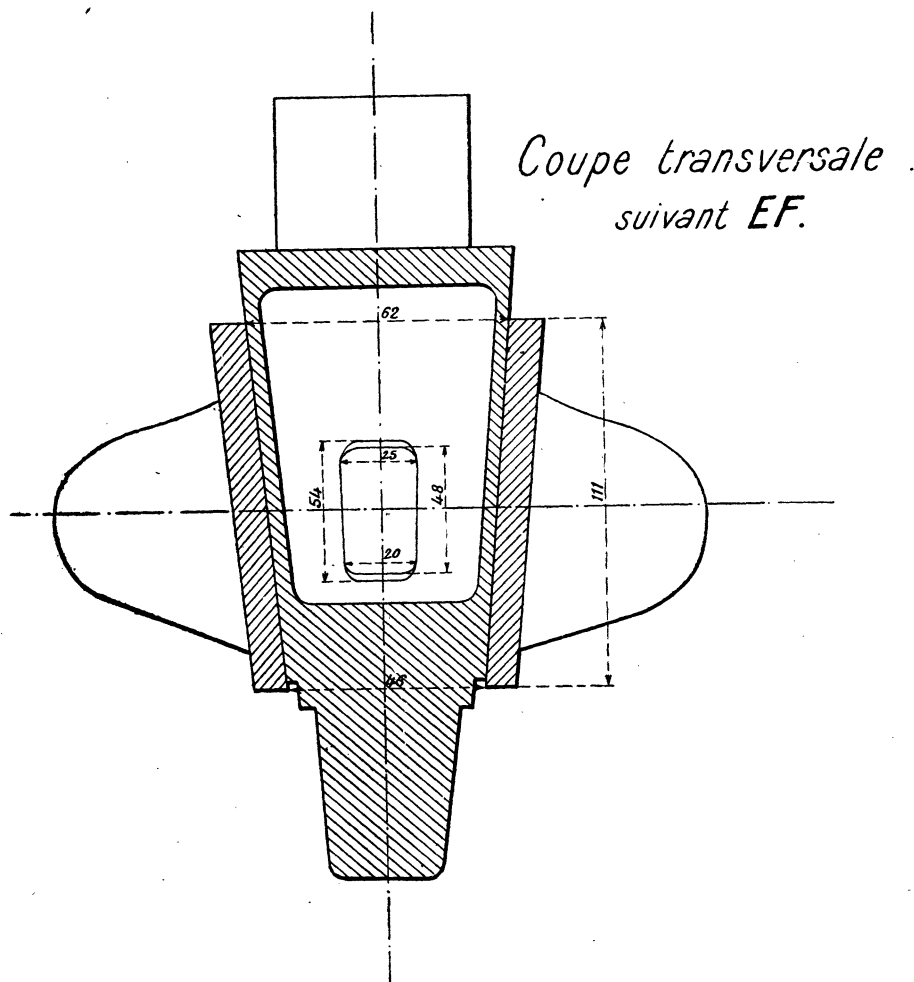


FIG. 142.

après quoi on refermait le robinet de vidange, et la conduite se retrouvait dans des conditions normales. La figure 141 indique le mode de montage.

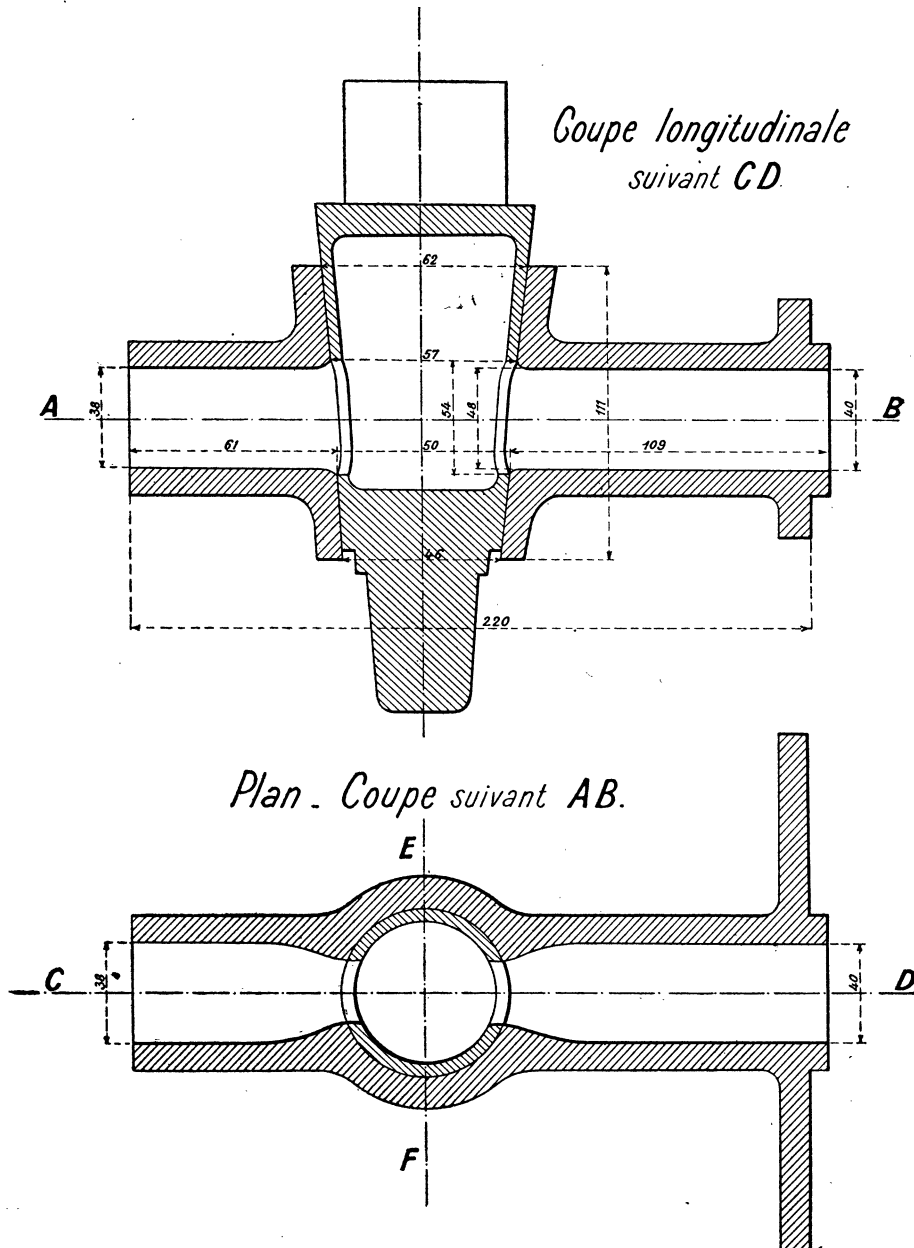


FIG. 143.

83. Instruments employés pour la mesure des pressions dans les expériences de dépression brusque.

Les instruments employés pour la mesure des pressions ont été de deux sortes :

1° Un manomètre différentiel Richard pouvant enregistrer directement des pressions moyennes de 12 kgs ; il est utile d'ajouter que nous n'avons jamais employé la disposition différentielle, car il était difficile d'obtenir une contrepression élevée absolument fixe. Cet instrument a donc fonctionné comme manomètre ordinaire.

Nous avions d'abord eu l'idée de monter une des tubulures du manomètre sur une des conduites de Soulom laissée isolée qui aurait servi de témoin pendant l'expérimentation sur l'autre conduite, mais les répercussions dans la chambre de mise en charge nous ont fait renoncer à cette méthode.

On peut signaler à ce sujet que si cet appareil est très sensible, il présente le défaut de former un système oscillant ayant une période propre très appréciable qui vient se greffer sur les oscillations produites dans la conduite. (Voir *fig. 4*, chapitre I.)

2° Des indicateurs Garnier ou Crosby dont nous avons déjà eu l'occasion de parler à propos des essais de l'Institut électrotechnique. Ces appareils sont moins commodes à utiliser que le manomètre Richard, car il faut éviter avec soin tout frottement, ce qui est assez difficile dans des eaux souvent troubles. Leurs inscriptions, quand ils sont bien réglés, sont bien supérieures à celles données par le manomètre Richard. Mais les manomètres Richard demeurent excellents dans la pratique courante des installations hydrauliques.

84. Conduite des expériences.

Les essais ont été exécutés de façon extrêmement simple, en faisant tourner brusquement d'une demi-circonférence le robinet à boisseau.

On partait ainsi de la position fermée et on revenait à la même position en passant dans l'intervalle par l'ouverture.

Un jet d'eau de courte durée se produisait.

Nous avons d'ailleurs, de façon générale, procédé toujours en partant de la position fermée pour revenir à la position fermée, car il faut remarquer que la perturbation brusque donne lieu à une très faible variation de pression et que la continuité de l'écoulement amortissant beaucoup les variations de pression, en produisant la perturbation brusque en partant de la position ouverte pour y revenir, nous n'aurions pas pu constater le retour de l'onde.

Ainsi qu'il résulte des études de l'un de nous et que nous avons exposées précédemment, on obtiendrait, si la conduite était réellement divisée en deux ou trois tronçons, pour lesquels la durée de parcours de l'onde serait la même, un graphique de dépression brusque de la forme indiquée figure 138 ; mais il n'en est pas ainsi : il faut remarquer en effet que la conduite P_3 comprend, comme d'ailleurs toutes les conduites industrielles, un nombre assez élevé de tronçons (voir tableau du début du chapitre VII), et que les variations des caractéristiques entre deux tronçons consécutifs sont très faibles. *L'emploi de la méthode de la dépression brusque est néanmoins justifié parce que la réflexion totale de l'onde sur la chambre de mise en charge se distingue nettement des autres réflexions partielles qui se produisent aux extrémités des divers tronçons de la conduite.* Cette réflexion totale permet de déterminer la durée $2T$ du parcours aller et retour de l'onde d'une extrémité à l'autre de la conduite : $2T = 2 \sum \frac{l_i}{a_i}$. Dans les graphiques de dépression brusque les réflexions partielles dont nous venons de parler donnent parfois l'impression d'un étalement de l'onde qui n'existe pas en réalité.

Nous allons maintenant, en nous appuyant sur ces diverses remarques, examiner en détail quelques graphiques de dépression brusque relevés sur la conduite P_3 de Soulom.

On remarquera que, pour tenir compte des irrégularités dans la rotation des cylindres employés, nous avons toujours mesuré le temps et les périodes dans la même région du diagramme et sur une longueur à peu près la même.

Nous rappellerons que pour la conduite P_3 , le calcul donne :

$$4 \sum \frac{l_i}{a_i} = 4 \times 0",3654 = 1",4616 \quad \text{ou} \quad 1",462 \text{ (calc.)}$$

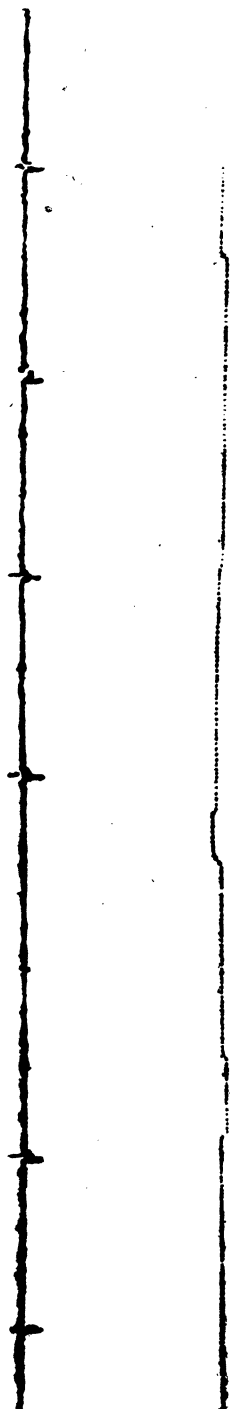


FIG. 144. — US-P₃-24-1. Dépression brusque; détermination de a . Remarque : l'inscription du signal laisse à désirer.



FIG. 145. — US-P₃-16-7. Dépression brusque. Remarque : le manomètre frottait légèrement.

85. Expériences de dépression brusque sur la conduite P₃ de Soulom.

NUMÉROS DES EXPÉRIENCES	NUMÉROS DES FIGURES		$4 \Sigma \frac{l_i}{a_i}$
US-P ₃ -24-1.	Fig. 144.	$4 \Sigma \frac{l_i}{a_i} \dots 49^{\text{mm}},6$ $1^{\circ} \dots \dots \dots 33^{\text{mm}},2$	1",494
US-P ₃ -16-7.	Fig. 145.	$4 \Sigma \frac{l_i}{a_i} \dots 46^{\text{mm}},0$ $2^{\circ} \dots \dots \dots 62^{\text{mm}},3$	1",477
US-P ₃ -18-2.	Fig. 146.	$4 \Sigma \frac{l_i}{a_i} \dots 46^{\text{mm}},0$ $2^{\circ} \dots \dots \dots 62^{\text{mm}},7$	1",467
US-P ₃ -16-8.	Fig. 147.	$4 \Sigma \frac{l_i}{a_i} \dots 43^{\text{mm}},1$ $2^{\circ} \dots \dots \dots 58^{\text{mm}},6$	1",471

L'appareil employé est l'indicateur Crosby.

Moyenne des essais précédents (Indicateur Crosby).

$$4 \Sigma \frac{l_i}{a_i} = \frac{1,494 + 1,477 + 1,467 + 1,471}{4} = 1",477 \text{ (obs.)}.$$

Différence en plus : 0",015 ou 1 %.

D'autres graphiques suivants ont été relevés avec le manomètre Richard, dont l'aiguille, pour une différence de pression donnée, avait des déplacements plus grands que ceux correspondant aux ressorts du Crosby; ils donnent des résultats concordants avec les précédents.

Moyenne des essais faits avec le manomètre Richard.

$$4 \Sigma \frac{l_i}{a_i} = \frac{1,496 + 1,449 + 1,449 + 1,435 + 1,434 + 1,471}{6} = 1",456 \text{ (obs.)}.$$

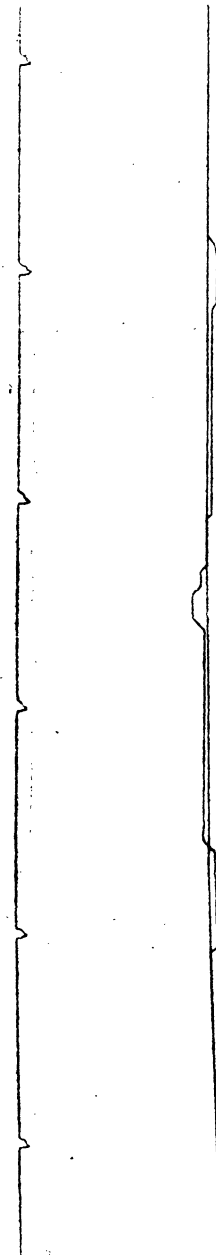
Différence en moins avec la période calculée : 0",006 ou 0,4 %.



FIG. 146. — US-P₃-18-2. Dépression brusque. Bonne détermination.



FIG. 147. — US-P₃-16-8. Dépression brusque.



On voit donc que la *dépression brusque*, dans les conduites à caractéristiques variables, donne pour $4 \sum \frac{l_i}{a_i}$ une valeur tout à fait concordante avec le calcul.

Il faut remarquer que le graphique de *dépression brusque* se transforme à la fin de l'expérience en une courbe sinusoïdale de période égale à la *période apparente*.

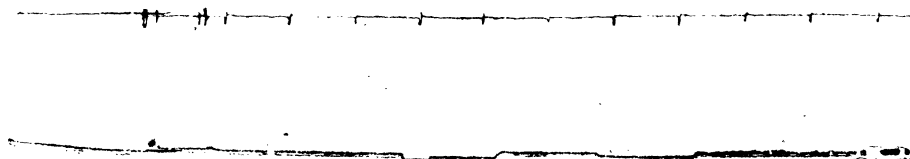


FIG. 147 bis. — US-P₃-22-3. — Dépression brusque (*).

86. Détermination de a en étudiant les réflexions successives à la chambre d'eau et à l'extrémité aval d'une perturbation donnant une discontinuité dans le diagramme; accord de l'expérience et de la théorie.

Les graphiques obtenus sur la conduite C₁ vont nous permettre de mettre en évidence très nettement les deux périodes dont nous avons parlé plus haut : la période apparente et la période théorique. Comme nous l'avons déjà dit, la période apparente est déterminée par l'intervalle de temps qui s'écoule entre deux maxima consécutifs de la courbe des pressions. La période théorique est donnée par la formule : $T = 4 \sum \frac{l_i}{a_i}$; nous l'avons trouvée égale à 2^s,008 pour C₁. (Voir au début du chapitre VII.)

Prenons le diagramme US-C₁-50-12 (*fig. 148*), nous constatons que les périodes successives sont de durées :

De A à B	1 ^{''} 75
De B à C	1 ^{''} 90
De C à D	1 ^{''} 90
De D à E	1 ^{''} 71
De E à F	1 ^{''} 97
De F à G	2 ^{''}

La période apparente a une valeur moyenne de 1^s,87. Nous verrons plus loin de

(*) On retrouvera au chapitre XI d'autres exemples de dépressions brusques.

meilleures déterminations de la période apparente; on a avantage à attendre pour faire cette mesure que les courbes de pressions aient pris une forme sinusoïdale.

Pour retrouver sur les diagrammes la vraie valeur de la vitesse moyenne, il faut avoir recours à l'artifice suivant : relever sur le diagramme un point singulier quelconque, tel qu'un léger feston indiquant une perturbation parmi la grande. Ce feston se reproduit au bout d'un temps $\frac{2L}{a}$, mais retourné à cause de la réflexion subie à la chambre d'eau par la perturbation qu'il représente; puis on le retrouve encore $\frac{2L}{a}$ plus loin ⁽¹⁾, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'il s'étale et se noie dans l'on-

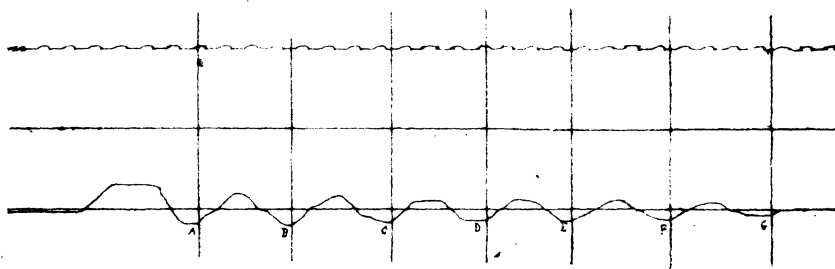


FIG. 148. — US-C₁-50-12. — Détermination de a .

dulation générale. Dès lors, il suffit de mesurer le temps qui sépare deux festons consécutifs pour obtenir la valeur de $\frac{2L}{a}$ et par suite la valeur de a .

Par exemple, dans le diagramme US-C₁-51-3 (fig. 149), on voit nettement en A une petite perturbation qui se reproduit changée de signe en B, puis en C, D, E, F, G.

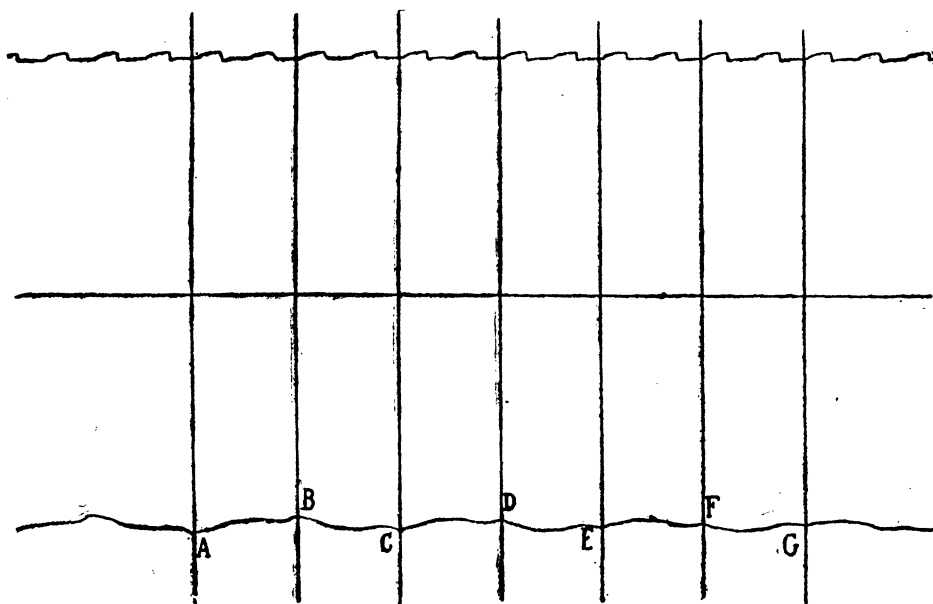
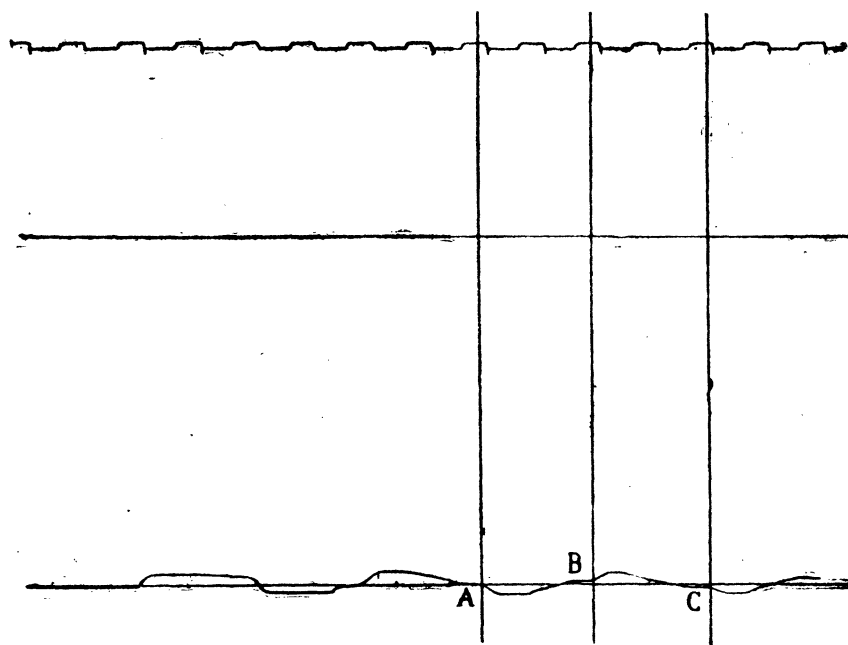
Les temps séparant ces divers points sont de :

A à B	1"
B à C	1"
C à D	1"01
D à E	1"
E à F	1"005
F à G	1"

On voit donc que ces divers intervalles de temps sont égaux à moins de 1 % près. Leur valeur moyenne est de 1"0025, ce qui donne pour a une valeur de :

$$a = \frac{2L}{\theta} = \frac{2 \times 536,36}{1,0025} = 1.070 \text{ met./sec.}$$

⁽¹⁾ La longévité de ce feston est tout à fait remarquable.

FIG. 149. — US-C₄-51-3.FIG. 150. — US-C₄-50-2.

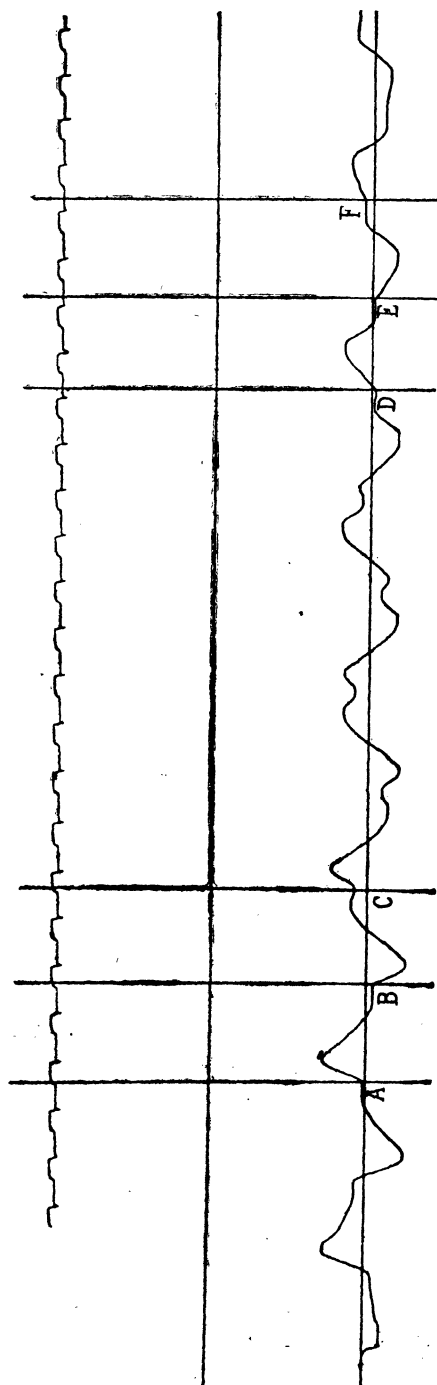


Fig. 151. — US-C₁-50-10.

De même pour le diagramme US-C₁-50-2 (*fig. 150*), on a :

De A à B	1"
B à C	1"01

Valeur moyenne de θ : 1"005.

$$\text{Valeur moyenne de } a = \frac{2L}{a} = \frac{2 \times 536,36}{1,005} = 1.067.$$

Pour le diagramme US-C₁-50-10 (*fig. 151*), on a :

De A à B	1"005
B à C	1"01
D à E	1"
E à F	1"015

Valeur moyenne de θ : 1"0075.

$$\text{Valeur moyenne de } a = \frac{2 \times 536,36}{1,0075} = 1.064.$$

Pour US-C₁-50-4 (*fig. 152*), on a :

De A à B	1"
B à C	1"
C à D	1"

d'où valeur moyenne de $a = 1072$ met./sec.

Pour US-C₁-50-15 (*fig. 153*), on a :

De A à B	1"
B à C	1"
C à D	0"98
E à F	1"
F à G	1"03
G à H	1"
I à J	1"01
J à K	1"
K à L	1"005
L à M	0"915

Valeur moyenne de θ : 1"001.

Valeur moyenne de $a = 1071$ met./sec.

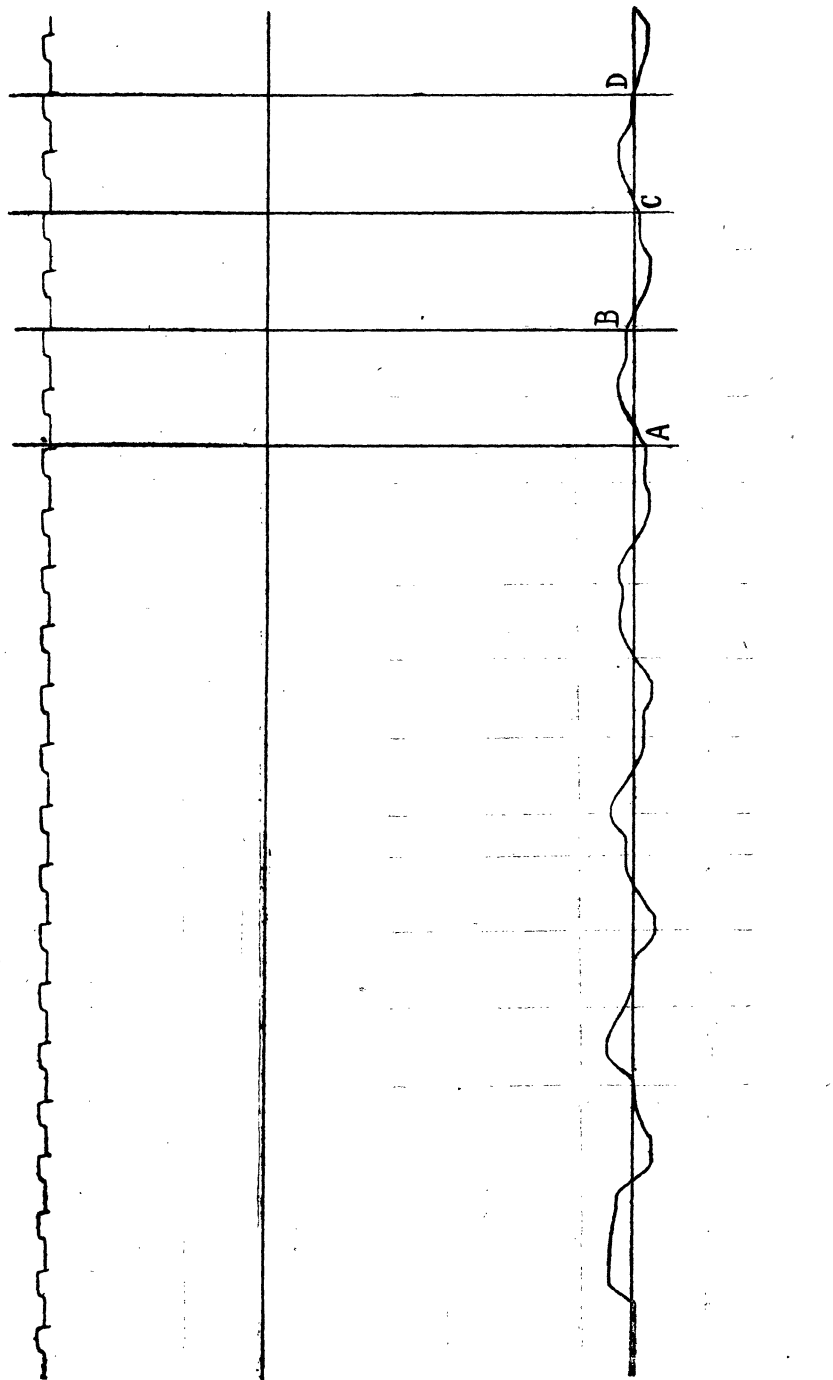
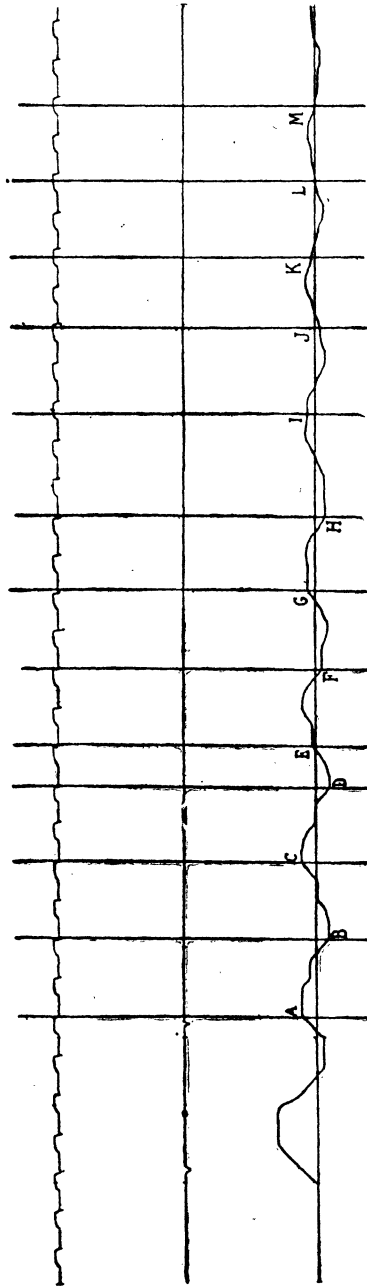


Fig. 152. — US-C₁-50-4.

Fig. 153. — US-C₁-50-15.

Pour US-C₄-51-2 (*fig. 154*), on a :

De A à B	0"985
B à C	1"005
C à D	1"

Valeur moyenne de θ : 0"996.

Valeur moyenne de a : 1077 met./sec.

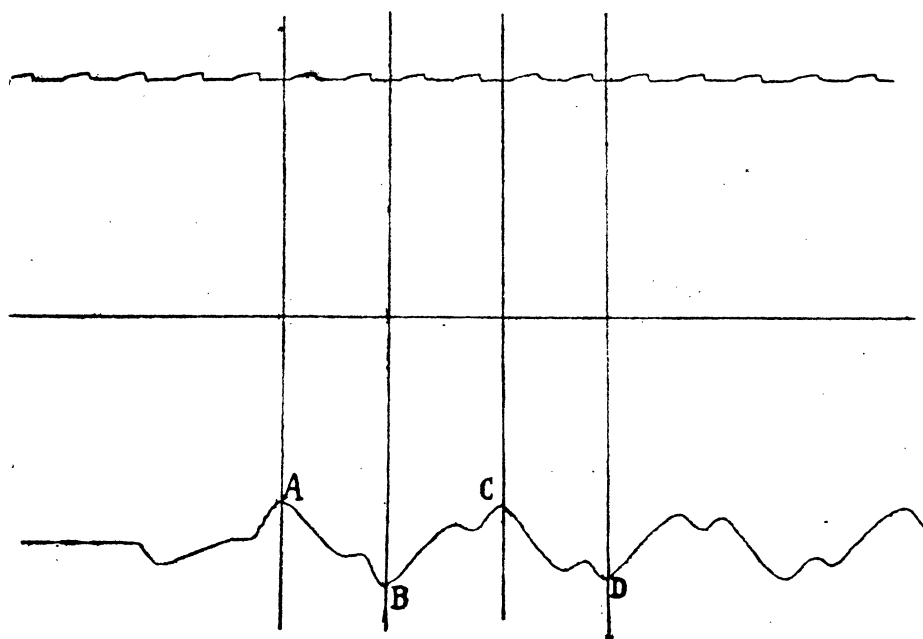


FIG. 154. — US-C₄-51-2.

En résumé, pour les 6 diagrammes analysés l'écart maximum sur la valeur de θ est de 3 ‰, et les valeurs moyennes de a données par ces 6 diagrammes sont de :

1070
1072
1071
1077
1067
1064

dont la moyenne est $\frac{6421}{6} = 1070,1$.

Cette valeur ne diffère que de $\frac{2}{1000}$ de la valeur théorique 1068 donnée par la formule d'Allievi.

La vérification de cette valeur ne peut donc être plus satisfaisante.

On voit donc pourquoi nous avons adopté la valeur de 1068 pour la vitesse de propagation du coup de bélier. L'étude des diagrammes relatifs à des fermetures nous a confirmé d'ailleurs l'exactitude expérimentale de cette valeur 1068.

En résumé, en ce qui concerne la vitesse de propagation du coup de bélier, les expériences de Soulom prouvent que, pour arriver à la déterminer exactement, il faut considérer la propagation d'une très petite perturbation et non les maxima et minima successifs d'une perturbation importante. En prenant cette précaution on arrive à une vérification tout à fait satisfaisante de la vitesse théorique moyenne qui paraît n'être pas modifiée sensiblement par la présence des ancrages, des brides et des rivures.

La période apparente que nous trouvons pour C_1 est 1,87, et la période (théorique) $4 \sum \frac{l_i}{a_i}$ est 2,01.

On remarquera combien cette méthode est élégante; elle permet sur un même graphique de fermeture de mesurer les deux périodes apparente et théorique. En d'autres termes, l'examen des graphiques, p. ex. : US-C₁-51-2 (*fig. 154*), montre que la perturbation qui va et vient le long de la conduite a une période plus grande que la période apparente; on voit en effet que les encoches se déplacent progressivement vers la droite. Ce graphique et les autres montrent très nettement l'existence des deux périodes : théorique et apparente.

87. Période apparente et période théorique.

Il est nécessaire d'indiquer le calcul de ces deux périodes pour la conduite P_3 , la conduite C_1 de Soulom et pour la conduite d'Eget, usine actuellement en construction. Rappelons les formules qu'on applique :

Conduites en deux tronçons. — Soient l et l' les longueurs respectives des deux tronçons pour lesquels la durée de propagation de l'onde est la même, a et a' les vitesses de propagation dans chaque tronçon. Si l'on suppose que le diamètre de la conduite est constant et si l'on pose $\cos \beta = \frac{a - a'}{a + a'}$, le coup de bélier à la fin de la n^{me} période de durée θ , en prenant : $\theta = \frac{2l}{a} = \frac{2l'}{a'}$, est donné pour une fermeture

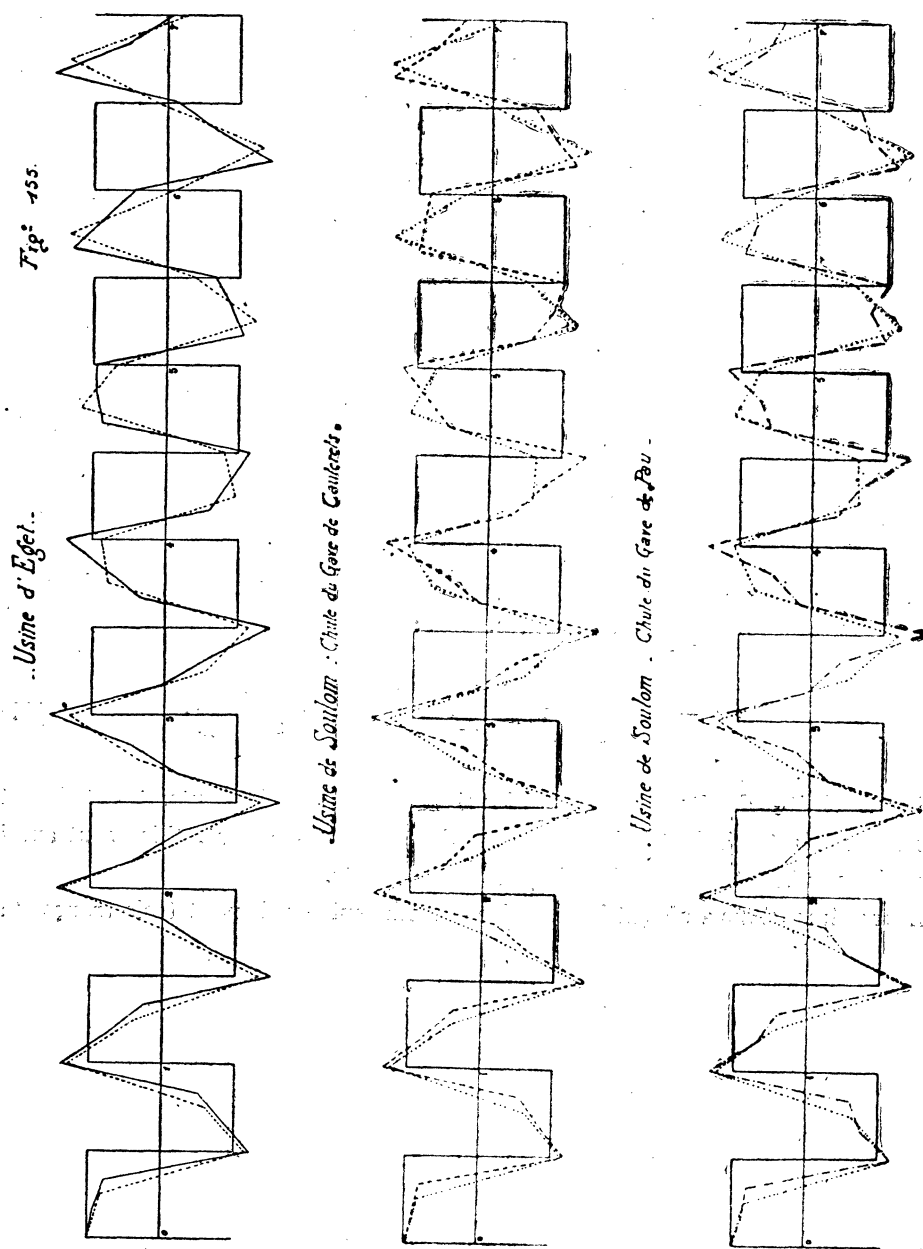


FIG. 155.

brusque et totale par la formule de M. de Sparre (*Congrès de la Houille blanche*, 1914, p. 2) :

$$\xi'_n = (-1)^{n-1} \frac{av_1}{g} \frac{\cos \frac{2n-1}{2} \beta}{\cos \frac{\beta}{2}}. \quad (87)$$

Pour une conduite entièrement homogène, on aurait $\beta = 90^\circ$.

Conduites en trois tronçons. — Soient l , l' et l'' les longueurs respectives des trois tronçons supposés homogènes et pour lesquels la durée de l'onde est la même, a , a' et a'' les vitesses de propagation correspondantes. Posons : $\frac{2l}{a} = \frac{2l'}{a'} = \frac{2l''}{a''} = \theta$, les indices augmentant de l'aval vers l'amont. Soient $\mu = \frac{a-a'}{a+a'}$, $v = \frac{a'-a''}{a'+a''}$. Posons :

$$\cos^2 \lambda = \frac{1}{(1+\mu)(1+v)};$$

le coup de bélier dans l'intervalle compris entre $(n-1)\theta$ et $n\theta$ est donné par la formule de M. de Sparre (*C. R.*, t. 164, p. 683) :

$$\xi''_n = (-1)^{n-1} \frac{av_1}{g} \left[1 - \frac{4\mu}{1+\mu} \frac{\sin n\lambda \sin (n-1)\lambda}{\sin \lambda \sin 2\lambda} \right]. \quad (107)$$

Les conduites de Soulom (chutes des Gaves de Pau et de Cauterets) et d'Eget sont des conduites industrielles courantes de diamètre constant. Elles sont aussi homogènes qu'il est possible dans la pratique courante.

Leurs dimensions amènent à les diviser comme suit en deux et trois tronçons :

	USINE DE SOULOM		USINE D'ÉGET ¹
	PAU	CAUTERETS	
Diamètre.	1 ^m ,200	0 ^m ,810	0,560
Épaisseur.	de 13 à 7 ^m / ^m	de 20 à 7 ^m / ^m	de 31 à 5 ^m / ^m
Longueur totale.	346,50	536,36	1.225,50
Temps total de parcours de l'onde $\Sigma \frac{l_i}{a_i}$	0 ⁿ ,3654	0 ⁿ 5021	1 ⁿ ,0554
DIVISION EN DEUX TRONÇONS			
1 ^{er} tronçon l	188,10	289,95	680,50
a	1.030,	1.155,	1.289,
2 ^e tronçon l'	158,40	246,41	545,
a'	867,	982,	1.033,
DIVISION EN TROIS TRONÇONS			
1 ^{er} tronçon l	124,00	198,87	452,00
a	1.020,	1.188,	1.285,
2 ^e tronçon l'	119,00	176,79	416,50
a'	977,	1.057,	1.184,
3 ^e tronçon l''	103,50	160,70	357,00
a''	850,	960,	1.015,
Hauteur de chute	120 ^m	250 ^m	750 ^m
1. Renseignements fournis par M. Eydoux.			

La figure 155 représente le résultat des calculs relatifs à une fermeture brusque dans ces diverses conduites, supposées divisées en deux ou trois tronçons. Les divisions portées sur l'axe des abscisses représentent le temps $\Sigma \frac{l_i}{a_i}$ que l'onde met pour aller d'un bout à l'autre de la conduite. Les rectangles situés alternativement au-dessus et au-dessous de la ligne des abscisses représentent un coup de bélier de fermeture brusque dans une conduite homogène pour laquelle la durée du parcours de l'onde serait la même que dans la conduite réelle, la vitesse de propagation dans cette conduite étant celle qui correspond au tronçon inférieur de la conduite réelle et la vitesse initiale de l'eau restant la même.

On trouve les résultats résumés dans le tableau suivant :

	$4 \Sigma \frac{l_i}{a_i}$	PÉRIODE DANS LA DIVISION	
		EN 2 TRONÇONS	EN 3 TRONÇONS
Chute de Pau : P_3	1,46	1,389	1,360
Chute de Caunterets : C_1	2,0084	1,908	1,894

L'expérience donne des résultats tout à fait concordants avec ces valeurs: nous l'avons vu plus haut pour la période $4 \Sigma \frac{l_i}{a_i}$ déterminée par la méthode de la dépression brusque; en ce qui concerne la période apparente, citons, pour P_3 , l'expérience US- P_3 -12-11 (*fig. 156*), qui donne une période apparente de 1,360, et l'expérience US- P_3 -9-7 (*fig. 157*), qui donne une période apparente de 1,363. Nous verrons plus loin, à propos des phénomènes de résonances dans les conduites à caractéristiques variables, d'autres déterminations de cette période apparente, également concordantes avec les précédentes. La subdivision en trois tronçons représente plus fidèlement les phénomènes que la subdivision en deux tronçons.

Pour la conduite C_1 , citons l'expérience : US- C_1 -48-1 (*fig. 158*), qui donne une période apparente de 1,860; l'expérience : US- C_1 -48-3 (*fig. 159*), qui donne une période apparente de 1,875; et l'expérience : US- C_1 -31-4 (*fig. 160*), qui donne une période apparente égale à 1,91. La moyenne de ces trois déterminations est égale à 1,882, valeur concordante avec la valeur 1,894, obtenue par l'application des formules citées plus haut.

Pour l'usine d'Eget, nous avons trouvé $4 \Sigma \frac{l_i}{a_i} = 4,22$; la division en deux tronçons a donné une période apparente de 4,01, et la division en trois tronçons une période apparente de 3,93.

88. Réflexions qui se produisent dans une conduite à caractéristiques variables à l'extrémité des tronçons.

L'un de nous (*) a étudié ce phénomène. Voici comment il procède. Examinons le cas d'une fermeture brusque. Le raisonnement général appliqué à toutes ces questions dérive directement du raisonnement aux limites que l'on fait quand on

(*) Eydoux, *C. R.*, t. 163, p. 265.

Usine de Soullom. Chute du Gave de Pau

Coup de bélier de fermeture relevé contre l'extrémité aval du divergent du Venturi

22 Sept. 1915.



FIG. 156. — US-P₃-12-11. — Détermination de la période apparente. — Réflexion au Venturi.

Usine de Soullom. Chute du Gave de Pau.

Coup de bélier de fermeture relevé à l'extrémité aval de la conduite

28 Déc. 1915.



FIG. 156 bis. — US-P₃-35-4.

considère l'onde arrivant soit dans le réservoir amont (l'on admet, pour expliquer que la pression reste constamment égale à la pression statique, la naissance d'une nouvelle onde égale et de signe contraire à la première et se propageant en sens inverse, et l'on dit qu'il y a réflexion totale avec changement de signe), soit sur l'extrémité fermée (on admet, pour expliquer que la vitesse reste constamment nulle, la naissance d'une onde égale à la première, de même signe et se propageant en sens inverse, et l'on dit qu'il y a réflexion totale sans changement de signe).

Dans le cas présent, il faut écrire que, lors de l'arrivée de l'onde à un point de changement de caractéristique que nous appellerons point critique, la pression est la même dans les régions immédiatement contiguës des deux tronçons et que l'équation de continuité s'applique.

On ne peut y arriver qu'en admettant la naissance d'une nouvelle onde prenant naissance sur le point critique et se propageant dans le tronçon d'où vient l'onde, en sens inverse de la première. Nous l'exprimerons d'une façon conforme à la nature physique du phénomène en disant que l'onde qui arrive au point critique se divise en deux autres ondes, l'une revenant sur le chemin de l'onde primitive comme si celle-ci éprouvait une réflexion partielle, l'autre continuant son chemin dans le deuxième tronçon.

L'onde est donc partiellement transmise et partiellement réfléchie.

Les équations à appliquer après le passage de l'onde au point critique sont, en désignant par f_1 l'onde première, par f_2 l'onde transmise, et par φ_1 l'onde réfléchie :

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \gamma_0 + f_1 - \varphi_1, & \gamma_2 &= \gamma_0 + f_2. \\ v_1 &= v_{01} - \frac{g}{a_1}(f_1 + \varphi_1), & v_2 &= v_{02} - \frac{g}{a_2}f_2. \end{aligned}$$

D'où l'on déduit, à l'aide de l'équation de continuité : $S_1 v_1 = S_2 v_2$.

$$f_2 = f_1 \left(1 - \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \right), \quad \varphi_1 = f_1 \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}.$$

Si $\alpha_2 > \alpha_1$, l'onde qui passe en amont est plus forte que celle qui venait d'aval, et l'onde φ vient, dans le premier tronçon, renforcer l'effet produit par l'onde f_1 . Le phénomène de réflexion est analogue à celui qui se passe sur une extrémité fermée. On pourra donc dire, en ne prenant toutefois ces expressions que dans un sens figuratif, que le tronçon aval fonctionne comme un tuyau fermé à un bout et partiellement fermé à l'autre.

Si $\alpha_2 < \alpha_1$, ce sera l'inverse. Le tronçon aval fonctionnera comme un tuyau fermé à un bout et partiellement ouvert à l'autre.

Citons un exemple concret pris dans les expériences de l'usine hydro-électrique

Usine de Soulom - Chute du Gave de Pau
Coup de béliet de fermeture à l'extrémité aval de la conduite

21 Sept. 1915



FIG. 157. — OS-P₃-9-7.



Usine de Soulom - Chute du Gave de Cauterets
Fermeture des injecteurs de la turbine du débit de 360 litres par seconde

26 juin 1916



0

FIG. 158. — US-C₁-48-1. — Détermination de la période apparente.

de Souïlom et où nous avons obtenu des graphiques permettant de retrouver la réflexion sur un point critique.

Données de la conduite essayée :

Longueur totale : 346 m. 50.

Diamètre intérieur : 1 m. 20.

Chute moyenne réalisée entre le réservoir amont et l'extrémité aval de la conduite : 115 mm.

Épaisseur variant de 13 à 7 mm.

Vitesse de propagation des ondes variant de 850 à 1020 m./s. (ce dernier chiffre correspond à l'épaisseur 13).

Dans la partie d'épaisseur 13 qui est à faible pente au voisinage de l'usine, est intercalé un Venturi au quart, dont l'axe est à 100 mètres de l'extrémité aval de la conduite.

Pour le tronçon aval-axe du Venturi, on a :

$$\frac{2l}{a} = \frac{200}{1.020} = 0",196.$$

Quand on relève le coup de bélier à l'extrémité aval de la conduite, on constate souvent, après un temps correspondant à la durée de propagation aller et retour jusqu'au Venturi, la formation d'une pointe correspondant aux deux ondes réfléchies à l'entrée et à la sortie du Venturi. Il n'est d'ailleurs pas possible de procéder à des mesures sur la hauteur de ces pointes, car, quelle que soit la rapidité de la manœuvre de fermeture, elle est toujours plus longue en pratique que l'intervalle de temps entre les deux ondes qui est de l'ordre du centième de seconde.

La figure 156 *bis*, expérience US-P₂-35-4, indique nettement ce phénomène. Entre les points α et β correspondant au front de l'onde existe en effet un intervalle égal (voir l'enregistrement du temps en demi-secondes au-dessus) à 0",191 au lieu de 0",196, temps donné par le calcul.

Si l'on relève le diagramme immédiatement à l'aval du Venturi (*fig. 156*), on constate dès l'origine l'existence de la pointe due à la production immédiate des deux ondes réfléchies, et l'on relève plus loin une, et sur certains diagrammes, plusieurs nouvelles pointes, de moins en moins hautes, dues aux réflexions successives de ces ondes qui arrivent même à former comme une sinusoïde de période $\frac{2l}{a}$, car la portion de conduite comprise entre *b* bout aval et le Venturi fonctionne au point de vue des réflexions de l'onde, comme une conduite fermée aux deux bouts. Cette sinusoïde est plus rapidement amortie que l'onde principale.

Sur la figure 156, expérience US-P₃-12-11, on peut mesurer très facilement la période apparente de la conduite 1',36 que l'on retrouve constamment dans la conduite P₃, à condition qu'elle soit bien purgée d'air.

89. Généralisation des équations de la page 27; a fonction de x .

L'étude ainsi présentée ne donne que le mécanisme de la réflexion des ondes, mais elle n'indique pas ce qui se passe par suite des réflexions successives au bout d'un certain temps supérieur à $2 \sum \frac{l_i}{a_i}$, l_i et a_i indiquant la longueur des divers tronçons et la vitesse de propagation y relative. Or ce point est très important, car M. de Sparre a montré, dans ses études sur les conduites divisées en deux et trois tronçons dans lesquels la durée de propagation de l'onde est la même, que les maxima de surpression ne se produisent qu'après un certain temps et peuvent d'ailleurs être supérieurs à ceux qui se produiraient dans une conduite à caractéristique constante.

Toutefois, on doit remarquer que l'on peut, à l'aide de ce qui précède, aborder la question de la propagation du coup de bélier instantané dans une conduite à caractéristique variable, sur les équations aux dérivées partielles.

On sait que les équations du coup de bélier d'onde sont les suivantes :

$$\frac{\partial v}{\partial t} = g \frac{\partial y}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{g}{a^2} \frac{\partial y}{\partial t},$$

où nous considérerons maintenant a comme une fonction de x .

L'un de nous a alors cherché comment on pourrait arriver à l'intégration de l'équation en supposant une conduite de diamètre constant où a serait une fonction linéaire de x décroissant de la base au sommet de la conduite, ce qui se rapproche sensiblement de la réalité pour les conduites industrielles.

Les équations fondamentales étant :

$$\frac{\partial v}{\partial t} = g \frac{\partial y}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{g}{a^2} \frac{\partial y}{\partial t},$$

où a est variable, on en déduit :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2a \frac{da}{dx} \frac{\partial v}{\partial x} \text{ et } \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

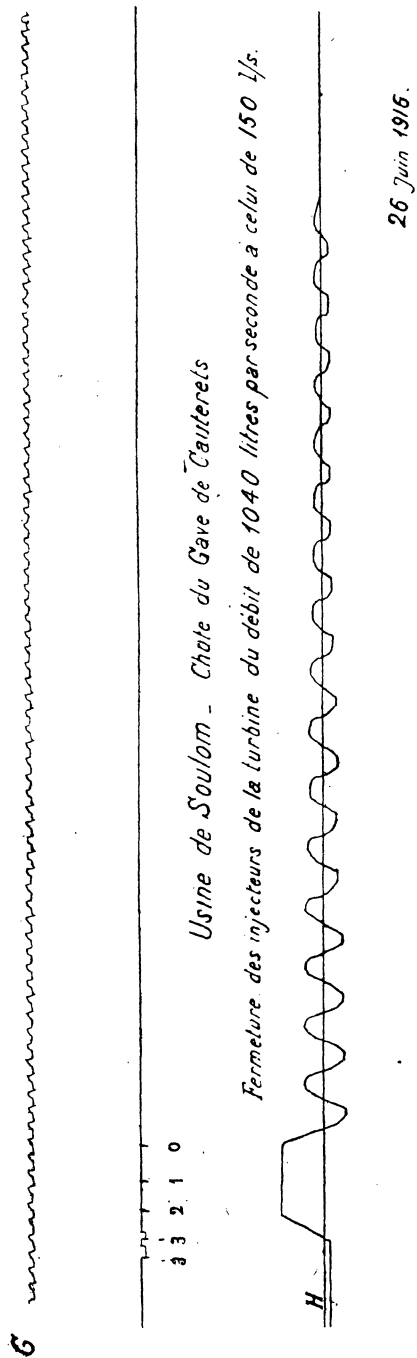


Fig. 159. — US-C₁-48-3.

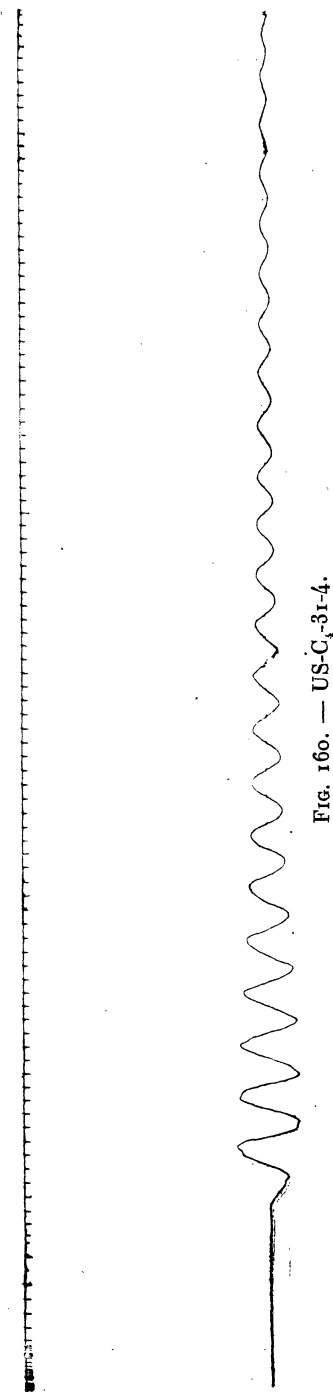


Fig. 160. — US-C₁-31-4.

Si l'on pose alors, suivant la méthode classique,

$$\xi = t - \int \frac{dx}{a}, \quad \theta = t + \int \frac{dx}{a},$$

on arrive à donner à ces deux équations la forme :

$$4 \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \theta} - \frac{da}{dx} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) = 0.$$

$$4 \frac{\partial^2 \gamma}{\partial \xi \partial \theta} + \frac{da}{dx} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial \theta} - \frac{\partial \gamma}{\partial \xi} \right) = 0.$$

M. de Sparre a bien voulu nous indiquer comment on pourrait arriver à une solution approximative du problème (1). Nous allons indiquer ci-après son mode de calcul.

Partant des équations précédentes, posons :

$$a = a_m \left[1 + k \left(\frac{l}{2} - x \right) \right]$$

où

$$a_m = \frac{a_0 + a_l}{2} \quad \text{et} \quad k = 2 \frac{a_0 - a_l}{l(a_0 + a_l)},$$

a_0 et a_l étant les vitesses aux extrémités amont et aval.

Cette forme est choisie de préférence à $a_0 (1 - k'x)$ afin de diminuer l'importance des termes en k , l'approximation à faire consistant à négliger les termes en k^2 .

Les équations deviennent :

$$4 \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \theta} + \frac{k a_m}{4} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) = 0,$$

$$4 \frac{\partial^2 \gamma}{\partial \xi \partial \theta} - \frac{k a_m}{4} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial \theta} - \frac{\partial \gamma}{\partial \xi} \right) = 0.$$

Une intégrale, aux termes en k^2 près, est :

$$\gamma - \gamma_0 = f(\xi) - \varphi(\theta) - \frac{k a_m}{4} [\theta f(\xi) + \xi \varphi(\theta)].$$

(1) Comme le fait remarquer M. de Sparre, cette approximation serait suffisante, car, en calculant, aux termes en k^2 près, la valeur du coup quand le front de l'onde arrive en haut, il retrouve, à $1/1000$ près, les résultats numériques obtenus en partant de la formule.

On en déduit :

$$v = v_0 - \frac{g}{a_m} [f(\xi) + \varphi(\theta)] + \frac{kg}{4} [\theta f(\xi) - \xi \varphi(\theta) - 2 \int f(\xi) d\xi + 2 \int \varphi(\theta) d\theta].$$

Exprimons que, pour $x = 0$, v est constamment nul :

$$0 = v_0 - \frac{g}{a_m} [f(t) + \varphi(t)] + \frac{kg}{a_m} [tf(t) - t\varphi(t) - 2 \int f(t) dt + 2 \int \varphi(t) dt].$$

En particulier, pour $t = 0$, on a, toujours aux termes en k^2 près :

$$f(0) = \frac{av_0}{g} \left(1 - \frac{kl}{2} \right) - \varphi(0).$$

En exprimant alors que le coup de bélier pour le front de l'onde est

$$\frac{a_0 v_0}{g} \left(1 + \frac{1}{2} L \frac{a}{a_0} \right),$$

ce qui devient aux termes en k^2 près :

$$\frac{a_m v_0}{g} \left[1 + k \frac{l-x}{2} \right]$$

et que $\gamma - \gamma_0$ est donné d'autre part par l'équation (p. 249), on trouve que $\varphi(t)$ est nul pour $t \leq \frac{2l}{a_m}$.

La formule donnée ci-dessus fera connaître $f(t)$ pour $t \leq \frac{2l}{a_m}$.

Exprimons maintenant que $\gamma - \gamma_0$ est constamment nul pour $x = l$. On a, toujours aux termes en k^2 près :

$$\xi = t - \frac{x}{a_m} \left[1 - k \frac{l-x}{2} \right], \quad \theta = t + \frac{x}{a_m} \left[1 - k \frac{l-x}{2} \right].$$

Où, pour :

$$x = l, \quad \xi = t - \frac{l}{a_m}, \quad \theta = t + \frac{l}{a_m}.$$

On en déduit, pour $t \geq \frac{2l}{a_m}$:

$$\varphi(t) = \left[1 - \frac{k a_m}{2} \left(t - \frac{l}{a_m} \right) \right] f \left(t - \frac{2l}{a_m} \right).$$

Ce qui permettra de calculer de proche en proche φ en fonction de la valeur de f dans la période précédente.

FIN DU TOME VIII