ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

A. BUHL

Sur les formules fondamentales de l'électromagnétisme et de la gravifique

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 3e série, tome 12 (1920), p. 1-35
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1920_3_12__1_0>

ANNALES

DE LA

FACULTÉ DES SCIENCES

DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

SUR LES FORMULES FONDAMENTALES DE L'ÉLECTROMAGNÉTISME ET DE LA GRAVIFIQUE

PAR M. A. BUHL

Ce Mémoire a surtout pour objet de rattacher à une extension convenable de la formule de Stokes d'importants résultats contenus dans la *Théorie du champ électromagnétique de Maxwell-Lorentz et du champ gravifique d'Einstein* de M. Th. De Donder (Gauthier-Villars, Paris, 1920). Ce dernier et admirable exposé qui, à peine publié, soulevait d'enthousiastes éloges de Sir Joseph Larmor (*Times*, 7 janvier 1920) entraînera sans doute bien d'autres développements.

On trouvera ici deux choses essentielles.

La première est la formule stokienne fondamentale (§ 3) qui conduit immédiatement aux formes des équations de l'électromagnétisme dans un champ gravifique tout en ne reposant que sur l'identité

$$v = \int\int_s \mathrm{X}\, d\mathrm{Y}\, d\mathrm{Z} = \int\int\int_v d\mathrm{X}\, d\mathrm{Y}\, d\mathrm{Z}.$$

La seconde, qui d'ailleurs ne se sépare guère de la première, est relative à un déterminant symbolique Δ, contenu dans la formule stokienne, déterminant qui, par de simples transpositions de lignes ou de colonnes, permute les principales formules relatives aux forces, aux travaux, à l'énergie. Et ces formules sont ainsi rattachées à l'identité précédente qui, elle-même, n'a probablement pas besoin de la notion ordinaire d'espace géométrique et de volume v pour subsister.

Les temps sont proches — s'ils ne sont déjà révolus — où l'on posera les conditions analytiques, nécessaires et suffisantes, pour que les phénomènes physiques puissent être conçus.

On touche ici à l'un des plus grands débats de la pensée scientifique.

« Pour Laplace, Fourier, Poisson et toute la brillante école française de Physique « mathématique du commencement du dix-neuvième siècle, l'Analyse pure n'était « qu'un instrument et Fourier, en annonçant à l'Académie des Sciences les travaux « de Jacobi, disait que les questions de la Philosophie naturelle devaient être le prin- « cipal objet des méditations des géomètres »(1). Certains savants ont même laissé transparaître de telles opinions en y mêlant une pointe d'humour ou d'ironie : c'est ainsi que Briot traitait la Mécanique analytique de « faribole »(2). Bref des hommes fort éminents ont cru que la Philosophie naturelle ne pouvait bénéficier de recherches purement mathématiques. L'outil façonnait plus ou moins bien les choses mais n'en pouvait rien créer.

En ces matières, la Science moderne semble retrouver la plus brillante des jeunesses en revenant aux conceptions antiques.

« Le Nombre régit le Monde » disaient les Anciens. Certes les Anciens n'avaient, à l'appui de cet aphorisme, que des raisons plutôt naïves, mais le défaut de rigueur de leur Science était compensé par une singulière puissance de prophétie.

Les théories qui révolutionnent aujourd'hui la Physique, qui font rentrer dans un même cadre les phénomènes électriques et les phénomènes gravifiques, ces théories ont leur base à la base même des Mathématiques. Il n'y a plus, au fond des choses (réserve faite, bien entendu, pour les préoccupations des praticiens), de phénomène à interpréter, à calculer *dans* le temps et *dans* l'espace, mais *avec* le temps et l'espace, lesquels n'ont plus d'existence propre et participent aux phénomènes qu'ils étaient censé supporter autrefois. Le chercheur engagé dans ces questions se demande s'il fait de la Géométrie ou de la Physique. Heureuse confusion qui éclaircit bien des points.

La Physique du dix-neuvième siècle a eu pour fondement la constante c, vitesse de la lumière dans le vide. L'importance de cette *constante* semble devoir rester immense en première approximation, mais on a serré les phénomènes de plus près en lui substituant des *fonctions* universelles qui peuvent être, par exemple, les dix potentiels gravifiques d'Einstein formant le déterminant

$$g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44} \end{vmatrix} \qquad (g_{ik} = g_{ki})$$

(1) E. Picard. Conférences à Clark-University. *Revue générale des Sciences*, 1900, t. I. p. 64. Il est à peine besoin de dire qu'après les lignes citées M. Picard s'élève contre cette manière de comprendre les mathématiques.

(2) J. Tannery. Centenaire de l'Ecole Normale. *Revue scientifique*, 1895, t. I, p. 458.

lequel, particularisé en

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c^2 \end{vmatrix}$$

redonne un champ où c reprend toute son importance, mais qui, sous la forme générale g permet de relier la courbure de l'espace, les phénomènes dits d'action à distance et les phénomènes électromagnétiques.

Les instruments vraiment maniables de toute analyse sont et resteront probablement toujours des équations différentielles; ceci tient sans doute à la nature même de notre entendement qui cherche à aller de l'élémentaire au fini c'est-à-dire à intégrer. Mais, que nous le voulions ou non, l'Univers nous impose aussi des conceptions globales, des *invariants intégraux* qui, loin de contrarier la précédente génération des équations différentielles, prennent des formes analytiques manifestement associées à ces équations et qui vont même jusqu'à en suggérer la forme et de certaines propriétés. Il y a là une admirable dualité systématiquement coordonnée par le plus illustre des physiciens dont la Science déplore toujours la perte. Qui ne reconnaît Henri Poincaré?

*
* *

Cette évocation conduit à fixer l'attention sur le rôle des savants français dans l'élaboration des théories précédentes. Certains semblent regretter que le rôle de l'étranger ait été prépondérant en cette matière. Certes, rien ne peut diminuer l'importance des travaux de Lorentz, Minkowski, Einstein,... mais il est naturel de remarquer que les géomètres français — pour ne parler que des géomètres proprement dits — ont créé de puissantes méthodes propres à encadrer sans efforts tout ce qui semble, à l'heure actuelle, venir de l'extérieur.

L'analyse essentielle est celle des différentielles symboliques, ou des formes intégrales, ou des invariants intégraux, ou des extensions à l'hyperespace de la formule de Stokes, toutes ces rubriques pouvant concerner des choses équivalentes.

Or, les travaux de MM. Cartan, Cosserat, Goursat, Vessiot peuvent s'appliquer à l'étude en litige. Des champs extrêmement voisins pourraient sans doute fournir aussi de fécondes contributions; telle serait, par exemple, la Théorie des Fonctions de deux variables, de M. Emile Picard, qui est l'étude de la formule de Stokes sur les surfaces *algébriques*.

Les travaux de MM. Goursat et Cartan ont déjà été invoqués bien souvent, dans le présent Recueil, à propos de recherches sur les extensions de la formule de Stokes. Réunissons-les en indiquant le Mémoire de M. Goursat *Sur certains systèmes d'équa-*

tions aux différentielles totales et sur une généralisation du problème de Pfaff (Annales de Toulouse, 1915) qui contient toute la bibliographie désirable quant aux travaux antérieurs dûs à Henri Poincaré, à M. E. Cartan et à M. Goursat lui-même.

M. Eugène Cosserat, Directeur de l'Observatoire de Toulouse, et son regretté frère, François Cosserat, ont ajouté à l'édition française du *Traité de Physique* de O. D. Chwolson une Note *Sur la Dynamique du point et du corps invariable* ainsi qu'une *Théorie des Corps déformables* (publiée aussi à part; A. Hermann, Paris, 1909) laquelle développe une adjonction *Sur la théorie de l'action euclidienne* faite au Traité de Mécanique de M. P. Appell (t. III, 2[e] édition). Ces travaux partent de l'action hamiltonienne; l'action, dans le cas le plus général, est une intégrale multiple dont les transformations conduisent à des équations universelles s'appliquant aux phénomènes gravifiques, électriques, thermiques... L'accord est établi avec les théories de Lorentz ainsi qu'avec celles d'un Francais de grande envergure : Pierre Duhem.

M. E. Vessiot a publié dans les *Comptes rendus* deux Notes *Sur la propagation par ondes et sur la théorie de la relativité générale* (25 février 1918) et *Sur un invariant intégral de l'hydrodynamique et son application à la relativité* (30 décembre 1918). Malgré leur brièveté ces Notes rappellent ce qu'il y a d'absolument essentiel dans la théorie d'Einstein. On y rencontre notamment une intégrale triple qui, dans l'espace-temps, est complètement analogue à celle figurant dans la formule fondamentale du présent Mémoire. L'auteur en déduit *la forme* des équations du mouvement d'un fluide sans viscosité, dans la théorie de la relativité générale et de la gravitation d'Einstein, en remarquant qu'une fois cette forme obtenue, on la précise par application du principe d'Hamilton généralisé par Lorentz.

On peut donc croire que la Science française, en puisant dans son propre arsenal, n'aura aucune peine à exposer, à démêler et à poursuivre, avec son génie propre, les si captivantes théories de la nouvelle Physique.

*
* *

Voici encore quelques remarques ajoutées à cette Introduction tout à fait au dernier moment, remarques que chaque jour qui passe, pourrait grossir de façon démesurée.

M. Emile Picard parlant à la séance de clôture du Congrès international de Mathématiques tenu à Strasbourg, en septembre 1920, s'est exprimé ainsi : « L'avenir dira « si la théorie générale de la relativité est autre chose qu'une construction purement « formelle et mathématique ou bien si les psychologues ont raison qui considèrent « que les hypothèses incapables d'être saisies par l'intuition ne sont pas susceptibles « d'être à la base d'une explication du monde physique. » (*Revue Scientifique*, 13 novembre 1920).

Il me semble que le présent Mémoire apporte déjà une réponse, au moins partielle, à la question ainsi posée. D'ailleurs, je suis très porté personnellement à croire que l'intuition doit toujours être saisissable dans toute explication scientifique de l'Univers.

Je ne considère, dans ce travail, qu'une partie des généralités actuellement débattues, mais ce que je considère repose sur l'identité

$$\int\int_s X\,dY\,dZ = \int\int\int_v dX\,dY\,dZ$$

immédiatement rattachable au domaine de l'intuition. Outre cela, il faut faire intervenir le principe d'Hamilton généralisé d'une certaine manière, mais ceci aboutissant à établir des relations *linéaires* entre des M et des M^s on peut entrevoir que, sur ce point encore, l'intuition peut être facilement invoquée.

Quant à la manière de comprendre les rapports des sciences mathématiques et physiques je ne puis mieux faire que de citer encore le récent et excellent livre du Professeur Eddington *Space Time and Gravitation* (Cambridge, mai 1920) en lequel le savant astronome abonde dans le sens indiqué plus haut et avec plus de force encore. On y lit notamment (p. 183) : « As the geometry became more complex, the physics « became simpler; until finally it almost appears that the physics has been absorbed « into the geometry. »

On ne saurait mieux dire. Les principes physiques se confondent avec les principes mathématiques; l'idée primordiale d'un monde phénoménal, pour lequel les mathématiques ne seraient qu'un instrument d'analyse sans valeur propre, est un véritable non-sens.

Sans doute ce dernier point de vue peut rester celui du praticien mais, probablement, pas pour bien longtemps. On formait autrefois des ingénieurs électriciens sans parler des formules de Green et de Stokes, choses aujourd'hui banales.

Un avenir prochain fera reposer les cours de technique électrique sur la géométrie de l'espace-temps ou la théorie des invariants intégraux.

La chose me semble inéluctable; on ne voit même rien qui puisse faire souhaiter qu'elle soit éludée. Il y aura peut-être des étudiants et même des professeurs quelque peu déconcertés, mais on s'accordera bientôt à reconnaître, dans les nouvelles disciplines, une prodigieuse économie de pensée.

* * *

Les principaux résultats du présent travail ont été brièvement résumés en trois Notes des *Comptes rendus*, les 9 août, 20 septembre et 26 octobre 1920.

CHAPITRE PREMIER

Sur la formule de Stokes dans l'espace-temps.

[**1**] Les formules du type stokien, où interviennent des intégrales d'ordre de multiplicité quelconque dans les hyperespaces à un nombre quelconque de dimensions, ont été étudiées sous des formes très générales et diverses. Les travaux les plus importants à cet égard sont ceux de MM. Goursat et Cartan sur des formes différentielles symboliques que manie également M. Th. De Donder sous le nom de formes intégrales.

Ici nous âllons établir directement une formule stokienne relative à l'espace à quatre dimensions, parce que nous avons en vue des applications physiques liées beaucoup plus à cette formule même qu'à ses extensions analytiques les plus générales. Nous sommes dans un cas analogue à celui des problèmes classiques d'hydrodynamique ou d'électromagnétisme, en lesquels intervient la formule de Stokes ordinaire; il sera toujours plus simple de considérer cette dernière de manière directe que de vouloir la voir au travers des généralisations nombreuses et étendues dont elle est susceptible.

La formule fondamentale que nous voulons établir ne sera d'ailleurs nouvelle que par le détail et le choix des notations; on en trouvera un premier embryon dans les *Comptes rendus* du 8 juillet 1912, embryon développé ensuite dans des Mémoires des présentes *Annales* (1912, pp. 403-406; 1913, pp. 370-374). Mais, vu l'extrême importance des conséquences physiques de la formule, il importait de revenir sur une démonstration jusqu'ici fragmentée. Nous serons d'ailleurs bref quant à la nouvelle exposition.

Nous partirons d'un point de vue toujours adopté dans nos recherches sur les formules stokiennes et qu'il convient de maintenir plus que jamais.

Soit l'identité

$$\int\int_s X_1 dX_2 dX_3 = \int\int\int_v dX_1 dX_2 dX_3 \tag{1}$$

dont les membres, dans l'espace ordinaire $OX_1 X_2 X_3$, expriment de deux manières le volume v inclus dans la surface fermée s.

Nous allons effectuer, sur (1), la transformation

$$X_i = X_i(x_1, x_2, x_3, x_4) \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{2}$$

qui n'est bien qu'une transformation à trois variables si x_4 appartient à la variété

$$x_4 = \varphi(x_1, x_2, x_3)$$

qui a trois dimensions dans l'espace à quatre. La transformation (2) change, si l'on veut, le volume v en un autre V qui a toujours trois dimensions, mais est déformé dans l'espace à quatre tout en étant toujours limité par une variété fermée, à deux dimensions, qui est la transformée S de s. On peut attribuer à S des équations

$$x_3 = \psi(x_1, x_2), \qquad x_4 = \chi(x_1, x_2).$$

La transformation étant ainsi bien définie au point de vue analytique et géométrique, on l'effectuera sans peine dans (1). Dans l'intégrale triple s'introduira un déterminant du troisième ordre dont les termes seront des binômes de la forme

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_j} + \frac{\partial X_i}{\partial x_4}\frac{\partial x_4}{\partial x_j}.$$

Dans l'intégrale double on aura un déterminant du second ordre à termes analogues mais trinômes. Or un premier résultat remarquable, et qui n'exige que les considérations les plus élémentaires sur le calcul des déterminants, est que le déterminant du troisième ordre à termes binômes et le déterminant du second ordre à termes trinômes peuvent tous deux être remplacés par des déterminants du quatrième ordre à termes monômes.

Ainsi la première transformation globale de (1), que nous avons à retenir, est

$$\int\int_S X_1 \begin{vmatrix} \frac{\partial x_3}{\partial x_1} & \frac{\partial x_3}{\partial x_2} & -1 & 0 \\ \frac{\partial x_4}{\partial x_1} & \frac{\partial x_4}{\partial x_2} & 0 & -1 \\ \frac{\partial X_2}{\partial x_1} & \frac{\partial X_2}{\partial x_2} & \frac{\partial X_2}{\partial x_3} & \frac{\partial X_2}{\partial x_4} \\ \frac{\partial X_3}{\partial x_1} & \frac{\partial X_3}{\partial x_2} & \frac{\partial X_3}{\partial x_3} & \frac{\partial X_3}{\partial x_4} \end{vmatrix} dx_1 dx_2 = \int\int\int_V \begin{vmatrix} \frac{\partial x_4}{\partial x_1} & \frac{\partial x_4}{\partial x_2} & \frac{\partial x_4}{\partial x_3} & -1 \\ \frac{\partial X_1}{\partial x_1} & \frac{\partial X_1}{\partial x_2} & \frac{\partial X_1}{\partial x_3} & \frac{\partial X_1}{\partial x_4} \\ \frac{\partial X_2}{\partial x_1} & \frac{\partial X_2}{\partial x_2} & \frac{\partial X_2}{\partial x_3} & \frac{\partial X_2}{\partial x_4} \\ \frac{\partial X_3}{\partial x_1} & \frac{\partial X_3}{\partial x_2} & \frac{\partial X_3}{\partial x_3} & \frac{\partial X_3}{\partial x_4} \end{vmatrix} dx_1 dx_2 dx_3.$$

Il importe de remarquer que cette formule, de par son procédé d'obtention, ne se distingue pas, au point de vue logique, de l'identité (1); ce n'est qu'une autre forme de cette identité. Les deux formules se correspondent par changement de variables.

[**2**] Dans le déterminant contenu en l'intégrale double, multiplions la troisième ligne par le facteur X_1 de manière à ne pas laisser ce facteur hors du déterminant.

Alors les deux dernières lignes du premier déterminant et les trois dernières lignes du second peuvent prendre maintenant l'aspect suivant :

$$
\begin{array}{cccc}
X_1\dfrac{\partial X_2}{\partial x_1} & X_1\dfrac{\partial X_2}{\partial x_2} & X_1\dfrac{\partial X_2}{\partial x_3} & X_1\dfrac{\partial X_2}{\partial x_4} \\[2ex]
\dfrac{\partial X_3}{\partial x_1} & \dfrac{\partial X_3}{\partial x_2} & \dfrac{\partial X_3}{\partial x_3} & \dfrac{\partial X_3}{\partial x_4}
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{cccc}
\dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} & \dfrac{\partial}{\partial x_4} \\[2ex]
X_1\dfrac{\partial X_2}{\partial x_1} & X_1\dfrac{\partial X_2}{\partial x_2} & X_1\dfrac{\partial X_2}{\partial x_3} & X_1\dfrac{\partial X_2}{\partial x_4} \\[2ex]
\dfrac{\partial X_3}{\partial x_1} & \dfrac{\partial X_3}{\partial x_2} & \dfrac{\partial X_3}{\partial x_3} & \dfrac{\partial X_3}{\partial x_4}
\end{array}
$$

De plus, on pourra augmenter la symétrie de ce tableau en disposant, devant les dérivées partielles des dernières lignes, un facteur U_1 analogue au X_1 des avant-dernières. Ceci est évidemment permis, car la chose revient à remplacer la fonction *arbitraire* X_1 par $X_1 U_1$.

Dans l'égalité obtenue, supposons que X_2 se réduise successivement à x_1, x_2, x_3, x_4; on aura ainsi quatre égalités qu'on pourra écrire avec quatre expressions différentes de X_1, soient Y_1, Y_2, Y_3, Y_4. La somme de ces quatre égalités donnera toujours une égalité de même forme, mais où les troisièmes lignes des déterminants seront

$$Y_1 \quad Y_2 \quad Y_3 \quad Y \qquad\qquad Y_1 \quad Y_2 \quad Y_3 \quad Y_4 .$$

De manière analogue, en réduisant X_3 à x_1, x_2, x_3, x_4 et changeant U_1 en Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, on achèvera de même en écrivant les quatrièmes lignes des déterminants

$$Z_1 \quad Z_2 \quad Z_3 \quad Z_4 \qquad\qquad Z_1 \quad Z_2 \quad Z_3 \quad Z_4 .$$

Dans ces déterminants développés nous aurons donc, comme coefficients provenant des deux dernières lignes, des expressions telles que

$$Y_i Z_j - Z_i Y_j .$$

Il importe que toutes celles-ci puissent être considérées comme des fonctions distinctes et quelconques de x_1, x_2, x_3, x_4, ce qui précisément n'est pas certain.

Mais, en ajoutant ensemble deux ou un plus grand nombre de formules analogues à celle obtenue en dernier lieu, les Y et les Z n'étant pas les mêmes d'une formule à l'autre, on arrivera à remplacer les coefficients en litige par d'autres absolument généraux auxquels on pourra donner la forme symbolique

$$\begin{vmatrix} M_{i\omega} & M_{j\omega} \\ i & j \end{vmatrix} = M_{ij} - M_{ji} = 2M_{ij} .$$

Cette définition des M_{ij} est claire en soi : rappelons-nous seulement que, dans ces nouvelles fonctions à deux indices, la permutation des indices doit entraîner un changement de signe pour la fonction (¹). On a toujours $M_{ii} = 0$.

Maintenant une seconde étape est franchie et nous avons la formule

$$\int\int_S \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_3}{\partial x_1} & \dfrac{\partial x_3}{\partial x_2} & -1 & 0 \\ \dfrac{\partial x_4}{\partial x_1} & \dfrac{\partial x_4}{\partial x_2} & 0 & -1 \\ M_{1\omega} & M_{2\omega} & M_{3\omega} & M_{4\omega} \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} dx_1 dx_2 = \int\int\int_V \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_4}{\partial x_1} & \dfrac{\partial x_4}{\partial x_2} & \dfrac{\partial x_4}{\partial x_3} & -1 \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} & \dfrac{\partial}{\partial x_4} \\ M_{1\omega} & M_{2\omega} & M_{3\omega} & M_{4\omega} \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} dx_1 dx_2 dx_3.$$

On voit qu'elle est une somme d'identités analogues à l'identité terminant le paragraphe précédent. On conçoit aussi qu'il n'y a plus aucun bénéfice à espérer du fait d'ajouter les unes aux autres des formules analogues à celle qui vient d'être écrite en dernier lieu. A ce dernier point de vue, le résultat maintenant obtenu est définitif.

[3] Ce qui ne semble pas encore définitif, c'est la forme des premières lignes des déterminants obtenus. On peut y obtenir beaucoup plus de symétrie en supposant que la variété S soit définie par les équations implicites

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0, \qquad G(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$$

dont la première seule représenterait V.

Alors, pour calculer les termes de la première ligne dans le déterminant de l'intégrale triple, on aurait

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial x_4}\frac{\partial x_4}{\partial x_i} = 0, \qquad (i = 1, 2, 3).$$

(¹) Les propriétés du double indice ij sont simplement celles d'un produit résultant de la multiplication combinatoire ou alternée définie en calcul géométrique. (Cf. R. Leveugle, *Précis de calcul géométrique*, p. 45. Paris, Gauthier-Villars, 1920.)

On retrouve ces propriétés en bien des cas; l'un des plus simples correspond aux relations segmentaires

$$AB = -BA, \qquad AA = 0.$$

Pour calculer les dérivées partielles figurant dans les deux premières lignes du déterminant de l'intégrale double, on aurait

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial x_i}+\frac{\partial F}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial x_i}+\frac{\partial F}{\partial x_4}\frac{\partial x_4}{\partial x_i}=0,\\ &\frac{\partial G}{\partial x_i}+\frac{\partial G}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial x_i}+\frac{\partial G}{\partial x_4}\frac{\partial x_4}{\partial x_i}=0. \end{aligned}\right\} \qquad (i=1,2)$$

Toujours en vertu de calculs élémentaires relatifs aux déterminants, on transforme aisément ceux qui nous occupent et, sous forme absolument définitive cette fois, on obtient la *formule fondamentale :*

$$\int\!\!\int_S \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1} & \frac{\partial F}{\partial x_2} & \frac{\partial F}{\partial x_3} & \frac{\partial F}{\partial x_4} \\ \frac{\partial G}{\partial x_1} & \frac{\partial G}{\partial x_2} & \frac{\partial G}{\partial x_3} & \frac{\partial G}{\partial x_4} \\ M_{1\omega} & M_{2\omega} & M_{3\omega} & M_{4\omega} \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \frac{dx_1 dx_2}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x_3,x_4)}} = -\int\!\!\int\!\!\int_V \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1} & \frac{\partial F}{\partial x_2} & \frac{\partial F}{\partial x_3} & \frac{\partial F}{\partial x_4} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_4} \\ M_{1\omega} & M_{2\omega} & M_{3\omega} & M_{4\omega} \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \frac{dx_1 dx_2 dx_3}{\dfrac{\partial F}{\partial x_4}}.$$

L'intégrale triple est invariante quand la variété à trois dimensions V *se déforme, dans l'espace à quatre, sans cesser d'avoir pour frontière invariable la variété à deux dimensions* S.

Cette propriété d'invariance tout comme le procédé donnant naissance à la formule suffisent à établir que celle-ci est invariante quant à tout changement des variables x_1, x_2, x_3, x_4.

[**4**] *Autre forme du premier membre de la formule fondamentale.* — Supposons que, dans l'intégrale double de la formule fondamentale, on se propose de développer le déterminant et, dans chaque terme contenant un M_{ij}, de changer de variables de telle manière que l'élément différentiel soit $dx_i\, dx_j$. Alors, en s'appuyant sur la forme précédente de l'intégrale double, ou, ce qui peut paraître un peu plus simple, sur la forme obtenue à la fin du paragraphe 2, on trouve que le premier membre de la formule fondamentale peut s'écrire

$$2\int\!\!\int_S M_{12}dx_1dx_2+M_{13}dx_1dx_3+M_{14}dx_1dx_4+M_{23}dx_2dx_3+M_{24}dx_2dx_4+M_{34}dx_3dx_4.$$

L'expression sous le double signe d'intégration n'est précisément que ce que certains géomètres appellent une *forme différentielle,* d'autres une *forme intégrale.*

C'est par là que la théorie de notre formule stokienne se confond avec celle de telles formes. Néanmoins nous pensons montrer qu'elle a son utilité et que l'emploi des déterminants fait ressortir certaines symétries sous un aspect de haute importance.

[**5**] *Analogies avec la formule de Stokes ordinaire.* — Notre formule fondamentale doit être évidemment considérée comme absolument analogue à la formule de Stokes ordinaire

$$(3) \qquad \int_L \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1} & \frac{\partial F}{\partial x_2} & \frac{\partial F}{\partial x_3} \\ \frac{\partial G}{\partial x_1} & \frac{\partial G}{\partial x_2} & \frac{\partial G}{\partial x_3} \\ M_1 & M_2 & M_3 \end{vmatrix} \frac{dx_1}{\frac{\partial(F, G)}{\partial(x_2, x_3)}} = \int\int_S \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1} & \frac{\partial F}{\partial x_2} & \frac{\partial F}{\partial x_3} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ M_1 & M_2 & M_3 \end{vmatrix} \frac{dx_1 dx_2}{\frac{\partial F}{\partial x_3}}$$

qui suppose que la cloison S se déforme en gardant le contour invariable L représenté par les deux équations

$$F(x_1, x_2, x_3) = 0, \qquad G(x_1, x_2, x_3) = 0$$

dont la première seule représente S.

Si, dans le premier membre de (3), on veut développer le déterminant et faire en sorte que le terme en M_i ne contienne d'autre élément différentiel que dx_i, ce premier membre prend la forme tout à fait habituelle

$$(4) \qquad \int_L M_1 dx_1 + M_2 dx_2 + M_3 dx_3 .$$

[**6**] *Différentielles exactes généralisées.* — Voici encore une notion dont la première étude générale appartient à Henri Poincaré, notion qui continue à jouer un grand rôle dans les travaux de M. Édouard Goursat et qu'on retrouve ici de manière fort élégante. Dire que l'intégrale (4) porte sur une différentielle exacte c'est dire qu'il existe une fonction $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ telle que

$$(5) \qquad M_i = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}, \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Dans (3), les troisièmes lignes des déterminants deviennent donc

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x_3}$$

et le déterminant de l'intégrale double est, de ce fait, identiquement nul. Nous rappelons ces points ultra élémentaires pour bien montrer qu'ils se généralisent sans se compliquer. Le déterminant situé dans l'intégrale triple de la formule fondamentale est aussi identiquement nul si les deux dernières lignes sont remplacées par

$$\begin{matrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} & \dfrac{\partial}{\partial x_4} \\ -2\Phi_1 & -2\Phi_2 & -2\Phi_3 & -2\Phi_4 \end{matrix}$$

ce qui revient à poser alors

$$\text{(6)} \qquad M_{ij} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \Phi_j}{\partial x_i}.$$

Les coefficients -2 peuvent sembler inutiles devant les quatre fonctions *arbitraires* Φ ; toutefois ils assurent la parfaite coïncidence de nos formules avec d'autres déjà publiées par M. Th. De Donder (*Théorie*, p. 45).

Dans ce cas

$$\int\!\!\int_S \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F}{\partial x_2} & \dfrac{\partial F}{\partial x_3} & \dfrac{\partial F}{\partial x_4} \\ \dfrac{\partial G}{\partial x_1} & \dfrac{\partial G}{\partial x_2} & \dfrac{\partial G}{\partial x_3} & \dfrac{\partial G}{\partial x_4} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} & \dfrac{\partial}{\partial x_4} \\ \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3 & \Phi_4 \end{vmatrix} \frac{dx_1\,dx_2}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x_3,x_4)}} = 0$$

et l'on dit que l'intégrale double porte sur une *différentielle exacte généralisée*. Il est toujours entendu que la variété à deux dimensions S est *fermée*.

[7] *Identité remarquable*. — Aux considérations du paragraphe précédent il est naturel de joindre la considération de l'identité

$$\text{(7)} \qquad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} & \dfrac{\partial}{\partial x_4} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} & \dfrac{\partial}{\partial x_4} \\ M_{1\omega} & M_{2\omega} & M_{3\omega} & M_{4\omega} \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Celle-ci est d'une vérification immédiate. Elle est l'analogue de

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ \mathrm{M}_1 & \mathrm{M}_2 & \mathrm{M}_3 \end{vmatrix} = 0.$$

[**8**] *Remarques sur le calcul des déterminants.* — Considérons le déterminant du quatrième ordre

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix}.$$

On peut le calculer par bien des méthodes, mais il y en a deux qui doivent particulièrement fixer notre attention.

La *première méthode* consistera à partir des termes de la première ligne et à les multiplier par leurs mineurs pris avec les alternances de signes habituelles. Cette méthode est si employée qu'il est inutile de s'expliquer davantage à son égard.

La *seconde méthode* consistera à écrire le déterminant en question sous la forme

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_3 & c_4 \\ d_3 & d_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_2 & c_4 \\ d_2 & d_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_4 \\ b_1 & b_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_2 & c_3 \\ d_2 & d_3 \end{vmatrix}$$
$$+ \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_1 & c_4 \\ d_1 & d_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_2 & a_4 \\ b_2 & b_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_1 & c_3 \\ d_1 & d_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_3 & a_4 \\ b_3 & b_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix}.$$

Bien entendu, les deux méthodes doivent conduire au même résultat quand il s'agit d'un déterminant ordinaire, mais il n'en est pas forcément de même pour certains des déterminants symboliques déjà considérés, ni pour d'autres que nous aurons à introduire dans la suite. Il faut aussi observer que, suivant l'aspect des déterminants, l'une des méthodes peut paraître plus indiquée que l'autre.

Ainsi reprenons la formule fondamentale du paragraphe 3.

Le déterminant qui est sous l'intégrale triple ne peut être développé que par la première méthode; la seconde conduirait à écrire des mineurs du second ordre contenant, en dernière ligne, des opérateurs de dérivation qui n'agiraient sur rien ou, du moins, dont l'action ne serait pas immédiatement claire.

Par contre, le déterminant qui est sous l'intégrale double demande à être développé par la seconde méthode; c'est évidemment elle qui fait apparaître immédiatement les M_{ij} et les coefficients de ces fonctions.

[9] *La formule stokienne fondamentale est une formule purement mathématique.* — Cette affirmation peut paraître bizarre comme étant absolument superflue. Notre formule stokienne est même une *identité* comme étant la somme de formules dont chacune résulte d'un simple changement de variables effectué dans l'identité (1).

Elle est une identité au même titre que la formule de Stokes ordinaire ou que la petite formule de Green-Riemann (Cf. A. Buhl, *Géométrie et analyse des intégrales doubles,* Gauthier-Villars, 1920), lesquelles formules admettent des démonstrations absolument analogues à celle de ce chapitre.

Cependant la formule fondamentale en litige va s'interpréter, de manière si soudaine, dans le domaine physique, qu'il importe de bien marquer que jusqu'ici nous n'avons fait appel qu'à l'Analyse et à la notion d'espace géométrique.

CHAPITRE II

Formules physiques.

[**10**] *Équations du champ électromagnétique.* — Ce champ correspond aux *lignes de tourbillon* définies par la formule stokienne fondamentale (§ 3). Par analogie absolument exacte avec ce qui se passe dans le cas de la formule de Stokes ordinaire (3), nous avons à considérer le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F}{\partial x_2} & \dfrac{\partial F}{\partial x_3} & \dfrac{\partial F}{\partial x_4} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} & \dfrac{\partial}{\partial x_4} \\ M_{1\omega} & M_{2\omega} & M_{3\omega} & M_{4\omega} \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

et à écrire que les coefficients des termes de la première ligne sont proportionnels à

$$dx_1 \quad dx_2 \quad dx_3 \quad dx_4 .$$

Posons de plus

$$\mathbf{v}_{x_1} = \frac{dx_1}{dx_4}, \qquad \mathbf{v}_{x_2} = \frac{dx_2}{dx_4}, \qquad \mathbf{v}_{x_3} = \frac{dx_3}{dx_4}$$

et désignons par -2ρ un facteur de proportionnalité dont la signification apparaîtra bientôt. Alors les équations du champ électromagnétique pourront être résumées en le tableau

$$(8) \qquad \left| \begin{array}{cccc} -2\rho\mathbf{v}_{x_1} & -2\rho\mathbf{v}_{x_2} & -2\rho\mathbf{v}_{x_3} & -2\rho \\ \hline\hline \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} & \dfrac{\partial}{\partial x_4} \\ M_{1\omega} & M_{2\omega} & M_{3\omega} & M_{4\omega} \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \right|$$

qui est expliqué et peut même être complètement remplacé par cet énoncé :

Si, dans le déterminant Δ, on remplace la première ligne par

$$-2\rho v_{x_1} \qquad -2\rho v_{x_2} \qquad -2\rho v_{x_3} \qquad -2\rho$$

et si l'on égale ces termes aux coefficients qu'ils ont alors dans Δ, on a les équations du champ électromagnétique.

Dans le tableau précédent, le double trait horizontal tient, si l'on veut, la place de quatre signes $=$.

[**11**] *Interprétation de* ρ. — Voyons ce que le champ précédent donne, dans l'espace ordinaire, à l'instant x_4. Il n'y qu'à couper l'espace-temps par la variété plane

$$F = x_4 - \text{const.} = 0.$$

Alors la formule stokienne fondamentale devient

$$\int\int_S \begin{vmatrix} \frac{\partial G}{\partial x_1} & \frac{\partial G}{\partial x_2} & \frac{\partial G}{\partial x_3} \\ M_{1\omega} & M_{2\omega} & M_{3\omega} \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \frac{dx_1 dx_2}{\frac{\partial G}{\partial x_3}} = \int\int\int_V \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ M_{1\omega} & M_{2\omega} & M_{3\omega} \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} dx_1 dx_2 dx_3,$$

ce que l'on peut écrire en appelant, comme à l'ordinaire, $d\sigma$ l'élément superficiel de S et α, β, γ les cosinus directeurs de la normale à S en cet élément,

$$\int\int_S (\alpha M_{23} + \beta M_{31} + \gamma M_{12}) d\sigma = \int\int\int_V \left(\frac{\partial}{\partial x_1} M_{23} + \frac{\partial}{\partial x_2} M_{31} + \frac{\partial}{\partial x_3} M_{12}\right) d\tau.$$

Or ceci est la formule de Green ordinaire. Ici, elle met spécialement en évidence le vecteur *déplacement électrique* (M_{23}, M_{31}, M_{12}) dont le flux, au travers de la surface fermée S, est, d'après le second membre de la formule et d'après la quatrième équation (8),

$$\int\int\int_V \rho d\tau.$$

Il est naturel [1] de considérer cette expression comme représentant la masse ou quantité d'électricité contenue en V, et, comme $d\tau$ est un élément de volume, ρ doit être considéré comme la *densité électrique* en x_1, x_2, x_3 à l'instant x_4.

Dans le présent paragraphe, on observe de manière incidente que la formule de Green est un cas particulier de la formule stokienne fondamentale (§ 3). C'est un résultat que j'ai indiqué depuis longtemps (*Annales de Toulouse*, 1912, p. 408).

Uniquement pour compléter la description de nos notations, rappelons que le vecteur (M_{41}, M_{42}, M_{43}) est la *force magnétique* du champ électromagnétique considéré.

[**12**] *Équations du champ gravifique.* — Le résultat le plus considérable des modernes théories mécaniques et physiques consiste certainement à lier les phénomènes électromagnétiques et les phénomènes gravifiques. On a tenté pour cela, au point de vue analytique et avec un succès qui se trouva confirmé par des observations et des expériences, l'hypothèse d'un champ gravifique dont l'action sur le champ électromagnétique se traduirait par des équations analogues aux équations (8) du champ électromagnétique.

Il ne s'agit donc pas, pour l'instant, quand nous parlons de « champ gravifique » de l'étude générale de ce champ mais, suivant l'expression consacrée par la *Théorie* de M. Th. De Donder, de celle du champ électromagnétique de Maxwell-Lorentz plongé dans le champ de gravitation d'Einstein.

Les six M auraient pour analogues six M^*. Mais, en matière gravifique, il ne faut pas commencer par perdre de vue la gravifique newtonnienne qui, presque partout, a toujours serré d'extrêmement près les réalités de la Mécanique céleste. Or, l'attraction newtonnienne dépend toujours d'un potentiel; le travail correspondant au mouvement d'un point est une différentielle exacte, et la *circulation* (4), le long d'un contour fermé L, est nulle.

Voilà ce que nous allons nous proposer d'imiter en passant de la formule de Stokes (3) à notre formule stokienne fondamentale (§ 3). Le premier membre de cette dernière devra contenir une différentielle exacte généralisée (§ 6) et, par suite, les M^* devront être de la forme

$$M^*_{ij} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \Phi_j}{\partial x_i}. \tag{9}$$

Ceci généralise la formule (5), en laquelle Φ peut être considéré comme un potentiel ordinaire et, par suite, Φ_1, Φ_2, Φ_3, Φ_4 sont des potentiels généralisés dits *potentiels retardés*. Le déterminant Δ, où l'on remplace les M_{ij} par les M^*_{ij} d'ex-

[1] Comparer avec la Note déjà citée de M. E. Vessiot (*Comptes rendus*, 30 décembre 1918).

pression (9), a alors des mineurs identiquement nuls relativement à tous les termes de la première ligne, et ceci permet de représenter les équations du champ gravifique par le tableau

$$
(10) \qquad \left|\begin{array}{cccc}
0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline\hline
\dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} & \dfrac{\partial}{\partial x_4} \\
M^*_{1\omega} & M^*_{2\omega} & M^*_{3\omega} & M^*_{4\omega} \\
1 & 2 & 3 & 4
\end{array}\right|
$$

qui peut, lui aussi, être complètement remplacé par cet énoncé :

Si, dans le déterminant Δ, *on remplace les* M *par des* M^* *et les termes de la première ligne par des zéros, ces zéros, égalés aux coefficients qu'ils ont alors dans* Δ, *fournissent les équations du champ gravifique.*

[13] *Superposition du champ électromagnétique et du champ gravifique.* — Jusqu'ici les deux champs ont des équations analogues, mais ils sont encore indépendants alors qu'il importe précisément d'imaginer leur action mutuelle. On réalise la chose en établissant, entre les M et les M^*, des relations bilinéaires auxquelles on ne s'est certainement pas arrêté sans tâtonnements, que l'avenir modifiera peut-être encore et qu'il sera commode d'écrire d'abord, quitte à essayer ensuite une explication.

C'est ici qu'il faut d'abord introduire les dix *potentiels gravifiques* d'Einstein g_{ik}, avec lesquels on forme le déterminant

$$
g = \left|\begin{array}{cccc}
11 & 12 & 13 & 14 \\
21 & 22 & 23 & 24 \\
31 & 32 & 33 & 34 \\
41 & 42 & 43 & 44
\end{array}\right|
$$

en lequel, pour plus de simplicité, on a écrit ik pour g_{ik}. On a $ik = ki$.

Toujours pour abréger, nous poserons

$$
\Omega = \sqrt{-g}.
$$

Ceci dit, nous écririons

$$(11) \qquad -2\Omega M^*_{ij} = \begin{vmatrix} i1 & i2 & i3 & i4 \\ j1 & j2 & j3 & j4 \\ M_{1\omega} & M_{2\omega} & M_{3\omega} & M_{4\omega} \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix},$$

ce qui constitue un système de six relations d'où il est aisé de tirer réciproquement

$$(12) \qquad 2\Omega M_{ij} = \begin{vmatrix} i1 & i2 & i3 & i4 \\ j1 & j2 & j3 & j4 \\ M^*_{1\omega} & M^*_{2\omega} & M^*_{3\omega} & M^*_{4\omega} \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

Ici, il est évidemment indiqué de développer ces déterminants par la seconde méthode du paragraphe 8. Les relations (11) ont été écrites en détail par M. Th. De Donder (*Théorie*, p. 13).

Le même auteur a donné (12) dans le même ouvrage [p. 46, équation (120)].

Mais il y a d'autres manières de faire ressortir les symétries ainsi établies entre les M et les M*. Considérons notamment le tableau

$$(13) \qquad \frac{1}{\Omega}\begin{array}{|cccc|cc} 11 & 12 & 13 & 14 & M_{1\omega} & 1 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & M_{2\omega} & 2 \\ 31 & 32 & 33 & 34 & M_{3\omega} & 3 \\ 41 & 42 & 43 & 44 & M_{4\omega} & 4 \\ \hline M^*_{1\omega} & M^*_{2\omega} & M^*_{3\omega} & M^*_{4\omega} & & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & & \end{array}$$

obtenu, on le voit, en bordant le déterminant g. On a les règles suivantes :

Le mineur $2M^*_{ij}$, *lu au bas du tableau* (13), *est égal et de signe contraire au déterminant du quatrième ordre formé par les deux colonnes situées au-dessus du mineur considéré et par les deux colonnes de droite du tableau.*

Le mineur $2M_{ij}$, *lu à droite du tableau* (13), *est égal au déterminant du quatrième ordre formé par les deux lignes situées à gauche du mineur considéré et par les deux lignes du bas du tableau.*

La considération du tableau (13) mène maintenant, tout naturellement, à celle des deux déterminants

$$(14) \qquad -8L = \left| \begin{array}{c|cccc|cc} & 11 & 12 & 13 & 14 & M_{1\omega} & 1 \\ \frac{1}{\Omega} & 21 & 22 & 23 & 24 & M_{2\omega} & 2 \\ & 31 & 32 & 33 & 34 & M_{3\omega} & 3 \\ & 41 & 42 & 43 & 44 & M_{4\omega} & 4 \\ & M_{1\omega} & M_{2\omega} & M_{3\omega} & M_{4\omega} & 0 & 0 \\ & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 \end{array} \right|$$

et

$$(15) \qquad 8L = \left| \begin{array}{c|cccc|cc} & 11 & 12 & 13 & 14 & M^{*}_{1\omega} & 1 \\ \frac{1}{\Omega} & 21 & 22 & 23 & 24 & M^{*}_{2\omega} & 2 \\ & 31 & 32 & 33 & 34 & M^{*}_{3\omega} & 3 \\ & 41 & 42 & 43 & 44 & M^{*}_{4\omega} & 4 \\ & M^{*}_{1\omega} & M^{*}_{2\omega} & M^{*}_{3\omega} & M^{*}_{4\omega} & 0 & 0 \\ & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 \end{array} \right|$$

dont, conformément à la notation, il convient de montrer l'égalité, au signe près.

Ceci est immédiat et résulte du développement de ces déterminants par la seconde méthode du paragraphe 8, laquelle, expliquée sur un déterminant du quatrième ordre, s'applique aussi bien à un du sixième. Tenant compte des coefficients qu'il est possible d'attribuer aux M_{ij} dans (14), aux M^{*}_{ij} dans (15), d'après les deux règles énoncées ci-dessus, on voit que (14) et (15) se réduisent à l'équation unique

$$(16) \qquad 8L = \begin{vmatrix} M_{1\omega} & M_{2\omega} & M_{3\omega} & M_{4\omega} \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ M^{*}_{1\omega} & M^{*}_{2\omega} & M^{*}_{3\omega} & M^{*}_{4\omega} \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

Cette équation (16) est l'équation (324) de la *Théorie* de M. Th. De Donder. L'identité des formules (14) et (15) est signalée en note, au bas de la page 46 du même ouvrage.

N'oublions pas que nous avons toujours à justifier les relations (11) ou (12) par lesquelles on a lié le champ électromagnétique au champ gravifique. Nous avons avancé vers le but désiré en montrant l'identité des formules (14), (15) et (16).

Pour achever, il reste à invoquer le principe d'Hamilton.

[**14**] *Le principe d'Hamilton et son extension lorentzienne.* — Nous supposons connues la forme classique du principe d'Hamilton ainsi que les notations habituelles de la Mécanique analytique (P. APPELL, *Traité de Mécanique*, t. II, 2e éd., p. 422). Le principe en question repose sur la considération de la variation d'une certaine intégrale définie qui contient notamment l'énergie cinétique T. Cette énergie T s'exprime par une forme quadratique en q et par la forme *adjointe* de celle-ci relativement à des variables p. Or cette forme adjointe peut s'écrire sous forme d'un déterminant bordé dont le noyau est le tableau des coefficients de la forme en q et dont la bordure se compose d'*une* ligne et d'*une* colonne en p.

Ici nous pouvons voir dans la quantité L du paragraphe précédent, quantité définie par (14) ou (15), une expression généralisée de l'énergie, expression constituée aussi par un noyau g *doublement* bordé.

C'est là une manière, parmi d'autres, de concevoir l'extension du principe d'Hamilton due à H.-A. Lorentz. En résumé c'est le fait de conserver le principe d'Hamilton, avec une généralisation convenable, en électromagnétisme et en gravifique qui porte à concevoir une forme généralisée de l'énergie pouvant donner lieu aux expressions (14), (15) et (16). D'autre part on a ces expressions et particulièrement l'égalité, au signe près, des déterminants figurant dans (14) et (15) en posant les relations primitives (11) et (12) entre les M et les M*. C'est ainsi que ces relations primitives trouvent, au fond, leur justification dans le maintien du principe d'Hamilton.

Ces explications que, nous nous plaisons à donner en langage ordinaire, doivent évidemment être, de ce fait, plus ou moins modifiables. Mais ce qui peut en advenir ne paraît pas pouvoir modifier l'analyse ultérieure du présent Mémoire.

[**15**] *Travaux et forces dans les champs généralisés.* — Considérons quatre fonctions F_i définies par l'égalité

$$-2F_i = \begin{vmatrix} \dfrac{M^*_{i1}}{\Omega} & \dfrac{M^*_{i2}}{\Omega} & \dfrac{M^*_{i3}}{\Omega} & \dfrac{M^*_{i4}}{\Omega} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} & \dfrac{\partial}{\partial x_4} \\ M_{1\omega} & M_{2\omega} & M_{3\omega} & M_{4\omega} \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

qui correspond aux formules (41) de la *Théorie* de M. De Donder. On établit immédiatement que

$$\begin{vmatrix} F_1 & F_2 & F_3 & F_4 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_4} \\ M_{1\omega} & M_{2\omega} & M_{3\omega} & M_{4\omega} \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Considérant, dans ce dernier déterminant, les coefficients des F et les équations (8) du champ électromagnétique, on a

$$F_1 dx_1 + F_2 dx_2 + F_3 dx_3 = - F_4 dx_4.$$

Or le trinôme ainsi mis en évidence peut être considéré comme un travail dans l'espace ordinaire et nous dirons que F_1, F_2, F_3 sont les composantes rectangulaires de la *force mécanique* avec laquelle le champ *électromagnétique* agit en x_1, x_2, x_3 à l'instant x_4. D'autre part F_4 est l'*énergie* que l'électricité relâche dans le même champ, en x_1, x_2, x_3 à l'instant x_4. (Th. De Donder, p. ·8).

Par raison de symétrie, nous poserons (*loc. cit.*, p. 23)

$$2G_i = \begin{vmatrix} \frac{M_{i1}}{\Omega} & \frac{M_{i2}}{\Omega} & \frac{M_{i3}}{\Omega} & \frac{M_{i4}}{\Omega} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_4} \\ M^*_{1\omega} & M^*_{2\omega} & M^*_{3\omega} & M^*_{4\omega} \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

mais il faut bien se rappeler que, dans le champ gravifique d'Einstein, d'après les équations (10), ces G_i sont identiquement nuls. On voit que $-2F_i$ et $2G_i$ ne diffèrent que par la position des astérisques et l'on peut énoncer ces règles :

Si, dans le déterminant Δ, *on remplace la première ligne par*

$$\frac{M^*_{i1}}{\Omega} \quad \frac{M^*_{i2}}{\Omega} \quad \frac{M^*_{i3}}{\Omega} \quad \frac{M^*_{i4}}{\Omega},$$

on obtient le déterminant $-2F_i$.

Si, dans le déterminant $-2F_i$, *on reporte, en troisième ligne, les astérisques de la première, on obtient le déterminant* $2G_i$.

[**16**] *Force et travail exercés par le champ gravifique.* — Ce paragraphe a intentionnellement le même titre que le paragraphe correspondant de l'ouvrage de M. De Donder (p. 34).

Partons de l'égalité

$$2(G_i + F_i) = \begin{vmatrix} \frac{M_{i1}}{\Omega} & \frac{M_{i2}}{\Omega} & \frac{M_{i3}}{\Omega} & \frac{M_{i4}}{\Omega} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_4} \\ M^*_{1\omega} & M^*_{2\omega} & M^*_{3\omega} & M^*_{4\omega} \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \frac{M^*_{i1}}{\Omega} & \frac{M^*_{i2}}{\Omega} & \frac{M^*_{i3}}{\Omega} & \frac{M^*_{i4}}{\Omega} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_4} \\ M_{1\omega} & M_{2\omega} & M_{3\omega} & M_{4\omega} \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

et, *par définition de quatre quantités nouvelles* $\mathfrak{F}_i$, posons

$$2(G_i - F_i - 2\mathfrak{F}_i) = \begin{vmatrix} M^*_{1\omega} & M^*_{2\omega} & M^*_{3\omega} & M^*_{4\omega} \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_4} \\ \frac{M_{i1}}{\Omega} & \frac{M_{i2}}{\Omega} & \frac{M_{i3}}{\Omega} & \frac{M_{i4}}{\Omega} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} M_{1\omega} & M_{2\omega} & M_{3\omega} & M_{4\omega} \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_4} \\ \frac{M^*_{i1}}{\Omega} & \frac{M^*_{i2}}{\Omega} & \frac{M^*_{i3}}{\Omega} & \frac{M^*_{i4}}{\Omega} \end{vmatrix}$$

On remarquera que *ces deux déterminants ne diffèrent des deux écrits au-dessus que par l'ordre des lignes*. Retranchant la première formule de la seconde, on obtient

$$-4(\mathfrak{F}_i + F_i) = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_4} \\ \frac{M_{i1}}{\Omega} & \frac{M_{i2}}{\Omega} & \frac{M_{i3}}{\Omega} & \frac{M_{i4}}{\Omega} \\ M^*_{1\omega} & M^*_{2\omega} & M^*_{3\omega} & M^*_{4\omega} \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_4} \\ \frac{M^*_{i1}}{\Omega} & \frac{M^*_{i2}}{\Omega} & \frac{M^*_{i3}}{\Omega} & \frac{M^*_{i4}}{\Omega} \\ M_{1\omega} & M_{2\omega} & M_{3\omega} & M_{4\omega} \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

et *ces deux nouveaux déterminants ne diffèrent encore des précédents que par l'ordre des lignes*. On développera tout naturellement les deux derniers par la première méthode du paragraphe 8 ce qui permettra d'abord de constater que nos quatre expressions $\mathfrak{F}_i + F_i$ sont bien exactement les mêmes que celles ainsi désignées dans les formules (84) de M. De Donder.

Notre définition des $\mathfrak{F}_i$ coïncide donc avec celle de ce savant.

Reprenons maintenant les deux équations primitives, d'abord retranchées l'une de l'autre, et ajoutons-les. Nous aurons ainsi l'expression

$$(17) \qquad 4(G_i - \mathfrak{F}_i),$$

écrite, si l'on veut, en un tableau carré formé de quatre déterminants, tableau qu'il est inutile de reproduire et qu'on a sous les yeux en considérant, à la fois, les seconds membres des deux premières formules du présent paragraphe.

Comme les G_i sont nuls et ne sont conservés, en tout ceci, que par raison de symétrie, on voit qu'on a, en (17), une expression des $\mathfrak{F}_i$ par quatre déterminants dont l'un est $-2F_i$ et dont les trois autres se déduisent de ce dernier par des transpositions de lignes ou d'astérisques d'une symétrie extrêmement remarquable. Et, comme le déterminant $-2F_i$ se déduit lui-même très simplement de Δ on voit combien est toujours fondamental et considérable le rôle de ce Δ.

Il reste toutefois à attribuer une signification physique aux $\mathfrak{F}_i$. Déduits des F_i par de simples symétries, ce doivent être des quantités analogues et, comme M. De Donder, nous dirons (*Théorie*, p. 35) que $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3$ sont les composantes de la *force* exercée par le champ *gravifique* d'Einstein, $\mathfrak{F}_4$ étant l'*énergie* libérée ou rayonnée dans le même champ, en x_1, x_2, x_3 à l'instant x_4.

Avant de poursuivre, résumons les lemmes de symétrie obtenus dans ce paragraphe.

Si, dans la différence de déterminants qui représente $2(G_i + F_i)$, *on écrit les lignes* 1, 2, 3, 4, *de chaque déterminant, dans l'ordre* 4, 3, 1, 2, *on obtient* $2(G_i - F_i - 2\mathfrak{F}_i)$.

Si, dans la différence de déterminants qui représente $2(G_i + F_i)$, *on écrit les lignes* 1, 2, 3, 4, *de chaque déterminant, dans l'ordre* 2, 1, 3, 4, *on obtient* $-4(\mathfrak{F}_i + F_i)$.

[17] *Seconde espèce de symétries pour les* $\mathfrak{F}_i$. — Les présentes théories semblent extraordinairement riches en symétries analytiques. Les $\mathfrak{F}_i$ admettent au moins encore une espèce de symétries qui va nous révéler de nouvelles propriétés de ces quantités.

Posons d'abord

$$8\Omega K_i = \begin{vmatrix} M_{1\omega} & M_{2\omega} & M_{3\omega} & M_{4\omega} \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ \dfrac{\partial M^*_{1\omega}}{\partial x_i} & \dfrac{\partial M^*_{2\omega}}{\partial x_i} & \dfrac{\partial M^*_{3\omega}}{\partial x_i} & \dfrac{\partial M^*_{4\omega}}{\partial x_i} \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} M^*_{1\omega} & M^*_{2\omega} & M^*_{3\omega} & M^*_{4\omega} \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ \dfrac{\partial M_{1\omega}}{\partial x_i} & \dfrac{\partial M_{2\omega}}{\partial x_i} & \dfrac{\partial M_{3\omega}}{\partial x_i} & \dfrac{\partial M_{4\omega}}{\partial x_i} \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix};$$

ce qui n'est autre chose que la formule (303) de M. De Donder, à cela près que nous écrivons ΩK_i au lieu de K_i. Remarquons tout de suite qu'on peut conclure de là

$$8\Omega \sum K_i dx_i = \left|\begin{array}{cccc} M_{1\omega} & M_{2\omega} & M_{3\omega} & M_{4\omega} \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ dM^*_{1\omega} & dM^*_{2\omega} & dM^*_{3\omega} & dM^*_{4\omega} \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right| - \left|\begin{array}{cccc} M^*_{1\omega} & M^*_{2\omega} & M^*_{3\omega} & M^*_{4\omega} \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ dM_{1\omega} & dM_{2\omega} & dM_{3\omega} & dM_{4\omega} \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right| \cdot$$

Nous disons maintenant que les quatre $\mathfrak{F}_i$, ou $G_i - \mathfrak{F}_i$ définis par (17), peuvent se calculer par l'intermédiaire des quatre quantités $G_i + K_i - \mathfrak{F}_i$ données elles-mêmes par le tableau

$$\begin{array}{c} 2(G_1+K_1-\mathfrak{F}_1) \\ 2(G_2+K_2-\mathfrak{F}_2) \\ 2(G_3+K_3-\mathfrak{F}_3) \\ 2(G_4+K_4-\mathfrak{F}_4) \end{array} \left\|\begin{array}{ccc} M_{i1} & M^*_{i1} & \dfrac{\partial}{\partial x_1} \\ M_{i2} & M^*_{i2} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} \\ M_{i3} & M^*_{i3} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ M_{i4} & M^*_{i4} & \dfrac{\partial}{\partial x_4} \end{array}\right\| \frac{2}{\Omega} + \left\|\begin{array}{ccc} M_{i1} & M^*_{1\omega} & 1 \\ M_{i2} & M^*_{2\omega} & 2 \\ M_{i3} & M^*_{3\omega} & 3 \\ M_{i4} & M^*_{4\omega} & 4 \end{array}\right\| \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{2\Omega} - \left\|\begin{array}{ccc} M^*_{i1} & M_{1\omega} & 1 \\ M^*_{i2} & M_{2\omega} & 2 \\ M^*_{i3} & M_{3\omega} & 3 \\ M^*_{i4} & M_{4\omega} & 4 \end{array}\right\| \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{2\Omega}$$

dont on fera usage de la manière suivante. D'abord, lorsque l'on calcule $G_i + K_i - \mathfrak{F}_i$, tous les indices i du tableau sont égaux à celui figurant dans le trinôme en question.

Ceci dit, réunissant la première colonne et la première matrice, on égale les termes de la première colonne aux coefficients qu'ils ont alors dans le déterminant ainsi formé; on continue de même avec les matrices suivantes, et, finalement, on a tous les termes d'un $G_i + K_i - \mathfrak{F}_i$ quelconque en trois groupes distincts, chaque groupe correspondant à une matrice du tableau. Ce tableau a été donné sous une forme un peu différente de la précédente, mais complètement équivalente, dans les *Comptes rendus* du 26 octobre 1920.

On voit que *les* $G_i + K_i - \mathfrak{F}_i$ *sont des formes linéaires aux dérivées partielles de* Ω, *c'est-à-dire de* g.

Si le déterminant g *des potentiels gravifiques se réduit à une constante, les* $G_i + K_i - \mathfrak{F}_i$ *sont nuls et, dans le champ gravifique d'Einstein* ($G_i = 0$), *les* $\mathfrak{F}_i$ *s'identifient aux* K_i.

Remarquons bien que nous attribuons de l'importance au tableau précédent uniquement parce qu'il révèle de nouvelles symétries à adjoindre à celles déjà rappelées dans ce Mémoire; il ne dissimule aucun encombrement ni aucune difficulté de développement. Ainsi on a

$$(G_1 + K_1 - \mathfrak{F}_1) = (M_{12}M^*_{34} - M_{13}M^*_{24} + M_{14}M^*_{23} - M^*_{12}M_{34} + M^*_{13}M_{24} - M^*_{14}M_{23})\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{1}{2\Omega}$$
$$+ (M_{13}M^*_{14} - M^*_{13}M_{14})\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{1}{\Omega} + (M_{14}M^*_{12} - M^*_{14}M_{12})\frac{\partial}{\partial x_3}\frac{1}{\Omega} + (M_{12}M^*_{13} - M^*_{12}M_{13})\frac{\partial}{\partial x_4}\frac{1}{\Omega}.$$

Si, dans le second membre, on augmente tous les indices d'une unité, par permutation circulaire, on trouve $-(G_2 + K_2 - \mathfrak{F}_2)$. Et ainsi de suite. Ces résultats sont à rapprocher des formules (52) à (55) et (83) à (88) de la *Théorie* de M. Th. De Donder. Et les formules du présent paragraphe correspondent à celles indiquées par l'éminent auteur aux pages 81 à 85 de son œuvre.

Observons encore que l'expression

$$g\sum_{1}^{4}(G_i + K_i - \mathfrak{F}_i)\,dx_i \tag{18}$$

peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} dx_1 & M_{i1} & M^*_{i1} & \frac{\partial\Omega}{\partial x_1} \\ dx_2 & M_{i2} & M^*_{i2} & \frac{\partial\Omega}{\partial x_2} \\ dx_3 & M_{i3} & M^*_{i3} & \frac{\partial\Omega}{\partial x_3} \\ dx_4 & M_{i4} & M^*_{i4} & \frac{\partial\Omega}{\partial x_4} \end{vmatrix} + \frac{1}{4}\begin{vmatrix} \frac{\partial\Omega}{\partial x_1}dx_1 & M_{i1} & M^*_{1\omega} & 1 \\ \frac{\partial\Omega}{\partial x_2}dx_2 & M_{i2} & M^*_{2\omega} & 2 \\ \frac{\partial\Omega}{\partial x_3}dx_3 & M_{i3} & M^*_{3\omega} & 3 \\ \frac{\partial\Omega}{\partial x_4}dx_4 & M_{i4} & M^*_{4\omega} & 4 \end{vmatrix} - \frac{1}{4}\begin{vmatrix} \frac{\partial\Omega}{\partial x_1}dx_1 & M^*_{i1} & M_{1\omega} & 1 \\ \frac{\partial\Omega}{\partial x_2}dx_2 & M^*_{i2} & M_{2\omega} & 2 \\ \frac{\partial\Omega}{\partial x_3}dx_3 & M^*_{i3} & M_{3\omega} & 3 \\ \frac{\partial\Omega}{\partial x_4}dx_4 & M^*_{i4} & M_{4\omega} & 4 \end{vmatrix}.$$

On développera ces déterminants en partant des termes des premières colonnes; chaque tel terme multipliera son mineur en lui donnant son indice au lieu et place de i.

Enfin, et ceci revient toujours à écrire les mêmes résultats sous des formes différentes, si l'on adopte les notations de M. De Donder, et notamment les expressions Θ à deux indices (*Théorie*, pp. 35-36), on peut obtenir

$$\Omega(G_1 + K_1 - \mathfrak{F}_1) = \Theta_{11}\frac{\partial\Omega}{\partial x_1} + \Theta_{12}\frac{\partial\Omega}{\partial x_2} + \Theta_{13}\frac{\partial\Omega}{\partial x_3} + \Theta_{14}\frac{\partial\Omega}{\partial x_4},$$
$$\Omega(G_2 + K_2 - \mathfrak{F}_2) = \Theta_{21}\frac{\partial\Omega}{\partial x_1} + \Theta_{22}\frac{\partial\Omega}{\partial x_2} + \Theta_{23}\frac{\partial\Omega}{\partial x_3} + \Theta_{24}\frac{\partial\Omega}{\partial x_4},$$
$$\Omega(G_3 + K_3 - \mathfrak{F}_3) = \Theta_{31}\frac{\partial\Omega}{\partial x_1} + \Theta_{32}\frac{\partial\Omega}{\partial x_2} + \Theta_{33}\frac{\partial\Omega}{\partial x_3} + \Theta_{34}\frac{\partial\Omega}{\partial x_4},$$
$$\Omega(G_4 + K_4 - \mathfrak{F}_4) = \Theta_{41}\frac{\partial\Omega}{\partial x_1} + \Theta_{42}\frac{\partial\Omega}{\partial x_2} + \Theta_{43}\frac{\partial\Omega}{\partial x_3} + \Theta_{44}\frac{\partial\Omega}{\partial x_4}.$$

Il serait aisé de passer de là à l'une des expressions du *tenseur électromagnétique*, mais nous réservons les considérations tensorielles proprement dites pour un Mémoire ultérieur.

[**18**] *Étude des* K_i. — On voit que l'étude des $\mathfrak{F}_i$ ne va pas sans celle des K_i. Reprenons l'expression de $8\,\Omega\,K_i$ donnée au paragraphe précédent et écrivons-la uniquement avec des M. On obtient alors l'équation (308) de M. De Donder

$$(19)\qquad -8\Omega\,K_i = \left|\; \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{\Omega} \begin{array}{|cccc|cc} 11 & 12 & 13 & 14 & M_{1\omega} & 1 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & M_{2\omega} & 2 \\ 31 & 32 & 33 & 34 & M_{3\omega} & 3 \\ 41 & 42 & 43 & 44 & M_{4\omega} & 4 \\ M_{1\omega} & M_{2\omega} & M_{3\omega} & M_{4\omega} & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 \end{array} \right| .$$

Cette expression est invariante quant au fait d'y remplacer les M *par les* M^*. En effet, reprenons $8\,\Omega\,K_i$ différence de deux déterminants du quatrième ordre. Cette différence, *au signe près*, est constituée avec les M^* comme avec les M. Pour tout y exprimer avec les M^* il faudra se servir de la formule (12) qui a encore même structure, *au signe près*, que la formule (11) utilisée pour former $-8\,\Omega\,K_i$ avec les M.

Donc changer les M en M^* dans notre dernière égalité revient à faire subir au second membre deux changements de signe successifs.

Il suit de là que si l'on écrit la formule (19) avec des M^* et qu'on utilise ensuite les potentiels retardés (§ 12), on peut écrire aussi

$$(20)\qquad -2\Omega\,K_i = \left|\; \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{\Omega} \begin{array}{|cccc|cc} 11 & 12 & 13 & 14 & \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \Phi_1 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \Phi_2 \\ 31 & 32 & 33 & 34 & \dfrac{\partial}{\partial x_3} & \Phi_3 \\ 41 & 42 & 43 & 44 & \dfrac{\partial}{\partial x_4} & \Phi_4 \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} & \dfrac{\partial}{\partial x_4} & 0 & 0 \\ \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3 & \Phi_4 & 0 & 0 \end{array} \right| .$$

Pour développer les seconds membres de (19) ou (20), on partira des mineurs tels que $2M_{ij}$ à prendre d'abord dans les deux dernières lignes ou les deux dernières colonnes. Ces $2M_{ij}$ auront alors pour coefficients des déterminants du quatrième ordre, dans lesquels g n'interviendra que par des mineurs du second ordre; comme l'indique la notation, c'est uniquement à ces derniers mineurs (divisés par Ω) qu'il convient d'appliquer la dérivation partielle en x_i.

On voit que *si tous les potentiels gravifiques g_{ik} se réduisent à des constantes, les K_i sont identiquement nuls.* Comme, en ce cas, g (ou Ω) est une constante et qu'alors, dans le champ d'Einstein, les $\mathfrak{F}_i$ s'identifient aux K_i (§ 17), on voit aussi que *les $\mathfrak{F}_i$ disparaissent si tous les g_{ik} sont constants.*

[**19**] *Les formules régissant l'espace physique phénoménal peuvent avoir une forme préliminaire provenant de transformations analytiques de formules de l'espace géométrique.* — Ceci n'est pas un aphorisme philosophique ayant la prétention d'échapper à toute contestation; on l'aperçoit d'ailleurs, de manières diverses, dans les préoccupations des philosophes et physiciens contemporains. Ici, il paraît résumer ce qui précède dans le présent Mémoire.

Nous avons établi une formule stokienne fondamentale d'une manière purement analytique et en n'empruntant à l'espace géométrique que les notions qui donnent le sens le plus ordinaire à l'identité (1). Cette formule stokienne, surtout par le déterminant Δ qu'elle contient, met indéniablement en évidence tout au moins *la forme* des équations de l'électromagnétisme dans le champ gravifique. Bien plus, Δ est un déterminant symbolique qui, par transpositions de lignes ou de colonnes, subit des changements plus complexes que les changements de signe des déterminants ordinaires, mais ces transformations plus complexes sont précisément choses d'une haute importance, puisqu'elles permutent, les unes en les autres, les formules électromagnétiques et gravifiques.

Les formules les plus générales de la Physique, *au moins quant à une forme préliminaire,* peuvent donc reposer sur une base purement mathématique. Ceci expliquerait pourquoi, en Électroptique par exemple, on a pu se permettre, non sans succès partiels, de poser tant de systèmes d'équations sans démonstration.

On pourrait peut-être préciser mieux encore. L'identité (1), sur laquelle tout repose, est considérée avec la notion de *volume v* parce que c'est là la manière la plus immédiatement tangible de lui donner un sens, mais en s'accordant ainsi le volume et l'espace ordinaire on s'accorde sans doute plus qu'il n'est nécessaire.

Quelles sont les conditions analytiques minima qui donnent un sens à l'identité (1) et laissent la possibilité des changements de variables effectués sur cette identité?

La question n'est certainement plus à résoudre, ne serait-ce qu'après les travaux de MM. E. Borel et H. Lebesgue, mais nous n'avons pas encore eu le loisir de reprendre notre analyse à ce point de vue.

CHAPITRE III

Développements. — Champ c. — Formules et remarques diverses.

[**20**] Les formules du Chapitre précédent sont uniquement formées de manière à faire ressortir leur symétrie. Même si l'on concède que cette symétrie est remarquable, on aura encore d'autres exigences bien légitimes. On demandera notamment à revoir les formules classiques de l'électromagnétisme dans les formules déjà établies.

Cependant ce n'est pas, ou du moins ce n'est plus, à faire ici, ces questions ayant été vidées, dans le plus grand détail, par M. Th. De Donder. Aussi nous contenterons-nous de revenir très rapidement sur les équations de Faraday-Maxwell qui servent de base à l'électroptique.

Avec M. De Donder nous appellerons *champ c* celui pour lequel le déterminant g, des potentiels gravifiques, se réduit à

$$(21) \qquad g = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c^2 \end{vmatrix} = -c^2,$$

en désignant par c la vitesse, *supposée constante*, de la lumière dans le vide.

On voit donc que la fonction $\Omega = \sqrt{-g}$ joue, dans les champs généralisés, un rôle analogue à celui joué par la vitesse de la lumière dans les champs de Faraday, Ampère, Maxwell, Hertz,... On voit aussi avec quelle facilité la nouvelle analyse incite à abandonner la vitesse *constante* de la lumière pour lui substituer une fonction Ω. Ceci n'est qu'une simple constatation mais comme Ω, en général, dépend des potentiels gravifiques qui interviennent eux-mêmes dans la courbure de l'espace géométrique on voit aussi quelle immense synthèse on réalise par l'abandon — toujours difficile à certains esprits — du c constant.

[**21**] *Réduction, dans le champ c, des équations du champ électromagnétique de Maxwell-Lorentz plongé dans le champ gravifique d'Einstein.* — Partons d'abord des équations en question en les prenant dans toute leur généralité. Ce sont celles des tableaux (8) et (10).

Développant, en se rappelant que $\mathrm{M}_{ij} = -\mathrm{M}_{ji}$, on a les deux groupes

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} -\rho\mathbf{v}_{x_1} &= \frac{\partial}{\partial x_2}\mathrm{M}_{34} + \frac{\partial}{\partial x_3}\mathrm{M}_{42} + \frac{\partial}{\partial x_4}\mathrm{M}_{23},\\ \rho\mathbf{v}_{x_2} &= \frac{\partial}{\partial x_3}\mathrm{M}_{41} + \frac{\partial}{\partial x_4}\mathrm{M}_{13} + \frac{\partial}{\partial x_1}\mathrm{M}_{34},\\ -\rho\mathbf{v}_{x_3} &= \frac{\partial}{\partial x_4}\mathrm{M}_{12} + \frac{\partial}{\partial x_1}\mathrm{M}_{24} + \frac{\partial}{\partial x_2}\mathrm{M}_{41},\\ \rho &= \frac{\partial}{\partial x_1}\mathrm{M}_{23} + \frac{\partial}{\partial x_2}\mathrm{M}_{31} + \frac{\partial}{\partial x_3}\mathrm{M}_{12}, \end{aligned}\right.$$

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial x_2}\mathrm{M}^*_{34} + \frac{\partial}{\partial x_3}\mathrm{M}^*_{42} + \frac{\partial}{\partial x_4}\mathrm{M}^*_{23},\\ 0 &= \frac{\partial}{\partial x_3}\mathrm{M}^*_{41} + \frac{\partial}{\partial x_4}\mathrm{M}^*_{13} + \frac{\partial}{\partial x_1}\mathrm{M}^*_{34},\\ 0 &= \frac{\partial}{\partial x_4}\mathrm{M}^*_{12} + \frac{\partial}{\partial x_1}\mathrm{M}^*_{24} + \frac{\partial}{\partial x_2}\mathrm{M}^*_{41},\\ 0 &= \frac{\partial}{\partial x_1}\mathrm{M}^*_{23} + \frac{\partial}{\partial x_2}\mathrm{M}^*_{31} + \frac{\partial}{\partial x_3}\mathrm{M}^*_{12}. \end{aligned}\right.$$

Posons maintenant, en écrivant x, y, z, t pour x_1, x_2, x_3, x_4,

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{M}_{12} &= \mathbf{d}_z,\\ \mathrm{M}_{23} &= \mathbf{d}_x,\\ \mathrm{M}_{31} &= \mathbf{d}_y, \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} \mathrm{M}_{14} &= -c\mathbf{h}_x,\\ \mathrm{M}_{24} &= -c\mathbf{h}_y,\\ \mathrm{M}_{34} &= -c\mathbf{h}_z. \end{aligned}\right.$$

D'après (11), ceci entraînera

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{M}^*_{12} &= \mathbf{h}_z,\\ \mathrm{M}^*_{23} &= \mathbf{h}_x,\\ \mathrm{M}^*_{31} &= \mathbf{h}_y, \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} \mathrm{M}^*_{14} &= c\mathbf{d}_x,\\ \mathrm{M}^*_{24} &= c\mathbf{d}_y,\\ \mathrm{M}^*_{34} &= c\mathbf{d}_z. \end{aligned}\right.$$

Remarquons qu'on peut partir de ces six relations et retrouver les six précédentes.

au moyen de la formule (12). Ceci dit, les groupes de formules (8) et (10) s'écrivent respectivement

$$(24)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{h}_z}{\partial y} - \dfrac{\partial \mathbf{h}_y}{\partial z} = \dfrac{1}{c}\left(\rho \mathbf{v}_x + \dfrac{\partial \mathbf{d}_x}{\partial t}\right), \\ \dfrac{\partial \mathbf{h}_x}{\partial z} - \dfrac{\partial \mathbf{h}_z}{\partial x} = \dfrac{1}{c}\left(\rho \mathbf{v}_y + \dfrac{\partial \mathbf{d}_y}{\partial t}\right), \\ \dfrac{\partial \mathbf{h}_y}{\partial x} - \dfrac{\partial \mathbf{h}_x}{\partial y} = \dfrac{1}{c}\left(\rho \mathbf{v}_z + \dfrac{\partial \mathbf{d}_z}{\partial t}\right), \\ \dfrac{\partial \mathbf{d}_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \mathbf{d}_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \mathbf{d}_z}{\partial z} = \rho. \end{cases}$$

$$(25)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{d}_z}{\partial y} - \dfrac{\partial \mathbf{d}_y}{\partial z} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \mathbf{h}_x}{\partial t}, \\ \dfrac{\partial \mathbf{d}_x}{\partial z} - \dfrac{\partial \mathbf{d}_z}{\partial x} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \mathbf{h}_y}{\partial t}, \\ \dfrac{\partial \mathbf{d}_y}{\partial x} - \dfrac{\partial \mathbf{d}_x}{\partial y} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \mathbf{h}_z}{\partial t}, \\ \dfrac{\partial \mathbf{h}_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \mathbf{h}_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \mathbf{h}_z}{\partial z} = 0. \end{cases}$$

Ce sont bien, avec des notations qui diffèrent d'un auteur à l'autre, les équations de l'électromagnétisme et de la théorie des ions. On voit que celles du second groupe ne s'établissent pas sans considérations gravifiques; quand on les adoptait sans démonstration, sous réserve de les vérifier après coup dans leurs conséquences comme proposait de le faire Hertz, on faisait inconsciemment le premier pas qui rapprochait l'électromagnétisme et la gravifique.

Rappelons encore qu'en tout ceci nous ne venons que de répéter des résultats de M. Th. De Donder (*Théorie*, p. 16) et de M. H.-A. Lorentz (*The theory of electrons and its applications to the phenomena of light and radiant heat*. Seconde édition, Leipzig, 1916, pp. 12-13).

[**22**] *Emploi d'une identité remarquable.* — Il sera question ici de l'identité du paragraphe 7. Il est bien connu que les équations (24) et (25) admettent d'immédiates combinaisons élémentaires. Ainsi le système (24) donne

$$(26)\qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \mathbf{v}_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \mathbf{v}_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \mathbf{v}_z)}{\partial z} = 0.$$

Cette relation est reproduite par M. Th. De Donder (*Théorie*, p. 29) et par M. H.-A. Lorentz (*Theory of electrons*, p. 232) qui l'obtient directement par des considérations, encore bien connues, relatives à la conservation d'une charge électrique élémentaire dans le mouvement de celle-ci.

Au point de vue analytique où nous nous plaçons dans ce Mémoire, il est intéressant de remarquer que la relation (26) est une propriété du système (22) qui ne suppose aucune particularisation des M_{ij}; son origine exacte est dans la comparaison des équations (22), prises sous la forme (8), et de l'identité (7). C'est d'ailleurs en vue de ce rapprochement que nous avons établi (7) mais cette identité, sous des formes diverses, tient à bien d'autres questions, notamment aux fonctions analytiques de deux variables ainsi que l'ont montré Henri Poincaré (*Sur les résidus des intégrales doubles*, Acta mathematica, t. IX) et M. Émile Picard (*Fonctions algébriques de deux variables*, t. I, chap. 1). On trouvera plus de détail sur ces rapprochements dans les présentes *Annales* (1912, p. 407).

[23] *Potentiels retardés et relation supplémentaire de Maxwell.* — Reprenons l'expression (9) des M^*_{ij} au moyen des potentiels retardés. En portant ces expressions dans la relation (12), on obtient

$$-\Omega M_{ij} = \begin{vmatrix} i1 & i2 & i3 & i4 \\ j1 & j2 & j3 & j4 \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} & \dfrac{\partial}{\partial x_4} \\ \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3 & \Phi_4 \end{vmatrix}.$$

Ceci est la relation (121) de la *Théorie* de M. De Donder.

Il est clair que si l'on porte les M_{ij} ainsi constitués dans les équations (8) on aura pour les Φ des équations aux dérivées partielles du second ordre dont nous nous bornerons ici à signaler l'existence. M. De Donder les a formées dans le cas du champ c (*Théorie*, p. 49); en les comparant alors avec la relation (26) on est amené à introduire *l'équation supplémentaire* de Maxwell. Si l'on tente le même raisonnement en revenant au champ général on s'aperçoit que cette équation supplémentaire existe encore et peut alors prendre la forme remarquablement symétrique

$$\begin{vmatrix} 0 & \dfrac{\Phi_1}{\Omega} & \dfrac{\Phi_2}{\Omega} & \dfrac{\Phi_3}{\Omega} & \dfrac{\Phi_4}{\Omega} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & 11 & 12 & 13 & 14 \\ \dfrac{\partial}{\partial x_2} & 21 & 22 & 23 & 24 \\ \dfrac{\partial}{\partial x_3} & 31 & 32 & 33 & 34 \\ \dfrac{\partial}{\partial x_4} & 41 & 42 & 43 & 44 \end{vmatrix} = 0.$$

Si le déterminant g, qui sert manifestement de noyau, se réduit à la forme (21) on revient au cas du champ c et l'on retrouve l'équation de Maxwell

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \Phi_4}{\partial t} = 0.$$

[**24**] *Travaux à expression symétrique.* — Nous avons montré, au paragraphe 17, qu'un certain travail (18) avait une expression analytique remarquablement symétrique.

Il en est de même pour d'autres sommes analogues à (18). Ainsi

$$\Omega \sum_{1}^{4} (\mathrm{F}_i + \mathrm{G}_i)\, dx_i$$

peut s'écrire

$$\pm_{*} \frac{1}{2} \begin{vmatrix} dx_1 & \mathrm{M}^*_{1\omega} & \frac{\partial}{\partial x_1} & 1 & \mathrm{M}_{1\omega} & 1 \\ dx_2 & \mathrm{M}^*_{2\omega} & \frac{\partial}{\partial x_2} & 2 & \mathrm{M}_{2\omega} & 2 \\ dx_3 & \mathrm{M}^*_{3\omega} & \frac{\partial}{\partial x_3} & 3 & \mathrm{M}_{3\omega} & 3 \\ dx_4 & \mathrm{M}^*_{4\omega} & \frac{\partial}{\partial x_4} & 4 & \mathrm{M}_{4\omega} & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} dx_1 & \frac{\partial}{\partial x_1} & \mathrm{M}^*_{i1} & \mathrm{M}_{i1} \\ dx_2 & \frac{\partial}{\partial x_2} & \mathrm{M}^*_{i2} & \mathrm{M}_{i2} \\ dx_3 & \frac{\partial}{\partial x_3} & \mathrm{M}^*_{i3} & \mathrm{M}_{i3} \\ dx_4 & \frac{\partial}{\partial x_4} & \mathrm{M}^*_{i4} & \mathrm{M}_{i4} \end{vmatrix}.$$

On prendra d'abord le premier déterminant avec le signe + et, considérant les deux premières *colonnes* et les deux dernières, on le développera par la seconde méthode du paragraphe 8; ensuite on lui adjoindra, avec le signe —, un déterminant de constitution identique déduit, de celui déjà formé, en transportant les astérisques des M qui en ont à ceux qui n'en ont pas : c'est là la signification du double signe pourvu d'un astérisque. Quant au *troisième* déterminant de l'expression en litige, on le développera par la première méthode du paragraphe 8 et en partant des éléments de la première *colonne :* chaque dx_i donne son indice au mineur qu'il multiplie.

Il y a encore quelque chose d'analogue pour l'expression

$$\sum_{1}^{4} (\mathrm{F}_i + \mathfrak{F}_i)\, dx_i$$

qui peut s'écrire

$$\pm\frac{1}{4}\begin{vmatrix} dx_1 & \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{M^*_{i1}}{\Omega} & M_{1\omega} & 1 \\ dx_2 & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{M^*_{i2}}{\Omega} & M_{2\omega} & 2 \\ dx_3 & \dfrac{\partial}{\partial x_3} & \dfrac{M^*_{i3}}{\Omega} & M_{3\omega} & 3 \\ dx_4 & \dfrac{\partial}{\partial x_4} & \dfrac{M^*_{i4}}{\Omega} & M_{4\omega} & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} dx_1 & \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{M^*_{i1}}{\Omega} & M_{i1} \\ dx_2 & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{M^*_{i2}}{\Omega} & M_{i2} \\ dx_3 & \dfrac{\partial}{\partial x_3} & \dfrac{M^*_{i3}}{\Omega} & M_{i3} \\ dx_4 & \dfrac{\partial}{\partial x_4} & \dfrac{M^*_{i4}}{\Omega} & M_{i4} \end{vmatrix}.$$

Ici les trois déterminants sont à développer en partant des termes de la première colonne. Chaque terme, pris dans une première colonne, donne son indice aux termes en i du mineur correspondant.

[**25**] *Invariants intégraux.* — Dans le cours du présent Mémoire nous n'avons pas fait explicitement appel à la si importante notion d'invariant intégral, car, sur ce point, nous n'aurions pu que répéter exactement les résultats de M. De Donder.

Bornons-nous à indiquer brièvement comment ces résultats peuvent se retrouver en ce qui précède.

Reprenons la formule fondamentale du paragraphe 3. L'intégrale triple est invariante quand la variété à trois dimensions V se déforme, dans l'espace à quatre, sans cesser d'avoir pour frontière invariable la variété à deux dimensions S. Or, on sait que de telles « intégrales invariantes », quant à des champs d'intégration qui peuvent être déformés d'une infinité de manières, peuvent généralement être considérées comme des invariants intégraux attachés à des systèmes d'équations différentielles. Ici, un tel système est naturellement

$$\frac{dx}{\mathbf{v}_x} = \frac{dy}{\mathbf{v}_y} = \frac{dz}{\mathbf{v}_z} = dt$$

et, en se reportant aux équations (8) du groupe purement électromagnétique, ainsi qu'à l'expression donnée, au paragraphe 4, pour le premier membre de la formule fondamentale, cette dernière peut s'écrire

$$\int\!\!\int_S \sum M_{ij}\,dx_i\,dx_j = \int\!\!\int\!\!\int_V \rho\left(1 - \frac{\partial t}{\partial x}\mathbf{v}_x - \frac{\partial t}{\partial y}\mathbf{v}_y - \frac{\partial t}{\partial z}\mathbf{v}_z\right) dx\,dy\,dz.$$

On a toujours posé indifféremment x_1, x_2, x_3, x_4, ou bien x, y, z, t. On a supposé aussi que la variété V avait pour équation explicite $t = t(x, y, z)$, d'où

$$-\frac{\partial t}{\partial x_i} = \frac{\partial F}{\partial x_i} : \frac{\partial F}{\partial t}.$$

Alors des changements de variables immédiats permettent d'écrire définitivement

$$\int\int_S \sum M_{ij} dx_i dx_j = \int\int\int_V \rho(dx dy dz - \mathbf{v}_x dy dz dt + \mathbf{v}_y dz dt dx - \mathbf{v}_z dt dx dy).$$

Ce sont là les invariants intégraux (73) et (74) de la *Théorie* de M. De Donder.

Au temps $t = \text{const.}$, on a pour un volume V de l'espace ordinaire

$$\int\int_S M_{12} dx dy + M_{23} dy dz + M_{31} dz dx = \int\int\int_V \rho\, dx dy dz.$$

Ce sont là les invariants (57) et (58) de la *Théorie*. Leur égalité équivaut à l'ordinaire formule de Green et nous ramène à ce que nous avons dit au paragraphe 11. Pour une comparaison exacte de nos derniers invariants avec la forme légèrement différente que leur donne M. De Donder, il faut ne pas perdre de vue la question de signe qui intervient dans tout changement de variables concernant une intégrale double (Cf. E. Picard, *Traité d'Analyse*, t. I).

Permuter les éléments différentiels, c'est-à-dire changer $dx_i\, dx_j$ en $dx_j\, dx_i$, change le signe de l'intégrale, ce à quoi, en pratique, on oppose généralement une convention qui revient à ne pas tenir compte de ce changement. Ici cet ordre des variables importe tout autant que dans toutes les autres questions où la symétrie joue un rôle capital. Dans la dernière intégrale double, par exemple, il faut pouvoir lire $M_{13}\, dx\, dz$ au lieu de $M_{31}\, dz\, dx$; cette intégrale est alors une réduction manifeste de celle du paragraphe 4. Il y aurait des remarques analogues à faire pour les intégrales triples. Bien que la difficulté disparaisse dès qu'elle est signalée nettement, M. De Donder semble avoir voulu l'éliminer, de façon plus complète encore, en faisant usage de différentielles δ définies d'une manière telle que le produit $\delta x_i\, \delta x_j$ change manifestement de signe par permutation des indices (*Théorie*, pp. 5-6).

Pour nous, il y aurait encore un moyen bien simple d'éviter ces développements et les choix de signe qu'ils peuvent comporter : ce serait de prendre les invariants intégraux fondamentaux sous la forme constituée par l'un et l'autre membre de la formule stokienne fondamentale du paragraphe 3; ils donnent alors, comme cas particulier, les deux membres de la formule de Green, ainsi que nous l'avons vu au paragraphe 11, et, de ce point de vue, les choses semblent plutôt s'élémentariser que se compliquer.