Annales de la faculté des sciences de Toulouse

A. Buhl

Sur les formules fondamentales de l'électromagnétisme et de la gravifique

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 3e série, tome 13 (1921), p. 93-116
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1921_3_13__93_0>

SUR LES FORMULES FONDAMENTALES

DE L'ÉLECTROMAGNÉTISME ET DE LA GRAVIFIQUE

PAR M. A. BUHL

SECOND MÉMOIRE

Ce second Mémoire est la charpente essentielle d'un cours professé, à la Faculté des Sciences de Toulouse, au printemps de 1922. Il est bien rare qu'un cours de ce genre soit absolument original; aussi le lecteur ne s'étonnera point de trouver ici des emprunts, d'ailleurs soigneusement indiqués, aux ouvrages de L. Bianchi(1), Th. De Donder(2), A.-S. Eddington(3), H.-A. Lorentz(4), H. Weyl(5).

Il reste cependant un point important pour lequel je crois pouvoir réclamer le bénéfice d'une certaine originalité. Il consiste à partir des identités

$$\int_C X\,dY = \int\!\!\int_A dX\,dY, \qquad \int\!\!\int_S X\,dY\,dZ = \int\!\!\int\!\!\int_V dX\,dY\,dZ$$

qui donnent très directement les formules stokiennes de l'espace-temps. Ces formules stokiennes jouent ensuite un rôle constructif fondamental non seulement pour le champ électromagnétique (comme nous l'avons vu dans le Mémoire précédent), mais quant à la genèse des symboles de Christoffel, du tenseur puis de l'invariant de courbure, et enfin de la forme quadratique qui détermine la métrique. Dans les ouvrages les plus modernes, on commence par ce dernier point d'où un ordre que je ne me propose nullement de bouleverser, mais c'est encore augmenter l'harmonie des théories einsteiniennes que de montrer qu'au début, elles peuvent avoir plusieurs points de contact avec les constructions initiales des mathématiques. Si l'on peut

(1) *Lezioni di Geometria differenziale*. Seconde édition, Pise, 1902.
(2) *La Gravifique einsteinienne*. Paris, Bruxelles, 1921.
(3) *Espace, Temps, Gravitation* (Trad. française de J. Rossignol). Paris, 1921.
(4) *The Theory of Electrons and its applications to the Phenomena of Light and radiant Heat*. Leipzig, New-York, 1916.
(5) *Raum, Zeit, Materie*. Vierte Auflage. Zurich, Berlin, 1921.

partir des éléments de la théorie des formes quadratiques, on peut partir aussi des identités fondamentales du Calcul intégral qui viennent d'être rappelées. Ce dernier procédé serait même le premier au point de vue historique et il ne tarde pas à ramener aux considérations métriques nécessaires. Il rappelle les recherches sur les formes intégrales et les invariants intégraux.

J'ai montré, de plus, que si les deux identités précédentes donnent des formules stokiennes à rôle fondamental, il en est de même de l'identité

$$\int\int\int_V X\,dY\,dZ\,dT = \int\int\int\int_W dX\,dY\,dZ\,dT$$

transformable en une formule de Green relative à l'espace-temps, laquelle formule conduit à des théories électromagnétiques et gravifiques, telles celle de Mie, qui ne diffèrent guère des théories einsteiniennes que par la forme.

* * *

Depuis la publication du précédent Mémoire, l'ouvrage de M. H. Weyl a été présenté au public français en une bonne traduction due à MM. G. Juvet et R. Leroy. J'ai constaté avec plaisir que, conformément à ce que j'avais dit, les traducteurs ont vu dans l'œuvre de Pierre Duhem une grandiose ébauche concernant l'interdépendance des explications géométriques, mécaniques et physiques. Une telle œuvre et celle de M. E. Cosserat déjà citée ici devaient fatalement prendre la forme einsteinienne.

Dans ce qui suit, j'ai surtout invoqué la symétrie analytique; c'est notamment cette symétrie qui me fait construire les crochets de Christoffel; le tenseur de Riemann-Christoffel et le tenseur contracté d'Einstein naissent de manière analogue. Plusieurs Notes récentes de M. E. Cartan (*Comptes rendus*, 13 février, 27 février, 13 mars, 27 mars 1922) invoquent une symétrie géométrique et une symétrie statique.

Si les expressions tensorielles des théories d'Einstein semblent avoir parfois un aspect si nouveau, c'est aussi parce que notre espace euclidien a été généralisé de beaucoup en des espaces *courbés*, mais pas encore suffisamment en des espaces *tordus*. Ce sont notamment les recherches à poursuivre de ce côté qui, dit M. Cartan, « s'apparentent aux beaux travaux de MM. E. et F. Cosserat sur l'action euclidienne ainsi qu'à la théorie des espaces généralisés de H. Weyl. »

Différents Mémoires que l'on trouvera, en 1922, dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées* préciseront mieux encore la part de l'Ecole française dans l'élaboration des théories en litige.

Le présent écrit a été brièvement résumé dans une Note des *Comptes rendus* du 7 novembre 1921.

CHAPITRE PREMIER

Les deux formules de Stokes dans l'espace-temps.

[**1**] *La première formule stokienne.* — Dans les Mémoires précédents, nous avons toujours rattaché les formules des types stokiens ou greeniens aux identités fondamentales du Calcul intégral, identités établies entre intégrales dont les ordres de multiplicité diffèrent d'une unité. Dans cet ordre d'idées, il nous faut d'abord revenir sur l'identité

$$\int_C X\,dY = \int\int_A dX\,dY \tag{1}$$

qui exprime de deux manières l'aire A de contour C et de laquelle on peut tirer d'innombrables conséquences analytiques et géométriques comme je l'ai montré dans mon opuscule : *Géométrie et Analyse des Intégrales doubles* (Scientia, Gauthier-Villars et C^ie^, Paris, 1920). Pour l'instant, il s'agit d'en tirer une première formule de Stokes relative à l'espace à quatre dimensions; elle résulte de transformations de (1) et de combinaisons linéaires de ces transformations, méthode qui est tout à fait la même que celle donnant la formule de Stokes dans l'espace ordinaire. On a ainsi

$$\int_C A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + A_3 dx_3 + A_4 dx_4 = \int\int_A \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1} & \frac{\partial F}{\partial x_2} & \frac{\partial F}{\partial x_3} & \frac{\partial F}{\partial x_4} \\ \frac{\partial G}{\partial x_1} & \frac{\partial G}{\partial x_2} & \frac{\partial G}{\partial x_3} & \frac{\partial G}{\partial x_4} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_4} \\ A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \end{vmatrix} \frac{dx_1\,dx_2}{\frac{\partial(F, G)}{\partial(x_3, x_4)}}. \tag{2}$$

Cette fois A est une cloison à deux dimensions déformable dans l'espace quadridimensionnel et représentée par les équations

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0, \qquad G(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0.$$

Le contour C de A est fermé et invariable. On trouvera d'ailleurs une démonstration complète de (2) dans les présentes *Annales* (1911, p. 68). Cette formule peut servir de base à la Théorie des Fonctions de deux variables développée par M. Emile Picard; jusqu'ici nous ne l'avons point utilisée en Physique mathématique, accordant surtout la prédominance à la formule du paragraphe suivant, mais des remarques fondamentales de M. H. Weyl ont montré que (2) ne devait point être omise.

[**2**] *La seconde formule stokienne.* — C'est la formule fondamentale du Mémoire précédent. Elle résulte de combinaisons linéaires de transformations de l'identité

$$\int\int_S X\,dY\,dZ = \int\int\int_V dX\,dY\,dZ \tag{3}$$

et nous la reproduirons sans nouvelles explications, soit

$$\int\int_S \begin{vmatrix} \frac{\partial G}{\partial x_1} & \frac{\partial G}{\partial x_2} & \frac{\partial G}{\partial x_3} & \frac{\partial G}{\partial x_4} \\ \frac{\partial F}{\partial x_1} & \frac{\partial F}{\partial x_2} & \frac{\partial F}{\partial x_3} & \frac{\partial F}{\partial x_4} \\ M_{1\dots} & M_{2\dots} & M_{3\dots} & M_{4\dots} \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \frac{dx_1\,dx_2}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x_3,x_4)}} = \int\int\int_V \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1} & \frac{\partial F}{\partial x_2} & \frac{\partial F}{\partial x_3} & \frac{\partial F}{\partial x_4} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_4} \\ M_{1\dots} & M_{2\dots} & M_{3\dots} & M_{4\dots} \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \frac{dx_1\,dx_2\,dx_3}{\frac{\partial F}{\partial x_4}}. \tag{4}$$

Nous avons vu comment cette formule conduisait aux équations électromagnétiques de Maxwell-Lorentz généralisées par M. De Donder.

[**3**] *Les potentiels gravifiques d'Einstein et les crochets de Christoffel.* — Ces expressions peuvent naître très simplement de la formule (4). Nous avons vu (Mémoire précédent, § 2) comment les mineurs contenus dans les deux dernières lignes des déterminants de (4) donnaient des expressions $2M_{ij}$. Adjoignons à celles-ci un nouvel indice k, toujours le même pour une même formule (4) en laquelle il sera indifférent d'écrire $2M_{ijk}$ ou

$$2M_{ijk} \pm \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j}\right), \tag{5}$$

les g_{ik} étant des fonctions arbitraires. Imposons maintenant à l'expression trinôme (5) d'être symétrique pour les permutations de i, j avec le nouvel indice k. Il faudra évidemment que le premier terme prenne une forme analogue à celle des deux autres et nous aurons ainsi

$$2\begin{bmatrix} i\ k \\ j \end{bmatrix} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j}. \tag{6}$$

La conservation d'une telle expression est évidente si l'on permute i et k; il est entendu que $g_{ik} = g_{ki}$. On a de même, avec le signe moins devant la parenthèse de (5),

$$2\begin{bmatrix} j\ k \\ i \end{bmatrix} = \frac{\partial g_{ji}}{\partial x_k} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i}, \tag{7}$$

ce qui cette fois se conserve en permutant j et k. D'ailleurs, en permutant i et j, la symétrie se complète par l'échange de nos deux dernières formules et l'obtention de la relation

$$\left[\begin{matrix} i\ k \\ j \end{matrix}\right] + \left[\begin{matrix} j\ k \\ i \end{matrix}\right] = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}. \tag{8}$$

Le premier terme de l'expression (5) est nul pour $i = j$, alors qu'il n'en est pas de même pour g_{ij} mais ceci n'empêche nullement de convenir qu'on conservera (6) ou (7), pour $i = j$, en posant

$$2\left[\begin{matrix} i\ k \\ i \end{matrix}\right] = \frac{\partial g_{ii}}{\partial x_k}.$$

Pour une même valeur de k, il y a 6 crochets correspondant à i et j différents plus 4 correspondant à $i = j$. Comme k prend les valeurs 1, 2, 3, 4, on aura en tout 40 crochets, du moins dans l'espace quadridimensionnel, le seul qui nous intéresse. Les g_{ik} introduits comme fonctions arbitraires vont devenir les *potentiels gravifiques* d'Einstein avec lesquels on formera le déterminant

$$g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44} \end{vmatrix} \tag{9}$$

déjà introduit dans le Mémoire précédent. On appellera g^{ik} le mineur algébrique de g_{ik}, mineur divisé en outre par g.

[**4**] *Accolades de Christoffel. Propriétés diverses.* — Adoptons les jeux d'indices du calcul tensoriel, ce qui, dans ce qui suit, n'exige aucune connaissance spéciale.

Les indices de sommation, tels l, donnent par définition,

$$\left\{\begin{matrix} i\ k \\ \nu \end{matrix}\right\} = g^{\nu l}\left[\begin{matrix} i\ k \\ l \end{matrix}\right], \qquad \left[\begin{matrix} i\ k \\ l \end{matrix}\right] = g_{\nu l}\left\{\begin{matrix} i\ k \\ \nu \end{matrix}\right\}. \tag{10}$$

La relation (8) devient

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} = g_{\nu j}\left\{\begin{matrix} i\ k \\ \nu \end{matrix}\right\} + g_{\nu i}\left\{\begin{matrix} j\ k \\ \nu \end{matrix}\right\}. \tag{11}$$

On a aussi

$$\frac{\partial g}{\partial x_k} = \frac{\partial g}{\partial g_{ij}}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} = g g^{ij}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}$$

d'où, toujours d'après (8),

$$\frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial x_k} = g^{ij}\begin{bmatrix} i\ k \\ j \end{bmatrix} + g^{ij}\begin{bmatrix} j\ k \\ i \end{bmatrix} = 2g^{ij}\begin{bmatrix} i\ k \\ j \end{bmatrix} = 2\begin{Bmatrix} i\ k \\ i \end{Bmatrix}$$

et

(12) $$\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x_k} = \begin{Bmatrix} i\ k \\ i \end{Bmatrix}.$$

[5] *La forme quadratique fondamentale.* — Au lieu des crochets et accolades de Christoffel, M. H. Weyl a employé des notations à indices parfois plus commodes. Ainsi

(13) $$\begin{bmatrix} k\ r \\ i \end{bmatrix} = \Gamma_{i,kr} = g_{ij}\Gamma^j{}_{kr}, \qquad \begin{Bmatrix} k\ r \\ i \end{Bmatrix} = \Gamma^i{}_{kr} = g^{ij}\Gamma_{j,kr}.$$

Posons également

(14) $$d\gamma_{ik} = \Gamma_{i,kr}dx_r, \qquad d\gamma^i{}_k = \Gamma^i{}_{kr}dx_r,$$

les premiers membres étant définis par les seconds et n'impliquant nullement l'existence d'expressions γ_{ik} ou $\gamma^i{}_k$.

Soit un vecteur $\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4$. On a

$$\xi^i d\gamma_{ik} = \xi^i g_{ij}\Gamma^j{}_{kr}dx_r = \xi_j\Gamma^j{}_{kr}dx_r = \xi_j d\gamma^j{}_k = \xi_i d\gamma^i{}_k.$$

Ceci posé, (8) donne

$$d\gamma_{ik} + d\gamma_{ki} = dg_{ik},$$

d'où successivement

$$\xi^i\xi^k(d\gamma_{ik} + d\gamma_{ki}) - \xi^i\xi^k dg_{ik} = 0,$$
$$2\xi^i\xi^k d\gamma_{ik} - \xi^i\xi^k dg_{ik} = 0,$$
$$2\xi_i\xi^k d\gamma^i{}_k - \xi^i\xi^k dg_{ik} = 0.$$

Admettons maintenant que la variation infiniment petite du vecteur ξ soit définie par

(15) $$d\xi^i = -d\gamma^i{}_k \cdot \xi^k.$$

Il viendra

$$2\xi_i d\xi^i + \xi^i \xi^k dg_{ik} = 0,$$
$$2g_{ik}\xi^k d\xi^i + \xi^i \xi^k dg_{ik} = 0,$$
$$g_{ik}\xi^k d\xi^i + g_{ik}\xi^i d\xi^k + \xi^i \xi^k dg_{ik} = 0$$

et enfin

(16) $$d(g_{ik}\xi^i\xi^k) = 0.$$

La variation infiniment petite considérée en (15) est, pour le vecteur ξ^i, un *déplacement parallèle généralisé* (Levi-Civita, Weyl). Dans l'espace ordinaire les g_{ik} sont constants d'où des Γ^i_{kr} nuls et des $d\gamma^i_k$ qui le sont aussi. Alors $d\xi^i = 0$ et le vecteur qui varie sans modification intrinsèque de ses composantes subit bien un déplacement parallèle au sens euclidien de l'expression.

D'après (16) le déplacement parallèle généralisé se fait à *longueur généralisée* λ constante si

(17) $$\lambda^2 = g_{ik}\xi^i\xi^k.$$

Ces résultats sont évidemment relatifs à un espace en général non euclidien, espace qui a pour élément linéaire

(18) $$ds^2 = g_{ik}dx_i dx_k.$$

On voit apparaître ainsi, en (16), (17) ou (18), la *forme quadratique fondamentale*.

[**6**] *La géométrie générale.* — Au sujet de la géométrie générale qui correspond à l'étude de la forme (17) nous n'avons rien d'essentiel à noter quant à l'achèvement du présent Mémoire. Faisons simplement quelques remarques qui sont de nature à éclaircir l'emploi des vecteurs à composantes ξ^i introduits au paragraphe précédent.

Soient deux vecteurs $(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4)$ et $(\eta^1, \eta^2, \eta^3, \eta^4)$. Leur angle θ sera défini par

$$\cos\theta = \frac{g_{ik}\xi^i\eta^k}{\sqrt{g_{ik}\xi^i\xi^k}\sqrt{g_{ik}\eta^i\eta^k}}.$$

Les radicaux en dénominateur sont les longueurs généralisées λ et μ des vecteurs en question et l'on peut écrire

(19) $$\lambda\mu\cos\theta = \xi_i\eta^i = \xi^i\eta_i,$$

les deux derniers membres se justifiant immédiatement en remarquant que

$$\xi_i = g_{ik}\xi^k, \qquad \xi^k = g^{ik}\xi_i.$$

Considérons maintenant les quatre angles θ_i de ξ avec quatre vecteurs dont les composantes η^i sont respectivement

$$
\begin{array}{cccc}
(\eta^1, & 0, & 0, & 0), \\
(0, & \eta^2, & 0, & 0), \\
(0, & 0, & \eta^3, & 0), \\
(0, & 0, & 0, & \eta^4).
\end{array}
$$

Alors la première formule (19) donne

$$\sqrt{g_{ii}}\,\lambda \cos\theta_i = \xi_i .$$

C'est là un théorème analogue à celui du vecteur euclidien qui donne ses composantes par projections. Dans le cas général, il fait apparaître les composantes *covariantes* ξ_i du vecteur d'abord défini par des composantes *contrevariantes* ξ^i. Dans l'espace euclidien, les deux espèces de composantes n'en font qu'une.

[7] *Géodésiques.* — Reprenons l'équation (15), en l'écrivant, d'après la seconde équation (14),

$$d\xi^i + \Gamma^i_{kr} dx_r \,.\, \xi^k = 0.$$

Supposons que le vecteur ξ^i soit de la nature d'une vitesse, c'est-à-dire que l'on ait

$$\xi^i = \frac{dx_i}{ds}.$$

Alors l'équation précédente devient

$$\frac{d^2 x_i}{ds^2} + \Gamma^i_{kr} \frac{dx_r}{ds} \frac{dx_k}{ds} = 0, \tag{20}$$

ou

$$\frac{d^2 x_i}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} k\ r \\ i \end{matrix} \right\} \frac{dx_r}{ds} \frac{dx_k}{ds} = 0. \tag{21}$$

Ces équations définissent les *géodésiques* de l'espace-temps, lignes qui se réduisent évidemment à des droites quand l'espace est euclidien, puisque alors les accolades de Christoffel sont identiquement nulles.

Pour faire une application immédiate de (21) vérifions que cette équation donne bien les lignes géodésiques d'une surface ordinaire dans le cas d'une telle surface. On a alors

$$\frac{d^2x_1}{ds^2} + \begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} \left(\frac{dx_1}{ds}\right)^2 + 2\begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{dx_1}{ds}\frac{dx_2}{ds} + \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} \left(\frac{dx_2}{ds}\right)^2 = 0,$$

$$\frac{d^2x_2}{ds^2} + \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} \left(\frac{dx_1}{ds}\right)^2 + 2\begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{dx_1}{ds}\frac{dx_2}{ds} + \begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix} \left(\frac{dx_2}{ds}\right)^2 = 0,$$

Multiplions par dx_2 et dx_1 et retranchons; posons $x_2 = y$ et prenons $x_1 = x$ pour variable indépendante. Il vient

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix}\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + \left(\begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix} - 2\begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(2\begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix}\right)\frac{dy}{dx} + \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} = 0.$$

Or avec

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = (1 + p^2)dx^2 + 2pq\,dx\,dy + (1 + q^2)dy^2$$

on a en évidence g_{11}, g_{12}, g_{22} d'où, par des calculs simples,

$$\begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{pr}{1 + p^2 + q^2}, \qquad \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{ps}{1 + p^2 + q^2}, \qquad \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{pt}{1 + p^2 + q^2},$$

$$\begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} = \frac{qr}{1 + p^2 + q^2}, \qquad \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} = \frac{qs}{1 + p^2 + q^2}, \qquad \begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix} = \frac{qt}{1 + p^2 + q^2}.$$

Portant dans l'équation différentielle précédente, celle-ci peut s'écrire

$$(1 + p^2 + q^2)\frac{d^2y}{dx^2} - \left[r + 2s\frac{dy}{dx} + t\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]\left(p\frac{dy}{dx} - q\right) = 0.$$

C'est bien la forme classique qu'on trouvera, par exemple, dans le *Cours d'Analyse* de G. Humbert (t. II, p. 334). Il serait fort aisé aussi de retrouver la définition habituelle des géodésiques.

[8] *La courbure et les formules stokiennes.* — Nous emprunterons ici à M. Eddington (*loc. cit.*, pp. 43-54) quelques formules établies par l'éminent auteur avec une grande brièveté, mais en les mettant plus particulièrement en relation avec les formules stokiennes (2) et (4).

Soit un vecteur A_μ. On calcule sans peine que

$$\frac{d}{ds}\left(A_\mu \frac{dx_\mu}{ds}\right) = A_{\mu\nu} \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds}$$

si

$$A_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} - \begin{Bmatrix} \mu\ \nu \\ \alpha \end{Bmatrix} A_\alpha. \tag{22}$$

Ceci est la *dérivée covariante* de A_μ. Elle donne immédiatement le *rotationnel*

$$A_{\nu\mu} - A_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}.$$

On voit que, dans la formule (2), les deux dernières lignes du déterminant peuvent être remplacées par

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \end{matrix}.$$

De même

$$\frac{d}{ds}\left(A_{\mu\nu} \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds}\right) = A_{\mu\nu\sigma} \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds} \frac{dx_\sigma}{ds},$$

en posant

$$A_{\mu\nu\sigma} = \frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} - \begin{Bmatrix} \mu\ \sigma \\ \alpha \end{Bmatrix} A_{\alpha\nu} - \begin{Bmatrix} \nu\ \sigma \\ \alpha \end{Bmatrix} A_{\mu\alpha}.$$

Si, dans le second membre de cette dernière relation, on prend, pour les A à deux indices, les dérivées covariantes (22), on a facilement

$$A_{\mu\nu\sigma} - A_{\mu\sigma\nu} = B^\varepsilon_{\mu\nu\sigma} A_\varepsilon$$

avec

$$B^\varepsilon_{\mu\nu\sigma} = \frac{\partial}{\partial x_\nu} \begin{Bmatrix} \mu\ \sigma \\ \varepsilon \end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x_\sigma} \begin{Bmatrix} \mu\ \nu \\ \varepsilon \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mu\ \sigma \\ \alpha \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha\ \nu \\ \varepsilon \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mu\ \nu \\ \alpha \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha\ \sigma \\ \varepsilon \end{Bmatrix}. \tag{23}$$

Ce sont là les composantes du tenseur de courbure, ou tenseur de Riemann-Christoffel. De telles expressions sont en relation avec la formule (4), tout comme les crochets de Christoffel. En effet, dans les deux déterminants de (4), on peut remplacer les deux dernières lignes par

$$\begin{matrix} Y_1 & Y_2 & Y_3 & Y_4 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 & Z_4 \end{matrix}.$$

La formule ainsi constituée précède même (4) dans l'ordre logique; elle est moins générale, mais c'est elle qu'on rencontre d'abord en démontrant (4) comme au paragraphe 2 du Mémoire précédent.

De plus, on ne modifie pas (4) en lui ajoutant une formule analogue où les deux dernières lignes des mêmes déterminants seraient

$$\begin{matrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} & \dfrac{\partial}{\partial x_4} \\ U_1 & U_2 & U_3 & U_4 \end{matrix}.$$

Par addition, on a ainsi des composantes

$$\frac{\partial U_\sigma}{\partial x_\nu} - \frac{\partial U_\nu}{\partial x_\sigma} + Y_\nu Z_\sigma - Y_\sigma Z_\nu$$

qui comprennent (23) comme cas particuliers.

Le grand ouvrage classique étudiant la courbure à composantes (23) bien avant la vogue actuelle des théories einsteiniennes est vraisemblablement constitué par les *Lezioni di geometria differenziale* de L. Bianchi (seconde édition, Pise, 1902).

On y trouve l'expression (23) avec la notation (*loc. cit.*, t. I, p. 72).

$$(24) \qquad \{r\nu, ih\} = \frac{\partial}{\partial x_h}\begin{Bmatrix} r & i \\ \nu \end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x_i}\begin{Bmatrix} r & h \\ \nu \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} l & h \\ \nu \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} r & i \\ l \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} l & i \\ \nu \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} r & h \\ l \end{Bmatrix}.$$

On passe immédiatement de (23) à (24) à l'aide du tableau

$$\begin{matrix} \varepsilon & \mu & \nu & \sigma & \alpha \\ \nu & r & h & i & l \end{matrix}.$$

On a de plus

$$(25) \qquad (rk, ih) = g_{\nu k}\{r\nu, ih\}, \qquad \{r\nu, ih\} = g^{\nu k}(rk, ih).$$

On peut maintenant aborder l'important concept de courbure générale d'un espace quelconque, d'après Riemann. Par un point M_0 dudit espace considérons les deux directions ξ_i et η_i; elles déterminent un faisceau de directions $\alpha\xi_i + \beta\eta_i$ toutes situées dans un S_2 ou, comme on dira, déterminant une orientation dans S_4.

La courbure riemannienne de S_4, dans l'orientation S_2, est

$$(26) \qquad K = \frac{(rk, ih) \begin{vmatrix} \xi_r & \eta_r \\ \xi_k & \eta_k \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi_i & \eta_i \\ \xi_h & \eta_h \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g_{ri} & g_{rh} \\ g_{ki} & g_{kh} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi_r & \eta_r \\ \xi_k & \eta_k \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi_i & \eta_i \\ \xi_h & \eta_h \end{vmatrix}}.$$

Là encore les sommations sont sous-entendues. Dans le numérateur et le dénominateur de K, elles sont quadruples et portent sur r, k, i, h. Ce résultat est emprunté à Bianchi (*loc. cit.*, p. 343). On le trouve, avec d'autres notations, dans Weyl (*loc. cit.*, p. 120).

[9] *Courbure des formes binaires ou courbure des surfaces ordinaires.* — Dans le cas d'une forme à deux variables, nous emploierons aussi les notations habituelles de la théorie des surfaces. Ainsi nous poserons

$$g_{11} dx_1^2 + 2g_{12} dx_1 dx_2 + g_{22} dx_2^2 \equiv E du^2 + 2F du dv + G dv^2.$$

Dans l'expression (26) de la courbure K, l'orientation n'a pas alors à intervenir; on a simplement

$$(27) \qquad K = \frac{(12, 12)}{g} = \frac{\{12, 12\}}{g_{11}}.$$

On vérifie en observant que

$$\{12, 12\} = g^{2k}(1k, 12) = g^{21}(11, 12) + g^{22}(12, 12)$$

et que (11, 12) est nul[1] cependant que $g g^{22} = g_{11}$,

On forme sans peine

$$K g_{11} = \frac{\partial}{\partial x_2} \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x_1} \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}^2.$$

Les quatre derniers termes de cette expression peuvent être remplacés par

$$-\begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} \left[\begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} \right] + \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} \left[\begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} \right] + 2 \left[\begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} \right]$$

ou, d'après (12),

$$-\begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x_1} + \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x_2} + 2 \left[\begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} \right].$$

---

(1) Ceci en vertu de $(kr, ih) = -(rk, ih)$. Voir Bianchi (*loc. cit.*, p. 74) et Eddington (*loc. cit.*, p. 54).

On peut alors écrire

$$K = \frac{1}{\sqrt{g}}\left[\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\sqrt{g}}{g_{11}}\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\right) - \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\sqrt{g}}{g_{11}}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\right)\right]$$
$$+ \frac{1}{g_{11}^2}\left[\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial g_{11}}{\partial x_2} - \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial g_{11}}{\partial x_1} + 2g_{11}\left(\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\right)\right].$$

Cette expression de K se réduit à sa première ligne, le crochet de la seconde étant identiquement nul en vertu de (11). On a maintenant

$$\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix} = g^{21}\begin{bmatrix}11\\1\end{bmatrix} + g^{22}\begin{bmatrix}11\\2\end{bmatrix} = \frac{1}{2(EG - F^2)}\left(-F\frac{\partial E}{\partial u} + 2E\frac{\partial F}{\partial u} - E\frac{\partial E}{\partial v}\right),$$
$$\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} = g^{21}\begin{bmatrix}12\\1\end{bmatrix} + g^{22}\begin{bmatrix}12\\2\end{bmatrix} = \frac{1}{2(EG - F^2)}\left(E\frac{\partial G}{\partial u} - F\frac{\partial E}{\partial v}\right).$$

Transportant ces accolades dans l'expression précédente de K, il vient enfin

$$K = \frac{1}{2\sqrt{EG - F^2}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\,\frac{\frac{F}{E}\frac{\partial E}{\partial v} - \frac{\partial G}{\partial u}}{\sqrt{EG - F^2}} + \frac{\partial}{\partial v}\,\frac{2\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial E}{\partial v} - \frac{F}{E}\frac{\partial E}{\partial u}}{\sqrt{EG - F^2}}\right].$$

Cette formule est donnée dans Bianchi (*loc. cit.*, t. I, p. 93). Elle est reproduite par Eddington (Espace, Temps, Gravitation; trad. française, p. 250, note 4. Edition anglaise, p. 204) qui dit tout au moins que la condition de planéité d'un espace à deux dimensions est $K = 0$.

Voyons maintenant la signification de K lorsque

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = (1 + p^2)dx^2 + 2pq\,dx\,dy + (1 + q^2)dy^2.$$

On a

$$E = 1 + p^2, \quad F = pq, \quad G = 1 + q^2, \quad EG - F^2 = 1 + p^2 + q^2$$

et par des calculs simples,

$$K = \frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2}.$$

C'est la courbure totale. Si l'on revient à la condition de planéité d'Eddington, on voit qu'elle se traduit aussi par $rt - s^2 = 0$, équation aux dérivées partielles des surfaces développables; l'espace applicable sur le plan n'est pas distingué de l'espace plan proprement dit.

Enfin le procédé qui a servi à vérifier (27) permet d'avoir, tout aussi aisément, la suite d'égalités

$$K = \frac{\{12,\ 12\}}{g_{11}} = \frac{\{11,\ 21\}}{g_{12}} = \frac{\{22,\ 12\}}{g_{21}} = \frac{\{21,\ 21\}}{g_{22}}. \tag{28}$$

Ceci est encore un emprunt à Bianchi qui nous sera utile au Chapitre suivant. Le géomètre italien donne d'ailleurs (*loc. cit.*, p. 77) les valeurs développées des quatre accolades valeurs que l'on peut réobtenir immédiatement au moyen de (23).

Les notations reprises ici pourraient être remplacées immédiatement par celles du calcul tensoriel. Ainsi les égalités (25) peuvent s'écrire

$$B_{rhik} = g_{\nu k} B^{\nu}{}_{rhi}, \qquad B^{\nu}{}_{rhi} = g^{\nu k} B_{rhik}.$$

Le tenseur B_{rhik} s'écrit $B_{\mu\nu\sigma\rho}$ avec les notations d'Eddington qui remarque d'ailleurs que ledit tenseur est symétrique gauche en μ et ρ ainsi qu'en ν et σ. Cela revient à la symétrie indiquée en note de bas de page dans le présent paragraphe.

[10] *Le champ électromagnétique de Maxwell-Lorentz et l'étalonnement.* — Nous avons vu, dans le Mémoire précédent, comment la formule (4) conduisait à la généralisation donnée, par M. Th. De Donder, des équations de Maxwell-Lorentz. Quant à ces dernières équations proprement dites, soient (24) et (25) du Mémoire en question, elles correspondent au cas du champ c; si l'on prend c, vitesse de la lumière, pour unité et si l'on pose

$$\mathbf{d}_x = X, \quad \mathbf{d}_y = Y, \quad \mathbf{d}_z = Z; \qquad \mathbf{h}_x = \alpha, \quad \mathbf{h}_y = \beta, \quad \mathbf{h}_z = \gamma,$$

elles deviennent

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial\gamma}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial z} = u + \frac{\partial X}{\partial t}, \\ &\frac{\partial\alpha}{\partial z} - \frac{\partial\gamma}{\partial x} = v + \frac{\partial Y}{\partial t}, \\ &\frac{\partial\beta}{\partial x} - \frac{\partial\alpha}{\partial y} = w + \frac{\partial Z}{\partial t}, \\ &\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = \rho, \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} = -\frac{\partial\alpha}{\partial t}, \\ &\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} = -\frac{\partial\beta}{\partial t}, \\ &\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = -\frac{\partial\gamma}{\partial t}, \\ &\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial y} + \frac{\partial\gamma}{\partial z} = 0. \end{aligned}\right. \tag{29}$$

Nous avons ainsi les notations adoptées par Eddington (*loc. cit.*, p. *117*).

On a aussi

$$(30)\quad \begin{cases} X = -\dfrac{\partial \Phi}{\partial x} - \dfrac{\partial F}{\partial t}, & Y = -\dfrac{\partial \Phi}{\partial y} - \dfrac{\partial G}{\partial t}, & Z = -\dfrac{\partial \Phi}{\partial z} - \dfrac{\partial H}{\partial t}, \\ \alpha = \dfrac{\partial H}{\partial y} - \dfrac{\partial G}{\partial z}, & \beta = \dfrac{\partial F}{\partial z} - \dfrac{\partial H}{\partial x}, & \gamma = \dfrac{\partial G}{\partial x} - \dfrac{\partial F}{\partial y}, \end{cases}$$

avec Φ comme potentiel scalaire et (F, G, H) comme potentiel vecteur.

Posons

$$(-F,\ -G,\ -H,\ \Phi) = (k_1,\ k_2,\ k_3,\ k_4) = k_\mu$$

et considérons la formule stokienne fondamentale (2) avec les A_μ remplacés par k_μ. Les rotationnels qui figurent dans le déterminant du second membre de la formule, sont alors les expressions (30). Dans un champ électromagnétique proprement dit, la formule (2) a une existence indéniable et même aussi générale que possible. Au contraire, dans le même champ traduit par les équations (29), la formule stokienne (4) a ses deux membres identiquement nuls.

Les phénomènes électromagnétiques correspondent à l'identique nullité des deux membres de (4) *et à la non nullité des deux membres de* (2).

Il y a là deux concepts indissolublement associés. D'ailleurs, au simple point de vue analytique, il y a deux formules stokiennes dans l'espace-temps; il serait invraisemblable que l'une puisse jouer un rôle fondamental en électromagnétisme sans que l'autre ait un rôle analogue. Au point de vue historique, il semble que ce soit d'abord le premier membre de (4) qui ait été étudié, Bateman le prenant sous la forme

$$2\int\!\!\int_S M_{12}\,dx_1\,dx_2 + M_{13}\,dx_1\,dx_3 + \ldots + M_{34}\,dx_3\,dx_4.$$

Plus récemment, c'est le premier membre de (2) qui prend de l'importance (et une très grande) avec l'*étalonnement* de Weyl. Nous avons vu comment on pouvait rattacher à (4) les dix potentiels gravifiques g_{ik}; la formule (2) introduit d'autre part un nouveau vecteur universel k_μ d'où, au total, quatorze fonctions universelles dominant les phénomènes gravifiques et électromagnétiques.

Dans un champ électromagnétique général, on ne modifiera évidemment pas (2) en lui ajoutant l'égalité

$$(31)\qquad \int_C \frac{dl}{l} = 0$$

où l est une fonction de x_1, x_2, x_3, x_4. C'est ajouter au second membre un rotationnel dont les composantes sont

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial(\log l)}{\partial x_j}-\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial(\log l)}{\partial x_i}=0$$

et ceci est, pour (2), une opération d'adjonction absolument analogue à celle qui a été faite, au paragraphe 3, sur l'autre formule stokienne (4), pour en tirer les potentiels gravifiques et les crochets de Christoffel.

Reprenons maintenant (31), mais pour le cas d'un chemin d'intégration à extrémités L_0 et L distinctes l'une de l'autre. On aura

$$\int\frac{dl}{l}=\log\frac{l}{l_0}.$$

Si l'on interprète le quotient de dl par l comme le taux de variation d'un étalon (taux qui d'ailleurs dépend des dx_i) on voit qu'il y a là une intégrale de ligne pour laquelle $l \neq l_0$ indique une modification finie d'étalonnement *indépendante ou dépendante des variations du chemin* L_0L *suivant que l'intégrale porte ou non sur une différentielle exacte.* Car il faut bien observer que le fait d'écrire

$$d(\log l)=k_1dx_1+k_2dx_2+k_3dx_3+k_4dx_4$$

n'implique nullement, en général, que le second membre de cette égalité soit une différentielle exacte. Elle donne une intégrale qui, le long d'un contour fermé C, à une dimension, ne dépend évidemment que d'une variable; il y a donc une variation de log l, exprimable par l'intégrale double de (2), quand on parcourt C.

Le cas où les formules stokiennes fondamentales (2) et (4) sont identiquement nulles toutes deux à la fois correspond à l'inexistence de tout phénomène électromagnétique.

On comparera tout ceci avec le texte d'Eddington (*loc. cit.*, p. 212 et *129*) auquel nous n'ajoutons quelque chose que sur un point : le rôle toujours étroitement associé des formules (2) et (4).

Si, au lieu de raisonner sur les équations de Maxwell-Lorentz, on prend la généralisation de M. De Donder redéveloppée dans le premier Mémoire, les conclusions précédentes ne peuvent que gagner en symétrie. Ainsi les équations (10) (premier Mémoire) sont satisfaites par (9) (idem) et les k_μ ci-dessus sont simplement à remplacer par les potentiels retardés Φ_i.

On pourrait encore faire de longues réflexions sur les équations électromagnétiques dans leurs rapports avec les identités (1) ou (3).

M. H. Weyl écrit que « la structure des équations de Maxwell et les théorèmes de conservation sont *nécessaires* et qu'on ne doit pas chercher leur origine dans les phénomènes. » Cette phrase est, du moins, celle de l'édition française (Temps, Espace, Matière; pp. 258-259); elle est assez loin d'une traduction littérale du texte allemand, mais paraît néanmoins en reproduire le sens avec fidélité. En fait, on a cherché dans les phénomènes non la *structure*, mais la *vérification* des équations en litige; leur structure est de même nature que celle de l'identité (3) et chercher cette dernière dans les phénomènes reviendrait à vouloir en définir l'intégrale triple par des expériences physiques volumétriques.

A propos des mêmes équations dans l'éther libre, M. H.-A. Lorentz écrit : Though perhaps the way in which they are deduced will be changed in future years, it is hardly conceivable that the equations themselves will have to be altered (*Theory of electrons*, pp. 6-7).

Il semble donc bien que l'illustre physicien de Leyde ne considère pas non plus que de nouvelles expériences puissent modifier, dans leur structure analytique essentielle, les équations qui portent généralement le nom de Maxwell et le sien. Pas plus, du moins, ajouterons-nous, que des expériences nouvelles ne pourraient modifier l'identité (3). Bien entendu, il faut cependant savoir abandonner l'éther libre et passer aux champs électromagnétiques plongés dans les champs gravifiques les plus quelconques; on arrive alors à la généralisation de M. De Donder, mais celle-ci est toujours conditionnée par l'identité (3) et la structure analytique des équations généralisées n'est pas essentiellement modifiée.

Terminons ce chapitre par une réflexion suggérée par une très rapide lecture du tout récent livre de M. Emile Borel, *L'Espace et le Temps* (F. Alcan, 1922), livre qui, au moment où nous ajoutons ces lignes sur des épreuves, ne nous est connu que depuis deux jours à peine et ce, précisément, grâce à l'obligeance de l'éminent géomètre.

M. Borel (*loc. cit.*, p. 203) voit certains points discutables dans l'adjonction, due à M. H. Weyl et dont il était question tout à l'heure, de la forme linéaire $d(\log l)$ à la forme quadratique ds^2. Ceci n'est certainement pas dit sans quelque raison sérieuse, mais nous invoquerions volontiers la symétrie des choses pour demander le maintien des deux formes; elles peuvent correspondre respectivement aux deux formules stokiennes de l'espace-temps et, comme nous le disions plus haut, dans ce présent paragraphe, il semble plus logique de voir ces formules se compléter que de les voir s'exclure.

CHAPITRE II

La formule de Green dans l'espace-temps.

[**11**] *L'identité greenienne.* — Soit, dans l'espace quadridimensionnel, une étendue W limitée par une variété tridimensionnelle fermée V. On a l'identité

$$\iiint_V X_1 dX_2 dX_3 dX_4 = \iiiint_W dX_1 dX_2 dX_3 dX_4. \tag{32}$$

Imaginons un changement de variables substituant aux X_i quatre variables nouvelles x_i. L'identité (32) prendra aisément la forme

$$\iiint_V X_1 \frac{\partial(F, X_2, X_3, X_4)}{\partial(x_1, x_2, x_3, x_4)} \frac{dx_2 dx_3 dx_4}{\dfrac{\partial F}{\partial x_1}} = \iiiint_W \frac{\partial(X_1, X_2, X_3, X_4)}{\partial(x_1, x_2, x_3, x_4)} dx_1 dx_2 dx_3 dx_4,$$

les dénominations V et W pouvant être conservées bien que ces variétés ne soient évidemment pas les mêmes que dans (32). Maintenant V a une équation

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0.$$

Soit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ des cosinus directeurs pour la normale à V, c'est-à-dire des expressions proportionnelles à $\dfrac{\partial F}{\partial x_i}$ et dont la somme des carrés soit l'unité. Dans

$$X_1 \frac{\partial(F, X_2, X_3, X_4)}{\partial(x_1, x_2, x_3, x_4)}$$

soit Φ_i le coefficient de $\dfrac{\partial F}{\partial x_i}$. L'égalité précédemment obtenue peut alors s'écrire

$$\iiint_V (\alpha_1 \Phi_1 + \alpha_2 \Phi_2 + \alpha_3 \Phi_3 + \alpha_4 \Phi_4) d\sigma = \iiiint_W \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_3} + \frac{\partial \Phi_4}{\partial x_4}\right) d\tau, \tag{33}$$

ce qui est la formule de Green dans l'espace à quatre dimensions.

D'après la définition des Φ_i, on a

$$\Phi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \Phi_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \Phi_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} + \Phi_4 \frac{\partial f}{\partial x_4} = 0 \tag{34}$$

pour $f = X_2, X_3, X_4$ et de même

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\Phi_1}{X_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\Phi_2}{X_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\Phi_3}{X_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_4}\left(\frac{\Phi_4}{X_1}\right) = 0. \tag{35}$$

La formule de Green (33) *se change en l'identité* (32) *par la transformation*

$$X_i = X_i(x_1, x_2, x_3, x_4), \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

si X_2, X_3, X_4 *sont des intégrales distinctes de* (34) *et si* X_1 *satisfait à* (35), *c'est-à-dire si* X_1 *est l'inverse d'un multiplicateur jacobien pour* (34).

Ceci est l'application, à l'espace quadridimensionnel, de considérations plus générales déjà développées dans les présentes *Annales* (1914, p. 126).

On voit que la formule de Green (33) se construit avec l'identité (32) tout comme les formules stokiennes du Chapitre précédent avec les identités (1) et (3). Mais il y a cependant quelques dissemblances sur lesquelles il convient d'insister.

Après avoir transformé les identités (1) ou (3) il a fallu faire des combinaisons linéaires des transformées pour parvenir à (2) et (4), combinaisons qui n'ont pas leur raison d'être quand il s'agit de passer de (32) à (33). Les formules stokiennes peuvent être considérées comme des sommes d'égalités entre intégrales portant sur des déterminants fonctionnels; la formule de Green n'a qu'un seul tel déterminant dans chaque membre.

[**12**] *Les généralités électromagnétiques et gravifiques déduites de la formule de Green.* — Ces généralités peuvent se déduire de la formule de Green, c'est-à-dire de l'identité (32), de même qu'au Chapitre précédent nous les avons déduites, ou plutôt mises en relation avec les formules stokiennes et les identités (1) et (3). On pourrait faire abstraction de la formule (4) du Chapitre précédent et tout reprendre ici à partir de (33). Nous avons établi les équations du champ électromagnétique en étudiant les moyens de rendre nuls les deux membres de (4). Cherchons de même à rendre nuls les deux membres de (33) en posant

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_3} + \frac{\partial \Phi_4}{\partial x_4} = 0.$$

On satisfera à cette équation au moyen de Φ_i tirés de l'identité

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_4} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_4} \\ M_{1\omega} & M_{2\omega} & M_{3\omega} & M_{4\omega} \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0. \tag{36}$$

Si maintenant on reprend la formule (2) on peut revenir ainsi aux potentiels de la théorie électromagnétique et l'on a tout ce qu'il faut pour refaire une théorie générale qui n'est autre que celle de Mie (H. Weyl. *Raum, Zeit, Materie*; S. 186).

L'usage de l'identité (36) revient à celui du tenseur symétrique gauche que Weyl appelle H^{ik}. On remarquera ensuite que cette identité (36) n'est pas modifiée si l'on y introduit des $2M_{ijk}$ prenant la forme (5), d'où les potentiels gravifiques g_{ik}, la métrique correspondant à (16), etc.

[13] *Contraction.* — La divergence qui figure dans le second membre de la formule de Green est la somme des termes de la diagonale principale du déterminant

$$\frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4)}{\partial(x_1, x_2, x_3, x_4)}.$$

C'est une *contraction* du tenseur formé par les termes de ce déterminant. D'une manière précise l'opération consiste à sommer $\dfrac{\partial \Phi_i}{\partial x_k}$ après avoir fait $k = i$. Sur un tel exemple il est facile de voir que le caractère tensoriel est conservé; la divergence extraite d'un déterminant fonctionnel est elle-même un déterminant fonctionnel. Cela est même en évidence dans notre démonstration de la formule de Green puisque la divergence en litige est l'expression

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} & \dfrac{\partial}{\partial x_4} \\ X_1 \dfrac{\partial X_2}{\partial x_1} & X_1 \dfrac{\partial X_2}{\partial x_2} & X_1 \dfrac{\partial X_2}{\partial x_3} & X_1 \dfrac{\partial X_2}{\partial x_4} \\ \dfrac{\partial X_3}{\partial x_1} & \dfrac{\partial X_3}{\partial x_2} & \dfrac{\partial X_3}{\partial x_3} & \dfrac{\partial X_3}{\partial x_4} \\ \dfrac{\partial X_4}{\partial x_1} & \dfrac{\partial X_4}{\partial x_2} & \dfrac{\partial X_4}{\partial x_3} & \dfrac{\partial X_4}{\partial x_4} \end{vmatrix}$$

qui peut aussi bien s'écrire

$$\frac{\partial(X_1, X_2, X_3, X_4)}{\partial(x_1, x_2, x_3, x_4)}.$$

Une nouvelle contraction donnerait une nouvelle divergence qui pourrait être considérée comme un nouveau déterminant fonctionnel et ainsi de suite.

[14] *Courbure scalaire.* — Reprenons, en (23), les composantes $B^{\varepsilon}{}_{\mu\nu\sigma}$ du tenseur de courbure. De telles composantes sont, par leur génération, intimement liées aux déterminants et elles en conservent d'ailleurs la symétrie. Essayons sur elles la contraction $\varepsilon = \sigma$; il viendra

$$B^{\sigma}_{\mu\nu\sigma} = G_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x_\nu}\begin{Bmatrix}\mu\ \sigma\\ \sigma\end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x_\sigma}\begin{Bmatrix}\mu\ \nu\\ \sigma\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}\mu\ \sigma\\ \alpha\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\alpha\ \nu\\ \sigma\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}\mu\ \nu\\ \alpha\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\alpha\ \sigma\\ \sigma\end{Bmatrix}.$$

Reprenons les notations de Weyl au moyen du tableau

$$\begin{matrix}\sigma & \nu & \mu & \alpha\\ r & k & i & s\end{matrix}$$

et changeons tous les signes; on a alors

$$R_{ik} = \frac{\partial}{\partial x_r}\begin{Bmatrix}i\ k\\ r\end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x_k}\begin{Bmatrix}i\ r\\ r\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}i\ k\\ s\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}s\ r\\ r\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}i\ r\\ s\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}s\ k\\ r\end{Bmatrix}.$$

On peut d'ailleurs écrire cette expression de diverses manières, par exemple en intervertissant, dans le troisième terme, les indices de sommation r et s; la forme définitivement adoptée par Weyl (*loc. cit.*, S. 121) est

$$R_{ik} = \frac{\partial}{\partial x_r}\begin{Bmatrix}i\ k\\ r\end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x_k}\begin{Bmatrix}i\ r\\ r\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}i\ k\\ r\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}r\ s\\ s\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}i\ r\\ s\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}k\ s\\ r\end{Bmatrix}. \tag{37}$$

Le second terme, d'après (12), est égal à

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \log g}{\partial x_i \partial x_k}$$

et, par suite, R_{ik} est symétrique en i et k.

Rendons-nous compte de la signification de l'expression (37) de R_{ik} dans le cas d'une surface ordinaire. On trouve immédiatement

$$R_{11} = Kg_{11}, \qquad R_{12} = Kg_{12}, \qquad R_{21} = Kg_{21}, \qquad R_{22} = Kg_{22},$$

les notations étant celles indiquées en (28). Il suit de là que

$$R = g^{ik}R_{ik} = Kg^{ik}g_{ik} = 2K \tag{38}$$

nous ramène à la courbure totale. D'où l'idée, pour une variété quelconque, de considérer

$$R = g^{ik}R_{ik} \tag{39}$$

comme une courbure scalaire. On trouvera une autre vérification partielle, analogue à (38), dans Eddington (*loc. cit.*, p. 97).

On sait que la forme la plus élémentaire de la loi d'Einstein remplaçant la loi de Newton peut être traduite par les dix équations $R_{ik} = 0$. Ceci est suffisant pour aborder les deux phénomènes primordiaux constitués par le mouvement planétaire à déplacement périhélique et par la déviation d'un rayon stellaire dans le voisinage du Soleil. Pour être complet, nous allons néanmoins poursuivre jusqu'aux équations générales d'Einstein mais nous serons brefs sur ce point qui paraît bien fixé pour le moment et auquel, par suite, nous n'avons rien d'essentiel à ajouter.

[**15**] *Divergence généralisée.* — La dérivation covariante (§ 8) de $A_\sigma = g_{\sigma\varepsilon} A^\varepsilon$ donne

$$\begin{aligned} A_{\sigma\nu} &= \frac{\partial}{\partial x_\nu}(g_{\sigma\varepsilon} A^\varepsilon) - \begin{Bmatrix} \sigma & \nu \\ & \alpha \end{Bmatrix} g_{\alpha\varepsilon} A^\varepsilon \\ &= g_{\sigma\varepsilon}\frac{\partial A^\varepsilon}{\partial x_\nu} + A^\varepsilon\left(\frac{\partial g_{\sigma\varepsilon}}{\partial x_\nu} - \begin{bmatrix} \sigma & \nu \\ & \varepsilon \end{bmatrix}\right) \\ &= g_{\sigma\varepsilon}\frac{\partial A^\varepsilon}{\partial x_\nu} + A^\varepsilon \begin{bmatrix} \varepsilon & \nu \\ & \sigma \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

les coefficients de A^ε, dans nos deux derniers membres, étant égaux d'après (8). Multipliant par $g^{\sigma\mu}$ et sommant, il vient

$$A^\mu{}_\nu = \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu} + A^\varepsilon \begin{Bmatrix} \varepsilon & \nu \\ & \mu \end{Bmatrix}.$$

Telle est la dérivée covariante de A^μ; c'est elle qui permet de généraliser la divergence en coordonnées quelconques. Pour $\mu = \nu$, on a (Eddington, p. *88*).

$$A^\mu{}_\mu = \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\mu} + A^\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu}\log\sqrt{g} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x_\mu}(A^\mu\sqrt{g}).$$

Dans l'espace euclidien ou, pour mieux dire, en coordonnées géodésiques, on retrouve la divergence ordinaire. Notons aussi avec Weyl (*loc cit.*, S. 216) que pour une variation δ de telles coordonnées, on a

$$\delta R_{ik} = \frac{\partial \gamma^r{}_{ik}}{\partial x_r} - \frac{\partial \gamma^r{}_{ir}}{\partial x_k} \qquad \text{si} \qquad \gamma^r{}_{ik} = \delta \begin{Bmatrix} i & k \\ & r \end{Bmatrix},$$

puis

$$g^{ik}\delta R_{ik} = g^{ik}\frac{\partial \gamma^r{}_{ik}}{\partial x_r} - g^{ir}\frac{\partial \gamma^k{}_{ik}}{\partial x_r} = \frac{\partial w^r}{\partial x_r}$$

si

$$w^r = g^{ik}\gamma^r{}_{ik} - g^{ir}\gamma^k{}_{ik}.$$

On a, par suite, en revenant aux coordonnées quelconques et d'après (39),

$$\delta R = R_{ik}\delta g^{ik} + \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial(\sqrt{g}w^r)}{\partial x_r}. \tag{40}$$

]**16**] *Les équations d'Einstein.* — Toujours avec les notations de Weyl (Kap. IV, § 28) nous avons à considérer l'équation hamiltonienne

$$\delta \int (\mathfrak{G} + \mathfrak{L})dx = 0. \tag{41}$$

L'intégrale est quadruple et se rapporte à l'espace-temps. $\mathfrak{G}$ dépend de la courbure et sera pris égal à $R\sqrt{g} \equiv \mathfrak{R}$. Quant à $\mathfrak{L}$, c'est une fonction qui caractérise le champ et dont la variation n'entre ici en ligne de compte qu'autant qu'elle dépend de la variation des g_{ik}. L'équation hamiltonienne va donc devenir

$$\delta \int R\sqrt{g}\,dx + \int \mathfrak{T}^{ik}\delta g_{ik}dx = 0$$

ou bien(¹)

$$\delta \int R\sqrt{g}\,dx - \int \mathfrak{T}_{ik}\delta g^{ik}dx = 0. \tag{42}$$

On a

$$\delta \int R\sqrt{g}\,dx = \int \delta R.\sqrt{g}\,dx + \int R\,\delta\sqrt{g}\,.\,dx.$$

Or δR est donné par (40) et

$$\delta\sqrt{g} = \frac{\delta g}{2\sqrt{g}} = -\frac{1}{2\sqrt{g}}g g_{ik}\delta g^{ik}.$$

Portant dans (42), on a

$$\int \left(\sqrt{g}\,R_{ik} - \frac{1}{2}\sqrt{g}\,g_{ik}R - \mathfrak{T}_{ik}\right)\delta g^{ik}.dx = 0.$$

La divergence provenant du dernier terme de (40) disparaît de cette intégrale, justement en vertu de la formule de Green qui donne alors une intégrale triple nulle aux limites du champ d'intégration. On voit qu'enfin les équations d'Einstein peuvent s'écrire

$$\mathfrak{R}_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}\mathfrak{R} = \mathfrak{T}_{ik} \tag{43}$$

(¹) Cf. H. Weyl (*loc. cit.*, S. 120).

ou encore

$$\mathfrak{R}_i^{\ k} - \frac{1}{2}\delta_i^{\ k}\mathfrak{R} = \mathfrak{T}_i^{\ k}.$$

C'est la forme qu'on trouve dans Weyl; elle a été plus particulièrement formée en vue du champ massique.

Plus généralement, M. Th. De Donder, dans sa *Gravifique einsteinienne*, remplace (41) par

$$\delta \int (a + b\mathrm{C} + \Lambda)\sqrt{-g}\,.\,dx = 0\,.$$

Ici a et b sont des constantes, C est l'invariant de courbure R cependant que Λ est la fonction caractéristique de l'espace-temps qui peut dépendre des g_{ik} *et de leurs dérivées*, ce qui entraîne des équations d'Einstein dont le second membre prend la forme lagrangienne. Ces équations peuvent néanmoins s'écrire

$$\sqrt{-g}\,[2b\mathrm{G}_{\alpha\beta} - (a + b\mathrm{C})g_{\alpha\beta}] = \mathfrak{T}_{\alpha\beta}$$

avec $\mathrm{G}_{\alpha\beta}$ analogue à R_{ik}. Cette forme, plus générale que (43), n'est pas sensiblement plus encombrante.

Cette substitution de $a + b\mathrm{C}$ à R n'est pas une généralisation fantaisiste. M. H. Weyl, qui ne l'emploie pas d'abord, y vient finalement (*loc. cit.*, p. 253 et p. 244 de la traduction française), L'introduction de ces nouvelles constantes permet de définir un étalon absolu pour les longueurs.

* * *

Rappelons que les pages précédentes ont été surtout écrites dans un but pédagogique. Soit avec les équations $\mathrm{R}_{ik} = 0$ déjà invoquées à la fin du paragraphe 14, soit avec ces mêmes équations tirées du type général dont part M. De Donder, on peut aisément traiter les deux questions fondamentales dont l'analyse complète consacra d'abord la renommée d'Einstein (mouvement planétaire, déviation lumineuse dans le champ solaire). Elles ont été traitées dans le Cours dont tout ce qui précède est la trame abstraite, mais la reproduction de telles choses serait ici bien superflue.