

J. SUDRIA

Contribution à la théorie de l'action euclidienne

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 3^e série, tome 17 (1925), p. 63-152

http://www.numdam.org/item?id=AFST_1925_3_17__63_0

© Université Paul Sabatier, 1925, tous droits réservés.

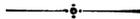
L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CONTRIBUTION A LA THÉORIE DE L'ACTION EUCLIDIENNE

PAR M. J. SUDRIA



AVANT-PROPOS

Les recherches exposées ci-après ont eu pour origine ce problème :

« Caractériser par une propriété d'extremum la déformation des corps sous l'action de forces données. »

Cette question, elle-même, nous a été suggérée par l'étude du principe de Ménabréa ; après avoir donné une démonstration simple de ce théorème, nous en généralisons la portée et cela nous conduit à la propriété d'extremum cherchée, dans le cas où les forces agissant sur le corps forment un ensemble discret.

Nous étendons ensuite la propriété au cas d'une distribution continue de forces, aussi bien dans la théorie de l'Élasticité que dans celle de la Résistance des matériaux.

En cherchant une extension analogue dans la Théorie de l'Action euclidienne, nous avons été conduit à revoir, pour les rendre rigoureux, les raisonnements qui sont à la base de cette théorie. Notamment, celui par lequel on arrive à l'expression de l'Action euclidienne à distance, a donné lieu à l'étude d'une catégorie particulière d'équations aux dérivées partielles qui nous a permis la rectification de cette expression.

Quelques notes réunissent, dans un chapitre particulier, les solutions par les méthodes de la Théorie de l'Action euclidienne de quelques questions qui se sont présentées à nous en cours de notre étude ; notamment la généralisation d'un Théorème

énoncé par Poisson et surtout l'établissement de formules donnant, pour des déformations élastiques, le déplacement d'un point quelconque d'un corps à fibre moyenne.

Ces formules se trouvent être la généralisation de celles de Bresse, lesquelles n'avaient été démontrées que pour la flexion simple.

Nous en avons déduit une méthode générale pour trouver les déplacements, en débarrassant les formules précédentes, une fois pour toutes, des inconnues auxiliaires.

Cette dernière méthode pourrait, sans doute, être exposée sans l'intervention de la Théorie de l'Action euclidienne; encore faudrait-il s'inspirer des procédés employés par les Auteurs de cette Théorie; nous croyons devoir déclarer que c'est la Théorie de l'Action qui nous a conduit à ce résultat et nous tenons à le présenter comme une conséquence des travaux de MM. E. et F. Cosserat et à faire à ceux-ci l'hommage qui leur est dû.

J. S.

CHAPITRE PREMIER

Etude des déformations sous l'action des forces formant un système discret.

1.

LE PRINCIPE DE MÉNABRÉA.

Dans un opuscule intitulé « Les méthodes modernes en Résistance des Matériaux »⁽¹⁾, M. Bertrand de Fontviolant rappelait, en 1918, un théorème du Général Ménabréa, que le célèbre ingénieur militaire italien avait énoncé et incomplètement démontré⁽²⁾.

Dans un autre livre paru récemment⁽³⁾, M. de Fontviolant signale que L. Donati avait donné une démonstration de ce principe, comportant des calculs laborieux. D'autres démonstrations ont été données ces dernières années par M. Liénard (*Bulletin des Sciences Mathématiques*, 1921), par L. Tournayre, Sonier et M. de Fontviolant, lui-même, dans le *Génie Civil* (1921).

Avant d'examiner le théorème de Ménabréa, rappelons quelques résultats classiques :

Soit un système isostatique, soumis à des forces F_1, F_2, \dots, F_n dont les points d'application sont A_1, A_2, \dots, A_n ; désignons par $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ les projections respectives des déplacements de ces points sur les forces qu'ils supportent. Le potentiel interne du système (ou potentiel des forces moléculaires) pour une telle déformation est :

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum F_i \lambda_i$$

et comme les déplacements projetés sont des fonctions linéaires et homogènes des forces⁽⁴⁾ (aussi bien dans la Théorie de l'Élasticité que dans celle de la Résistance des Matériaux), l'on a :

$$(1) \quad \Pi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=n} (a_{ii} F_i^2 + 2a_{ij} F_i F_j).$$

⁽¹⁾ Librairie Gauthier-Villars.

⁽²⁾ V. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 1858, et « Principe général pour déterminer les pressions et les tensions dans un système élastique » (Turin, 1868).

⁽³⁾ *Résistance des matériaux* (Libr. J.-B. Baillière, 1923).

⁽⁴⁾ V. Appell, *Traité de Mécanique rationnelle*, t. III, 1^{re} édition, p. 516.

Si l'on considère maintenant un système hyperstatique, on pourra le rendre isostatique par la suppression des liaisons surabondantes et le remettre dans l'état de déformation qu'il avait avant cette suppression, en appliquant des forces convenables, aux points en lesquels s'exerçaient les liaisons détruites.

Le nouveau système aura ainsi un potentiel interne évidemment égal à celui du système hyperstatique, et ce potentiel pourra se calculer par l'expression (1), la somme étant étendue aux anciennes forces directement appliquées (F) et aux forces remplaçant les actions de liaisons supprimées (R).

On pourra écrire :

$$\Pi = \varphi(F_1, F_2, \dots, F_n, R_1, R_2, \dots, R_p)$$

φ étant une fonction quadratique des F et R, fonction qui peut se mettre sous la forme :

$$\Pi = \varphi_2(R_1, R_2, \dots, R_p) + \varphi_1(R_1, R_2, \dots, R_p)$$

φ_2 étant une fonction quadratique des R et φ_1 une fonction du premier degré de ces variables. On sait enfin que Π est une fonction essentiellement positive.

2. Le théorème du Général Ménabréa s'énonce ainsi :

« Les valeurs que prennent en fait les réactions R rendent minimum le potentiel Π considéré comme fonction de ces réactions. »

Les conditions du premier ordre :

$$\frac{\partial \Pi}{\partial R_k} = 0 \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, \dots, p$$

sont satisfaites d'après le théorème sur les déplacements des points d'application des forces, théorème que l'on désigne maintenant sous le nom de théorème de Castigliano⁽¹⁾.

M. Bertrand de Fontviolant remarquait, dans l'opuscule cité, que pour établir le passage du potentiel par un minimum il faudrait encore montrer que la condition du second ordre est aussi satisfaite, savoir :

$$d^2 \Pi > 0.$$

Voici une démonstration directe de ce fait.

(1) Les travaux de Castigliano étant postérieurs à ceux de Ménabréa, c'est à ce dernier que l'on doit attribuer le principe.

Remarquons que φ_2 est une fonction quadratique définie, positive des R car c'est la valeur que prend Π quand on annule les F; d'autre part,

$$\begin{aligned} d^2 \Pi = d^2 \varphi_2 &= \Sigma \left(\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial R_k^2} dR_k^2 + \frac{2\partial^2 \varphi_2}{\partial R_k \partial R_\mu} dR_k dR_\mu \right) (k, \mu = 1, 2, \dots, p) \\ &= 2\varphi_2(dR_1, dR_2, \dots, dR_p) \end{aligned}$$

donc :

$$d^2 \Pi > 0.$$

c. q. f. d.

3.

REMARQUES.

I. La démonstration élémentaire suivante montre que le minimum est absolu, ce qui résulte aussi de ce que les différentielles de la fonction Π sont nulles à partir de la troisième.

Évaluons la variation du potentiel interne correspondant aux accroissements $\Delta R_1, \Delta R_2, \dots, \Delta R_p$ des réactions.

$$\begin{aligned} \Pi + \Delta \Pi &= f(F_1, F_2, \dots, F_n, R_1 + \Delta R_1, \dots, R_p + \Delta R_p) \\ &= f(F_1, F_2, \dots, F_n, R_1, R_2, \dots, R_p) + \Delta R_1 f'_{R_1} + \Delta R_2 f'_{R_2} + \dots \\ &\quad + \Delta R_p f'_{R_p} + f(0, 0, \dots, 0, \Delta R_1, \Delta R_2, \dots, \Delta R_p) \end{aligned}$$

et puisque :

$$f'_{R_1} = f'_{R_2} = \dots = f'_{R_p} = 0$$

il reste :

$$\Delta \Pi = f(0, 0, \dots, 0, \Delta R_1, \Delta R_2, \dots, \Delta R_p).$$

Cette variation est essentiellement positive, comme la fonction elle-même.

II. Le théorème de Ménabréa est une application de la proposition générale suivante, qui n'est que l'extension d'une propriété du trinôme du second degré :

« Étant donnée une fonction du second degré de plusieurs variables, non nécessairement quadratique, mais dont l'ensemble des termes du second degré constituent une fonction quadratique définie positive, la fonction passe effectivement par un minimum pour les valeurs des variables satisfaisant aux conditions de premier ordre, nécessaires pour un extrémum. »

La démonstration est identique à la précédente.

4. GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME DU GÉNÉRAL MÉNABRÉA.

Soit un système de corps isotropes ou à fibre moyenne, isostatique ou hyperstatique, soumis à des forces appliquées. Supposons que sous l'influence de ces forces, les corps se déformant, certains points viennent à être arrêtés par des obstacles avant que la déformation totale soit atteinte.

Soient $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_q$ les réactions de ces obstacles quand le système est en équilibre, après déformation; $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q$ les projections respectives sur les forces ρ des déplacements des points ainsi arrêtés; enfin R_1, R_2, \dots, R_ν les réactions des obstacles aux points fixes. Le potentiel interne est une fonction quadratique des forces appliquées et des réactions R et ρ .

Je dis que les valeurs que prennent en fait les réactions R et ρ rendent minima l'expression :

$$\Theta = \Pi - \sum_{j=1}^{j=q} \lambda_j \rho_j$$

considérée comme fonction des R et des ρ .

En effet, d'après le théorème de Castigliano :

$$\frac{\partial \Pi}{\partial R_i} = 0 \quad \text{pour} \quad i = \alpha, \beta, \dots, \nu$$

et

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \rho_j} - \lambda_j = 0 \quad \text{pour} \quad j = 1, 2, \dots, q$$

ou, ce qui revient au même :

$$\frac{\partial \Theta}{\partial R_i} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \Theta}{\partial \rho_j} = 0$$

les conditions du premier ordre étant remplies, le théorème général précédent montre que Θ passe effectivement par un minimum pour les valeurs que prennent en fait les R et les ρ ⁽¹⁾.

(1) Nous lisons dans le traité magistral de Résistance des Matériaux de M. Bertrand de Fontviolant (Encyclopédie du Génie Civil, Directeur : G. Mesnager. *Résistance des Matériaux*, par Bertrand de Fontviolant, Librairie J.-B. Baillière), auquel nous avons déjà fait allusion au début de cet ouvrage et qui est paru récemment, cette remarque :

« Le théorème de Ménabréa ne permet pas de calculer les forces de liaison surabondantes, dans le cas où les liaisons du corps, ou du système de corps, n'ont pu être réalisées sans déformation élastique de celui-ci. »

Le théorème général que nous donnons ci-dessus permet ce calcul.

5. THÉORÈMES CORRÉLATIFS.

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, les déplacements projetés des n points d'un système en lesquels sont appliquées les forces F_1, F_2, \dots, F_n . Entre les déplacements projetés et les forces existent n équations du type :

$$\lambda_i = a_{i1}F_1 + a_{i2}F_2 + \dots + a_{in}F_n.$$

Résolvons ce système d'équations par rapport aux F ; cette résolution est possible car le déterminant des inconnues n'est autre que le discriminant de la forme quadratique (potentiel interne)

$$\Pi = f(F_1, F_2, \dots, F_n).$$

Le théorème de Castigliano donne, en effet :

$$\lambda_i = \frac{\partial \Pi}{\partial F_i}$$

et comme Π est une forme définie positive, le discriminant est différent de zéro.

En outre, le déterminant des inconnues étant un discriminant, est symétrique par rapport à la diagonale principale.

La résolution donne :

$$\begin{aligned} F_1 &= b_{11}\lambda_1 + b_{12}\lambda_2 + \dots + b_{1n}\lambda_n, \\ F_2 &= b_{21}\lambda_1 + b_{22}\lambda_2 + \dots + b_{2n}\lambda_n, \\ &\dots\dots\dots \\ F_n &= b_{n1}\lambda_1 + b_{n2}\lambda_2 + \dots + b_{nn}\lambda_n. \end{aligned}$$

On a, d'après la remarque précédente :

$$b_{ij} = b_{ji}.$$

Le potentiel interne $\frac{1}{2} \sum F_i \lambda_i$ peut donc s'écrire en fonction des déplacements, ce qui donne :

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum (b_{ii}\lambda_i^2 + 2b_{jk}\lambda_j\lambda_k)$$

et l'on voit que :

$$F_i = \frac{\partial \Pi}{\partial \lambda_i};$$

c'est un premier résultat corrélatif du théorème de Castigliano.

Considérons maintenant un certain nombre de points A_1, A_2, \dots, A_n , en lesquels sont appliquées des forces; supposons que ces points soient assujettis à avoir des déplacements projetés, fixés d'avance $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Soient, en outre, un certain nombre d'autres points $A_\alpha, A_\beta, \dots, A_\nu$, en lesquels sont appliquées des forces, de direction et de grandeur données; les valeurs que prennent en fait les déplacements projetés de ces derniers rendent minima la somme :

$$\Theta = \Pi(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \lambda_\alpha, \lambda_\beta, \dots, \lambda_\nu) - (\lambda_\alpha F_\alpha + \lambda_\beta F_\beta + \dots + \lambda_\nu F_\nu)$$

considérée comme fonction des $\lambda_\alpha, \lambda_\beta, \dots, \lambda_\nu$.

On a, en effet, d'après le théorème corrélatif de celui de Castigliano, la force F_i étant la dérivée par rapport à λ_i du potentiel exprimé au moyen des seuls déplacements projetés :

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \lambda_\alpha} = F_\alpha,$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \lambda_\beta} = F_\beta,$$

.....

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \lambda_\nu} = F_\nu,$$

c'est-à-dire :

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \lambda_\alpha} = \frac{\partial \Theta}{\partial \lambda_\beta} = \dots = \frac{\partial \Theta}{\partial \lambda_\nu} = 0.$$

Les conditions du premier ordre étant remplies, la proposition générale (p. 65) nous permet encore d'affirmer que les valeurs prises par $\lambda_\alpha, \lambda_\beta, \dots, \lambda_\nu$, rendent effectivement minima l'expression Θ .

C'est un théorème corrélatif de celui de Ménabréa.

Cette proposition ne suppose pas le système isostatique, les coefficients de la fonction quadratique sont seulement différents, suivant le nombre et la nature des liaisons surabondantes.

6. THÉORÈME DU MAXIMUM DE L'ÉNERGIE CINÉTIQUE VIRTUELLE.

Supposons qu'il n'y ait d'autres points chargés que ceux que nous avons désignés par $A_\alpha, A_\beta, \dots, A_\nu$, c'est-à-dire ceux en lesquels la charge est imposée et non le déplacement.

Les déplacements projetés rendent minima la somme :

$$\Pi(\lambda_\alpha, \lambda_\beta, \dots, \lambda_\nu) - (\lambda_\alpha F_\alpha + \lambda_\beta F_\beta + \dots + \lambda_\nu F_\nu)$$

considérée comme fonction des λ .

Interprétons ce nouveau théorème.

Supposons le corps partant du repos et soumis brusquement aux forces $F_\alpha, F_\beta, \dots, F_\nu$.

Considérons les déformations statiques que pourrait prendre le corps sous l'action de forces ayant mêmes points d'application et mêmes directions (*) que $F_\alpha, F_\beta, \dots, F_\nu$ (mais des intensités quelconques).

Elles forment un domaine continu et nous ne comparerons entre elles que des déformées appartenant à ce domaine.

Désignons toujours par $\lambda_\alpha, \lambda_\beta, \dots, \lambda_\nu$, les déplacements (projetés) des points $A_\alpha, A_\beta, \dots, A_\nu$, dans une telle déformation.

L'expression :

$$\Pi(\lambda_\alpha, \lambda_\beta, \dots, \lambda_\nu)$$

représente toujours au signe près, le travail des forces moléculaires qui aurait été effectué si cette déformation était réalisée ; la somme :

$$F_\alpha \lambda_\alpha + F_\beta \lambda_\beta + \dots + F_\nu \lambda_\nu$$

représente évidemment le travail virtuel des forces appliquées (somme des produits internes des forces par les déplacements des points d'application).

Enfin la différence :

$$\Pi(\lambda_\alpha, \lambda_\beta, \dots, \lambda_\nu) - (F_\alpha \lambda_\alpha + F_\beta \lambda_\beta + \dots + F_\nu \lambda_\nu)$$

est, au signe près, l'énergie cinétique W qu'aurait le corps, parti du repos, au moment où la déformation imaginée serait effective.

On a donc :

$$-W = \Pi - \sum_{i=\alpha}^{i=\nu} F_i \lambda_i$$

et puisque cette expression est minima dans les conditions exigées, W est maxima, d'où l'énoncé :

(*) Pour que les coefficients de la fonction Π restent les mêmes.

« La déformation d'équilibre d'un corps sous l'action de forces données est, parmi toutes les déformations possibles sous l'action des forces appliquées aux mêmes points et de mêmes directions respectives, celle qui rend maxima l'énergie cinétique virtuelle du corps brusquement soumis aux forces données. »

C'est là la propriété d'extremum dont nous proposons d'étendre la portée.

Précisons-en l'énoncé.

On suppose le corps partant du repos et prenant une déformation virtuelle du domaine précédemment défini; la somme algébrique des travaux virtuels des charges et des forces intérieures (énergie cinétique virtuelle) est maxima quand la déformation virtuelle est la déformation d'équilibre.

Si les déformations réalisées au cours du mouvement du système partant du repos appartiennent au domaine considéré, l'énergie cinétique est maxima quand le système passe par la position d'équilibre.

Cette remarque n'est que la généralisation du résultat classique suivant :

Soit un ressort supportant un corps de poids P , charge appliquée brusquement sur le ressort primitivement à l'état de tension nulle, la somme algébrique des forces agissant sur le corps est positive jusqu'à ce que le ressort passe par la position d'équilibre, nulle à ce moment et négative ensuite, donc la vitesse passe par un maximum quand le corps occupe la position d'équilibre et il en est de même de l'énergie cinétique.

7.

REMARQUES.

I. Nous verrons plus tard que l'on peut s'affranchir de la restriction mise en évidence dans l'énoncé et d'après laquelle on ne compare que les déformations d'un certain domaine. La suppression de cette restriction montre tout l'intérêt que ce théorème présentera dans la suite.

II. Il n'est pas inutile, au point de vue didactique, de remarquer une complète analogie formelle entre les questions traitées dans ce chapitre et celles concernant les charges électrostatiques prises par des conducteurs maintenus à des potentiels V_1, V_2, \dots, V_n . Si Q_1, Q_2, \dots, Q_n , sont les charges, on a d'abord entre les quantités d'électricité et les potentiels correspondants, des relations analogues à celles qui lient les déplacements aux forces, savoir :

$$\begin{aligned} Q_1 &= C_{11} V_1 + C_{12} V_2 + \dots + C_{1n} V_n, \\ Q_2 &= C_{21} V_1 + C_{22} V_2 + \dots + C_{2n} V_n, \\ &\dots\dots\dots \\ Q_n &= C_{n1} V_1 + C_{n2} V_2 + \dots + C_{nn} V_n. \end{aligned}$$

D'autre part, de même que le potentiel interne du corps déformé est $\frac{1}{2} F_i \lambda_i$, on sait que l'énergie potentielle d'un système électrisé statique est :

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=n} V_i Q_i.$$

Elle peut s'exprimer, soit au moyen des potentiels seulement, soit au moyen des charges ; dans les deux cas, elle est une fonction quadratique définie positive.

Un théorème analogue à celui de Castigliano se traduit par des égalités telles que :

$$Q_i = \frac{\partial W}{\partial V_i}$$

d'où il résulte que :

$$C_{ij} = C_{ji}$$

car cette égalité revient à :

$$\frac{\partial^2 W}{\partial V_i \partial V_j} = \frac{\partial^2 W}{\partial V_j \partial V_i}.$$

Pour avoir un théorème analogue à celui de Ménabréa, il faut imaginer que les quantités jouant le rôle de déplacements, c'est-à-dire les charges restent nulles, sur quelques conducteurs d'indices $\alpha, \beta, \dots, \nu$, par exemple.

Il suffit pour cela de supposer qu'avant l'électrisation des autres, ces conducteurs sont à l'état neutre et qu'en outre ils restent isolés. Si les autres conducteurs sont à des potentiels V_1, V_2, \dots, V_n , déterminés, on peut dire que les valeurs que prennent en fait les potentiels $V_\alpha, V_\beta, \dots, V_\nu$, rendent minima la quantité W considérée comme fonction de ces V . En admettant la dénomination de potentiels de réaction⁽¹⁾, on a un énoncé complètement analogue à celui de Ménabréa.

On peut aussi établir un théorème de Ménabréa généralisé en supposant que les conducteurs d'indices $\alpha, \beta, \dots, \nu$, ne sont isolés qu'après avoir reçu des charges $Q_\alpha, Q_\beta, \dots, Q_\nu$; alors les potentiels qu'ils prennent rendent minima la différence :

$$W(V_1, V_2, \dots, V_n, V_\alpha, V_\beta, \dots, V_\nu) - (V_\alpha Q_\alpha + V_\beta Q_\beta + \dots + V_\nu Q_\nu)$$

considérée comme fonction de $V_\alpha, V_\beta, \dots, V_\nu$.

Enfin, on peut aussi envisager un théorème corrélatif ; notamment si les con-

(1) Ou potentiels induits.

ducteurs dont les potentiels sont imposés (dès le début) sont seuls chargés, les valeurs que prennent en fait les charges rendent maxima la différence :

$$\Theta = \sum_{i=a}^{i=b} V_i Q_i - W(Q_a, Q_b, \dots, Q_n).$$

Si l'on remarque que la première somme est l'énergie fournie par les sources et que W est l'énergie acquise par les conducteurs, la différence représente l'énergie calorifique et électrocinétique communiquée au circuit. Ici encore nous trouvons une extension d'une remarque suggérée par la charge d'un condensateur de capacité C , par une source f. é. m. E , à travers un conducteur de résistance R . L'équation différentielle donnant la charge du condensateur en fonction du temps est :

$$\frac{q}{c} + Ri + \mathcal{L} \frac{di}{dt} = E$$

\mathcal{L} désignant le coefficient de self induction du circuit, ce qui donne :

$$Ri^2 dt + \mathcal{L} di = Edq - \frac{q dq}{c}$$

et en intégrant :

$$\text{Effet Joule} + \text{Énergie électrocinétique} = Eq - \frac{q^2}{2c}.$$

On sait que la charge finale est cE ; cette valeur de q annule la dérivée de $Eq - \frac{q^2}{2c}$ et rend cette dernière expression maxima.

La valeur du maximum est d'ailleurs l'effet Joule intégral car l'énergie électrocinétique tend vers zéro à mesure que la charge tend vers sa valeur finale.

III. Nous avons admis, comme physiquement évident, que la fonction quadratique :

$$W = \sum_{i=1}^n C_{ii} V_i^2 + 2C_j C_k V_j V_k$$

était définie positive. En général, la vérification algébrique d'un tel caractère est très compliquée quand le nombre de variables V_i est grand et, à plus forte raison, quelconque.

Il se trouve que cette vérification peut se faire assez simplement si l'on tient

compte des propriétés connues des coefficients C_{jk} (¹). Ces propriétés se résument ainsi :

- 1° $C_{ii} > 0$;
- 2° $C_{jk} < 0$ pour $j \neq k$ $i, j, k = 1, 2, \dots, n$;
- 3° $\sum_k C_{jk} > 0$ $k = 1, 2, \dots, j, \dots, n$.

Cela posé, on peut mettre W sous la forme suivante :

$$\left[\sqrt{C_{11}} V_1 + \sum_{i=2}^{i=n} \frac{C_{1i} V_i}{\sqrt{C_{11}}} \right]^2 + V_2^2 \left[C_{22} - \frac{C_{12}^2}{C_{11}} \right] + V_3^2 \left[C_{33} - \frac{C_{13}^2}{C_{11}} \right] + \dots$$

$$+ 2V_2 V_3 \left[C_{23} - \frac{C_{21} C_{13}}{C_{11}} \right] + V_2 V_4 \left[C_{24} - \frac{C_{21} C_{41}}{C_{11}} \right] + \dots$$

Les termes qui suivent le premier carré forment une fonction quadratique en V_2, V_3, \dots, V_n ; en modifiant les notations on peut écrire cette fonction :

$$W' = \gamma_{22} V_2^2 + \gamma_{33} V_3^2 + \dots$$

$$+ 2\gamma_{23} V_2 V_3 + \dots$$

$$= \Sigma (\gamma_{ii} V_i^2 + 2\gamma_{kj} V_k V_j + \dots) \quad i, j, k = 2, 3, \dots, n.$$

Nous allons montrer que les coefficients γ jouissent des mêmes propriétés que les coefficients C de la forme quadratique W , savoir :

- 1° $\gamma_{ii} > 0$;
- 2° $\gamma_{kj} < 0$;
- 3° $\gamma_{i2} + \gamma_{i3} + \gamma_{i4} + \dots + \gamma_{in} > 0$.

En effet,

$$\gamma_{ii} = \frac{C_{ii} C_{11} - C_{1i}^2}{C_{11}}$$

je dis que :

$C_{ii} C_{11} - C_{1i}^2$ est positif; en effet, d'après (3)

$$C_{i1} + C_{i2} + \dots + C_{ii} + C_{in} > 0$$

ou

$$C_{ii} > -(C_{i1} + C_{i2} + \dots + C_{i,i-1} + C_{i,i+1} + \dots + C_{in})$$

(¹) Ces propriétés des coefficients C_{jk} sont classiques : V. p. ex. Bouasse, *Électricité et Magnét.*, t. III, p. 30.

et puisque tous les termes de la parenthèse sont négatifs, on a *a fortiori* :

$$\begin{aligned} C_{ii} &> -C_{i1} \\ C_{ii} &> -(C_{i2} + C_{i3} + \dots + C_{in}) > -C_{i1}. \end{aligned}$$

D'ailleurs les deux membres des deux inégalités sont positifs. D'où, par multiplication :

$$C_{ii}C_{ii} > C_{ii}^2$$

ce qui est bien la première inégalité à démontrer.

D'autre part :

$$\gamma_{kj} = C_{kj} - \frac{C_{ki}C_{ji}}{C_{ii}} = \frac{C_{ii}C_{kj} - C_{ki}C_{ji}}{C_{ii}}.$$

Les C_{jk} étant négatifs pour $j \neq k$ et positifs pour $j = k$, on a évidemment :

$$\gamma_{jk} < 0.$$

Enfin, formons la somme :

$$\sum_j \gamma_{ij} \quad (j = 2, 3, \dots, n)$$

elle est égale à :

$$\begin{aligned} &C_{ii} - \frac{C_{ii}^2}{C_{ii}} + \sum C_{ij} - \frac{C_{ii}C_{ji}}{C_{ii}} \\ &= C_{ii} + C_{i2} + \dots + C_{in} - C_{ii} \frac{(C_{i1} + C_{i2} + \dots + C_{in})}{C_{ii}} \\ &= (C_{i1} + C_{i2} + \dots + C_{in}) \left(1 - \frac{C_{ii}}{C_{ii}} \right). \end{aligned}$$

Les deux facteurs de ce produit sont positifs, d'après les inégalités (1).

En résumé, les coefficients de la fonction W' ont exactement les mêmes propriétés que ceux de la fonction W et l'on pourra sur W' appliquer la méthode de Gauss comme on l'a fait pour W et ainsi de suite; on arrivera enfin à une forme quadratique à une seule variable de la forme $\lambda_{nn} V_n^2$ et l'on aura $\lambda_{nn} > 0$. On aura donc décomposé W en une somme de carrés.

CHAPITRE II

Étude du cas des Charges continues. — Démonstration du théorème général dans les hypothèses de la théorie de l'Élasticité.

8. Le cas des charges appliquées en un point n'étant qu'une fiction commode pour les Ingénieurs, nous examinerons seulement celui des Charges continues.

Reprenons le théorème précédent : nous allons lui donner maintenant la forme très générale ci-après :

« De toutes les déformations virtuelles que l'on peut concevoir pour le système
« de corps isotropes chargés brusquement de forces données, celle pour laquelle
« l'énergie cinétique virtuelle (somme des travaux des forces appliquées et des forces
« moléculaires) est maxima, est la déformation d'équilibre. »

Considérons l'intégrale étendue au volume total Ω du système⁽¹⁾ :

$$\Theta = \iiint_{\Omega} \left[\frac{\lambda}{2} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)^2 + \mu (\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2) + \frac{\mu}{2} (\gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2 + \gamma_{xy}^2) \right] dx dy dz \\ - \iiint_{\Omega} [\nu_x \varepsilon_x + \nu_y \varepsilon_y + \nu_z \varepsilon_z + \gamma_{yz} \tau_{yz} + \gamma_{zx} \tau_{zx} + \gamma_{xy} \tau_{xy}] dx dy dz.$$

dans laquelle les ε et les γ sont les paramètres de la déformation élastique au point x, y, z (avec la convention de signes du Cours de Mécanique de Sarrau⁽²⁾); λ et μ sont les constantes d'isotropie; $\nu_x, \nu_y, \nu_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}$, les tensions normales et tangentielles au moment de l'équilibre, sous les forces données.

Cette intégrale est minima, pour les valeurs des ε et des γ correspondant à cet équilibre; en effet, dans l'élément différentiel, le facteur de dx, dy, dz contient, comme ensemble de termes du second degré, une fonction quadratique définie positive ϖ et, d'après une proposition rappelée au Chap. I, p, 6g, il suffit, pour établir l'existence du minimum, de vérifier que les conditions du premier ordre sont rem-

⁽¹⁾ La première intégrale triple est le potentiel interne du corps et joue le même rôle que la quantité II dans le cas des ensembles discrets de forces; quant à la deuxième intégrale elle jouera le rôle de la somme : $-(F_\alpha \lambda_\alpha + F_\beta \lambda_\beta + \dots + F_\lambda \lambda_\lambda)$.

⁽²⁾ Sarrau : *Cours de Mécanique de l'École Polytechnique*, 1^{re} division.

plies. Or, les tensions normales et tangentielles s'expriment par des formules connues au moyen de ces six paramètres et ces formules reviennent à celles-ci :

$$n_x = \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon_x}, \dots,$$

$$t_{yz} = \frac{\partial \sigma}{\partial \gamma_{yz}}, \dots$$

Nous aurons donc, au moment de l'équilibre :

$$v_x = \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon_x^0}, \dots,$$

$$\tau_{yz} = \frac{\partial \sigma}{\partial \gamma_{yz}^0}, \dots,$$

les ε^0 et les γ^0 étant les valeurs, à ce moment, des paramètres de la déformation élastique. Ces équations expriment que les conditions du premier ordre sont remplies pour que Θ soit minima, lors de la déformation d'équilibre. D'après un théorème plusieurs fois invoqué, nous pourrons affirmer que Θ est à ce moment effectivement minima.

Interprétons maintenant ce résultat; pour cela exprimons les paramètres de la déformation élastique au moyen des composantes u, v, w , suivant les axes, du déplacement élastique du point A(x, y, z).

On a :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z};$$

$$\gamma_{yz} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad \gamma_{zx} = \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad \gamma_{xy} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

Dans l'intégrale Θ la seconde ligne peut s'écrire en tenant compte des relations précédentes :

$$- \iint \int_{\Omega} \left[v_x \frac{\partial u}{\partial x} + v_y \frac{\partial v}{\partial y} + v_z \frac{\partial w}{\partial z} + \tau_{yz} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \tau_{zx} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right. \\ \left. + \tau_{xy} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] dx dy dz$$

$$= - \iint \int_{\Omega} \left[v_x \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial v}{\partial x} + \tau_{zx} \frac{\partial w}{\partial x} \right. \\ \left. + \tau_{xy} \frac{\partial u}{\partial y} + v_y \frac{\partial v}{\partial y} + \tau_{yz} \frac{\partial w}{\partial y} \right. \\ \left. + \tau_{xz} \frac{\partial u}{\partial z} + \tau_{xz} \frac{\partial v}{\partial z} + v_z \frac{\partial w}{\partial z} \right] dx dy dz.$$

Intégrons par parties :

$$\begin{aligned}
 & - \int \int \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x} (u v_x + v \tau_{xy} + w \tau_{xz}) + \frac{\partial}{\partial y} (u \tau_{xy} + v v_y + w \tau_{yz}) \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. + \frac{\partial}{\partial z} (u \tau_{zx} + v \tau_{yz} + w v_z) \right] dx dy dz \\
 & + \int \int \int_{\Omega} \left[u \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) + v \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. + w \left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \right] dx dy dz.
 \end{aligned}$$

La formule d'Ostrogradsky permet de remplacer la première intégrale de volume par l'intégrale étendue à la surface Σ limitant le système :

$$- \int \int_{\Sigma} [(u v_x + v \tau_{xy} + w \tau_{xz}) \alpha + (u \tau_{xy} + v v_y + w \tau_{yz}) \beta + (u \tau_{zx} + v \tau_{yz} + w v_z) \gamma] d\sigma$$

ou encore

$$- \int \int_{\Sigma} (u X_e + v Y_e + w Z_e) d\sigma$$

X_e, Y_e, Z_e étant les composantes de la force unitaire appliquée à l'élément $d\sigma$ et α, β, γ les cosinus des angles des axes de coordonnée avec la demi-normale positive à cet élément.

Cette intégrale de surface est donc le travail, changé de signe, des forces appliquées extérieures.

Reste la dernière intégrale; elle s'écrit encore, d'après les équations classiques de l'élasticité :

$$- \int \int \int_{\Omega} \rho [u X_i + v Y_i + w Z_i] d\omega$$

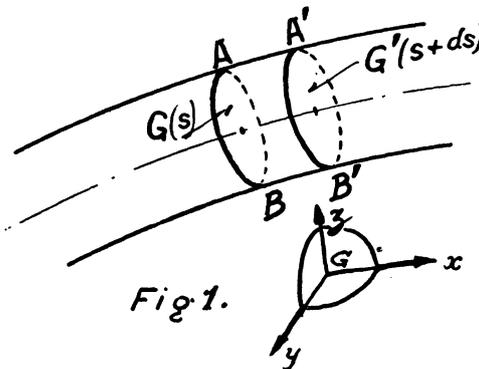
$\rho X_i, \rho Y_i, \rho Z_i$ étant les composantes de la force unitaire appliquée à l'élément de volume $d\omega$. On obtient ainsi le travail, changé de signe, des forces appliquées intérieures.

Les deux résultats précédents ajoutés donnent donc $-\mathcal{C}_a$ travail de toutes les forces appliquées, changé de signe. Si l'on tient compte de ce que, dans l'intégrale Θ , la première ligne est le potentiel interne du corps, c'est-à-dire le travail, changé de signe, des forces moléculaires, soit $-\mathcal{C}_m$, on trouve bien que la somme $-(\mathcal{C}_a + \mathcal{C}_m)$ est minima, ou encore que le travail total $\mathcal{C}_a + \mathcal{C}_m$ (énergie virtuelle) est maxima pour la déformation d'équilibre.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME GÉNÉRAL DANS LES HYPOTHÈSES
DE LA RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX.

9. Les hypothèses de la Théorie de la Résistance des Matériaux sont différentes de celles de la Théorie de l'Élasticité. Il est donc intéressant de montrer que, pour la déformation d'équilibre prise par un corps sous l'action des forces appliquées, la première théorie assigne à son tour une valeur maxima à une certaine intégrale, laquelle, interprétée d'après les règles de la Résistance des Matériaux, conduit encore à un énoncé identique à celui du chapitre précédent.

Soit un corps à ligne moyenne, c'est-à-dire un corps dont le volume est engendré par une section AB , le centre de gravité de la section décrivant la ligne dite moyenne et le plan de cette section restant normal à la ligne.



Nous supposons ce corps soumis brusquement à des charges déterminées. A une section normale AB , dont l'abscisse curviligne s sera la longueur de la ligne moyenne depuis l'extrémité gauche jusqu'à la section, lions un trièdre dont l'une des arêtes, G_x , sera la tangente à la ligne moyenne, les deux autres, G_y et G_z , seront par exemple les axes d'inertie de la section.

Considérons un système S de forces agissant sur la section AB et formant avec les forces appliquées au corps, à gauche de cette section, un système équivalent à zéro.

Soient $N, T_y, T_z, M_x, M_y, M_z$ les éléments de la réduction du système S au point G , centre de gravité de la section.

Désignons de même par :

$$N', T'_y, T'_z, M'_x, M'_y, M'_z$$

les quantités analogues pour le système S' relatif à la section $A'B'$ voisine, d'abscisse $s + ds$.

Les forces réellement appliquées sur la tranche $ABA'B'$ ⁽¹⁾ forment avec le système $S' - S$ un système équivalent à zéro.

Suivant l'usage et relativement à une déformation virtuelle quelconque du corps, désignons par $\varepsilon, \gamma_y, \gamma_z, \theta_x, \theta_y, \theta_z$ les paramètres de la déformation élastique de ce corps pour la section AB ; par $\varepsilon', \gamma'_y, \dots, \theta'_z$, les valeurs de ces paramètres pour la section $A'B'$.

Considérons l'intégrale

$$\int_0^l \frac{1}{2} (E\Omega\varepsilon^2 + G\Omega\gamma_y^2 + G\Omega\gamma_z^2 + GJ\theta_x^2 + EI_y\theta_y^2 + EI_z\theta_z^2) ds \\ - \int_0^l (N\varepsilon + T_y\gamma_y + T_z\gamma_z + M_x\theta_x + M_y\theta_y + M_z\theta_z) ds.$$

l étant la longueur totale de la fibre moyenne.

La construction de l'élément différentiel est analogue à celle de l'élément de Θ , dans le paragraphe précédent.

D'après le théorème invoqué dans les chapitres précédents, le coefficient de ds est *minimum* pour :

$$\varepsilon = \frac{N}{E\Omega}, \quad \gamma_y = \frac{T_y}{G\Omega}, \quad \gamma_z = \frac{T_z}{G\Omega}; \\ \theta_x = \frac{M_x}{JG}, \quad \theta_y = \frac{M_y}{I_y E}, \quad \theta_z = \frac{M_z}{I_z E}.$$

On voit que ce sont là les valeurs des paramètres qui correspondent à la déformation d'équilibre⁽²⁾.

L'intégrale est elle-même minima pour cette déformation particulière.

Or, le terme

$$\frac{1}{2} \int_0^l (E\Omega\varepsilon^2 + G\Omega\gamma_y^2 + G\Omega\gamma_z^2 + GJ\theta_x^2 + EI_y\theta_y^2 + EI_z\theta_z^2) ds$$

représente pour une déformation virtuelle quelconque le travail, changé de signe, de forces intérieures moléculaires⁽³⁾.

⁽¹⁾ Abstraction faite des forces qui pourraient être appliquées sur une section normale, si celle-ci est terminale.

⁽²⁾ V. p. ex. Bertrand de Fontviolant, *Résistance des Matériaux* (Lib. Baillière).

⁽³⁾ *Ibid.*

Si nous montrons que l'intégrale

$$\int_0^l (N\varepsilon + T_y\gamma_y + T_z\gamma_z + M_x\theta_x + M_y\theta_y + M_z\theta_z) ds$$

est la valeur du travail des forces appliquées, pendant cette déformation virtuelle quelconque, nous aurons encore justifié, dans ce cas, l'énoncé du théorème général.

Pour cela, nous considérerons le système Σ des forces appliquées au corps, à gauche de la section considérée (ailleurs que sur la section terminale), et nous appellerons $d\Sigma$ le système de forces appliquées à la tranche; nous utiliserons ce fait que le système $d\Sigma + S' - S$ est équivalent à zéro. Le travail de l'ensemble est donc indépendant du système de référence par rapport auquel on l'évalue. Nous prendrons en particulier le système des trois axes G_x, G_y, G_z liés à la section AB.

Adoptant la terminologie de M. Béghin⁽¹⁾ nous écrirons, d'après la remarque précédente :

$$\text{Travail absolu de } (d\Sigma + S' - S) = \text{travail relatif de } (d\Sigma + S' - S).$$

Or le travail relatif de $d\Sigma$ est du second ordre par rapport à ds . (En effet les forces appliquées sur la tranche sont de l'ordre de ds et les déplacements des points d'application aussi.)

Donc, en se limitant aux parties principales :

$$\begin{aligned} \text{Travail absolu de } d\Sigma &= \text{Travail relatif de } (S' - S) - \text{travail absolu de } (S' - S) \\ &= - \text{Travail d'entraînement de } (S' - S). \end{aligned}$$

Le travail qui figure dans le dernier membre est celui qu'accompliraient les forces de $(S' - S)$ si la tranche ABA'B' supposée invariable participait au mouvement de la section AB.

Si l'on appelle $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$ les composantes de déplacement du point G, $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ les composantes de la rotation de cette section, le travail d'entraînement du système $S' - S$ sera :

$$(N' - N)\lambda_x + (T'_y - T_y)\lambda_y + (T'_z - T_z)\lambda_z + \dots + (M'_z - M_z)\alpha_z$$

ou

$$dN \cdot \lambda_x + dT_y \cdot \lambda_y + dT_z \cdot \lambda_z + \dots + dM_z \cdot \alpha_z$$

⁽¹⁾ H. Béghin, *Statique et Dynamique* (A. Colin), t. I, p. 133.

et, pour tout le corps :

$$\int_0^l (dN \cdot \lambda_x + dT_y \cdot \lambda_y + dT_z \cdot \lambda_z + \dots + dM_z \cdot \alpha_z) ds$$

$$= [N \cdot \lambda_x + T_y \cdot \lambda_y + \dots + M_z \cdot \alpha_z]_0^l - \int_0^l (N \varepsilon + T_y \gamma_y + \dots + M_z \theta_z) ds$$

car :

$$\frac{d\lambda_x}{ds} = \varepsilon,$$

$$\frac{d\lambda_y}{ds} = \gamma_y, \quad \text{etc.}$$

On en déduit :

$$\text{Travail absolu de } \Sigma + [N \lambda_x + T_y \lambda_y + \dots]_0^l - \int_0^l (N \varepsilon + T_y \gamma_y + \dots + M_z \theta_z) ds = 0$$

le terme tout intégré est le travail absolu des forces extérieures appliquées sur les sections terminales; ce terme, ajouté à celui qui le précède, donne le travail total des forces appliquées. Finalement :

$$\text{Travail absolu des forces appliquées} = \int_0^l (N \varepsilon + T_y \gamma_y + \dots + M_z \theta_z) ds. \quad \text{c. q. f. d.}$$

CHAPITRE III

Extension aux déformations étudiées dans la théorie de l'action euclidienne.

10.

PRÉLIMINAIRES.

Nous utiliserons dans ce qui suit les notations particulières au calcul géométrique (*) résumées ci-après :

Le produit interne ou scalaire de deux vecteurs U et V sera représenté par

$$U \times V.$$

Le produit externe ou vectoriel de ces mêmes vecteurs par

$$U \wedge V.$$

Le trivecteur UVW représente le volume parallélépipède ayant les trois vecteurs U , V , W , comme arêtes ; ce nombre est affecté du signe $+$ ou du signe $-$ suivant que W et $U \wedge V$ sont ou non du même côté par rapport au plan de U et de V .

On a notamment l'égalité :

$$(U \wedge V) \times W = UVW.$$

Enfin nous utiliserons, pour un vecteur U fonction du temps, la notion de dérivée d'un vecteur relative à un système de référence mobile, et nous la représenterons par $\frac{dU}{dt}$; la dérivée absolue $\frac{DU}{Dt}$ (prise dans un système de référence fixe) sera liée à la précédente par la relation :

$$\frac{DU}{Dt} = \frac{dU}{dt} + \Omega \wedge U \quad (*)$$

Ω est le vecteur vitesse instantanée de rotation du système de référence entraîné.

(*) V. Burali-Forti, « Introduction à la Géométrie différentielle selon la Méthode de Grassmann » et Burali-Forti et Marcolongo, « Calcolo Vettoriale ».

(*) J. Sudria, N. A. de Math., « Sur la notion de dérivée relative d'un vecteur » (avril 1924).

Considérons une courbe $A_0M_0B_0$ et supposons qu'on la déforme de manière qu'à chaque point de l'état initial corresponde un point et un seul de la déformée AMB . Imaginons qu'un trièdre trirectangle ayant son sommet sur un point de la courbe se déplace, son orientation variant d'une manière quelconque, pendant ce déplacement. Si U est un vecteur, fonction uniforme du point de la courbe qui est le sommet du trièdre, on a, comme on le voit, par un raisonnement analogue à celui que l'on utilise en calcul des variations :

$$D(\Delta U) = \Delta(DU) \quad (1)$$

D désignant une variation absolue correspondant à un déplacement quelconque du sommet, le long de la courbe et Δ une variation absolue correspondant au passage d'un point de la courbe au point correspondant de la déformée.

11. Soient α et θ les rotations élémentaires du trièdre dans chacun des deux cas, lorsqu'on l'on ne considère que des déplacements infiniment petits, ces rotations élémentaires étant portées par les axes instantanés de rotation. Nous allons établir deux résultats importants pour la suite :

1° Si l'on prend pour vecteur U le vecteur oM joignant un point fixe o au sommet du trièdre, on a, en vertu de (1), d et δ (*) désignant les variations relatives

$$d(\Delta M) + \alpha \wedge \Delta M = \delta DM + \theta \wedge DM$$

ou encore, ds_0 étant l'arc de courbe non déformée qui correspond au déplacement envisagé le long de cette courbe et Ω la vitesse instantanée de rotation :

$$\frac{d}{ds_0} \Delta M + \Omega \wedge \Delta M = \delta \frac{DM}{Ds_0} + \theta \wedge \frac{DM}{Ds_0}. \quad (2)$$

2° Si l'on choisit maintenant comme vecteur U de la relation (1) un vecteur bien déterminé et au repos relatif dans le trièdre mobile, alors :

$$\Delta U = \theta \wedge U \quad \text{et} \quad \frac{DU}{Ds_0} = \Omega \wedge U$$

d'où, d'après (1)

$$\frac{D\theta}{Ds_0} \wedge U + \theta \wedge (\Omega \wedge U) = \Delta\Omega \wedge U + \Omega \wedge (\theta \wedge U)$$

(*) Pour les grandeurs scalaires il n'y a pas lieu de faire cette distinction. Nous emploierons les symboles d ou δ , comme on verra plus loin.

ou encore :

$$\frac{D\theta}{Ds_0} \wedge U + U \wedge \Delta\Omega = \Omega \wedge (\theta \wedge U) - \theta \wedge (\Omega \wedge U) = (\Omega \wedge \theta) \wedge U \quad (4).$$

Cette relation devant avoir lieu quel que soit v . Il en résulte :

$$\frac{D\theta}{Ds_0} - \Delta\Omega = \theta \wedge \Omega$$

ou

$$\delta\Omega - \frac{d\theta}{ds_0} = \Omega \wedge \theta$$

ou enfin

$$\delta\Omega = \frac{D}{Ds_0} \theta. \quad (3)$$

Nous avons ainsi démontré en les rattachant à une origine commune et donné sous une forme intrinsèque ou absolue deux propositions (2) et (3) obtenues par le calcul ordinaire dans la « Théorie des Corps déformables » (*). On pourrait en déduire la plupart des formules que l'on met en œuvre dans cette théorie pour étudier les déformations. La simplicité des formes absolues allégerait considérablement l'exposition ; en outre, l'interprétation concrète des résultats permet de les retenir plus facilement. Signalons encore que les relations obtenues permettent de retrouver dans le cas particulier où les déplacements d et δ s'effectuent sur deux lignes coordonnées d'un point d'une surface : la première, les formules de Kirchhof ; l'autre, les formules de Combescure-Darboux, données respectivement aux pages 55 et 49 de la « Théorie des Surfaces de Darboux » (tome I).

(1) D'après la propriété du double produit vectoriel.

(*) En effet, si, adoptant les notations de MM. Cosserat, l'on appelle $\delta'x, \delta'y, \delta'z$, les projections sur les axes du trièdre mobile, du déplacement ΔoM et $\delta I', \delta J', \delta K'$ les composantes de θ ; p, q, r , étant les composantes de Ω et enfin ζ, n, ξ , celles de la vitesse $\frac{D oM}{Ds_0}$, la formule (2) donne

$$\frac{d}{ds} \delta'_x + q \delta'_z - r \delta'_y = \delta \zeta + \zeta \delta J' - n \delta K'$$

et la formule (3)

$$\delta p = \frac{d}{ds_0} \delta I' + q \delta K' - r \delta J'.$$

12. Nous étendrons enfin la notion de gradient au cas d'une fonction scalaire de plusieurs vecteurs.

Étant donnée une telle fonction f des vecteurs V_1, V_2, \dots, V_n , nous appellerons gradients partiels de la fonction f par rapport à V_1, V_2, \dots, V_n , et nous désignerons par la notation $\text{grad } f_{v_1}, \text{grad } f_{v_2}, \dots$, des vecteurs définis par cette condition que :

$$df = \text{grad } f_{v_1} \times dV_1 + \text{grad } f_{v_2} \times dV_2 + \dots + \text{grad } f_{v_n} \times dV_n$$

quelles que soient les variations élémentaires dv_1, dv_2, \dots, dv_n .

Nous dirons qu'un vecteur est rapporté à un trièdre quand les variations du vecteur sont relatives à ce trièdre. Considérons un vecteur que nous désignerons par U quand il est rapporté à des axes fixes et par \mathbf{u} quand il est rapporté à un trièdre mobile. Si F est une fonction scalaire de plusieurs vecteurs U, V, \dots , dont la signification est indépendante du trièdre mobile, on a :

$$dF = \text{grad } F_v \times DU + \dots \quad (4)$$

Si l'on rapporte U à un trièdre mobile (déterminé par trois vecteurs unités rectangulaires deux à deux, I, J, K), $F(U, V, \dots)$ devient $\Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \dots, I, J, K)$ et l'on a :

$$d\Phi = \text{grad } \Phi_u \times d\mathbf{u} + \dots + \text{grad } \Phi_I \times DI + \text{grad } \Phi_J \times DJ + \text{grad } \Phi_K \times DK.$$

D'autre part :

$$DU = D(U \times I.I + U \times J.J + U \times K.K).$$

La variation de la grandeur scalaire $U \times I$ peut s'évaluer dans le trièdre mobile ou dans le trièdre fixe, les résultats sont égaux; il vient, (puisque $dI = 0$)

$$\begin{aligned} DU &= d\mathbf{u} \times I.I + d\mathbf{u} \times J.J + d\mathbf{u} \times K.K \\ &+ U \times I.DI + U \times J.DJ + U \times K.DK \\ &= d\mathbf{u} + U \times I.DI + U \times J.DJ + U \times K.DK \end{aligned}$$

d'où

$$dF \text{ ou } d\Phi = \text{grad } F_v \times (d\mathbf{u} + U \times I.DI + U \times J.DJ + U \times K.DK) + \dots$$

Enfin :

$$\text{grad } \Phi_u = \text{grad } F_v \quad (5)$$

et

$$\text{grad } \Phi_I = \text{grad } F_v \cdot U \times I, \text{ etc.} \quad (6)$$

Si déjà la fonction F , avait contenu I, J et K on aurait :

$$\text{grad } \Phi_1 = \text{grad } F_1 + \text{grad } F_v \cdot U \times I \quad (7)$$

et les égalités analogues donnent $\text{grad } \Phi_j$ et $\text{grad } \Phi_k$.

Si, enfin, au lieu d'un seul vecteur U , d'autres vecteurs V, \dots, W , sont rapportés à un même trièdre mobile, alors :

$$\text{grad } \Phi_1 = \text{grad } F_1 + \text{grad } F_v \cdot U \times I + \text{grad } F_v \cdot V \times I + \dots, \text{grad } F_w \cdot W \times I, \text{ etc.}$$

Ces résultats nous permettront plus loin des vérifications très importantes (v. p. 123).

13. LE THÉORÈME GÉNÉRAL RESTE VRAI DANS LA THÉORIE DE L'ACTION EUCLIDIENNE.

Les recherches précédentes ont trait aux déformations infiniment petites de la Théorie de l'Élasticité et aussi à celles que l'on considère en Résistance des matériaux. Nous allons montrer que le Théorème général reste vrai pour les déformations non infiniment petites considérées par MM. E. et F. Cosserat dans leur Théorie des corps déformables⁽¹⁾, et cela, sans hypothèses particulières.

Rappelons en quelques mots le point de vue de MM. Cosserat en prenant, pour simplifier l'exposé, le cas de la courbe déformable. (C'est par l'étude de ce cas que débute la Théorie des corps déformables. Elle est suivie de celles des surfaces et des corps.)

L'état naturel de la courbe étant donné, on considère une suite continue de trièdres dont les sommets sont les différents points de la courbe et dont les arêtes, rectangulaires deux à deux (ce qui permettra l'utilisation des formules de la Théorie des surfaces de G. Darboux), ont des orientations connues en fonction de l'argument définissant la position du sommet M_0 du trièdre $M_0 x' y' z'$. Cet argument sera, en général, l'arc s_0 compté depuis l'une des extrémités A_0 ou B_0 jusqu'au point M_0 .

Si l'on donne aux points tels que M_0 un déplacement et que l'on fasse tourner le trièdre correspondant autour d'un axe passant par ce point, l'ensemble continu des trièdres constitue l'état déformé (AB) de la ligne donnée. Les éléments relatifs à cet état seront représentés au moyen des mêmes lettres que pour l'état naturel, l'indice zéro étant supprimé. Mais un point M de l'état déformé provenant d'un point M_0 (d'argument s_0) de l'état naturel, on pourra suivre le déplacement du point M en faisant varier s_0 .

Deux éléments vont jouer un rôle important, savoir :

(1) *Théorie des corps déformables* (Hermann, 1905).

1° Le vecteur V , vitesse du point M ;

2° Le vecteur Ω , rotation instantanée du trièdre de sommet quand ce point se déplace de A vers B , s_0 jouant le rôle du temps, ξ, n, ζ désignent les composantes de \mathbf{v} et p, q, r celles de ω sur les axes du trièdre $(Mx'y'z')$.

MM. Cosserat prennent, comme caractérisant la déformation de ligne en un point d'abscisse s_0 , une fonction W « de deux positions infiniment voisines du trièdre $Mx'y'z'$ c'est-à-dire une fonction de s_0 , de $x, y, z, \alpha', \alpha'' \dots \gamma''$ et de leurs dérivées premières par rapport à s_0 ⁽¹⁾. »

Ils considèrent l'intégrale

$$\int_A^B W ds_0$$

étendue à une portion quelconque de la ligne (M_0) , et imposent à cette intégrale d'avoir « une variation nulle quand on soumet l'ensemble de tous les trièdres de la « ligne déformable, prise dans son état déformé, à une transformation infinitésimale quelconque du groupe des déplacements euclidiens ».

Ceci exige que $\delta W = 0$ pour une telle transformation ou, d'une manière plus concrète, que la valeur de W ne change pas quand on déplace la ligne (M) à la manière des lignes indéformables de la mécanique rationnelle.

Par un raisonnement sur lequel nous nous proposons de revenir on démontre que W peut s'exprimer au moyen de variables $s_0, \xi, n, \zeta, p, q, r$ c'est-à-dire précisément des arguments dont les variations respectives sont nulles pour tout déplacement euclidien. L'intégrale

$$\int_{s_0}^{s_0'} W(s_0, \xi, n, \zeta, p, q, r) ds_0 \quad (2)$$

s'appelle action euclidienne de déformation. On voit que c'est une fonction scalaire de V et Ω , pouvant contenir, outre les composantes de ces vecteurs, l'argument s_0 .

14. La Théorie des corps déformables donne en fonction de ξ, n, ζ, p, q, r et des dérivées de W par rapport à ces arguments, l'expression des composantes suivant les axes du trièdre (M) :

(1) E. et F. Cosserat, *loc. cit.*

(2) La nature de la fonction W dépend de celle des corps déformables considérés...

1° De la force extérieure φ au point M, rapportée à l'unité de longueur de la ligne non déformée.

$$\begin{aligned} X' &= \frac{d}{ds} \frac{\partial W}{\partial \xi} + q \frac{\partial W}{\partial \zeta} - r \frac{\partial W}{\partial \eta}, \\ Y' &= \frac{d}{ds} \frac{\partial W}{\partial \eta} + r \frac{\partial W}{\partial \xi} - p \frac{\partial W}{\partial \zeta}, \\ Z' &= \frac{d}{ds} \frac{\partial W}{\partial \zeta} + p \frac{\partial W}{\partial \eta} - q \frac{\partial W}{\partial \xi}. \end{aligned}$$

2° Du moment extérieur μ au point M, rapporté à l'unité de longueur de la ligne non déformée.

$$\begin{aligned} L' &= \frac{d}{ds_0} \frac{\partial W}{\partial p} + q \frac{\partial W}{\partial r} - r \frac{\partial W}{\partial q} + \eta \frac{\partial W}{\partial \zeta} - \zeta \frac{\partial W}{\partial \eta}, \\ M' &= \frac{d}{ds_0} \frac{\partial W}{\partial q} + r \frac{\partial W}{\partial p} - p \frac{\partial W}{\partial r} + \zeta \frac{\partial W}{\partial \xi} - \xi \frac{\partial W}{\partial \zeta}, \\ N' &= \frac{d}{ds_0} \frac{\partial W}{\partial r} + p \frac{\partial W}{\partial q} - q \frac{\partial W}{\partial p} + \xi \frac{\partial W}{\partial \eta} + \eta \frac{\partial W}{\partial \xi}. \end{aligned}$$

3° De l'effort extérieur \mathcal{E} exercé en M sur la partie MB par la portion AM.

$$F' = \frac{\partial W}{\partial \xi}, \quad G' = \frac{\partial W}{\partial \eta}, \quad H' = \frac{\partial W}{\partial \zeta}.$$

4° Du moment extérieur de déformation $\mathcal{A}b$ en M.

$$I' = \frac{\partial W}{\partial p}, \quad J' = \frac{\partial W}{\partial q}, \quad K' = \frac{\partial W}{\partial r}.$$

Rappelons l'expression au moyen de ces notations du travail élémentaire des forces extérieures pour une déformation supplémentaire infiniment petite caractérisée par les incréments

$$\delta \xi, \delta \eta, \delta \zeta, \delta p, \delta q, \delta r$$

lesquels peuvent être considérés comme obtenus par un déplacement du point M $(\delta'x, \delta'y, \delta'z)$ et une rotation instantanée $\delta\theta(\delta_i, \delta_j, \delta_k)$.

On a, en posant

$$\delta \mathcal{U}_e = - \delta \int_{A_0}^{B_0} W ds_0 \quad (1)$$

$$\delta \mathcal{U}_e = \int_{A_0}^{B_0} (X' \delta' x + Y' \delta' y + Z' \delta' z + L' \delta' l' + M' \delta' j' + N' \delta' k') ds_0 \\ - [F' \delta' x + G' \delta' y + H' \delta' z + I' \delta' l' + J' \delta' j' + K' \delta' k']_{A_0}^{B_0}.$$

15. L'énergie de déformation (qui joue dans cette Théorie le même rôle que le potentiel interne en Résistance des matériaux) est $-W$ par unité de longueur de la ligne non déformée $A_0 B_0$ de sorte que la variation d'énergie totale est :

$$- \int_{A_0}^{B_0} W(s_0, \xi, \eta, \zeta, p, q, r) ds_0 + \int_{A_0}^{B_0} W(s_0, \xi_0, \eta_0, \zeta_0, p, q, r) ds_0$$

quand on fait passer la courbe de l'état naturel à l'état déformé considéré. On sait que l'on peut supposer nulle la fonction $W(s_0, \xi_0, \eta_0, \dots, r_0)$; car on peut, sans changer la valeur des éléments définis plus haut, augmenter la fonction

$$W(s_0, \xi_0, \eta_0, \dots, r_0)$$

d'une fonction déterminée quelconque de s_0 .

L'énergie prend alors pour expression :

$$\int_{A_0}^{B_0} -W(s_0, \xi, \eta, \zeta, p, q, r) ds_0.$$

Tels sont, dans le cas de la ligne déformable, les éléments essentiels intervenant dans l'étude des déformations.

16. Comme nous nous proposons de faire usage de l'analyse vectorielle, nous allons transformer les notations et formules précédentes.

Nous considérerons la fonction W représentant l'action euclidienne par unité de longueur de la ligne $A_0 B_0$, comme une fonction scalaire de V et de Ω , soit $W(V, \Omega)$ et nous aurons à considérer les gradients de W relatifs à V et Ω .

Désignons par φ et μ la force extérieure et le moment extérieur en un point par unité de longueur de la ligne $A_0 B_0$, par \mathcal{E} et \mathcal{M} l'effort extérieur et le moment de déformation au même point dont il a été question plus haut.

(*) V. « Théorie », p. 11 et suiv.

Les formules de MM. Cosserat peuvent alors s'écrire :

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= \text{grad } W_v, \\ \mathcal{A}b &= \text{grad } W_\Omega, \\ \varphi &= \frac{D}{Ds_0} \mathcal{E}, \\ \mu &= \frac{D\mathcal{A}b}{Ds_0} + V \wedge \mathcal{E}.\end{aligned}$$

Le travail élémentaire des forces extérieures s'écrit simplement :

$$\delta \mathcal{C}_e = \int_{A_0}^{B_0} (\varphi \times \Delta \mathbf{M} + \mu \times \Delta \theta) ds_0 - [\mathcal{E} \times \Delta \mathbf{M} + \mathcal{A}b \times \Delta \theta]_{A_0}^{B_0}.$$

Avant d'aborder la démonstration du théorème fondamental rappelons que :

1° L'on peut supposer $W(s_0, \xi_0, n_0, \zeta_0, p_0, q_0, r_0)$ identiquement nulle (v. p. 91).

2° Dans l'état non déformé l'effort et le moment extérieurs de déformation sont nuls (*Théorie*, p. 63, n° 29).

3° Introduisons enfin la remarque suivante :

Quand la courbe passe de l'état naturel à l'état déformé, la fonction W part de la valeur zéro comme on l'a dit plus haut et prend en chaque point une valeur qui dépend de la déformation.

L'intégrale $-\int_{A_0}^{B_0} W ds_0$ représente le travail des forces extérieures dans le cas limite où ces forces varient infiniment lentement à partir de valeurs nulles, acquièrent progressivement les valeurs exigées par la déformation considérée en restant constamment en équilibre avec les forces intérieures. Cette intégrale représente, quelles que soient les hypothèses que l'on pourra introduire dans la suite, l'énergie interne communiquée à la ligne matérielle. Elle doit donc être positive pour tout système de valeurs de (autres que celles de l'état naturel) et quelque petit que soit l'arc A_0B_0 pris sur la ligne. Cela exige que $-W$ ne soit négative pour aucune valeur de s_0 .

17. Cela posé, considérons la forme quadratique

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} \right)_0 \delta \xi^2 + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \gamma^2} \right)_0 \delta \gamma^2 + \dots + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} \right)_0 \delta r^2 \right. \\ \left. + 2 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \gamma \partial \xi} \right)_0 \delta \gamma \delta \xi + \dots + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial p \partial q} \right)_0 \partial p \partial q \right]\end{aligned}$$

elle constitue l'ensemble des termes du second ordre dans le développement de :

$$W(s_0, \xi_0 + \delta\xi, \eta_0 + \delta\eta, \dots, r_0 + \delta r)$$

et puisque l'on a à la fois :

$$W(s_0, \xi_0, \eta_0, \dots, r_0) = 0, \\ \left(\frac{\partial W}{\partial \xi}\right)_0 = \left(\frac{\partial W}{\partial \eta}\right)_0 = \left(\frac{\partial W}{\partial \zeta}\right)_0 = \left(\frac{\partial W}{\partial p}\right)_0 = \left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)_0 = \left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)_0 = 0$$

le développement commence par ces termes du second ordre.

Et comme $-W$, énergie de déformation par unité de longueur, présente un minimum nul pour l'état naturel, W est maxima pour cet état. Or, pour des valeurs suffisamment petites de $\delta\xi, \delta\eta, \dots, \delta r$, le signe de $W(s_0, \xi_0 + \delta\xi, \eta_0 + \delta\eta, \dots, r_0 + \delta r)$ est celui de l'expression quadratique considérée ci-dessus.

18. W étant maxima pour les valeurs $\xi_0, \eta_0, \dots, r_0$, cette fonction quadratique est au moins semi-définie. Si le discriminant de la forme est différent de zéro, la forme est générale et par conséquent définie négative, et le maximum de W est strict⁽¹⁾.

Ce discriminant n'est autre que le Hessian de la fonction W .

$$\Delta = \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2}\right)_0 & \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \xi \partial \eta}\right)_0 & \dots & \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \xi \partial r}\right)_0 \\ \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \eta \partial \xi}\right)_0 & \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2}\right)_0 & \dots & \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \eta \partial r}\right)_0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \left(\frac{\partial^2 W}{\partial r \partial \xi}\right)_0 & \left(\frac{\partial^2 W}{\partial r \partial \eta}\right)_0 & \dots & \left(\frac{\partial^2 W}{\partial r^2}\right)_0 \end{vmatrix}.$$

C'est aussi le Jacobien des fonctions

$$\frac{\partial W}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial W}{\partial \eta}, \quad \dots, \quad K = \frac{\partial W}{\partial r}$$

pour les valeurs $\xi_0, \eta_0, \dots, r_0$. L'hypothèse précédente, laquelle a déjà été intro-

(1) V. J. Hadamard, *Calcul des variations* (Hermann, 1910), p. 19.

duite dans la « Théorie » (*) peut se justifier ainsi : elle revient à dire que les équations en ξ, n, \dots, r :

$$F = \frac{\partial W}{\partial \xi}, \quad G = \frac{\partial W}{\partial \eta}, \quad \dots, \quad K = \frac{\partial W}{\partial r}$$

lesquelles pour $F=G=\dots=K=0$ sont satisfaites pour $\xi=\xi_0, n=n_0, \dots, r=r_0$, définissent un seul système de 6 fonctions des variables F, G, \dots, K , se réduisant à $\xi_0, \eta_0, \dots, r_0$, quand $F=G=\dots=K=0$; autrement dit, la courbe déformable admet une seule déformation voisine de l'état naturel pour les valeurs de l'effort du moment extérieur de déformation voisines de zéro.

Le raisonnement précédent écarte le cas où la forme quadratique :

$$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2}\right)_0 \delta \xi^2 + \dots + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial r^2}\right)_0 \delta r^2 + 2\left(\frac{\partial^2 W}{\partial \xi \partial r}\right)_0 \delta \xi \delta r + \dots + 2\left(\frac{\partial^2 W}{\partial q \partial r}\right)_0 \delta q \delta r$$

serait identiquement nulle; en raison du fait que W a un maximum pour $\xi_0, \eta_0, \dots, r_0$, si la forme quadratique était identiquement nulle, il devrait en être de même de l'ensemble des termes du troisième degré; nous ne nous arrêterons pas à l'examen d'un cas exigeant un si grand nombre de conditions.

19. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME GÉNÉRAL DANS LA THÉORIE DE L'ACTION EUCLIDIENNE DE DÉFORMATION.

Soient $\xi_1, \eta_1, \dots, r_1$, pour un point d'argument s_0 , les quantités précédemment définies et correspondant à une déformation d'équilibre, déterminée.

Supposons que, la ligne étant à l'état naturel, on la charge brusquement d'une distribution continue de forces dont le vecteur unitaire (par unité de longueur de la ligne déformée) soit invariable et égal à φ_1 , et de même d'une distribution continue de moments dont le vecteur unitaire soit invariable et égal à μ_1 .

Enfin, aux extrémités disposons des forces et des moments invariables

$$-(\mathcal{E}_A)_1, \quad -(\mathcal{M}_A)_1, \quad +(\mathcal{E}_B)_1, \quad +(\mathcal{M}_B)_1.$$

Appelons T_0 le travail total de ces forces et moments depuis l'état naturel jusqu'à une déformation virtuelle quelconque de la courbe.

(*) E. et L. Cosserat, *Théorie des corps déformables*, p. 26.

Nous allons montrer que de toutes les déformations virtuelles, celle qui rend maxima la somme

$$T_e + \int_{A_0}^{B_0} W ds_0$$

est la déformation d'équilibre.

Ainsi sera étendu à la Théorie de l'Action euclidienne de déformation, le théorème déjà démontré dans la Théorie de l'Élasticité et dans celle de la Résistance des matériaux.

Remarquons tout d'abord que si l'on considère la déformation d'équilibre, le travail élémentaire à partir de cette position, soit δT_e , n'est autre que $\delta \mathcal{C}_e$ déjà calculé, ou $-\int_{A_0}^{B_0} \delta W ds$.

On a donc

$$\delta_1 T_e + \int_{A_0}^{B_0} \delta_1 W ds = 0$$

l'indice 1 rappelant que l'on considère une variation à partir de la déformation d'équilibre ou :

$$\delta_1 \left(T_e + \int_{A_0}^{B_0} W ds \right) = 0$$

ce qui exprime que les termes de premier ordre en $\delta \xi, \delta \eta, \dots, \delta r$, ont une somme nulle, ou encore que la condition du premier ordre, pour l'existence de l'extremum, est bien vérifiée.

20. Passons à la condition du second ordre.

Au préalable donnons une expression commode de T_e pour une déformation virtuelle quelconque. Au cours d'une telle déformation on a :

$$\begin{aligned} \delta T_e &= \int_{A_0}^{B_0} (\varphi_1 \times \Delta M + \mu_1 \times \Delta \theta) ds_0 \\ &\quad - [\mathcal{E}_1 \times \Delta M + \mathcal{A}b_1 \times \Delta \theta]_{A_0}^{B_0} \\ &= - \int_{A_0}^{B_0} \left[\mathcal{E}_1 \times \frac{D}{Ds_0} \Delta M + \mathcal{A}b_1 \times \frac{D}{Ds_0} \Delta \theta - V \wedge \mathcal{E}_1 \times \Delta \theta \right] ds_0. \end{aligned}$$

D'ailleurs

$$V \wedge \mathcal{E}_1 \times \Delta \theta = [V \mathcal{E}_1 \Delta \theta] = - \mathcal{E}_1 \times (V \wedge \Delta \theta).$$

On a donc :

$$\delta T_e = - \int_{A_0}^{B_0} \left\{ \mathcal{E}_1 \times \left[\frac{D}{Ds} \Delta M + V \wedge \Delta \theta \right] + \mathcal{A}b_1 \times \frac{D}{Ds} \Delta \theta \right\} ds.$$

Rappelons les formules démontrées p. 86 :

$$\delta V = \frac{D}{Ds_0} \Delta M + V \wedge \Delta \theta,$$

$$\delta \Omega = \frac{D}{Ds_0} \Delta \theta;$$

elles permettent d'écrire

$$\delta T_e = - \int_{\lambda_0}^{\beta_0} \{ \mathcal{E}_1 \times \delta V + \mathcal{A} \mathfrak{b}_1 \times \delta \Omega \} ds_0.$$

On en déduit, pour toute la déformation virtuelle :

$$T_e = - \int_{\lambda_0}^{\beta_0} \{ \mathcal{E}_1 \times (v - v_0) + \mathcal{A} \mathfrak{b}_1 \times (\omega - \omega_0) \} ds_0$$

ou encore, avec les notations de MM. Cosserat :

$$T_e = - \int_{\lambda_0}^{\beta_0} \left[\left(\frac{\partial W}{\partial \xi} \right)_1 (\xi - \xi_0) + \left(\frac{\partial W}{\partial \eta} \right)_1 (\eta - \eta_0) + \dots + \left(\frac{\partial W}{\partial r} \right)_1 (r - r_0) \right] ds_0.$$

Enfin, si l'on donne à ξ, η, \dots, r , d'abord les valeurs $\xi_1, \eta_1, \dots, r_1$, puis $\xi_1 + \delta \xi$, $\eta_1 + \delta \eta, \dots, r_1 + \delta r$, la variation de T_e sera exactement

$$- \int_{\lambda_0}^{\beta_0} \left[\left(\frac{\partial W}{\partial \xi} \right)_1 \delta \xi + \left(\frac{\partial W}{\partial \eta} \right)_1 \delta \eta + \dots + \left(\frac{\partial W}{\partial r} \right)_1 \delta r \right] ds_0.$$

Cette variation ne contient que des infiniments petits du premier ordre, car l'expression de l'élément différentiel dans T_e est linéaire par rapport aux $\xi, \eta, \zeta, \dots, r$.

On en conclut que la variation de $T_e + \int_{\lambda_0}^{\beta_0} W ds_0$ à partir de la position d'équilibre est exactement :

$$\Delta \left(T_e + \int_{\lambda_0}^{\beta_0} W ds_0 \right) = \frac{1}{2} \int_{\lambda_0}^{\beta_0} \left\{ \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} \right)_1 \delta \xi^2 + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} \right)_1 \delta \eta^2 + \dots \right. \\ \left. + 2 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \eta \partial \zeta} \right)_1 \delta \eta \delta \zeta + \dots + 2 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial p \partial q} \right)_1 \delta p \delta q \right\} ds_0 + \int_{\lambda_0}^{\beta_0} R ds_0.$$

R étant une quantité du troisième ordre par rapport aux variations $\delta \xi, \delta \eta, \dots, \delta r$ c'est-à-dire telle que le rapport :

$$\frac{R}{\delta \xi^2 + \delta \eta^2 + \delta \zeta^2 + \delta p^2 + \delta q^2 + \delta r^2}$$

est infiniment petit en même temps que son dénominateur.

21. Pour établir l'existence du maximum de $T_e + \int_{s_0}^{s_1} W ds$ il suffit de montrer que l'ensemble des termes du second ordre

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} \right)_1 \delta \xi^2 + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} \right)_1 \delta \eta^2 + \dots + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} \right)_1 \delta r^2 \\ & + 2 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \eta \partial \zeta} \right)_1 \delta \eta \delta \zeta + 2 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \zeta \partial \xi} \right)_1 \delta \zeta \delta \xi + \dots + 2 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial p \partial q} \right)_1 \delta p \delta q \end{aligned}$$

est une forme quadratique définie négative.

Or, on a vu que le Hessien de W est différent de zéro pour les valeurs $\xi_0, \eta_0, \zeta_0, \dots, r_0$, des arguments (v. p. 93).

Quand la courbe passe de l'état naturel à l'état d'équilibre considéré, la forme quadratique, dont les coefficients varient d'une manière continue, ne peut devenir indéfinie⁽¹⁾, sans passer par une forme non générale; si donc nous considérons les déformées pour lesquelles $\xi, \eta, \zeta, \dots, r$ restent dans le champ tel que le Hessien de W ne s'annule pas⁽²⁾, la forme quadratique reste définie.

Elle est évidemment définie négative, sinon quand $\xi, \eta, \zeta, \dots, r$ varient d'une manière continue, elle passerait du signe $-$ au signe $+$, pour un système de valeurs de ces arguments et s'annulerait par conséquent; chacun des carrés qui la composent devrait s'annuler, puisque tous sont de même signe, avant et après; mais alors le discriminant serait nul, ce qui est impossible.

En résumé, dans le champ considéré, la forme quadratique :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} \right)_1 \delta \xi^2 + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} \right)_1 \delta \eta^2 + \dots \\ & + 2 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \eta \partial \zeta} \right)_1 \delta \eta \delta \zeta + \dots + 2 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial p \partial q} \right)_1 \delta p \delta q + \dots + 2 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial r \partial p} \right)_1 \delta r \delta p \end{aligned}$$

est définie négative et l'existence du maximum est établie.

(1) V. p. ex. J. Hadamard, *Calcul des variations*, pages 18³ et suivantes.

(2) Ce champ existe puisque le Hessien n'est pas nul pour les valeurs $\xi_0, \eta_0, \zeta_0, \dots, r_0$. On peut démontrer qu'il existe un nombre ε positif, indépendant de s_0 et tel que le champ comprend les déformations dans lesquelles $\xi - \xi_0, \eta - \eta_0, \dots, r - r_0$, sont inférieurs en valeur absolue à ε .

Soit $\alpha(s_0)$ un nombre > 0 tel que si $|\xi - \xi_0|, |\eta - \eta_0|, \dots, |r - r_0|$ restent inférieurs à α , le Hessien de W pour $s = s_0$ ne s'annule pas.

Il suffira de prendre pour ε le minimum de $\alpha(s_0)$ et la remarque sera établie. Ce minimum ne peut être zéro, car cela redeviendrait à dire que, quelque petit que soit ε il y a toujours des valeurs de s_0 pour lesquelles le Hessien s'annule quand on prend les différences $\xi - \xi_0, \eta - \eta_0, \dots, r - r_0$ inférieures à ε en valeur absolue. Mais alors on démontrerait par un raisonnement classique que le Hessien est nul dans l'état naturel, pour certaines valeurs de s_0 , ce qui a été écarté.

Ce raisonnement suppose que les dérivées partielles de W sont continues jusqu'au deuxième ordre inclusivement.

22.

LIGNE DÉFORMABLE SOUMISE A DES LIAISONS.

Soient $f_1 = 0, f_2 = 0, \dots, f_n = 0$ (1) les équations de liaisons, les variables étant $x, y, z, \alpha, \alpha', \dots, \gamma''$, coordonnées du sommet et cosinus directeurs des axes du trièdre $Mx'y'z'$ attaché au point d'argument s_0 , ainsi que leurs dérivées par rapport à s_0 ; supposons que ces équations soient satisfaites quel que soit s_0 , c'est-à-dire en tous les points de la courbe. Une variation virtuelle de f_1, f_2, \dots, f_n , s'exprimera au moyen des variations $\delta'x, \delta'y, \delta'z, \delta I', \delta J', \delta K'$.

Dans ce cas particulier de la courbe soumise à des liaisons nous définissons les éléments $F', G', H', I', J', K', X', Y, Z', L', M', N$, au moyen de l'égalité

$$(2) \quad \int_{A_0}^{B_0} \delta W ds_0 = [F'\delta'_x + G'\delta'_y + \dots + K'\delta_{K'}]_{A_0}^{B_0} - \int_{A_0}^{B_0} (X'\delta'_x + Y'\delta'_y + \dots + M'\delta_{M'}) ds_0$$

laquelle doit avoir lieu seulement en vertu des équations (1) et non plus identiquement.

Pour rendre plus intuitive cette définition, on peut montrer qu'elle est suggérée par le principe des travaux virtuels; désignons $\mathcal{F}', \mathcal{G}', \mathcal{H}', \dots, \mathcal{N}'$, etc., des quantités analogues à celles qui figurent dans l'équation (2), $\mathcal{F}', \mathcal{G}', \mathcal{H}'$, par exemple, étant maintenant les composantes de l'effort extérieur total de déformation (lequel est la somme de l'effort réellement appliqué F, G, H , et de la force de liaison). L'équation (2) dans laquelle on remplacerait F, G, \dots, N , par $\mathcal{F}', \mathcal{G}', \dots, \mathcal{N}'$ devrait être satisfaite identiquement, mais pour toute déformation respectant les liaisons la somme des travaux virtuels des forces de liaison est nulle, il en résulte que pour ces déformations seulement l'équation (2) devra être satisfaite par F', G', H', \dots, N' .

Nous allons montrer que la somme $\mathcal{C}_e + \int_{A_0}^{B_0} W ds_0$, \mathcal{C}_e étant la somme des travaux des forces extérieures réellement appliquées (abstraction faite par conséquent des travaux des forces de liaison), est maxima pour la déformation d'équilibre.

Cette question est l'analogie de celle, connue dans le Calcul de Variation sous le nom de Problème des Isopérimètres ou de l'Extremum lié.

$\lambda_1(s), \lambda_2(s), \dots, \lambda_n(s)$, étant des fonctions appropriées de s_0 , l'expression

$$\delta \mathcal{C}_e + \int_{A_0}^{B_0} (\delta W + \lambda_1 \delta f_1 + \lambda_2 \delta f_2 + \dots + \lambda_n \delta f_n) ds_0 \quad (1)$$

est nulle, quelle que soit la déformation élémentaire à laquelle correspondent les variations δ .

(1) V. p. ex., Ernesto Pascal, *Calcolo delle Variazioni e Calcolo delle differenze finite*, Parte prima (Hœpli), et Hadamard, *Calcul des Variations* (Hermann).

En posant

$$W_1 = W + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_n f_n$$

il semble que l'on pourrait se ramener au cas de la courbe libre en considérant l'expression

$$\mathcal{C}_e + \int_{A_0}^{B_0} W_1 ds_0.$$

Mais cette expression ne contient pas nécessairement les seuls arguments du cas de l'extremum libre; notamment x, y, z , ne figurant pas dans la première recherche, les calculs faits sur W pour la courbe libre ne seraient pas valables pour W_1 .

Remarquons qu'en appelant \mathcal{C}'_e le travail virtuel de toutes les forces agissant sur la courbe (forces appliquées et forces de liaison), on peut écrire :

$$\delta \left(\int_{A_0}^{B_0} W ds + \mathcal{C}'_e \right) = 0$$

et

$$\delta^2 \left(\int_{A_0}^{B_0} W ds + \mathcal{C}'_e \right) < 0$$

d'après ce qui a été vu dans le cas de la courbe libre.

En particulier si l'on ne considère que des déformations virtuelles compatibles avec les liaisons, c'est-à-dire celles du domaine restreint pour lesquelles

$$f_1 = f_2 = \dots = f_n = 0$$

on a les inégalités précédentes; mais alors, $\mathcal{C}'_e = \mathcal{C}_e$.

Finalement :

$$\delta \left(\int_{A_0}^{B_0} W ds_0 + \mathcal{C}_e \right) = 0$$

avec

$$\delta^2 \left(\int_{A_0}^{B_0} W ds + \mathcal{C}_e \right) < 0$$

autrement dit : La somme algébrique des travaux des forces réellement appliquées et des forces intérieures est maxima pour la déformation d'équilibre, les forces extérieures étant supposées appliquées dès le début de la déformation.

CHAPITRE IV

Recherche de l'expression de l'action euclidienne de déformation.

23. Nous nous proposons de reprendre le raisonnement par lequel MM. E. et F. Cosserat sont parvenus à ce résultat fondamental et d'établir rigoureusement, sur ce point, les conclusions des auteurs de ce remarquable monument.

L'exposition qui va suivre est faite dans le cas de la ligne déformable ; mais pour la surface ou le corps déformables, il n'y aurait d'autre complication que celle des notations. W doit être une fonction « de deux positions voisines du trièdre $Mx'y'z'$, c'est-à-dire une fonction de s_0 , de $x, y, z, \alpha, \alpha', \dots, \gamma''$, et de leurs dérivées premières par rapport à s_0 . » (1)

Soit :

$$\mathcal{F} \left(s_0, x, y, z, \alpha, \alpha', \dots, \gamma'', \frac{dx}{ds_0}, \frac{dy}{ds_0}, \frac{dz}{ds_0}, \frac{d\alpha}{ds_0}, \frac{d\alpha'}{ds_0}, \dots, \frac{d\gamma''}{ds_0} \right).$$

Il faut que $\delta F = 0$ pour une transformation infinitésimale du groupe des déplacements euclidiens : dans une telle transformation on a :

$$(I) \quad \begin{aligned} \delta x &= \delta a_1 + z \delta \omega_2 - y \delta \omega_3, \\ \delta y &= \delta a_2 + x \delta \omega_3 - z \delta \omega_1, \\ \delta z &= \delta a_3 + y \delta \omega_1 - x \delta \omega_2; \end{aligned}$$

$\delta a_1, \delta a_2, \delta a_3, \delta \omega_1, \delta \omega_2, \delta \omega_3$, sont six constantes arbitraires, les trois dernières sont, en outre, les composantes, suivant les axes fixes, de la rotation infiniment petite du trièdre $Mx'y'z'$.

Il s'agit de montrer que \mathcal{F} peut s'exprimer au moyen de $\xi, \eta, \zeta, p, q, r$, seulement.

Les dérivées des cosinus s'expriment suivant des formules connues en fonction de ce cosinus et de p, q et r .

$$\frac{d\alpha}{ds_0} = q\alpha'' - r\alpha', \quad \text{etc.}$$

(1) E. et F. Cosserat, *Th. des Corps déf.*, p. 8.

Il est donc loisible de mettre \mathcal{F} sous la forme :

$$\Phi\left(s_0, x, y, z, \alpha, \alpha', \dots, \gamma'', \frac{dx}{ds_0}, \frac{dy}{ds_0}, \frac{dz}{ds_0}, p, q, r\right).$$

Pour chasser les cosinus de cette expression, MM. E. et F. Cosserat considèrent les trois équations (2)

$$(2) \quad \begin{aligned} \xi &= \alpha \frac{dx}{ds_0} + \beta \frac{dy}{ds_0} + \gamma \frac{dz}{ds_0}, \\ \eta &= \alpha' \frac{dx}{ds_0} + \beta' \frac{dy}{ds_0} + \gamma' \frac{dz}{ds_0}, \\ \zeta &= \alpha'' \frac{dx}{ds_0} + \beta'' \frac{dy}{ds_0} + \gamma'' \frac{dz}{ds_0} \end{aligned}$$

lesquelles « permettent de concevoir qu'on exprime les neuf cosinus au moyen de ξ, η, ζ , et des dérivées premières de x, y et z par rapport à s_0 . » (*)

24. Or, ces équations (2) et les six relations entre les neuf cosinus, par lesquelles on peut les compléter ne déterminent pas ces cosinus. En effet, les équations (2) ne sont compatibles que si :

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \left(\frac{dx}{ds_0}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds_0}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds_0}\right)^2$$

et cette condition peut remplacer l'une des équations (2); il ne reste donc que $2+6=8$ équations pour exprimer les neuf cosinus $\alpha, \alpha', \alpha'', \dots, \gamma''$.

D'ailleurs le raisonnement géométrique suivant confirme cette remarque. Dire que l'on peut déduire les neuf cosinus des équations (2) et des six relations classiques reviendrait à dire que, si l'on se donne les projections respectives d'un même vecteur sur les axes de deux trièdres, ces trièdres ont une orientation relative déterminée. Mais considérons un ensemble de deux trièdres répondant à la question et faisons tourner l'un par rapport à l'autre autour du vecteur, les composantes ne varient pas et toute nouvelle position relative ainsi obtenue répond aussi à la question.

On n'a donc pas le droit d'éliminer les cosinus par le moyen indiqué. Opérons

(*) E. et F. Cosserat, *loc. cit.*

autrement : gardons ces cosinus dans la fonction Φ et remplaçons $\frac{dx}{ds_0}$, $\frac{dy}{ds_0}$, $\frac{dz}{ds_0}$ par les valeurs tirées des équations (2), c'est-à-dire :

$$\frac{dx}{ds_0} = \alpha \xi + \alpha' \eta + \alpha'' \zeta,$$

$$\frac{dy}{ds_0} = \beta \xi + \beta' \eta + \beta'' \zeta,$$

$$\frac{dz}{ds_0} = \gamma \xi + \gamma' \eta + \gamma'' \zeta.$$

La fonction Φ devient :

$$\psi(s_0, x, y, z, \alpha, \alpha', \dots, \alpha'', \beta, \beta', \dots, \beta'', \gamma, \gamma', \dots, \gamma'').$$

Écrivons l'invariance de la fonction ψ dans les conditions déjà précisées. On a, si l'on tient compte de ce que $\delta p = \delta q = \delta r = \delta \xi = \delta \eta = \delta \zeta = 0$:

$$\begin{aligned} \delta \psi = & \frac{\partial \psi}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \psi}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \psi}{\partial z} \delta z + \\ & + \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \delta \alpha + \frac{\partial \psi}{\partial \alpha'} \delta \alpha' + \frac{\partial \psi}{\partial \alpha''} \delta \alpha'' + \frac{\partial \psi}{\partial \beta} \delta \beta + \dots + \frac{\partial \psi}{\partial \gamma''} \delta \gamma''. \end{aligned}$$

Remplaçons δx , δy , δz , par leurs expressions (1) et les variations des cosinus par leurs valeurs tirées de (3) :

$$(3) \quad \begin{aligned} \delta \alpha &= \alpha'' \delta \omega_2 - \alpha' \delta \omega_3, & \delta \alpha' &= \dots, & \delta \alpha'' &= \dots, \\ \delta \beta &= \beta'' \delta \omega_3 - \beta' \delta \omega_1, & \delta \beta' &= \dots, & \delta \beta'' &= \dots, \\ \delta \gamma &= \gamma'' \delta \omega_1 - \beta'' \delta \omega_2, & \delta \gamma' &= \dots, & \delta \gamma'' &= \dots. \end{aligned}$$

On voit d'abord, à cause du caractère arbitraire de la translation δa_1 , δa_2 , δa_3 , que les quantités que multiplient respectivement ces composantes sont nulles, d'où :

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0$$

ce qui montre que x , y et z ne figurent pas dans la fonction ψ .

De même, la rotation $\delta \omega_1$, $\delta \omega_2$, $\delta \omega_3$, étant arbitraire, les facteurs de ces diverses variations doivent être nuls, ce qui donne les trois équations :

$$(4) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha''} \alpha' + \frac{\partial \psi}{\partial \beta''} \beta' + \frac{\partial \psi}{\partial \gamma''} \gamma' &= \frac{\partial \psi}{\partial \alpha'} \alpha'' + \frac{\partial \psi}{\partial \beta'} \beta'' + \frac{\partial \psi}{\partial \gamma'} \gamma'', \\ \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \alpha'' + \frac{\partial \psi}{\partial \beta} \beta'' + \frac{\partial \psi}{\partial \gamma} \gamma'' &= \frac{\partial \psi}{\partial \alpha''} \alpha + \frac{\partial \psi}{\partial \beta''} \beta + \frac{\partial \psi}{\partial \gamma''} \gamma, \\ \frac{\partial \psi}{\partial \alpha'} \alpha + \frac{\partial \psi}{\partial \beta'} \beta + \frac{\partial \psi}{\partial \gamma'} \gamma &= \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \alpha' + \frac{\partial \psi}{\partial \beta} \beta' + \frac{\partial \psi}{\partial \gamma} \gamma'. \end{aligned}$$

25. Si les variables $\alpha, \beta, \dots, \gamma''$, étaient indépendantes, nous pourrions résoudre par exemple la première équation par les moyens ordinaires d'intégration et tenir compte des deux dernières pour particulariser la solution trouvée; mais les variables sont liées comme on sait par six équations, aussi nous opérerons autrement pour trouver la forme de ψ .

On peut toujours trouver pour un système de valeurs satisfaisant aux relations entre cosinus, trois nombres a_i, b_i, c_i , tels que :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi}{\partial \alpha} &= a_i \alpha + b_i \beta + c_i \gamma, \\ \frac{\partial \psi}{\partial \alpha'} &= a_i \alpha' + b_i \beta' + c_i \gamma', \\ \frac{\partial \psi}{\partial \alpha''} &= a_i \alpha'' + b_i \beta'' + c_i \gamma''\end{aligned}$$

car alors le déterminant des inconnues a_i, b_i, c_i , est égal à $+1$. De même

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi}{\partial \beta} &= a_2 \alpha + b_2 \beta + c_2 \gamma & \text{et} & \quad \frac{\partial \psi}{\partial \gamma} = a_3 \alpha + b_3 \beta + c_3 \gamma, \\ \frac{\partial \psi}{\partial \beta'} &= a_2 \alpha' + b_2 \beta' + c_2 \gamma' & \frac{\partial \psi}{\partial \gamma'} &= a_3 \alpha' + b_3 \beta' + c_3 \gamma', \\ \frac{\partial \psi}{\partial \beta''} &= a_2 \alpha'' + b_2 \beta'' + c_2 \gamma'' & \frac{\partial \psi}{\partial \gamma''} &= a_3 \alpha'' + b_3 \beta'' + c_3 \gamma'';\end{aligned}$$

les équations (4) entraînent $b_i = a_2, a_i = c_1, c_i = b_3$ d'où en changeant de notations :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi}{\partial \alpha} &= \lambda_1 \alpha + \mu \beta + \nu \gamma, & \frac{\partial \psi}{\partial \alpha'} &= \lambda_1 \alpha' + \mu \beta' + \nu \gamma', & \frac{\partial \psi}{\partial \alpha''} &= \dots, \\ \frac{\partial \psi}{\partial \beta} &= \mu \alpha + \lambda_2 \beta + \rho \nu, & \frac{\partial \psi}{\partial \beta'} &= \mu \alpha' + \lambda_2 \beta' + \rho \nu, & \frac{\partial \psi}{\partial \beta''} &= \dots, \\ \frac{\partial \psi}{\partial \gamma} &= \nu \alpha + \rho \beta + \lambda_3 \gamma, & \frac{\partial \psi}{\partial \gamma'} &= \nu \alpha' + \rho \beta' + \lambda_3 \gamma', & \frac{\partial \psi}{\partial \gamma''} &= \dots,\end{aligned}$$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu, \nu, \rho$ dépendant de $\alpha, \beta, \dots, \gamma''$.

On en déduit que :

$$\begin{aligned}& \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial \psi}{\partial \alpha'} d\alpha' + \dots + \frac{\partial \psi}{\partial \alpha''} d\alpha'' \\ &= \frac{1}{2} [\lambda_1 d(\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2) + \lambda_2 d(\beta^2 + \beta'^2 + \beta''^2) + \lambda_3 d(\gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2)] \\ & \quad + \mu d(\alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'') + \nu d(\beta\gamma + \beta'\gamma' + \beta''\gamma'') + \rho d(\gamma\alpha + \gamma'\alpha' + \gamma''\alpha'').\end{aligned}$$

Enfin, en tenant compte des relations entre cosinus :

$$\frac{\partial \psi}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial \psi}{\partial \alpha'} d\alpha' + \dots + \frac{\partial \psi}{\partial \gamma''} d\gamma'' = 0.$$

Donc Ψ considérée comme fonction de $\alpha, \alpha', \dots, \gamma''$, en tant qu'elle contient explicitement ces variables a une différentielle toujours nulle; autrement dit, elle ne contient pas en réalité $\alpha, \alpha', \dots, \gamma''$ explicitement et se réduit à

$$W(s_0, \xi, \eta, \zeta, p, q, r). \quad \text{c. q. f. d.}$$

26.

REMARQUES.

Le calcul vectoriel permet de retrouver le résultat ci-dessus. Les équations (4) expriment que la fonction ψ cherchée est une fonction scalaire de $\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}$, vecteurs unités portés par les axes fixes tels que :

$$\begin{aligned} \text{grad } \psi_{\mathbf{J}} \times \mathbf{K} &= \text{grad } \psi_{\mathbf{K}} \times \mathbf{J} = \mu, \\ \text{grad } \psi_{\mathbf{K}} \times \mathbf{I} &= \text{grad } \psi_{\mathbf{I}} \times \mathbf{K} = \nu, \\ \text{grad } \psi_{\mathbf{I}} \times \mathbf{J} &= \text{grad } \psi_{\mathbf{J}} \times \mathbf{I} = \rho, \end{aligned}$$

Posons

$$\text{grad } \psi_{\mathbf{I}} \times \mathbf{I} = \lambda_1, \quad \text{grad } \psi_{\mathbf{J}} \times \mathbf{J} = \lambda_2, \quad \text{grad } \psi_{\mathbf{K}} \times \mathbf{K} = \lambda_3.$$

Il vient :

$$\begin{aligned} \text{grad } \psi_{\mathbf{I}} &= \lambda_1 \mathbf{I} + \rho \mathbf{J} + \nu \mathbf{K}, \\ \text{grad } \psi_{\mathbf{J}} &= \rho \mathbf{I} + \lambda_2 \mathbf{J} + \mu \mathbf{K}, \\ \text{grad } \psi_{\mathbf{K}} &= \nu \mathbf{I} + \mu \mathbf{J} + \lambda_3 \mathbf{K} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial \psi}{\partial \alpha'} d\alpha' + \dots + \frac{\partial \psi}{\partial \gamma''} d\gamma'' &= \frac{1}{2} [\lambda_1 d(\mathbf{I}^2) + \lambda_2 d(\mathbf{J}^2) + \lambda_3 d(\mathbf{K}^2) \\ &+ \mu d(\mathbf{J} \times \mathbf{K}) + \nu d(\mathbf{K} \times \mathbf{I}) + \rho d(\mathbf{I} \times \mathbf{J})] \end{aligned}$$

et en tenant compte des relations telles que : $\mathbf{I}^2 = 1$, $\mathbf{J} \times \mathbf{K} = 0$, il reste :

$$\frac{\partial \psi}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial \psi}{\partial \alpha'} d\alpha' + \dots + \frac{\partial \psi}{\partial \gamma''} d\gamma'' = 0$$

ce qui donne la conclusion déjà énoncée.

27. II. Le résultat simple auquel nous avons été conduit nous incite à rechercher une interprétation qui permettrait de le retrouver sans calcul. Or, dire que l'on ne considère que les valeurs de $\alpha, \alpha', \alpha'', \beta, \beta', \beta'', \gamma, \gamma', \gamma''$, satisfaisant aux relations classiques entre cosinus, revient à dire que les directions définies par ces quantités correspondent à un trièdre trirectangle et par conséquent à un solide invariable. Les variations $d\alpha, d\alpha', d\alpha'', \dots, d\gamma''$, que l'on peut seules envisager sont celles qui respectent cette invariabilité et par conséquent correspondent à un déplacement élémentaire de ce solide invariable, mais ce déplacement se traduit par une transformation du groupe des déplacements euclidiens et tout ensemble acceptable des valeurs $d\alpha, d\alpha', \dots, d\gamma''$, peut être assimilé à l'ensemble $\delta\alpha, \delta\alpha', \dots, \delta\gamma''$, figurant dans la condition :

$$\frac{\partial\psi}{\partial\alpha} \delta\alpha + \frac{\partial\psi}{\partial\alpha'} \delta\alpha' + \dots + \frac{\partial\psi}{\partial\gamma''} \delta\gamma'' = 0.$$

On aura donc pour un tel ensemble des variations $d\alpha, d\alpha', \dots, d\gamma''$:

$$\frac{\partial\psi}{\partial\alpha} d\alpha + \frac{\partial\psi}{\partial\alpha'} d\alpha' + \dots + \frac{\partial\psi}{\partial\gamma''} d\gamma'' = 0$$

ce qui, nous l'avons déjà dit, démontre que ψ ne contient pas explicitement les cosinus $\alpha, \alpha', \dots, \gamma''$, ou encore que W est simplement une fonction de $s, \xi, \eta, \zeta, p, q, r$.

CHAPITRE V

Recherche de l'expression de l'Action euclidienne à distance. Étude d'une catégorie particulière d'équations différentielles.

28. Dans la recherche de l'expression de l'Action euclidienne sur un continu à une, deux ou trois dimensions, nous avons eu à déterminer une fonction W , du vecteur \mathbf{oM} (joignant l'origine des axes fixes à un point M), de trois vecteurs unités I, J, K , formant un trièdre trirectangle $Mx'y'z'$, et des vecteurs voisins de \mathbf{oM}, I, J, K . Nous avons montré que l'on pouvait la considérer comme une fonction de $\mathbf{oM}, I, J, K, \mathbf{v}$ et ω (v. p. 100).

En écrivant que cette fonction est invariante dans les transformations du groupe des déplacements euclidiens, nous avons trouvé qu'elle satisfaisait aux équations vectorielles suivantes :

$$\begin{aligned} \text{grad } W_{\mathbf{oM}} &= 0, \\ \text{grad } W_I \wedge I + \text{grad } W_J \wedge J + \text{grad } W_K \times K &= 0. \end{aligned}$$

On tient compte de la première en disant que W ne contient pas explicitement \mathbf{oM} et alors la seconde signifie que W considérée comme fonction de I, J, K, \mathbf{v} et ω , reste invariante pour toute rotation virtuelle euclidienne (dans une telle rotation $\delta\mathbf{v}$ et $\delta\omega$ sont toujours nuls).

Généralisons cette remarque :

Étant donnée une fonction scalaire de plusieurs vecteurs $V_1, V_2, \dots, V_p, \mathbf{v}$ et ω , toute équation de la forme

$$[1] \quad \text{grad } W_{V_1} \wedge V_1 + \text{grad } W_{V_2} \wedge V_2 + \dots + \text{grad } W_{V_p} \wedge V_p = 0$$

traduit le fait que la fonction W est invariante dans toute rotation du système des vecteurs autour d'un axe ou simplement dans toute rotation euclidienne; en effet, le produit interne par θ , des deux membres de l'équation (1), donne :

$$[\text{grad } W_{V_1} V_1 \theta] + [\text{grad } W_{V_2} V_2 \theta] + \dots + [\text{grad } W_{V_p} V_p \theta] = 0$$

ou

$$\text{grad } W_{V_1} \times \Delta V_1 + \text{grad } W_{V_2} \times \Delta V_2 + \dots + \text{grad } W_{V_p} \times \Delta V_p = 0$$

ΔV_i étant la variation du vecteur V_i dans la rotation θ .

Dans le cas déjà étudié, rappelé au début du paragraphe 28, l'équation considérée ne doit pas être satisfaite quels que soient les vecteurs I, J, K, mais seulement pour les ensembles de vecteurs formant un trièdre trirectangle; nous avons pu, pour cet exemple, trouver par un procédé spécial la forme W; mais le raisonnement employé ne pourrait s'étendre à un cas plus étendu comme celui que nous aurons à étudier dans la recherche de l'expression de l'Action euclidienne à distance; dans ce problème on a encore à résoudre une équation du type (1), certains vecteurs satisfaisant, comme on le verra, à des relations imposées; aussi attachons-nous de l'importance à l'étude suivante que nous utiliserons plus loin.

29. Rappelons d'abord que l'équation (1) :

$$[1] \quad \text{grad } W_{v_1} \wedge V_1 + \text{grad } W_{v_2} \wedge V_2 + \dots + \text{grad } W_{v_p} \wedge V_p = 0$$

résume le système des trois équations différentielles ordinaires

$$[2] \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{i=p} \left(y_i \frac{\partial W}{\partial z_i} - z_i \frac{\partial W}{\partial y_i} \right) = 0, \\ \sum_{i=1}^{i=p} \left(z_i \frac{\partial W}{\partial x_i} - x_i \frac{\partial W}{\partial z_i} \right) = 0, \\ \sum_{i=1}^{i=p} \left(x_i \frac{\partial W}{\partial y_i} - y_i \frac{\partial W}{\partial x_i} \right) = 0; \end{array} \right.$$

(x_i, y_i, z_i , composantes de V_i).

Le nombre de variables est de $3p$; en tenant compte des trois équations ci-dessus, il suffira de chercher $3(p-1)$ solutions indépendantes,

$$\varphi_1(x_i, y_i, z_i), \quad \varphi_2(x_i, y_i, z_i), \quad \dots, \quad \varphi_{3p-3}(x_i, y_i, z_i)$$

et l'on aura pour W, satisfaisant identiquement à l'équation (1).

$$W = F(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{3p-3}).$$

F étant une fonction arbitraire des arguments $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{3p-3}$.

l'on a bien

$$\text{grad } \varphi_{i_{V_1}} \wedge V_1 + \text{grad } \varphi_{i_{V_2}} \wedge V_2 + \dots + \text{grad } \varphi_{i_{V_p}} \wedge V_p = 0.$$

Cela posé, prenons $3p - 3 - n$ autres solutions de (1) indépendantes des $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ (au sens attaché à ce mot dans la théorie des fonctions de plusieurs variables), soient

$$\varphi_{n+1}, \varphi_{n+2}, \dots, \varphi_{3p-3}.$$

Enfin α, α' et α'' , β, β' et β'' , γ, γ' et γ'' , étant les composantes de trois des vecteurs figurant dans l'équation (1), (on peut toujours supposer que ces vecteurs sont les trois derniers $V_{3p-2}, V_{3p-1}, V_{3p}$), retenons en particulier les composantes α, β', γ'' ; elles sont indépendantes entre elles et indépendantes des fonctions φ_i , sans quoi, α par exemple serait une solution du système (2) et l'on peut voir que c'est impossible à moins que $\alpha' = \alpha'' = 0$, relations non intrinsèques, donc à rejeter.

Cela posé, soit $\Phi(x_i, y_i, z_i)$ une fonction satisfaisant au système (2), grâce aux équations (3)'.

Nous allons montrer que Φ peut se déduire de la solution générale F en tenant compte dans cette dernière des relations (3)'.

En effet, faisons dans Φ un changement de variables en prenant pour nouveaux arguments :

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{3p-3}, \alpha, \beta', \gamma''$$

indépendants comme on vient de le dire.

Φ sera de la forme $\Phi(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{3p-3}, \alpha, \beta', \gamma'')$ ou, en tenant compte des valeurs de $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$,

$$\Phi(\varphi_{n+1}, \varphi_{n+2}, \dots, \varphi_{3p-3}, \alpha, \beta', \gamma'').$$

Montrons que α, β', γ'' , ne figurent pas explicitement dans Φ :

Pour simplifier nous désignerons par $E(W)$ le premier membre de l'équation vectorielle (1).

Remarquons que :

$$\alpha = V_{3p-2} \times X,$$

$$\beta' = V_{3p-1} \times Y,$$

$$\gamma'' = V_{3p} \times Z,$$

X, Y, Z, étant des vecteurs unités portés par les axes fixes.

Donc :

$$\text{grad } \alpha_{V_{3p-2}} = X, \quad \text{grad } \beta'_{V_{3p-1}} = Y, \quad \text{grad } \gamma''_{V_{3p}} = Z$$

et

$$E(\alpha) = X \wedge V_{3p-2}, \quad E(\beta') = Y \wedge V_{3p-1}, \quad E(\gamma'') = Z \wedge V_{3p}.$$

Il est facile de voir que :

$$\begin{aligned} E(\Phi) &= \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_{n+1}} E(\varphi_{n+1}) + \dots + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_{3p-3}} E(\varphi_{3p-3}) + \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} E(\alpha) \\ &\quad + \frac{\partial \Phi}{\partial \beta'} E(\beta') + \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma''} E(\gamma''). \end{aligned}$$

De sorte que si l'on écrit que Φ est solution de l'équation (1) il reste :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} (X \wedge V_{3p-2}) + \frac{\partial \Phi}{\partial \beta'} (Y \wedge V_{3p-1}) + \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma''} (Z \wedge V_{3p}) = 0.$$

En faisant le produit vectoriel successivement par X, Y, Z , il reste :

$$\begin{aligned} \beta'' \frac{\partial \Phi}{\partial \beta'} - \gamma' \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma''} &= 0, \\ \gamma \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma''} - \alpha'' \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} &= 0, \\ \alpha' \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} - \beta \frac{\partial \Phi}{\partial \beta'} &= 0. \end{aligned}$$

Ces équations en $\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}, \frac{\partial \Phi}{\partial \beta'}, \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma''}$ ne peuvent avoir d'autres solutions que

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} = \frac{\partial \Phi}{\partial \beta'} = \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma''} = 0$$

à moins que le déterminant

$$\begin{vmatrix} 0 & \beta'' & -\gamma' \\ -\alpha'' & 0 & \gamma \\ \alpha' & \beta & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire :

$$\alpha' \beta'' \gamma = \alpha'' \beta \gamma'. \quad (1)$$

Cette relation n'est pas intrinsèque. On peut le voir, notamment, en la traduisant en notations vectorielles, après l'avoir écrite sous la forme suivante :

$$\alpha'(\beta''\gamma - \beta\gamma'') = \beta(\alpha''\gamma' - \alpha'\gamma'')$$

X, Y, Z, étant toujours trois vecteurs unités portés par les axes du système de référence,

I, J, K (*) désignant les trois vecteurs de composantes $\alpha, \alpha', \alpha'', \beta, \beta', \beta'', \gamma, \gamma', \gamma''$, on a :

$$\alpha' = I \times Y.$$

D'autre part $\beta''\gamma - \beta\gamma''$ est la composante suivante oY de $J \wedge K$, donc elle est égale à $Y \times (J \wedge K) = [YJK]$.

En transformant de même les éléments du second membre, l'on a :

$$I \times Y \cdot [YJK] = J \times X \cdot [XKI].$$

Or, si l'on change l'axe des Y sans changer l'axe des X, le premier membre varie, mais non le second.

La relation $\alpha'\beta''\gamma = \alpha''\beta\gamma'$ n'est donc pas intrinsèque et l'on ne peut trouver d'autres solutions du système (1) que celles déduites de la solution générale W satisfaisant identiquement à ce système, et dans lesquelles il faudra tenir compte des équations (3)'.

30.

REMARQUES.

I. Dans le cas où le trièdre I, J, K, est trirectangle, on peut supposer

$$I^2 = J^2 = K^2 = 1$$

la condition

$$\alpha'\beta''\gamma = \beta\alpha''\gamma'$$

ou

$$\gamma(\alpha'\beta'' - \beta'\alpha'') = \alpha''(\beta\gamma' - \gamma\beta')$$

s'écrit encore :

$$\gamma^3 = \alpha''^3;$$

on voit très facilement, dans ce cas particulier, que si l'on change l'axe des Z en gardant celui des X, le premier membre varie seul.

(*) Au lieu de $V_{3p-2}, V_{3p-1}, V_{3p}$.

II. Les recherches précédentes nous donnent la solution immédiate d'un problème déjà résolu par un procédé direct mais plus long. Dans la théorie de l'action euclidienne de déformation, une fonction W dépendante des vecteurs \mathbf{oM} , \mathbf{I} , \mathbf{J} , \mathbf{K} , ω et \mathbf{v} , doit satisfaire aux équations :

$$\begin{aligned} \text{grad } W_{\mathbf{oM}} &= \mathbf{o}, \\ \text{grad } W_{\mathbf{I}} \wedge \mathbf{I} + \text{grad } W_{\mathbf{J}} \wedge \mathbf{J} + \text{grad } W_{\mathbf{K}} \wedge \mathbf{K} &= \mathbf{o}. \end{aligned}$$

La première équation montre que W ne dépend pas de \mathbf{oM} , la seconde résume un système de trois équations aux données partielles, pour lesquelles six solutions indépendantes sont évidentes

$$\mathbf{I}^2, \mathbf{J}^2, \mathbf{K}^2, \mathbf{J} \times \mathbf{K}, \mathbf{K} \times \mathbf{I}, \mathbf{I} \times \mathbf{J}.$$

Donc, la solution générale est :

$$W(s_0, \mathbf{I}^2, \mathbf{J}^2, \mathbf{K}^2, \mathbf{J} \times \mathbf{K}, \mathbf{K} \times \mathbf{I}, \mathbf{I} \times \mathbf{J}, \mathbf{v}, \omega).$$

En tenant compte des relations entre cosinus, on voit que W se réduit à une fonction arbitraire de $p, q, r, \xi, \eta, \zeta, s_0$.

31. EXPRESSION DE L'ACTION EUCLIDIENNE A DISTANCE.

Nous allons mettre à profit l'étude précédente pour trouver l'expression rigoureuse de l'action euclidienne à distance.

Pour rappeler le problème nous emprunterons le passage suivant à la « Théorie des Corps déformables »⁽¹⁾ :

« Considérons un système discret de p trièdres, dans lequel chaque trièdre sera « distingué par un indice i qui prendra par conséquent les valeurs $1, 2, 3, \dots, p$. « Soit $M_i x'_i y'_i z'_i$, le trièdre d'indice i , dont le sommet M_i aura pour coordonnées « x_i, y_i, z_i , et les axes Mx'_i, My'_i, Mz'_i , pour cosinus directeurs $\alpha_i, \alpha'_i, \alpha''_i, \dots, \gamma''_i$. « par rapport à trois axes rectangulaires fixes oX, oY, oZ . Nous supposons que les « quantités $x_i, y_i, z_i, \alpha_i, \alpha'_i, \alpha''_i, \beta_i, \dots, \gamma''_i$, sont des fonctions du temps t , et « nous introduirons les six arguments définis (précédemment) avec l'indice i .

« Envisageons une fonction W de deux positions infiniment voisines du système « de trièdres $M_i x'_i y'_i z'_i$, c'est-à-dire une fonction de t des $x_i, y_i, z_i, \alpha_i, \alpha'_i, \alpha''_i$. « $\beta_i, \dots, \gamma''_i$, et de leurs dérivées premières par rapport à t (i prenant les valeurs

(1) E. et F. Cosserat, *loc. cit.*, p. 178.

« 1, 2, . . . , p). Proposons-nous de déterminer quelle doit être la forme de W pour « que cette fonction reste invariante dans toute transformation infinitésimale du « groupe des déplacements euclidiens. »

Le raisonnement au sujet duquel nous avons fait les observations précédentes (page 101) a conduit les auteurs de la Théorie à exprimer la fonction W au moyen des arguments suivants :

$$r^2_{ij} = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2,$$

$$\psi_{ij} = \frac{dx_i}{dt} \cdot \frac{dx_j}{dt} + \frac{dy_i}{dt} \cdot \frac{dy_j}{dt} + \frac{dz_i}{dt} \cdot \frac{dz_j}{dt},$$

$$\lambda_{ijk} = (x_i - x_j) \frac{dx_k}{dt} + (y_i - y_j) \frac{dy_k}{dt} + (z_i - z_j) \frac{dz_k}{dt}$$

avec : $i, j, k = 1, 2, \dots, p;$

ce nombre se réduit à $6(p - 1)$ si l'on ne prend que ceux qui sont indépendants, sans compter ceux dont l'intervention était prévue à la base même de la théorie de l'action euclidienne, savoir $\xi, \eta, \zeta, p, q, r$, nous allons montrer qu'il n'en est pas tout à fait ainsi :

On sait déjà (v. p. 101) que la fonction W est de la forme :

$$W(t, x_i, y_i, z_i, \frac{dx_i}{dt}, \frac{dy_i}{dt}, \frac{dz_i}{dt}, \xi_i \eta_i \zeta_i, p_i q_i r_i, \alpha_i, \alpha'_i, \dots, \gamma''_i).$$

Conformément à ce qui a été dit (p. 102) nous utiliserons les équations de la forme :

$$\frac{dx_i}{dt} = \alpha_i \xi_i + \beta_i \eta_i + \gamma_i \zeta_i$$

pour éliminer, non les cosinus, ce que nous avons reconnu impossible, mais bien les composantes $\frac{dx_i}{dt}, \frac{dy_i}{dt}, \frac{dz_i}{dt}$ de la vitesse.

On a donc :

$$W = W(t, x_i, y_i, z_i, \xi_i \eta_i \zeta_i, p_i q_i r_i, \alpha_i, \alpha'_i, \dots, \gamma''_i)$$

ou encore, avec la notation vectorielle :

$$W(t, oM_i, \mathbf{v}_i, \omega_i, \mathbf{I}_i, \mathbf{J}_i, \mathbf{K}_i)$$

les notations \mathbf{v}_i et ω_i seront employées pour rappeler que W dépend de ces vecteurs rapportés au trièdre mobile et non de V_i et Ω_i rapportés à l'espace fixe.

Nous devons avoir :

$$(1) \sum_i (\text{grad } W_{\mathbf{om}_i} \times \Delta \mathbf{M}_i + \text{grad } W_{\mathbf{l}_i} \times \Delta \mathbf{I}_i + \text{grad } W_{\mathbf{j}_i} \times \Delta \mathbf{J}_i + \text{grad } W_{\mathbf{k}_i} \times \Delta \mathbf{K}_i) = \mathbf{o}$$

Mais si le déplacement est euclidien on a :

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{M}_i &= \mathbf{a} + \theta \wedge \mathbf{oM}_i, \\ \Delta \mathbf{I}_i &= \theta \wedge \mathbf{I}_i \end{aligned}$$

\mathbf{a} et θ étant des vecteurs constants et l'égalité (1) devant avoir lieu quels que soient ces vecteurs \mathbf{a} et θ ; d'où les équations vectorielles :

$$(2) \sum_i \text{grad } W_{\mathbf{om}_i} = \mathbf{o}.$$

$$(3) \sum_i (\text{grad } W_{\mathbf{om}_i} \wedge \mathbf{oM}_i + \text{grad } W_{\mathbf{l}_i} \wedge \mathbf{I}_i + \text{grad } W_{\mathbf{j}_i} \wedge \mathbf{J}_i + \text{grad } W_{\mathbf{k}_i} \wedge \mathbf{K}_i) = \mathbf{o}.$$

L'équation (2) montre que W ne dépend que des différences vectorielles

$$\mathbf{M}_p \mathbf{M}_i = \mathbf{oM}_i - \mathbf{oM}_p;$$

on le voit en traduisant cette équation au moyen d'équations différentielles ordinaires, savoir :

$$\sum_i \frac{\partial W}{\partial x_i} = 0, \quad \sum_i \frac{\partial W}{\partial y_i} = 0, \quad \sum_i \frac{\partial W}{\partial z^i} = 0.$$

Pour les résoudre on est amené à considérer les caractéristiques obtenues en intégrant le système

$$dx_1 = dx_2 = \dots = dx_p$$

on voit $p - 1$ solutions évidentes

$$x_1 - x_p, \quad x_2 - x_p, \quad \dots, \quad x_{p-1} - x_p.$$

Considérée comme fonction des x_i , W ne contient donc que les différences $x_i - x_p$, de même pour les y_i et les z_i .

Nous satisferons donc à l'équation (2) en écrivant que W , considérée comme

fonction des $\mathfrak{O}M_i$, est en réalité une fonction des $M_p M_i$. Une variation de $M_p M_i$ provenant d'une transformation du groupe des déplacements euclidiens sera

$$\Delta M_p M_i = \theta \wedge M_p M_i$$

et comme déjà

$$\Delta I_i = \theta \wedge I_i.$$

L'équation (3) sera remplacée par (3)'

$$(3') \sum_i [\text{grad } W_{M_p M_i} \wedge M_p M_i + \text{grad } W_{I_i} \wedge I_i + \text{grad } W_{J_i} \wedge J_i + \text{grad } W_{K_i} \wedge K_i].$$

L'équation vectorielle (3)' revient au système (S) d'équations ordinaires aux dérivées partielles :

$$\sum_{i,j} \left(Y_i \frac{\partial W}{\partial Z_i} - Z_i \frac{\partial W}{\partial Y_i} + \alpha'_j \frac{\partial W}{\partial \alpha'_j} - \alpha''_j \frac{\partial W}{\partial \alpha''_j} + \beta'_j \frac{\partial W}{\partial \beta'_j} - \beta''_j \frac{\partial W}{\partial \beta''_j} + \gamma'_j \frac{\partial W}{\partial \gamma'_j} - \gamma''_j \frac{\partial W}{\partial \gamma''_j} \right) = 0,$$

$$\sum_{i,j} \left(Z_i \frac{\partial W}{\partial X_i} - X_i \frac{\partial W}{\partial Z_i} + \alpha''_j \frac{\partial W}{\partial \alpha_j} - \alpha'_j \frac{\partial W}{\partial \alpha''_j} + \dots \right) = 0,$$

$$\sum_{i,j} \left(X_i \frac{\partial W}{\partial Y_i} - Y_i \frac{\partial W}{\partial X_i} + \alpha_j \frac{\partial W}{\partial \alpha'_j} - \alpha'_j \frac{\partial W}{\partial \alpha_j} + \dots \right) = 0.$$

$$i = 1, 2, \dots, p-1,$$

$$j = 1, 2, \dots, p.$$

X_i, Y_i, Z_i , sont les composantes de

$$\mathfrak{O}M_i - \mathfrak{O}M_p = M_p M_i.$$

32. Ici encore nous avons à résoudre des équations aux variables liées (les $\alpha_j, \alpha'_j, \dots, \alpha''_j$ satisfont aux six équations connues); mais l'étude précédente nous permet de les traiter comme des équations aux variables libres. Nous allons donc choisir parmi les solutions évidentes du système (S) les solutions indépendantes nécessaires.

Elles seront au nombre de $12p-6$; en effet, le nombre de vecteurs est

$$p-1 + 3p = 4p-1;$$

donc celui des variables est $12p-3$, et comme il y a trois équations différentielles dans le système, il faudra bien trouver $12p-6$ solutions indépendantes.

Nous prendrons :

les $(p-1)$ solutions :

$$X_i^2 + Y_i^2 + Z_i^2 \quad (i = 1, 2, \dots, p-1),$$

les $3p$ solutions :

$$\alpha_j^2 + \beta_j^2 + \gamma_j^2, \quad \alpha_j'^2 + \beta_j'^2 + \gamma_j'^2, \quad \alpha_j''^2 + \beta_j''^2 + \gamma_j''^2, \\ j = 1, 2, \dots, p.$$

puis

$$\alpha_p \beta_p + \alpha'_p \beta'_p + \alpha''_p \beta''_p, \\ \beta_p \gamma_p + \beta'_p \gamma'_p + \beta''_p \gamma''_p, \\ \gamma_p \alpha_p + \gamma'_p \alpha'_p + \gamma''_p \alpha''_p, \\ \beta_p X_i + \beta'_p Y_i + \beta''_p Z_i, \quad \gamma_p X_i + \gamma'_p Y_i + \gamma''_p Z_i$$

soit encore

$$3 + 2(p-1).$$

D'autre part, l'on a encore les $6(p-1)$ équations :

$$\beta_p \alpha_i + \beta'_p \alpha'_i + \beta''_p \alpha''_i, \quad \gamma_p \alpha_i + \gamma'_p \alpha'_i + \gamma''_p \alpha''_i, \\ \beta_p \beta_i + \beta'_p \beta'_i + \beta''_p \beta''_i, \quad \gamma_p \beta_i + \gamma'_p \beta'_i + \gamma''_p \beta''_i, \\ \beta_p \gamma_i + \beta'_p \gamma'_i + \beta''_p \gamma''_i, \quad \beta_i \gamma_i + \beta'_i \gamma'_i + \beta''_i \gamma''_i.$$

En tout

$$p-1 + 3p + 3 + 2(p-1) + 6(p-1) = 12p - 6,$$

c'est-à-dire précisément les $12p - 6$ solutions cherchées.

La solution générale sera une fonction arbitraire de ces $12p - 6$ solutions indépendantes. Si l'on tient compte maintenant des relations entre cosinus, les arguments restant, sont :

$$X_\lambda^2 + Y_\lambda^2 + Z_\lambda^2, \quad \beta_p X_\lambda + \beta'_p Y_\lambda + \beta''_p Z_\lambda, \quad \gamma_p X_\lambda + \gamma'_p Y_\lambda + \gamma''_p Z_\lambda, \\ \beta_p \beta_\lambda + \beta'_p \beta'_\lambda + \beta''_p \beta''_\lambda, \quad \beta_p \gamma_\lambda + \beta'_p \gamma'_\lambda + \beta''_p \gamma''_\lambda, \\ \gamma_p \beta_\lambda + \gamma'_p \beta'_\lambda + \gamma''_p \beta''_\lambda, \\ (\lambda = 1, 2, \dots, p-1).$$

En fait, il ne reste donc que :

$$6(p-1) \text{ arguments.}$$

Le résultat peut se mettre sous la forme simple :

$$(1) \quad W(t, M_p M_\lambda^2, J_p \times M_p M_\lambda, K_p \times M_p M_\lambda, J_p \times J_\lambda, J_p \times K_\lambda, K_p \times J_\lambda).$$

Par raison de symétrie, on pourra faire figurer dans les arguments non tous indépendants (*).

$$\begin{aligned} & M_i M_j^2, \quad M_i M_j \times I_q, \quad M_i M_j \times J_q, \quad M_i M_j \times K_q; \\ & I_i \times I_q, \quad I_i \times J_q, \quad I_i \times K_q, \quad J_i \times I_q, \quad \dots, \quad K_i \times K_q. \end{aligned}$$

(*). Considérons le trièdre oLMN et désignons par l, m, n , les cosinus de (oM, oN), de (oL, oN) et de (oM, oL).

D'autre part, soit oΔ une direction quelconque.

Posons

$$a = \cos(o\Delta, oL), \quad b = \cos(o\Delta, oM), \quad c = \cos(o\Delta, oN),$$

on sait que le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & n & m & a \\ n & 1 & l & b \\ m & l & 1 & c \\ a & b & c & 1 \end{vmatrix}$$

est nul.

Appliquons ce résultat au trièdre J_p, J_λ, K_p et à la direction K_λ , il vient en remarquant que $J_\lambda \times K_\lambda = 0$ et $J_p \times K_p = 0$.

$$\begin{vmatrix} 1 & J_p \times J_\lambda & J_\lambda \times K_p & J_p \times K_\lambda \\ J_p \times J_\lambda & 1 & 0 & 0 \\ J_\lambda \times K_p & 0 & 1 & K_p \times K_\lambda \\ J_p \times K_\lambda & 0 & K_p \times K_\lambda & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

On peut donc tirer $K_p \times K_\lambda$, c'est-à-dire $\gamma_p \gamma_\lambda + \gamma'_p \gamma''_\lambda + \gamma''_p \gamma''_\lambda$ en fonction des autres produits scalaires

$$J_p \times J_\lambda \quad \text{ou} \quad \beta_p \beta_\lambda + \beta'_p \beta'_\lambda + \beta''_p \beta''_\lambda, \quad J_\lambda \times K_p \quad \text{ou} \quad \beta_\lambda \gamma_p + \beta'_\lambda \gamma'_p + \beta''_\lambda \gamma''_p$$

et

$$J_p \times K_\lambda \quad \text{ou} \quad \beta_p \gamma_\lambda + \beta'_p \gamma'_\lambda + \beta''_p \gamma''_\lambda.$$

33. On vérifie facilement que les arguments figurant dans la forme W donnée par MM. Cosserat se retrouvent dans notre résultat par exemple.

$$\psi_{ij} = \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt} + \frac{dy_i}{dt} \frac{dy_j}{dt} + \frac{dz_i}{dt} \frac{dz_j}{dt}$$

et

$$\lambda_{ijk} = (x_i - x_j) \frac{dx_k}{dt} + (y_i - y_j) \frac{dy_k}{dt}.$$

En effet, le premier s'écrit encore :

$$\begin{aligned} & (\alpha_i \xi_i + \beta_i \eta_i + \gamma_i \zeta_i) (\alpha_j \xi_j + \beta_j \eta_j + \gamma_j \zeta_j) \\ & + (\alpha'_i \xi_i + \beta'_i \eta_i + \gamma'_i \zeta_i) (\alpha'_j \xi_j + \beta'_j \eta_j + \gamma'_j \zeta_j) \\ & + (\alpha''_i \xi_i + \beta''_i \eta_i + \gamma''_i \zeta_i) (\alpha''_j \xi_j + \beta''_j \eta_j + \gamma''_j \zeta_j). \end{aligned}$$

ou encore

$$\xi_i \xi_j \mathbf{I}_i \times \mathbf{I}_j + \eta_i \eta_j \mathbf{J}_i \times \mathbf{J}_j + \zeta_i \zeta_j \mathbf{K}_i \times \mathbf{K}_j + \eta_i \zeta_j \mathbf{J}_i \times \mathbf{K}_j + \zeta_i \xi_j \mathbf{K}_i \times \mathbf{K}_j + \xi_i \zeta_j \mathbf{I}_i \times \mathbf{J}_j.$$

Quant à λ_{ijk} , il s'écrit encore :

$$\mathbf{M}_i \mathbf{M}_j \times \mathbf{V}_k = \mathbf{M}_i \mathbf{M}_j (\xi_k \mathbf{I}_k + \eta_k \mathbf{J}_k + \zeta_k \mathbf{K}_k) = \xi_k \mathbf{M}_i \mathbf{M}_j \times \mathbf{I}_k + \eta_k \mathbf{M}_i \mathbf{M}_j \times \mathbf{J}_k + \zeta_k \mathbf{M}_i \mathbf{M}_j \times \mathbf{K}_k.$$

Nous avons bien mis en évidence des arguments figurant parmi ceux au moyen desquels nous avons exprimé W .

Par contre, tous ceux entrant dans notre forme (A) ne sont pas réductibles à ceux que contient la forme donnée par MM. Cosserat comme on le voit par la remarque suivante.

Pour simplifier, supposons le système au repos, tous les termes contenant les composantes de vitesse disparaissent de la 2^e forme; celle-ci se réduit à :

$$W(\mathbf{M}_i \mathbf{M}_j^2)$$

tandis que la forme (A) devient :

$$W(\mathbf{M}_i \mathbf{M}_j, \quad \mathbf{M}_i \mathbf{M}_j \times \mathbf{I}_j, \quad \dots, \quad \mathbf{I}_i \times \mathbf{I}_q, \quad \dots, \quad \mathbf{K}_i \times \mathbf{K}_q)$$

on voit que l'orientation relative des trièdres, ou encore celle des molécules auxquelles ils sont attachés subsiste.

D'après le rapprochement que nous venons de faire entre ces deux formes, celle que nous donnons comprendra les lois d'action à distance étudiées par Coulomb,

Gauss, Riemann, Weber, Clausius, etc. En effet, ces lois étaient déjà comprises dans l'autre forme.

Par contre, cette dernière ne conviendra pas aux lois qui font intervenir l'orientation relative des molécules. Or, il est aisé de donner des exemples de phénomènes physiques où cette orientation joue un rôle important. Tels sont ceux que l'on étudie sous le nom de Polarisation des masses aimantées ou diélectriques.

En résumé, l'expression de l'Action euclidienne à distance sera de la forme :

$$\begin{aligned} W(t, \xi_i, \eta_i, \zeta_i, p_i, q_i, r_i, (x_i - x_p)^2 + (y_i - y_p)^2 + (z_i - z_p)^2, \\ \beta_p(x_i - x_p) + \beta'_p(y_i - y_p) + \beta''_p(z_i - z_p), \\ \gamma_p(x_i - x_p) + \gamma'_p(y_i - y_p) + \gamma''_p(z_i - z_p), \\ \beta_p\beta_\lambda + \beta'_p\beta'_\lambda + \beta''_p\beta''_\lambda, \quad \beta_p\gamma_\lambda + \beta'_p\gamma'_\lambda + \beta''_p\gamma''_\lambda, \quad \gamma_p\beta_\lambda + \gamma'_p\beta'_\lambda + \gamma''_p\beta''_\lambda). \end{aligned}$$

34. CALCUL DE LA FORCE ET DU MOMENT EXTÉRIEURS SUR UN TRIÈDRE QUELCONQUE.

D'après l'expression rectifiée de W , nous allons calculer la force et le moment extérieur sur l'un des trièdres.

Nous prenons W sous la forme :

$$W(x_i, y_i, z_i, \xi_i, \eta_i, \zeta_i, p_i, q_i, r_i, \alpha_i, \alpha'_i, \dots, \gamma''_i, t) \quad (1)$$

ou avec la notation vectorielle

$$W(oM_i, V_i, \omega_i, oI_i, oJ_i, oK_i).$$

Évaluons la variation élémentaire de l'action $\int_{t_1}^{t_2} W dt$.

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} W dt = \sum_i \int_{t_1}^{t_2} (\text{grad } W_{oM_i} \times \Delta M_i + \text{grad } W_{V_i} \times \delta V_i + \text{grad } W_{\omega_i} \times \delta \omega_i \\ + \text{grad } W_{I_i} \times \Delta I_i + \text{grad } W_{J_i} \times \Delta J_i + \text{grad } W_{K_i} \times \Delta K_i) \end{aligned}$$

avec

$$\left\{ \begin{aligned} \delta V_i &= \frac{D}{Dt} \Delta M_i + V_i \wedge \theta_i, \\ \delta \omega_i &= \frac{D}{Dt} \theta_i, \\ \Delta I_i &= \theta_i \wedge I_i, \quad \Delta J_i = \theta_i \wedge J_i, \quad \Delta K_i = \theta_i \wedge K_i \end{aligned} \right.$$

(1) Voir p. 113.

d'où :

$$\begin{aligned}
\delta \int_{t_1}^{t_2} W dt &= \sum_i \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \text{grad } W_{\text{om}_i} \times \Delta M_i \right. \\
&+ \text{grad } W_{v_i} V_i \theta_i + \text{grad } W_{v_i} \times \frac{D}{Dt} \Delta M_i + \text{grad } W_{\omega_i} \times \frac{D}{Dt} \theta_i \\
&\quad \left. + \text{grad } W_{I_i} \theta_i I_i + \text{grad } W_{J_i} \theta_i J_i + \text{grad } W_{K_i} \theta_i K_i \right\} dt \\
&= \sum_i (\text{grad } W_{v_i} \times \Delta M_i + \text{grad } W_{v_i} \times \theta_i) \Big|_{t_1}^{t_2} \\
&- \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{D}{Dt} \text{grad } W_{v_i} - \text{grad } W_{\text{om}_i} \right] \times \Delta M_i dt - \int \left[\frac{D}{Dt} \text{grad } W_{\omega_i} \right. \\
&\quad \left. + \text{grad } W_{I_i} \wedge I_i + \text{grad } W_{J_i} \wedge J_i + \text{grad } W_{K_i} \wedge K_i - \text{grad } W_{v_i} \wedge V_i \right] \theta_i dt
\end{aligned}$$

d'où : pour la force et le moment extérieurs sur le trièdre d'indice i , les expressions

$$\begin{aligned}
\varphi_i &= \frac{D}{Dt} \text{grad } W_{v_i} - \text{grad } W_{\text{om}_i}, \\
\mu_i &= \frac{D}{Dt} \text{grad } W_{\omega_i} - \text{grad } W_{v_i} \wedge V_i + \text{grad } W_{I_i} \wedge I_i + \text{grad } W_{J_i} \wedge J_i + \text{grad } W_{K_i} \wedge K_i.
\end{aligned}$$

Ayant obtenu la force et le moment extérieurs sur le trièdre d'indice i , nous allons voir que, malgré la modification apportée à l'expression de W , l'on peut mettre l'expression du travail des forces et des moments extérieurs sous la forme remarquable donnée par MM. Cosserat.

35. TRAVAIL DE LA FORCE EXTÉRIEURE ET DU MOMENT EXTÉRIEUR PENDANT UN DÉPLACEMENT RÉEL ÉLÉMENTAIRE.

Ce travail a pour expression :

$$\begin{aligned}
d\mathcal{C}_e &= \sum_i (\varphi_i \times \Delta M_i + \mu_i \times \Omega_i dt) = \sum_i (D \text{grad } W_{v_i}) \times V_i - \text{grad } W_{\text{om}_i} \times \Delta M_i \\
&+ D \text{grad } W_{\omega_i} \times \Omega_i - \text{grad } W_{v_i} V_i \Omega_i dt \\
&\quad - \text{grad } W_{I_i} \times \Delta I_i - \text{grad } W_{J_i} \times \Delta J_i - \text{grad } W_{K_i} \times \Delta K_i
\end{aligned}$$

(dans cette dernière ligne, au lieu de $\Omega_i \times \text{grad } W_{I_i} \wedge I_i$, nous avons écrit :

$$- \text{grad } W_{I_i} \times \Delta I_i.$$

Transformons l'expression $d\tilde{\mathcal{C}}_e$ pour la mettre sous la forme précisément donnée par les auteurs de la « Théorie », les grandeurs figurant dans notre résultat ayant des significations différentes de celles admises jusqu'ici.

On peut écrire :

$$d\tilde{\mathcal{C}}_e = \sum_i \left\{ D(\text{grad } W_{v_i} \times v_i) - \text{grad } W_{v_i} DV_i \right. \\ \left. + D(\text{grad } W_{\omega_i} \times \Omega_i) - \text{grad } W_{\omega_i} \times D\Omega_i + [\text{grad } W_{v_i} \Omega_i V_i] dt \right. \\ \left. - \text{grad } W_{\omega_i} \times DM_i - \text{grad } W_{i_1} \times DI_i - \dots \right\}$$

en réunissant le second et le cinquième terme on obtient :

$$- \text{grad } W_{v_i} \times dv_i \quad (^{\circ}).$$

Dans la deuxième ligne on peut remplacer, comme on sait,

$$\frac{D\Omega_i}{Dt} \quad \text{par} \quad \frac{d\omega_i}{dt} + \omega_i \wedge \omega_i = \frac{d\omega_i}{dt}.$$

Finalement :

$$d\tilde{\mathcal{C}}_e = \sum_i \left\{ D(\text{grad } W_{v_i} \times v_i + \text{grad } W_{\omega_i} \times \omega_i) - (\text{grad } W_{v_i} \times dv_i + \text{grad } W_{\omega_i} \times d\omega_i) \right. \\ \left. + \text{grad } W_{\omega_i} \times DM_i + \text{grad } W_{i_1} \times DI_i + \text{grad } W_{j_1} \times DJ_i + \text{grad } W_{k_1} \times DK_i \right\} \\ = \sum_i D(\text{grad } W_{v_i} \times v_i + \text{grad } W_{\omega_i} \times \omega_i - W) + \frac{\partial W}{\partial t} dt.$$

Nous retrouvons comme les auteurs de la Théorie, dont les conceptions nous ont guidé dans la précédente recherche, un résultat de la forme :

$$d\tilde{\mathcal{C}}_e = d\tilde{\mathcal{C}}_e + \frac{\partial W}{\partial t} dt$$

en posant

$$E = \sum_i (\text{grad } W_{v_i} \times v_i + \text{grad } W_{\omega_i} \times \omega_i) - W$$

et, si W ne dépend pas explicitement du temps,

$$d\tilde{\mathcal{C}}_e = dE.$$

(^o) V. p. 85.

E est l'énergie de position et de mouvement ; l'expression que nous trouvons est différente de celle donnée par ces auteurs : elle s'écrit avec les notations de MM. Cosserat :

$$\sum_i \left(\xi_i \frac{\partial W}{\partial \xi_i} + \eta_i \frac{\partial W}{\partial \eta_i} + \zeta_i \frac{\partial W}{\partial \zeta_i} + p_i \frac{\partial W}{\partial p_i} + q_i \frac{\partial W}{\partial q_i} + r_i \frac{\partial W}{\partial r_i} - W \right).$$

36.

REMARQUE.

Il résulte de ce qui a été dit, concernant la forme W , que l'on peut écrire aussi en désignant par P_i, Q_i, R_i , les composantes sur les axes fixes de la rotation instantanée de trièdre d'indice i .

$$W(x_i, y_i, z_i, \frac{dx_i}{dt}, \dots, P_i, Q_i, R_i, \alpha_i, \alpha'_i, \dots, \gamma''_i)$$

ou :

$$W(oM_i, V_i, \Omega_i, I_i, J_i, K_i)$$

on trouverait en partant de cette expression

$$\varphi_i = \frac{D}{Dt} \text{grad } W_{v_i} - \text{grad } W_{oM_i},$$

$$\mu_i = \frac{D}{Dt} \text{grad } W_{\Omega_i} + \text{grad } W_{\Omega_i} \wedge \Omega_i + \text{grad } W_{I_i} \wedge I_i + \text{grad } W_{J_i} \wedge J_i + \text{grad } W_{K_i} \wedge K_i.$$

Si l'on tient compte de ce que le deuxième terme du second membre donne pour le travail élémentaire :

$$- (\text{grad } W_{\Omega_i} \wedge \Omega_i) \times \Omega_i dt = 0,$$

le travail de φ_i et de μ_i pour un déplacement réel élémentaire est encore :

$$\sum_i D(\text{grad } W_{v_i} \times V_i + \text{grad } W_{\Omega_i} \times \Omega_i - W) + \frac{\partial W}{\partial t} dt.$$

Les résultats précédents appellent une vérification. Distinguons par les notations W' et W'' les expressions de W selon que celle-ci contient les vecteurs V_i et Ω_i ou v_i et ω_i , c'est-à-dire selon que les vecteurs vitesse du point M_i et rotation instantanée du trièdre d'indice i sont rapportés à l'espace absolu ou au trièdre lui-

même. On a vu deux expressions de φ_i et deux expressions de μ_i . Le rapprochement de ces expressions conduit à vérifier, en supprimant l'indice, que :

$$(A) \quad \frac{D}{Dt} \text{grad } W''_{\mathbf{v}} - \text{grad } W''_{\omega} = \frac{D}{Dt} \text{grad } W'_{\mathbf{v}} - \text{grad } W'_{\omega}.$$

$$(B) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{D}{Dt} \text{grad } W''_{\omega} - \text{grad } W''_{\mathbf{v}} \wedge \mathbf{V}_i + \text{grad } W''_{\mathbf{i}} \wedge \mathbf{I} + \text{grad } W''_{\mathbf{j}} \wedge \mathbf{J} + \text{grad } W''_{\mathbf{k}} \wedge \mathbf{K} \\ = \frac{D}{Dt} \text{grad } W'_{\Omega} + \text{grad } W'_{\Omega} \wedge \Omega + \text{grad } W'_{\mathbf{i}} \wedge \mathbf{I} + \text{grad } W'_{\mathbf{j}} \wedge \mathbf{J} + \text{grad } W'_{\mathbf{k}} \wedge \mathbf{K}. \end{array} \right.$$

La première égalité résulte immédiatement de ce qui a été établi Chapitre III, page 25 (form. 5).

La deuxième s'établit aussi par les formules de ce même Chapitre.

Les premiers termes des deux membres sont égaux d'après la formule (1), en outre d'après la formule (7), page 25.

$$\begin{aligned} \text{grad } W''_{\mathbf{i}} &= \text{grad } W'_{\mathbf{i}} + \text{grad } W'_{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{V} \times \mathbf{I} + \text{grad } W'_{\Omega} \cdot \Omega \times \mathbf{I}, \\ \text{grad } W''_{\mathbf{j}} &= \text{grad } W'_{\mathbf{j}} + \text{grad } W'_{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{V} \times \mathbf{J} + \text{grad } W'_{\Omega} \cdot \Omega \times \mathbf{J}, \\ \text{grad } W''_{\mathbf{k}} &= \text{grad } W'_{\mathbf{k}} + \text{grad } W'_{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{V} \times \mathbf{K} + \text{grad } W'_{\Omega} \cdot \Omega \times \mathbf{K} \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} & \text{grad } W''_{\mathbf{i}} \wedge \mathbf{I} + \text{grad } W''_{\mathbf{j}} \wedge \mathbf{J} + \text{grad } W''_{\mathbf{k}} \wedge \mathbf{K} \\ &= \text{grad } W'_{\mathbf{i}} \wedge \mathbf{I} + \text{grad } W'_{\mathbf{j}} \wedge \mathbf{J} + \text{grad } W'_{\mathbf{k}} \wedge \mathbf{K} \\ & \quad - \text{grad } W'_{\mathbf{i}} \wedge (\mathbf{V} \times \mathbf{I} \cdot \mathbf{I} + \mathbf{V} \times \mathbf{J} \cdot \mathbf{J} + \mathbf{V} \times \mathbf{K} \cdot \mathbf{K}) \\ & \quad + \text{grad } W'_{\Omega} \wedge (\omega \times \mathbf{I} \cdot \mathbf{I} + \omega \times \mathbf{J} \cdot \mathbf{J} + \omega \times \mathbf{K} \cdot \mathbf{K}) \\ &= \text{grad } W'_{\mathbf{i}} \wedge \mathbf{I} + \text{grad } W'_{\mathbf{j}} \wedge \mathbf{J} + \text{grad } W'_{\mathbf{k}} \wedge \mathbf{K} \\ & \quad + \text{grad } W'_{\mathbf{v}} \wedge \mathbf{V} + \text{grad } W'_{\Omega} \wedge \Omega \end{aligned}$$

en tenant compte de cette relation dans le premier membre de (B) on retrouve le second membre.

Vérifions enfin l'égalité des deux expressions de $d\mathcal{C}_e$ ou de dE ; il suffit de montrer que :

$$\text{grad } W'_{\mathbf{v}} \times \mathbf{V} + \text{grad } W'_{\Omega} \times \Omega = \text{grad } W''_{\mathbf{v}} \times \mathbf{V} + \text{grad } W''_{\Omega} \times \omega$$

\mathbf{V} et \mathbf{v} désignent un même vecteur (v. p. 87), de même Ω et ω . Enfin d'après la formule (5) du Chapitre III, page 87 :

$$\text{grad } W'_{\mathbf{v}} = \text{grad } W''_{\mathbf{v}} \quad \text{et} \quad \text{grad } W'_{\Omega} = \text{grad } W''_{\omega}.$$

La vérification est donc complète.

CHAPITRE VI

Applications.

I. — GÉNÉRALISATION D'UNE QUESTION ÉTUDIÉE PAR POISSON.

37. Nous aurons à considérer, dans ce qui suit, dans le cas d'une courbe déformable, la composante du moment extérieur de déformation qui est tangente à la courbe. Cette composante est désignée sous le nom de Moment de torsion ; la composante normale s'appelle Moment de flexion.

Poisson a montré que lorsque le moment extérieur unitaire est nul en tous les points de la courbe déformée et qu'en outre, le moment de flexion est perpendiculaire à la normale principale, le moment de torsion est constant tout le long de la courbe.

Des problèmes étudiés par Lagrange, Binet et Wantzel peuvent être rapprochés de cette question.

MM. E. et F. Cosserat ont remarqué (*Théorie*, p. 17), qu'il suffit, pour que ce moment soit constant, que le moment extérieur unitaire soit normal à la courbe (et non nécessairement nul).

Rapportant les éléments de la déformation en un point à un trièdre mobile dont une arête, ox' par exemple, est tangente à la courbe, l'on a :

$$(1) \quad \frac{dI'}{ds_0} + qK' - rJ' = L' \quad (1)$$

q et r étant deux composantes suivant oy' et oz' de la rotation instantanée du trièdre mobile.

Alors, si $L' = 0$, $J' = 0$, $q = 0$, on a bien $L' = c^{\text{te}}$. Or, d'après la théorie du trièdre mobile, lorsque $q = 0$, l'axe oy' est la normale principale à la courbe, d'où la conclusion précédente de MM. Cosserat.

On peut voir que cette condition est nécessaire ; autrement dit, si le moment extérieur unitaire est normal à la courbe, il faut et il suffit, pour que le moment de torsion soit constant, que le moment de flexion soit perpendiculaire à la normale principale.

(1) V. p. 90, la signification de I', J', K', L', \dots

L'équation (1) montre que pour que $\frac{dI'}{ds_0}$ soit nul, quand L' l'est aussi, il faut et il suffit que :

$$(2) \quad \frac{q}{J'} = \frac{r}{K'}.$$

Or, l'égalité (2) exprime que la rotation instantanée et le moment de flexion sont dans un même plan avec la tangente; mais lorsque l'arête du trièdre reste tangente à la courbe, la rotation instantanée est perpendiculaire à la normale principale; il en sera donc de même du moment de flexion si la condition (2) est remplie.

Voici d'ailleurs une démonstration directe. Reprenons l'une des équations fondamentales de la déformation

$$\frac{D}{Ds_0} \mathcal{M}b + \mathcal{E} \wedge V = \mu.$$

Soit T un vecteur unité porté par la tangente.

Comme le trivecteur $\mathcal{E}VT$ est identiquement nul, l'hypothèse entraîne :

$$\frac{D}{Ds_0} \mathcal{M}b \times T = 0.$$

Ou, d'après les formules de Frenet-Serret :

$$\frac{D}{Ds} (\mathcal{M}b \times T) = \mathcal{M}b \times \frac{N}{\rho},$$

N étant un vecteur unitaire normal à la courbe au point considéré et dirigé vers le centre de courbure.

Donc, pour que le moment de torsion ou $\mathcal{M}b \times T$ soit constant, il faut et il suffit que

$$(3) \quad \mathcal{M}b \times N = 0.$$

(Nous écartons ce cas d'une déformée rectiligne pour laquelle $\rho = \infty$).

c. q. f. d.

Il résulte de ce qui précède que les conditions (2) et (3) sont vérifiées simultanément quand α' est tangent à la courbe. Alors le vecteur T porté par la tangente est un vecteur constant dans le trièdre mobile et l'on a :

$$\frac{dT}{ds} = \frac{DT}{Ds} - \Omega \wedge T = 0$$

d'où

$$\frac{N}{\rho} = \Omega \wedge T.$$

(Remarquons en passant que $N \times \Omega = 0$).

Enfin :

$$\frac{N \times \mathcal{M}}{\rho} = \mathcal{M} \Omega T = 0.$$

Remarquons enfin qu'il n'est pas indispensable que l'une des arêtes du trièdre soit tangente à la courbe : il suffit que le vecteur unitaire T porté par la tangente soit un vecteur constant dans le trièdre considéré comme un système de référence ; en effet, on a encore :

$$\frac{dT}{ds_0} = 0.$$

38. Proposons-nous de trouver quelle forme on doit donner à W pour que le moment de torsion soit constant quand le moment unitaire extérieur est normal à la courbe. On peut toujours supposer que pour un état déformé la succession de trièdres qui sert à le définir soit telle qu'une même arête reste tangente à la courbe tout le long de cette courbe, mais si nous voulons que pour toutes les déformations d'équilibre cette arête reste tangente à la courbe, nous restreindrons la recherche. Or, les problèmes auxquels nous faisons allusion plus haut et qui ont été traités par Lagrange, Binet et Wantzel rentrent tous dans ce cas ; traitons-le en supposant, pour plus de généralité, que le vecteur T (tangent à la courbe) au lieu d'être porté par une arête est simplement un vecteur unitaire constant quelconque du trièdre mobile.

Alors la fonction W cherchée sera comprise dans celles satisfaisant à la condition (2), c'est-à-dire :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial W}{\partial p} & \frac{\partial W}{\partial q} & \frac{\partial W}{\partial r} \\ p & q & r \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix} = 0.$$

Considérons W comme fonction de p, q, r .

On aperçoit deux solutions particulières

$$W_1 = p^2 + q^2 + r^2,$$

$$W_2 = p\xi + q\eta + r\zeta$$

pour chacune desquelles le déterminant a deux lignes identiques. La solution générale est :

$$W = \psi(p^2 + q^2 + r^2, p\xi + q\eta + r\zeta),$$

ψ étant une fonction arbitraire des deux arguments ; comme, d'autre part, elle peut contenir ξ, η, ζ , comme variables indépendantes on pourra l'écrire sous la forme

$$W = \varphi(p^2 + q^2 + r^2, p\xi + q\eta + r\zeta, \xi, \eta, \zeta).$$

Nous pourrions prendre φ de telle manière que

$$\mathcal{M} \times T = a$$

a étant une constante.

En effet, si l'on pose :

$$\begin{aligned} p^2 + q^2 + r^2 &= u, \\ p\xi + q\eta + r\zeta &= v \end{aligned}$$

les composantes de \mathcal{M} sont données par les équations

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial p} &= 2 \frac{\partial \varphi}{\partial u} p + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \xi, \\ \frac{\partial W}{\partial q} &= 2 \frac{\partial \varphi}{\partial u} q + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \eta, \\ \frac{\partial W}{\partial r} &= 2 \frac{\partial \varphi}{\partial u} r + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \zeta \end{aligned}$$

et celles de T par

$$\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}}, \quad \frac{\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}}, \quad \frac{\zeta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}}.$$

La condition $\mathcal{M} \times T = a$ s'écrit :

$$2 \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{p\xi + q\eta + r\zeta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2} = a.$$

Posons

$$v_1 = \frac{v}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}}.$$

L'équation différentielle devient :

$$2 \frac{\partial \varphi}{\partial u} v_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial v_1} = a$$

ou

$$2v_1 \frac{\partial}{\partial u} (\varphi - av_1) + \frac{\partial}{\partial v_1} (\varphi - av_1) = 0;$$

la solution générale de cette équation différentielle est :

$$W = av_1 + \Phi(u - v_1^2, \xi, \eta, \zeta)$$

Φ étant une fonction arbitraire de l'argument $u - v_1^2$, et de ξ, η, ζ , ou :

$$W = a \frac{p\xi + q\eta + r\zeta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}} + \Phi \left[p^2 + q^2 + r^2 - \frac{(p\xi + q\eta + r\zeta)^2}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2} \right].$$

Si, comme nous l'avons envisagé, le vecteur T est un vecteur relativement constant dans le trièdre mobile, les rapports

$$\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}}, \quad \frac{\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}}, \quad \frac{\zeta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}} \quad (1)$$

sont constantes puisque ce sont les cosinus des angles de vecteur avec les axes du trièdre.

Si on les désigne par l, m, n , on a :

$$W = a(pl + qm + rn) + \Phi[p^2 + q^2 + r^2 - (pl + qm + rn)^2].$$

Cette forme comprend comme cas particuliers toutes les fonctions W indiquées dans la « Théorie » à propos des problèmes étudiés de Lagrange, Binet, Wantzel.

(1) D'après l'identité de Lagrange, l'argument qui figure dans Φ s'écrit :

$$(qn - rm)^2 + (rl - pn)^2 - (pm - ql)^2.$$

Cette fonction peut admettre en outre, comme variables indépendantes, l, m, n , comme la précédente pouvait admettre ξ, η, ζ .

II. — SUR UN THÉORÈME RELATIF A L'EFFORT DE DÉFORMATION
EN UN POINT D'UNE SURFACE DÉFORMÉE.

39. 1° Dans ce qui suit, nous désignerons par le symbole (*)

$$\frac{\mathcal{D}U}{\mathcal{D}\rho_i}$$

la dérivée partielle par rapport à ρ_i ($i=1$ ou 2) d'un vecteur fonction de deux paramètres ρ_1 et ρ_2 , cette dérivée étant prise par rapport à un trièdre ou système de référence fixe; cette notation nous permettra de représenter par un seul terme la somme :

$$\frac{\partial U}{\partial \rho_i} + \Omega \wedge U$$

qui intervient souvent par ses trois projections dans les spécifications diverses qu'étudie la « Théorie des Corps déformables » et dans laquelle $\frac{\partial U}{\partial \rho_i}$ représente une dérivée partielle prise dans un trièdre de référence mobile dont la position est fonction des ρ_i ; Ω est la vitesse angulaire instantanée de ce trièdre.

ρ_1 et ρ_2 seront les coordonnées curvilignes d'un point de la surface déformée.

Nous rappellerons que le sens direct de rotation en un point d'une surface est celui qui amènerait la partie positive de la courbe $\rho_2 = \text{const.}$ du côté de la partie positive de la courbe $\rho_1 = \text{const.}$

2° Nous allons distinguer directement les actions de deux portions de la surface séparées par un élément linéaire ds tracé sur la surface fermée.

D'habitude on considère une courbe Σ fermée, à laquelle appartient l'élément; on distingue la région A intérieure à cette courbe, de la région B extérieure.

Les valeurs de $d\rho_1$ et $d\rho_2$ résultant le long de Σ de ce que le contour doit être décrit dans le sens direct, la Théorie des Corps déformables conduit à la formule :

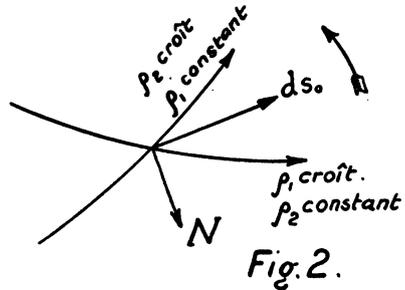
$$\Phi = \Phi_1 \frac{d\rho_2}{ds_0} - \Phi_2 \frac{d\rho_1}{ds_0}$$

qui donne l'effort extérieur de déformation Φ (par unité de longueur de l'arc ds) exercé par la portion A (intérieure) sur la portion B (extérieure).

(*) V. J. Sudria, *Sur la dérivée relative d'un vecteur* (N. A. de Math.), avril 1924.

Il est visible que la considération d'une telle courbe n'a rien de nécessaire; la convention précédente revient à cette autre qui ne fait intervenir que l'élément isolé ds_0 avant déformation.

Sur cet élément fixons un sens arbitraire et traçons dans le plan tangent la demi-normale à ds_0 faisant avec ce dernier un angle égal à $-\frac{\Pi}{2}$ (le sens positif des rotations étant celui indiqué dans la page précédente et rappelé par la flèche dans la figure ci-dessous).



Le vecteur Φ , donné par la formule :

$$(1) \quad \Phi = \Phi_1 \frac{d\rho_2}{ds_0} - \Phi_2 \frac{d\rho_1}{ds_0}$$

est celui de l'effort extérieur unitaire exercé sur la portion vers laquelle se dirige N , par l'autre portion.

Pour donner avec précision la signification de Φ_1 et de Φ_2 , écrivons l'élément linéaire de la surface déformée sous la forme :

$$ds^2 = \mathcal{E} d\rho_1^2 + 2\mathcal{F} d\rho_1 d\rho_2 + \mathcal{G} d\rho_2^2.$$

Les coefficients $\mathcal{E}_0, \mathcal{F}_0, \mathcal{G}_0$, seront relatifs à la surface non déformée; alors $\frac{\Phi_1}{\sqrt{\mathcal{G}_0}}$, est l'effort extérieur par unité de longueur de courbe non déformée s'exerçant au point considéré sur la courbe $\rho_1 = \text{const}$.

$\frac{\Phi_2}{\sqrt{\mathcal{E}_0}}$ a une signification analogue relativement à la ligne $\rho_2 = \text{const}$.

De même on a pour le moment extérieur de déformation par unité de longueur de courbe non déformée :

$$(1') \quad \mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \frac{d\rho_2}{ds_0} - \mathcal{M}_2 \frac{d\rho_1}{ds_0};$$

\mathcal{M}_1 et \mathcal{M}_2 s'interprétant comme Φ_1 et Φ_2 .

Enfin la théorie des surfaces déformables établit la relation :

$$(2) \quad \frac{\mathcal{D}\mathbb{M}_1}{\mathcal{D}\rho_1} + \frac{\mathcal{D}\mathbb{M}_2}{\mathcal{D}\rho_2} + \mathbf{V}_1 \wedge \Phi_1 + \mathbf{V}_2 \wedge \Phi_2 = \Delta_0 \mu_0,$$

Δ_0 étant la quantité $\sqrt{\varepsilon_0 \zeta_0 - \mathcal{F}_0^2}$ et μ_0 le moment extérieur par unité de surface non déformée.

3° \mathbf{V}_1 est le vecteur vitesse relatif à la courbe $\rho_2 = \text{const.}$ quand ρ_1 joue le rôle de temps.

\mathbf{V}_2 est le vecteur analogue relatif à $\rho_1 = \text{const.}$

Si \mathbf{T}_1 et \mathbf{T}_2 sont deux vecteurs unités portés par les directions de \mathbf{V}_1 et \mathbf{V}_2 , on a :

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{T}_1 \sqrt{\varepsilon_0}, \quad \mathbf{V}_2 = \mathbf{T}_2 \sqrt{\zeta_0}.$$

Enfin nous appellerons demi-normale positive en un point de la surface celle qui a le sens du produit externe $\mathbf{T}_1 \wedge \mathbf{T}_2$.

40. Cela posé, considérons une déchirure (*) passant par le point M , et soit \mathbf{V} la vitesse en M , du mobile décrivant cette déchirure, quand l'arc ainsi décrit joue le rôle de temps; c'est donc un vecteur unité porté par la tangente à la déchirure.

Faisons le produit interne par ce vecteur unité \mathbf{V} des deux membres de l'équation (2) préalablement écrite sous la forme :

$$(2') \quad \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}\rho_1} \mathbb{M}_1 + \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}\rho_2} \mathbb{M}_2 - \mu_0 \Delta_0 + \mathbf{V}_1 \wedge \Phi_1 + \mathbf{V}_2 \wedge \Phi_2 = 0.$$

Remarquons que :

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \mathbf{T}_1 \sqrt{\varepsilon_0} \frac{d\rho_1}{ds} + \mathbf{T}_2 \sqrt{\zeta_0} \frac{d\rho_2}{ds}, \\ (\mathbf{V}_1 \wedge \Phi_1) \times \mathbf{V} &= \mathbf{V}_1 \Phi_1 \mathbf{V} = \mathbf{V}_1 \Phi_1 \mathbf{T}_2 \sqrt{\zeta_0} \frac{d\rho_2}{ds} \end{aligned}$$

car :

$$\mathbf{V}_1 \Phi_1 \mathbf{T}_1 = 0.$$

(*) Il s'agit d'une déchirure virtuelle; ce mot est l'analogue du mot section employé dans les raisonnements relatifs à la déformation des corps.

D'autre part :

$$V_1 \Phi_1 T_2 = \sqrt{\varepsilon_0} T_1 \Phi_1 T_2 = \sqrt{\varepsilon_0} \Phi_1 \times T_1 \wedge T_2$$

et comme

$$T_1 \wedge T_2 = N \frac{\Delta_0}{\sqrt{\varepsilon_0} C_0}$$

on a :

$$V_1 \Phi_1 V = \Phi_1 \times N \Delta_0 \frac{d\rho_2}{ds_0}$$

On trouverait de même :

$$V_2 \Phi_2 V = -\Phi_2 \times N \Delta_0 \frac{d\rho_1}{ds_0}$$

En ajoutant les résultats, il vient, pour le produit interne du vecteur V par le premier membre de (2)' :

$$\Delta_0 \Phi \times N.$$

D'où enfin l'égalité vectorielle :

$$\left[\frac{1}{\Delta_0} \left(\frac{\mathcal{D}M_1}{\mathcal{D}\rho_1} + \frac{\mathcal{D}M_2}{\mathcal{D}\rho_2} \right) - \mu_0 \right] \times V + N \times \Phi = 0.$$

Quand on fait varier autour du point M la direction de la déchirure par laquelle on obtient le contour C , le vecteur

$$\Gamma = \frac{1}{\Delta_0} \left(\frac{\mathcal{D}M_1}{\mathcal{D}\rho_1} + \frac{\mathcal{D}M_2}{\mathcal{D}\rho_2} \right) - \mu_0$$

est indépendant de cette direction, d'après la signification des vecteurs

$$M_1, M_2 \text{ et } \mu_0.$$

Menons par le point M un point normal à la direction de Γ et soit I l'intersection de ce plan avec le plan tangent à la surface. Si la déchirure se fait tangentiellement à la droite I , le vecteur V correspondant est perpendiculaire au vecteur Γ et par conséquent, pour cette direction seulement l'effort extérieur Φ satisfait à l'équation :

$$N \times \Phi = 0$$

et se trouve par conséquent sur le plan tangent à la surface. Dans le cas particulier où le vecteur Γ serait ou nul ou normal à la surface au point M , alors le produit interne $\Gamma \times N$ serait nul quelle que soit la direction de la déchirure, et par conséquent le produit $N \times \Phi$ étant aussi nul, l'effort extérieur serait toujours dans le plan tangent au point M .

En résumé :

Il n'y a en général pour tout point M de la surface déformée qu'une seule direction telle que pour une déchirure tangente en ce point, à cette direction l'effort extérieur soit dans le plan tangent à la surface.

Dans le seul cas particulier mentionné, l'effort extérieur est toujours dans le plan tangent quelle que soit la déchirure passant par le point considéré.

III. — SUR DES FORMULES ET DEUX THÉORÈMES CONCERNANT L'EFFORT EXTÉRIEUR ET LE MOMENT DE DÉFORMATION EXTÉRIEUR EN UN ÉLÉMENT DE LIGNE TRACÉ SUR UNE SURFACE DÉFORMABLE.

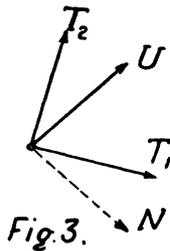
41. Opérons à partir d'un point M , sur une surface déformée une déchirure L dont nous nous proposons de faire varier la direction. Sur la tangente en M_0 à la ligne L_0 (laquelle a donné L par déformation) portons un vecteur unité U et soient T_1 et T_2 deux vecteurs unités portés par les demi-tangentes positives aux lignes coordonnées $\rho_1 = \text{const.}$ et $\rho_2 = \text{const.}$

On a pour l'élément ds_0 partant de M_0 :

$$U ds_0 = \sqrt{E_0} T_1 d\rho_1 + \sqrt{G_0} T_2 d\rho_2$$

d'où :

$$U \wedge T_1 = T_1 \wedge T_2 \sqrt{E} \frac{d\rho_1}{ds_0}$$



Prenons les valeurs numériques des deux membres en faisant intervenir le vecteur unité N dans le plan tangent à la surface et tel que l'angle $(U, N) = -\frac{\Pi}{2}$.

Alors les produits vectoriels des deux membres sont :

$$-N \times T_2 \text{ et } \frac{\Delta_0}{\sqrt{\varepsilon_0} \mathcal{G}_0}.$$

On a donc :

$$\frac{d\rho_1}{ds_0} = -\frac{\sqrt{\mathcal{G}_0}}{\Delta_0} N \times T_2,$$

et

$$\frac{d\rho_2}{ds_0} = \frac{\sqrt{\varepsilon_0}}{\Delta_0} N \times T_1.$$

Ces formules peuvent remplacer celles qui sont classiques⁽¹⁾ dans la Théorie des surfaces, lesquelles contiennent les dérivées de ρ_1 et de ρ_2 , suivant la normale à ds_0 . Transformons, d'après ces résultats, les formules donnant l'effort et le moment extérieur des déformations.

On a :

$$\Phi = \Phi_1 \frac{d\rho_2}{ds_0} - \Phi_2 \frac{d\rho_1}{ds_0}$$

ou

$$\Phi = \frac{\Phi_1 \sqrt{\varepsilon_0}}{\Delta_0} N \times T_1 + \frac{\Phi_2 \sqrt{\mathcal{G}_0}}{\Delta_0} N \times T_2.$$

Φ_1 et Φ_2 ne sont pas homogènes à Φ ; il peut être avantageux de transformer ainsi cette dernière formule; si $N \times T_2 = 0$ la déchirure est tangente à T_2 et Φ doit être alors l'effort unitaire s'exerçant sur l'unité de longueur de cette ligne; appelons-le Ψ_1 . On a ainsi :

$$\Psi_1 = \Phi_1 \frac{\sqrt{\varepsilon_0}}{\Delta_0} \sin(T_1, T_2) = \frac{\Phi_1}{\sqrt{\mathcal{G}_0}},$$

De même si

$$N \times T_1 = 0.$$

$$\Psi_2 = -\frac{\Phi_2 \sqrt{\mathcal{G}_0}}{\Delta_0} \sin(T_1, T_2) = -\frac{\Phi_2}{\sqrt{\varepsilon_0}}.$$

(1) Elles permettent de simplifier les formules de Beltrami.

D'où enfin :

$$\Phi = \frac{\sqrt{\varepsilon_0 \mathcal{G}_0}}{\Delta_0} (\psi_1 \cdot N \times T_1 - \psi_2 \cdot N \times T_2)$$

ou encore :

$$\Phi \sin(T_1, T_2) = \psi_1 \sin(T_1, U) - \psi_2 \sin(T_2, U).$$

Nous avons ainsi une relation intrinsèque; T_1 et T_2 peuvent être portés par deux directions déterminées quelconques (et non plus seulement par des tangentes aux lignes coordonnées).

En particulier si l'on applique la relation à deux éléments de lignes rectangulaires en un point M, il vient

$$\Phi = \Psi_1 \sin \alpha + \Psi_2 \cos \alpha,$$

α étant l'angle de T_1 et de U.

On transformerait de même la relation donnant le moment extérieur de déformation par unité de longueur.

42.

THÉORÈMES.

I. Considérons en un point M d'une surface déformée un élément de ligne tracé sur cette surface et le vecteur Φ représentant l'effort extérieur de déformation par unité de longueur (de la ligne avant déformation); l'extrémité de ce vecteur décrit une ellipse quand l'élément de ligne tourne dans le plan tangent.

La démonstration résulte immédiatement de la formule (3).

II. Un théorème analogue se démontrerait facilement au sujet du moment de déformation par unité de longueur (M).

Ces théorèmes rappellent celui que l'on démontre dans la Mécanique classique relativement à l'ellipsoïde des tensions dans l'étude de l'équilibre d'un milieu continu à trois dimensions. On ne peut pas les considérer comme des cas particuliers de ce dernier, non seulement parce que la théorie de l'Action euclidienne ne néglige pas les couples élémentaires pouvant être appliqués aux éléments d'une surface, mais encore parce que l'étude de la déformation d'une surface ne doit pas être considérée comme pouvant être déduite de celle d'un corps en faisant tendre vers zéro un paramètre (V. à ce sujet la critique des principes de la Mécanique dans la *Théorie des Corps déformables* de MM. E. et F. Cosserat; considérations générales, p. 5).

CHAPITRE VII

Applications (suite).

43.

LA THÉORIE DE L'ACTION EUCLIDIENNE ET LE CALCUL DES DÉPLACEMENTS.

Nous nous proposons, dans ce Chapitre, de montrer comment la Théorie de l'Action euclidienne permet d'évaluer les éléments de la déformation ; nous examinerons, pour simplifier, le cas d'une courbe déformable, car il nous fournira la solution du problème de la déformation du corps long à fibre moyenne. (Fibre moyenne gauche et déformation générale).

Nous étudierons l'état actuel de la question en approfondissant quelques indications générales de la « Théorie » ; cela nous permettra de préciser certains résultats : nous exposerons ensuite une méthode nouvelle.

Nous avons envisagé jusqu'ici l'Action euclidienne par unité de longueur W , comme une fonction de variables ξ, η, ζ, p, q et r . Mais les relations (1) et (2) ainsi que les analogues donnent ξ, η, \dots, r

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \xi &= \alpha \frac{dx}{ds_0} + \alpha' \frac{dy}{ds_0} + \alpha'' \frac{dz}{ds_0}, \\
 \eta &= \beta \frac{dx}{ds_0} + \beta' \frac{dy}{ds_0} + \beta'' \frac{dz}{ds_0}; \\
 &\dots\dots\dots \\
 (2) \quad r &= \Sigma \beta \frac{d\alpha}{ds_0}
 \end{aligned}$$

et permettent de considérer W comme une fonction de $\frac{dx}{ds_0}, \frac{dy}{ds_0}, \dots, \frac{d\gamma''}{ds_0}$.

D'autre part, les neuf cosinus $\alpha, \alpha', \dots, \gamma''$, peuvent s'exprimer au moyen de trois paramètres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ (par exemple les trois angles d'Euler).

En définitive l'Action euclidienne par unité de longueur de la ligne non déformée sera de la forme :

$$W \left(\frac{dx}{ds_0}, \frac{dy}{ds_0}, \frac{dz}{ds_0}, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \frac{d\lambda_1}{ds_0}, \frac{d\lambda_2}{ds_0}, \frac{d\lambda_3}{ds_0} \right).$$

Précisons que les expressions (2) de p , q , r , deviennent, au moyen des nouvelles variables :

$$\begin{aligned} p &= \omega'_1 \frac{d\lambda_1}{ds_0} + \omega'_2 \frac{d\lambda_2}{ds_0} + \omega'_3 \frac{d\lambda_3}{ds_0}, \\ q &= \gamma'_1 \frac{d\lambda_1}{ds_0} + \gamma'_2 \frac{d\lambda_2}{ds_0} + \gamma'_3 \frac{d\lambda_3}{ds_0}, \\ r &= \sigma'_1 \frac{d\lambda_1}{ds_0} + \sigma'_2 \frac{d\lambda_2}{ds_0} + \sigma'_3 \frac{d\lambda_3}{ds_0} \end{aligned}$$

ou, en résumé :

$$\Omega = \Omega_1 \frac{d\lambda_1}{ds_0} + \Omega_2 \frac{d\lambda_2}{ds_0} + \Omega_3 \frac{d\lambda_3}{ds_0};$$

Ω_i est la rotation instantanée du trièdre mobile quand on fait varier λ_i seulement. Le vecteur Ω_i a pour projections sur les axes du trièdre mobile : $\omega'_i, \gamma'_i, \sigma'_i$.

Rappelons maintenant comment on obtient, à partir de la nouvelle expression de W , l'effort extérieur et le moment extérieur de déformation. On a, en désignant par F, G, H , les composantes de l'effort \mathcal{E} sur les axes du trièdre fixe :

$$F = \frac{\partial W}{\partial \left(\frac{dx}{ds_0} \right)}, \quad G = \frac{\partial W}{\partial \left(\frac{dy}{ds_0} \right)}, \quad H = \frac{\partial W}{\partial \left(\frac{dz}{ds_0} \right)}$$

ou

$$\mathcal{E} = \text{grad } W_v,$$

V désignant la vitesse de l'origine quand s_0 joue le rôle du temps.

Le moment extérieur de déformation sera donné, non plus par ses composantes I, J, K , mais par trois combinaisons linéaires de celles-ci, savoir :

$$(3) \quad \mathfrak{J} = \omega'_1 I' + \omega'_2 J' + \omega'_3 K' = \omega_1 I + \omega_2 J + \omega_3 K,$$

c'est-à-dire

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{A}b \times \Omega_1, \quad \mathfrak{J} = \mathfrak{A}b \times \Omega_2, \quad \mathfrak{K} = \mathfrak{A}b \times \Omega_3.$$

On a ainsi :

$$\mathfrak{J} = \frac{\partial W}{\partial \left(\frac{d\lambda_1}{ds_0} \right)}, \quad \mathfrak{J} = \frac{\partial W}{\partial \left(\frac{d\lambda_2}{ds_0} \right)}, \quad \mathfrak{K} = \frac{\partial W}{\partial \left(\frac{d\lambda_3}{ds_0} \right)}.$$

Cela résulte de ce que le travail extérieur de déformation peut s'écrire, d'une part :

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{U}_e &= - \int_{A_0}^{B_0} \delta W ds_0 = - \int_{A_0}^{B_0} \left(\frac{\partial W}{\partial \left(\frac{dx}{ds_0} \right)} \delta \frac{dx}{ds_0} + \dots + \frac{\partial W}{\partial \lambda_3} \delta \lambda_3 \right) ds_0 \\ &= - \left[\frac{\partial W}{\partial \left(\frac{dx}{ds_0} \right)} \delta x + \frac{\partial W}{\partial \left(\frac{dy}{ds_0} \right)} \delta y + \frac{\partial W}{\partial \left(\frac{dz}{ds_0} \right)} \delta z + \frac{\partial W}{\partial \left(\frac{d\lambda_1}{ds_0} \right)} \delta \lambda_1 + \frac{\partial W}{\partial \left(\frac{d\lambda_2}{ds_0} \right)} \delta \lambda_2 + \frac{\partial W}{\partial \left(\frac{d\lambda_3}{ds_0} \right)} \delta \lambda_3 \right]_{A_0}^{B_0} \\ &\quad - \int_{A_0}^{B_0} \left(\frac{d}{ds_0} \frac{\partial W}{\partial \left(\frac{dx}{ds_0} \right)} \delta x + \dots \right) ds_0 \end{aligned}$$

et d'autre part $\delta_i, \delta_j, \delta_k$, étant les projections de la rotation élémentaire correspondant à $\delta \lambda_1, \delta \lambda_2, \delta \lambda_3$,

$$\delta \mathcal{U}_e = - [F \delta x + G \delta y + H \delta z + I \delta i + J \delta j + K \delta k]_{A_0}^{B_0} + \int (X \delta x + Y \delta y + \dots) ds_0;$$

cette dernière équation peut s'écrire en vertu de (3)

$$\delta \mathcal{U}_e = - [F \delta x + G \delta y + H \delta z + J \delta \lambda_1 + J' \delta \lambda_2 + J'' \delta \lambda_3]_{A_0}^{B_0} + \int (X \delta x + Y \delta y + \dots) ds_0 \quad (').$$

44. Les Auteurs de la Théorie supposent que le déterminant jacobien des fonctions

$$\frac{\partial W}{\partial \left(\frac{dx}{ds_0} \right)}, \quad \frac{\partial W}{\partial \left(\frac{dy}{ds_0} \right)}, \quad \dots, \quad \frac{\partial W}{\partial \left(\frac{d\lambda_3}{ds_0} \right)}$$

par rapport aux variables

$$\frac{dx}{ds_0}, \quad \frac{dy}{ds_0}, \quad \dots, \quad \frac{d\lambda_3}{ds_0}$$

n'est pas nul. Or, nous avons été conduit à faire une supposition analogue relativement au Hessien de W considérée comme fonction des ξ, η, ζ, p, q et r et nous avons justifié cette hypothèse. Vérifions que cette dernière entraîne celle de MM. Cosserat. Cette vérification serait inutile si l'on passait des variables $\xi, \eta, \zeta, p, q, r$, aux variables $\frac{dx}{ds_0}, \frac{dy}{ds_0}, \dots, \frac{d\lambda_3}{ds_0}$ par une substitution linéaire à coefficients constants,

(') En effet, l'on a par exemple : $\delta I = \varpi_1 \delta \lambda_1 + \varpi_2 \delta \lambda_2 + \varpi_3 \delta \lambda_3$.

car on serait alors conduit à utiliser une proposition classique concernant les Hessiens et il suffirait de vérifier que le déterminant de la substitution est différent de zéro.

Or, bien que la substitution ne soit pas à coefficients constants, les calculs qu'exige la vérification sont ici rigoureusement les mêmes que ceux du cas rappelé ci-dessus. En effet, ces coefficients ne dépendent que de s_0 , λ_1 , λ_2 et λ_3 , et non des variables par rapport auxquelles on cherche les dérivées partielles, savoir

$$\frac{dx}{ds_0}, \frac{dy}{ds_0}, \frac{dz}{ds_0}, \frac{d\lambda_1}{ds_0}, \frac{d\lambda_2}{ds_0}, \frac{d\lambda_3}{ds_0}.$$

Ainsi l'on a, par exemple :

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial \left(\frac{dx}{ds_0} \right)} &= \frac{\partial W}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \left(\frac{dx}{ds_0} \right)} + \frac{\partial W}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \left(\frac{dx}{ds_0} \right)} + \dots = \alpha \frac{\partial W}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial W}{\partial \eta} + \gamma \frac{\partial W}{\partial \zeta} \\ &+ \text{termes nuls en } \frac{\partial W}{\partial p}, \dots \end{aligned}$$

$$\text{De même : } \frac{\partial W}{\partial \frac{d\lambda_1}{ds_0}} = \text{termes nuls en } \frac{\partial W}{\partial \xi}, \text{ etc., } + \frac{\partial W}{\partial p} \varpi'_1 + \frac{\partial W}{\partial q} \varpi'_2 + \frac{\partial W}{\partial r} \varpi'_3.$$

On calculerait de même les dérivées secondes.

Il en résulte que le Hessien H_1 de $W \left(\frac{dx}{ds_0}, \frac{dy}{ds_0}, \dots, \frac{d\lambda_3}{ds_0} \right)$ est égal au Hessien H de $W(\xi, \eta, \zeta, p, q, r)$ multiplié par le carré du déterminant

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & 0 & 0 & 0 \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & 0 & 0 & 0 \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varpi'_1 & \chi'_1 & \sigma'_1 \\ 0 & 0 & 0 & \varpi'_2 & \chi'_2 & \sigma'_2 \\ 0 & 0 & 0 & \varpi'_3 & \chi'_3 & \sigma'_3 \end{vmatrix}.$$

La règle de Laplace donne, pour le développement de ce déterminant :

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \varpi'_1 & \chi'_1 & \sigma'_1 \\ \varpi'_2 & \chi'_2 & \sigma'_2 \\ \varpi'_3 & \chi'_3 & \sigma'_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varpi'_1 & \chi'_1 & \sigma'_1 \\ \varpi'_2 & \chi'_2 & \sigma'_2 \\ \varpi'_3 & \chi'_3 & \sigma'_3 \end{vmatrix}.$$

D'où :

$$H_i = H. [\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3].$$

H étant différent de zéro, il faudrait pour que H_i soit identiquement nul, que les trois rotations instantanées $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$, soient constamment dans un même plan. Nous rappellerons que la rotation habituellement appelée θ' (quand on emploie les angles d'Euler) est perpendiculaire au plan des rotations désignées par φ' et Ψ' ; le cas d'exception est donc à rejeter, si l'une des vitesses angulaires n'est pas constamment nulle.

45. Nous allons maintenant étudier une fonction E, envisagée déjà dans la Théorie des Corps déformables, où elle est définie par l'équation :

$$E = \frac{\partial W}{\partial \left(\frac{dx}{ds_0}\right)} \frac{dx}{ds_0} + \frac{\partial W}{\partial \left(\frac{dy}{ds_0}\right)} \frac{dy}{ds_0} + \dots + \frac{\partial W}{\partial \left(\frac{d\lambda_3}{ds_0}\right)} \frac{d\lambda_3}{ds_0} - W$$

ce que nous pouvons écrire d'une manière abrégée

$$E = \text{grad } W_v \times V + \text{grad } W_\Omega \times \Omega - W.$$

De la définition, on tire :

$$dE = \frac{dx}{ds_0} dF + \frac{dy}{ds_0} dG + \frac{dz}{ds_0} dH + \frac{d\lambda_1}{ds_0} dJ + \frac{d\lambda_2}{ds_0} dJ' + \frac{d\lambda_3}{ds_0} dK - \sum \frac{\partial W}{\partial \lambda_i} d\lambda_i$$

d'où :

$$\frac{dx}{ds_0} = \frac{\partial E}{\partial F}, \quad \frac{dy}{ds_0} = \frac{\partial E}{\partial G}, \quad \dots, \quad \frac{d\lambda_3}{ds_0} = \frac{\partial E}{\partial K}.$$

Proposons-nous maintenant de résoudre ce problème.

Quelle forme doit avoir $E(F, G, H, J, J', K, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, s_0)$ pour que W soit quadratique en F, G, H, J, J', K.

Il est dit incidemment dans la Théorie des Corps déformables (p. 30), que dans ce cas E est elle-même quadratique et, de ce fait, coïncide avec W.

Il est facile de voir que ce n'est pas possible; en effet, E serait dans ce cas linéaire et homogène en F, G, H, K et se réduirait à zéro pour $F = G, \dots, K = 0$ (état naturel), ce qui entraînerait, pour cet état, les conditions

$$\left(\frac{dx}{ds_0}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{dy}{ds_0}\right)_0 = 0 \dots$$

et l'on sait que

$$\left(\frac{dx}{ds_0}\right)_0^2 + \left(\frac{dy}{ds_0}\right)_0^2 + \left(\frac{dz}{ds_0}\right)_0^2 = 1.$$

Tout ce que l'on peut affirmer, d'après les propriétés des fonctions quadratiques, c'est que, dans l'hypothèse précédente, W est une solution de l'équation en E

$$E = \frac{\partial W}{\partial \left(\frac{dx}{ds_0}\right)} \frac{\partial E}{\partial F} + \frac{\partial W}{\partial \left(\frac{dy}{ds_0}\right)} \frac{\partial E}{\partial G} + \dots + \frac{\partial W}{\partial \left(\frac{d\lambda_3}{ds_0}\right)} \frac{\partial E}{\partial \mathcal{K}} - W$$

équation qui s'écrit encore :

$$E = F \frac{\partial E}{\partial F} + G \frac{\partial E}{\partial G} + \dots + \mathcal{K} \frac{\partial E}{\partial \mathcal{K}} - W$$

et nous venons de voir que cette solution ne peut convenir.

Pour trouver la solution la plus générale de l'équation (1), posons :

$$E = W + u;$$

u sera déterminée par l'équation aux dérivées partielles linéaire.

$$u = F \frac{\partial u}{\partial F} + G \frac{\partial u}{\partial G} + \dots + \mathcal{K} \frac{\partial u}{\partial \mathcal{K}},$$

la résolution est immédiate et u est donnée par l'équation :

$$f\left(\frac{u}{F}, \frac{u}{G}, \dots, \frac{u}{\mathcal{K}}\right) = 0$$

ou mieux, pour la suite :

$$u = F \cdot \theta\left(\frac{G}{F}, \frac{H}{F}, \dots, \frac{\mathcal{K}}{F}\right);$$

f et θ étant des fonctions arbitraires des arguments mis en évidence et aussi de $s_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

Ce qui précède montre que $\frac{\partial u}{\partial G}$ pour $F = G = \dots = \mathcal{K} = 0$ doit se réduire à $\frac{dy}{ds_0}$ pour l'état initial; or, $\frac{\partial u}{\partial G}$ pour $F = G = \dots = 0$ a même valeur que

$\theta'_{\frac{G}{F}} \left(\frac{G}{F}, \dots, \frac{K}{F} \right)$; mais comme $\frac{G}{F}, \dots, \frac{K}{F}$ peuvent, dans ces conditions, avoir des valeurs limites arbitraires, il s'ensuit que $\theta'_{\frac{G}{F}}$ ne contient pas $\frac{G}{F}, \dots, \frac{K}{F}$. Cette condition et les deux autres analogues mettent en évidence la solution :

$$u_i = F\varphi(s_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) + G\psi(s_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) + \dots + \mathfrak{H}'\tau(s_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3);$$

(φ se réduisant à $\left(\frac{dx}{ds_0} \right)_0$ pour $F = G = \dots = \mathfrak{H} = 0$) et pour E, la solution

$$E_i = W + F\varphi + G\psi + \dots + K\tau$$

à laquelle nous allons être conduit naturellement dans les paragraphes suivants.

46. Nous avons vu que si l'on développe $W(\xi, \eta, \zeta, p, q, r)$ suivant les puissances de $\xi - \xi_0, \eta - \eta_0, \dots, r - r_0$, le terme indépendant de $\xi, \eta, \zeta, p, q, r$, et les termes du premier degré sont séparément nuls; pour des déformations suffisamment petites, on aura, en se limitant aux termes du second ordre, une expression de la forme : $W =$ fonction quadratique de $\xi - \xi_0, \eta - \eta_0, \dots, r - r_0$, les coefficients de cette fonction dépendant de s_0 .

La relation

$$E = \xi \frac{\partial W}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial W}{\partial \eta} + \dots + r \frac{\partial W}{\partial r} - W$$

s'écrit encore :

$$\begin{aligned} E &= (\xi - \xi_0) \frac{\partial W}{\partial (\xi - \xi_0)} + (\eta - \eta_0) \frac{\partial W}{\partial (\eta - \eta_0)} + \dots + (r - r_0) \frac{\partial W}{\partial (r - r_0)} - W \\ &+ \xi_0 \frac{\partial W}{\partial \xi} + \eta_0 \frac{\partial W}{\partial \eta} + \dots + r_0 \frac{\partial W}{\partial r} = W + F'\xi_0 + G'\eta_0 + \dots + \mathfrak{H}'r_0. \end{aligned}$$

D'ailleurs le changement de variables tel que

$$\frac{\partial W}{\partial \xi} = F', \quad \frac{\partial W}{\partial \eta} = G', \dots, \text{etc.},$$

donne les quantités $\xi - \xi_0, \eta - \eta_0, \dots, r - r_0$ en fonction linéaire et homogène de F', G', K' . De sorte que W est une fonction quadratique de F', G', H', L', J', K' dont les coefficients ne dépendent que de s_0 .

Mais F', G', \dots, K' s'expriment en fonction linéaire et homogène de F, G, \dots, K les coefficients dépendant de $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

Finalement W s'exprime en fonction quadratique de F, G, \dots, K ou de $F, G, H, \mathfrak{J}, \mathfrak{J}', \mathfrak{K}$; les coefficients dépendant de $s_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, E dans ce cas, s'obtient en ajoutant à W l'expression linéaire et homogène

$$F'\xi_0 + G'\eta_0 + \dots + K'r_0$$

ou encore

$$\begin{aligned} & (F\alpha + G\alpha' + H\alpha'')\xi_0 + (F\beta + G\beta' + H\beta'')\eta_0 + (F\gamma + G\gamma' + H\gamma'')\zeta_0 \\ & + (I\alpha + J\alpha' + K\alpha'')p_0 + (I\beta + J\beta' + K\beta'')q_0 + (I\gamma + J\gamma' + K\gamma'')r_0 \\ & = F\varphi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \xi_0, \eta_0, \zeta_0) + G\psi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \xi_0, \eta_0, \zeta_0) + \dots \end{aligned}$$

Le coefficient de F , par exemple, lorsque $F = G = H = \dots = K = 0$, c'est-à-dire avant la déformation, se réduit à $\alpha\xi_0 + \beta\eta_0 + \gamma\zeta_0$ ou comme l'avait montré la théorie générale précédente à $\left(\frac{dx}{ds_0}\right)_0$; les autres coefficients permettraient de vérifier les prévisions faites plus haut et de confirmer pour E la forme déjà donnée.

Voyons maintenant ce que l'on peut tirer de ces généralités, relativement aux déplacements.

47. Sans se placer dans le cas extrêmement particulier envisagé dans la Théorie des Corps déformables, p. 29 (celui où il n'y a de forces et moments extérieurs qu'aux extrémités de la ligne), l'on peut donner des résultats intéressants :

De l'égalité :

$$\frac{dx}{ds_0} = \frac{\partial E}{\partial F} = \frac{\partial W}{\partial F} + \varphi(s_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$$

on déduit, en désignant par Δ la variation d'une quantité lors d'une déformation effectuée à partir de la position d'équilibre :

$$(1) \quad \Delta \frac{dx}{ds_0} = \frac{\partial W}{\partial F} + \Delta\varphi$$

car $\frac{\partial W}{\partial F}$ est linéaire et homogène par rapport aux composantes de l'effort et du moment de déformation, de sorte que $\Delta \frac{\partial W}{\partial F} = \frac{\partial W}{\partial F}$.

En permutant, dans l'équation (1) les symboles Δ et d et en intégrant, il vient :

$$(2) \quad \Delta x = \Delta x_\lambda + \int_\lambda^m \frac{\partial W}{\partial F} ds + \int_\lambda^m \Delta \varphi ds_0.$$

D'ailleurs $\Delta \varphi$ s'exprime au moyen des λ_i et de leurs variations. — $\Delta \lambda_1$ par exemple est donnée par

$$(3) \quad (\Delta \lambda_1)_m = (\Delta \lambda_1)_\lambda + \int_\lambda^m \frac{\partial W}{\partial J} ds_0.$$

Ces résultats (2) et (3) que, dans un cas très particulier, on a rapprochés de ceux donnés par Castigliano, ont une forme très différente de ces derniers, puisqu'ils ne font pas intervenir les dérivées de W par rapport à la force appliquée au point considéré.

On ne voit pas quelles conséquences l'on peut tirer des égalités précédentes pour les corps à fibre moyenne.

FORMULES NOUVELLES.

48. Nous allons enfin établir par une voie différente des formules donnant les déplacements absolus.

Appliquons les procédés précédemment exposés à la fonction W , exprimée au moyen de variables $\xi, \eta, \zeta, p, q, r$.

Des relations

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} F' = \frac{\partial W}{\partial \xi}, \\ I' = \frac{\partial W}{\partial p}, \end{array} \right. \text{ etc.,}$$

l'on déduit par le procédé d'inversion ci-dessus :

$$(2) \quad \begin{array}{lll} \xi = \frac{\partial E}{\partial F'}, & \eta = \frac{\partial E}{\partial G'}, & \zeta = \frac{\partial E}{\partial H'}, \\ p = \frac{\partial E}{\partial I'}, & q = \frac{\partial E}{\partial J'}, & r = \frac{\partial E}{\partial K'} \end{array}$$

avec

$$E = \xi \frac{\partial W}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial W}{\partial \eta} + \zeta \frac{\partial W}{\partial \zeta} + p \frac{\partial W}{\partial p} + q \frac{\partial W}{\partial q} + r \frac{\partial W}{\partial r} - W$$

le deuxième membre étant exprimé au moyen des quantités $\xi, \eta, \zeta, p, q, r$, tirées de (1).

Si W est quadratique, on trouve que :

$$E = W + F'\xi_0 + G'\eta_0 + H'\zeta_0 + I'p_0 + J'q_0 + K'r_0 \quad (*)$$

d'où enfin, d'après (2) :

$$\xi - \xi_0 = \frac{\partial W}{\partial F'}, \quad \eta - \eta_0 = \frac{\partial W}{\partial G'}, \quad \zeta - \zeta_0 = \frac{\partial W}{\partial H'}, \quad p - p_0 = \frac{\partial W}{\partial I'}, \text{ etc.,}$$

que l'on peut résumer ainsi

$$\delta V = \text{grad } W_{\mathcal{E}}, \quad \delta \Omega = \text{grad } W_{\mathcal{M}};$$

δV et $\delta \Omega$ étant les variations de V et Ω par rapport au trièdre mobile ; de sorte que la variation absolue de V est (v. notations, p. 86).

$$\Delta V = \text{grad } W_{\mathcal{E}} + \theta \wedge V.$$

Le premier membre n'est autre que $\Delta \frac{DM}{Ds_0}$ ou $D \frac{\Delta M}{\Delta s_0}$.

Enfin, en prenant l'intégrale géométrique depuis un point A jusqu'au point M :

$$\Delta M = \Delta A + \int_A^M \text{grad } W_{\mathcal{E}_0} ds_0 + \int_A^M \left(\theta \wedge \frac{DP}{DS_0} \right) ds_0.$$

$$\text{D'autre part } \delta \Omega = \frac{D\theta}{Ds_0}$$

$$\text{d'où : } \theta_M = \theta_A + \int_A^M \text{grad } W_{\mathcal{M}} ds_0. \quad (S_1)$$

(sous le signe \int , P désigne le point décrivant la courbe de A à M). Intégrons par parties :

$$(S_2) \quad \Delta M = \Delta A + \int_A^M \text{grad } W_{\mathcal{E}} ds_0 + [\theta \wedge \circ P]_A^M - \int_A^M (\text{grad } W_{\mathcal{M}} \wedge \circ P) ds_0.$$

Telle est l'égalité vectorielle fondamentale, d'où nous allons tirer une méthode générale pour le calcul des déformations.

(*) Le calcul est analogue à celui de la page 140.

REMARQUE.

Dans le cas où le système est plan, les forces étant appliquées dans le plan, cette égalité fournit les formules classiques de Bresse.

L'équation $[S_2]$ est donc une double généralisation des formules de Bresse puisque :

- 1° On ne suppose pas le système plan ;
- 2° L'on considère la déformation élémentaire la plus générale (extension, glissement, flexion, torsion),

49. Pour avoir les formules de Bresse, il suffit de projeter l'égalité vectorielle sur deux axes de coordonnées dont l'origine serait en M ; u_m et u_λ étant les composantes du déplacement suivant l'axe ox il vient :

$$u_m = u_\lambda + \int_A^M \text{grad } W_{\mathcal{E}} \times \mathbf{i} ds_0 + \theta_\lambda (Z_M - Z_\lambda) - Z_M \int_A^M \frac{M}{EI} ds_0 + \int_A^M \frac{Mz}{EI} ds_0,$$

\mathbf{i} étant un vecteur unité porté par l'axe de projection.

La partie de W qui dépend de l'effort extérieur s'écrit :

$$-\frac{1}{2} \left[\frac{N^2}{E\Omega} + \frac{T^2}{G\Omega} + \dots \right].$$

Le gradient de W relatif à \mathcal{E} a donc pour composantes $\frac{N}{E\Omega}$ suivant la tangente et $\frac{T}{G\Omega}$ suivant la normale ; la projection sur l'axe des x ou $\text{grad } W_{\mathcal{E}} \times \mathbf{i}$ s'obtient aisément.

Il serait très facile, en traduisant l'égalité (S_2) générale au moyen des projections sur les axes, de donner une équation de Bresse généralisée, convenant aux systèmes gauches les plus généraux et à la déformation élémentaire la plus générale ; pour souligner l'intérêt de cette extension, rappelons les lignes suivantes de M. Mesnager⁽¹⁾ :

« En ce qui concerne les systèmes à trois dimensions, l'emploi de la géométrie et de la cinématique donne lieu à des difficultés et des complications telles que les Auteurs ont en général éludé ces difficultés et ces complications par l'introduction dans le calcul, d'hypothèses non justifiées enlevant toute valeur aux résultats ainsi obtenus. »

⁽¹⁾ *Bulletin de la Société d'encouragement pour l'industrie nationale*, tome CXXXIII, n° 4 avril 1921.

En fait, dans la méthode que nous exposons ci-dessus, l'emploi de la cinématique se borne à la relation déjà plusieurs fois utilisée, entre la variation absolue et la variation relative d'un vecteur.

50. On a fait d'autres reproches aux formules de Bresse, notamment « l'introduction inévitable d'inconnues auxiliaires, sous forme de déplacements linéaires et angulaires ⁽¹⁾ ».

Nous allons déduire de l'équation générale (S₁) des formules débarrassées, une fois pour toutes, des inconnues auxiliaires. Ces formules applicables à un système gauche déformé, ne font intervenir que deux coefficients (un seul pour les systèmes plans) lesquels peuvent se calculer d'avance, indépendamment de la forme du système et des forces appliquées.

Cette méthode paraît aussi aisée à appliquer que la méthode que M. Bertrand de Fontviolant a fait connaître. Nous le montrerons par quelques exemples. En outre, elle ne fait pas intervenir de forces fictives.

Nous nous servons de la remarque évidente suivante : les corps à fibre moyenne gauche ont au moins trois points fixes, les corps à fibre moyenne plane, deux points fixes ⁽²⁾.

Traisons le premier cas, le plus général.

Appelons A₁, A₂, A₃, les points fixes ; soit à trouver la composante Δx du déplacement d'un point M suivant une direction définie par un vecteur I lequel, pour la suite, sera pris de module unité.

L'équation (S) quand on prend pour point o, le point fixe A_i, s'écrit

$$\Delta M = \int_{\lambda_i}^m \text{grad } W_{\mathcal{G}} ds_o + \theta_m \wedge A_i M - \int_{\lambda_i}^m \text{grad } W_{\mathcal{M}} \wedge A_i P \cdot ds_o.$$

Multiplions les deux membres par λ_i et ajoutons membre à membre les trois équations analogues, en choisissant les coefficients λ_i de telle manière que :

$$\sum_i (\lambda_i A_i M) = I.$$

Il vient :

$$\Delta x \cdot \Sigma \lambda_i = \Sigma \left(\lambda_i \int_{\lambda_i}^m (\text{grad } W_{\mathcal{G}} + A_i P \wedge \text{grad } W_{\mathcal{M}}) \right) \times I ds_o.$$

⁽¹⁾ Mesnager, *loc. cit.*

⁽²⁾ En donnant à cette manière de parler un sens général, on comprend dans ce cas, celui des systèmes encastés et celui des appuis à roulement.

Telle est la formule que nous aurons en vue. Elle s'écrit encore :

$$\Delta x = \sum \mu_i \int_{A_i}^M (\text{grad } W_g + A_i P \wedge \text{grad } W_{\mathbb{M}}) \times I ds,$$

avec

$$\mu_i = \frac{\lambda_i}{\sum \lambda_i},$$

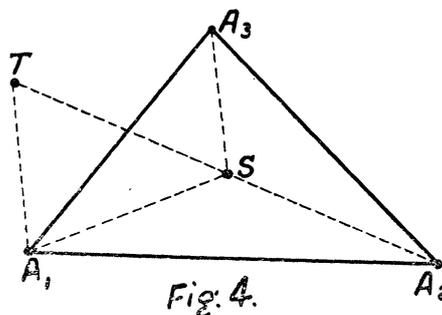
Dans le cas le plus général, il n'y a en réalité que deux coefficients indépendants car $\sum \mu_i = 1$.

51.

REMARQUES.

I. Il est facile d'obtenir géométriquement les coefficients λ_i ou plutôt des quantités proportionnelles.

Soit S la projection oblique (faite parallèlement à I) du point M sur le plan A_1, A_2, A_3 .



La relation $\lambda_1 A_1 M + \lambda_2 A_2 M + \lambda_3 A_3 M = I$, entraîne

$$\lambda_1 A_1 S + \lambda_2 A_2 S + \lambda_3 A_3 S = 0.$$

Par le point A_1 menons une parallèle $A_1 T$ à SA_3 jusqu'à la rencontre de SA_2 .
On pourra prendre si S est intérieur au triangle

$$\lambda_1 = 1,$$

$$\lambda_2 = \frac{\text{mod. } ST}{\text{mod. } A_2 S},$$

$$\lambda_3 = \frac{\text{mod. } TA_1}{\text{mod. } A_3 S};$$

en effet :

$$A_1 S + ST + TA_1 = 0.$$

II. Si le point S était en dehors du triangle $A_1A_2A_3$, la valeur de l'un des coefficients λ serait négative.

La figure le montre immédiatement.

III. Si la direction de I est dans le plan MA_1A_2 par exemple, la formule se simplifie; en effet, l'on a vu que $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, sont choisis de manière à annuler le trivecteur

$$(\lambda_1 A_1 P + \lambda_2 A_2 P + \lambda_3 A_3 P, \theta, I),$$

mais ici $\lambda_3 = 0$ et il suffit de prendre λ_1 et λ_2 de manière que

$$\lambda_1 A_1 P + \lambda_2 A_2 P = I$$

ou

$$\lambda_1 A_1 S + \lambda_2 A_2 S = 0$$

d'où, si le point S est à l'intérieur du segment A_1A_2

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\text{mod. } A_2 S}{\text{mod. } A_1 S},$$

$$\mu_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{\text{mod. } A_2 S}{\text{mod. } A_1 A_2}$$

et

$$\mu_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{\text{mod. } A_1 S}{\text{mod. } A_1 A_2}.$$

IV. Traduction algébrique des égalités vectorielles :

1° Pour simplifier l'exposé, prenons le cas d'un système plan soumis à des forces situées dans le plan; alors

$$W = -\frac{1}{2} \left[\frac{N^2}{E\Omega} + \frac{T^2}{G\Omega} + \frac{M^2}{EI} \right]$$

le gradient de W relatif à l'effort a pour composantes $\frac{N}{E\Omega}, \frac{T}{G\Omega}$ il est facile d'en avoir la projection sur un axe quelconque, projection que nous avons désignée par : $\text{grad } W_{\mathcal{G}} \times I$ (I vecteur unité porté par l'axe).

2° En ce qui concerne le gradient $W_{\mathcal{M}}$, il se réduit à sa composante $\frac{M}{EI}$ suivant la normale au plan du système; elle est comptée positivement d'après la convention qui lie le sens positif d'une demi-normale au plan, au sens positif de rotation dans le plan.

Si x et y sont les coordonnées du point P par rapport à des axes rectangulaires issus de A_1 et dont l'un, celui de x , est dirigé suivant A_1A_2 , les produits externes tels que $A_1P \wedge \text{grad } W_{\mathcal{M}}$, ont pour composantes suivant $ox, \frac{M}{EI} y$

$$\text{suivant } \theta y, -\frac{M}{EI} x.$$

V. *L'intégration par parties, au moyen de laquelle nous avons obtenu la formule (S) n'est pas valable si la ligne déformable est constituée de tronçons articulés; la rotation θ varie brusquement d'une quantité finie $\theta_2 - \theta_1$ quand on passe de l'extrémité d'un tronçon à l'extrémité contiguë du tronçon suivant.*

Prenons, pour simplifier l'exposition, un système plan à rotules intermédiaires; en opérant pour chaque tronçon comme il a été dit, il vient pour un point P quelconque :

$$\Delta P = I_{A_1}^P + \sum_c (\theta_2 - \theta_1) \wedge A_1C + \theta_p \wedge A_1P.$$

En représentant par $I_{A_1}^P$ l'intégrale de $\text{grad } W_{\mathcal{E}} + A_1P \wedge \text{grad } W_{\mathcal{M}}$, la somme Σ_c étant étendue à toutes les rotules séparant A_1 et P . De même

$$\Delta P = I_{A_2}^P + \sum_c (\theta_1 - \theta_2) \wedge A_2C + \theta_p \wedge A_2P$$

la somme Σ étant étendue à toutes les rotules séparant P et A_2 , si l'on projette sur la ligne des appuis A_1A_2 il vient en traduisant algébriquement l'égalité vectorielle obtenue en retranchant

$$\sum_i f_i (\theta_2 - \theta_1)_i = \int_{A_1}^{A_2} \frac{M}{EI} y ds_i;$$

f_i désigne la hauteur de la rotule C_i au-dessus de la ligne A_1A_2 .

VI. Reprenons l'exemple que M. Mesnager (*) a traité successivement par les formules de Bresse et celles de MM. Bertrand de Fontviolant.

Calculons le déplacement vertical λ d'un point quelconque P d'un arc à trois rotules soumis à des charges quelconques situées dans le plan de la ligne moyenne

(*) *Bulletin de la Société d'encouragement pour l'industrie nationale*, tome CXXXIII, n° 4, avril 1921.

de cet arc. Bien qu'il soit très facile de tenir compte de l'effort extérieur nous le négligeons pour simplifier.

$$\lambda = \mu_1 Y \times (I_{A_1}^P + (\theta_2 - \theta_1) A_1 C) + \mu_2 I_{A_2}^P \times Y,$$

Y étant un vecteur vertical unité ascendant :

$$\mu_1 = \frac{l - x_P}{l}, \quad \mu_2 = \frac{x_P}{l}.$$

Mais d'après la remarque précédente,

$$\theta_2 - \theta_1 = \frac{1}{f} \int_{A_1}^{A_2} \frac{M}{EI} y ds.$$

d'où :

$$\lambda = \frac{l - x_P}{l} \int_{A_1}^P \frac{M}{EI} x ds_0 + \frac{x_P}{l} \int_P^{A_2} \frac{M(l - x)}{EI} ds_0 - \frac{x_P}{2f} \int_{A_1}^{A_2} \frac{M}{EI} y ds_0.$$

VII. Voici encore un exemple mentionné dans le même article de M. Mesnager, mais non traité : celui de l'arc à trois rotules intermédiaires ABC (arc du chemin de fer métropolitain, près du pont d'Austerlitz). Désignons par f la hauteur de la rotule C au-dessus de AB, par l la distance primitive des rotules A et B, enfin par u_A la distance horizontale des points o_1 et A. (Les appuis o et o sont à encastrement).

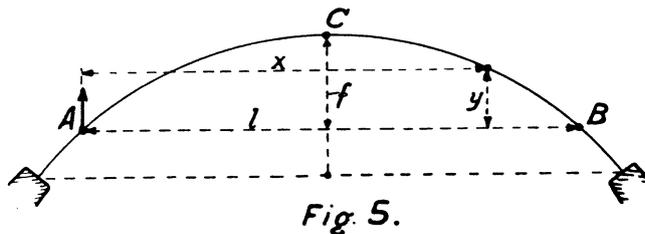


Fig. 5.

Le déplacement du point A est donné par la formule (S₂)

$$\lambda^A = (I_{o_1}^A - o_1 A \wedge \theta_A) \times Y \quad \text{avec} \quad \theta_A = \int_{o_1}^A \text{grad } W_{\mathcal{M}b} ds_0.$$

ou encore :

$$\lambda_A = I_{o_1}^A \times Y - \left[o_1 A \int_{o_1}^A \text{grad } W \cdot \mathbb{b} ds_0, Y \right]^{(4)}.$$

En outre $\lambda_P - \lambda_A$ s'obtient comme dans le cas précédent (V. p. 150), d'où en ajoutant, la valeur de λ_A .

(4) Ces deux termes sont respectivement égaux aux deux quantités

$$\int_{o_1}^A \begin{vmatrix} u & v & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M}{EI} \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} ds_0 \quad \text{et} \quad - \begin{vmatrix} u_A & v_A & 0 \\ 0 & 0 & \int_{o_1}^A \frac{M}{EI} ds_0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

soit :

$$- \int_{o_1}^A u \frac{M}{EI} ds_0 + u_A \int_{o_1}^A \frac{M}{EI} ds_0.$$



ERRATUM

N° 19, lignes 4 et suivantes. Lire :

distribution continue de forces de vecteur unitaire φ_i et d'une distribution continue de moments de vecteur unitaire μ_i , tels que l'effort extérieur de déformation et le moment de déformation extérieur en chaque point restent invariables et égaux aux éléments \mathcal{E}_i et \mathbb{M}_i analogues relatifs à la déformation d'équilibre considérée. (L'invariabilité ayant naturellement lieu par rapport au trièdre attaché au point.)

Enfin...