ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

P. VINCENSINI

Sur trois types de congruences rectilignes

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 3e série, tome 19 (1927), p. 93-166
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1927_3_19__93_0>

SUR TROIS TYPES DE CONGRUENCES RECTILIGNES

Par M. P. VINCENSINI

Professeur agrégé au Lycée de Bastia.

Le but essentiel du présent travail est d'établir entre trois types intéressants de congruences rectilignes, des relations géométriques, liant intimement leurs études, et qui, bien que simples, ne semblent pas encore avoir été observées.

Il s'agit des congruences :

à surface moyenne plane,
à enveloppée moyenne point,
à foyers associés (situés sur un même rayon) équidistants d'une droite fixe.

Les deux premiers types de congruences, sont loin d'être nouveaux. Les congruences à surface moyenne plane, ont été étudiées par C. Guichard, dans une Note intitulée : *Sur les congruences dont la surface moyenne est un plan* (Comptes rendus de l'Académie des Sciences, 1892, tome CXIV, p. 729).

Dans cette Note, l'auteur indique une construction géométrique des congruences en question, que nous aurons l'occasion de rappeler, et qui se rattache, comme le montre Darboux (*Théorie des Surfaces*, tome IV, p. 90), a un théorème sur les correspondances par éléments linéaires orthogonaux entre deux surfaces.

Les congruences dont l'*enveloppée moyenne* (enveloppe du plan perpendiculaire à chaque rayon au milieu du segment focal), est un point, ont été étudiées, dans le cas particulier des congruences de normales par :

Ribaucour (*Mémoire sur la théorie générale des surfaces courbes;* chap. VI, Journal de mathématiques pures et appliquées, tome VII, 4e série);

M. P. Appell (*Surfaces telles que l'origine se projette sur chaque normale au milieu des centres de courbure principaux;* American journal of Mathematics, tome X, p. 175, 1888);

M. E. Goursat (*Surfaces telles que la somme des rayons de courbure principaux est proportionnelle à la distance d'un point fixe au plan tangent;* même recueil et même tome, p. 187).

Enfin M. L. Bianchi, dans ses « Leçons de géométrie différentielle », déduit des formules générales de Sannia, *toutes* les congruences à enveloppée moyenne point, auxquelles il donne le nom de *congruences d'Appell généralisées*.

Les congruences à foyers associés *équidistants* d'une *droite* fixe, sont peut-être d'un type nouveau.

Leur étude se présente naturellement à l'esprit comme constituant un complément presque nécessaire à l'étude des deux premiers types de congruences, que l'on peut définir en disant :

pour le premier, que deux foyers associés quelconques sont *équidistants* d'un *plan* fixe (nous omettons le cas simple où les rayons sont parallèles a un même plan);

pour le deuxième, que deux foyers associés sont *équidistants* d'un *point* fixe.

Dans chacune des études qui viennent d'être signalées, le type de congruence dont il est question est examiné isolément, indépendamment de ses relations avec les deux autres types. C'est en nous demandant si l'analogie des énoncés correspondant aux trois problèmes ci-dessus n'entraînerait pas des liens entre leurs solutions que nous avons été conduit au développement qui va suivre.

La première partie de ce développement est purement géométrique. L'étude des trois types de congruences s'y trouve rattachée à un sujet unique : *le problème de la détermination des correspondances par aires constantes entre deux plans.*

C'est à cette circonstance qu'est due la simplicité avec laquelle on peut passer de l'un des trois types de congruence aux autres.

Dans la deuxième partie, l'étude des liens qui existent entre les trois types de congruences, est reprise analytiquement et précisée, grâce à d'intéressantes interprétations géométriques des résultats fournis par le calcul.

PREMIÈRE PARTIE

[**1**] Envisageons une congruence rectiligne quelconque, et supposons ses ∞^2 rayons, coupés par deux surfaces également quelconques S et S'. Si l'on fait se correspondre deux à deux les points M, M', où les différents rayons de la congruence coupent les surfaces S et S', on obtient une correspondance ponctuelle entre les deux surfaces.

Considérons l'ensemble des rayons de la congruence compris à l'intérieur d'une surface réglée formée par les rayons de la congruence s'appuyant sur un contour fermé, tracé sur S, de dimensions infiniment petites. Un tel ensemble de rayons, qui est ce qu'on appelle un *pinceau infiniment délié* de la congruence, découpe sur la surface S' un contour homologue de celui que l'on a envisagé sur S.

Conformément à l'habitude, convenons de dire que le rapport des aires ds' et ds, limitées par les contours précédents sur les deux surfaces S' et S, est positif, lorsque, un point décrivant l'un des contours dans un sens quelconque, le point homologue décrit le contour homologue dans le même sens autour de MM', négatif dans le cas contraire. Choisissons en outre sur MM' un sens positif quelconque d'ailleurs.

Il existe entre les éléments d'aire homologues ds' et ds, les distances algébriques des points M et M' aux foyers du rayon MM', et les angles aigus θ' et θ, formés par les normales aux surfaces S' et S en M' et M, avec le rayon MM', une relation, conséquence immédiate d'un théorème de Kummer, dont la considération va précisément servir de point de départ à l'étude que nous nous sommes proposée.

[**2**] Menons, par le centre d'une sphère de rayon 1, des parallèles aux génératrices de la surface réglée qui limite le pinceau infiniment délié entourant le rayon MM', dont il a été question plus haut; nous obtenons ainsi un cône élémentaire, qui détache sur la sphère une certaine aire $d\varepsilon$. La section du pinceau par un plan perpendiculaire à MM' en un point quelconque P, a une certaine aire $d\sigma$. Si l'on convient de dire que le rapport des aires $d\varepsilon$ et $d\sigma$ est positif lorsque les points homologues des contours qui limitent $d\varepsilon$ et $d\sigma$ tournent dans le même sens autour de MM' et de sa parallèle menée par le centre de la sphère (les deux droites précédentes sont supposées orientées positivement dans le même sens), et négatif dans le cas contraire, on peut énoncer le théorème suivant dû à Kummer [1] :

---

[1] *Allgemeine Theorie der Geradlinigen Strahlensysteme* (Crelle's Journal, B. 57).

[**4**] *Étude du premier problème.* — Soient (*fig.* 2) P et P′ deux plans parallèles quelconques. Supposons trouvée une congruence (C) répondant à la question.

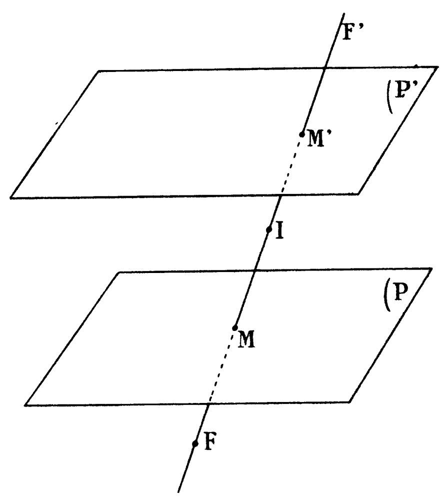

Fig. 2.

Soient M et M′ les points où l'un quelconque de ses rayons coupe P et P′, F et F′ les foyers de ce rayon; si *ds* et *ds′* sont les deux éléments d'aire homologues, la condition :

$$\frac{r'_1 r'_2}{r_1 r_2} = 1,$$

qui s'écrit :

$$\overline{\mathrm{MF}} \times \overline{\mathrm{MF'}} = \overline{\mathrm{M'F}} \times \overline{\mathrm{M'F'}}$$

exige que F et F′ soient symétriques par rapport au milieu I du segment MM′.

Lorsque le rayon MM′ de la congruence varie, le point I se déplace dans le plan parallèle à P et à P′ et équidistant de P et de P′.

On peut donc dire de la congruence (C) qu'elle admet un plan pour surface moyenne.

Réciproquement d'ailleurs, à toute congruence admettant un plan pour surface moyenne, sont attachées une infinité de correspondances par aires constantes entre deux plans. Il suffit, pour en avoir une, de couper la congruence par deux plans parallèles quelconques symétriques par rapport au plan moyen, et de faire se correspondre les points où un même rayon coupe les deux plans.

On a en effet dans ces conditions :

$$\overline{\mathrm{M'F'}} = -\overline{\mathrm{MF}}, \qquad \overline{\mathrm{M'F}} = -\overline{\mathrm{MF'}},$$

$$\overline{\mathrm{M'F}} \times \overline{\mathrm{M'F'}} = \overline{\mathrm{MF}} \times \overline{\mathrm{MF'}},$$

[**3**] Si l'on se donne une fois pour toutes les deux surfaces S et S', et si l'on envisage toutes les congruences rectilignes de l'espace, on peut dire que toutes ces congruences vérifient la relation (1). Il est assez naturel de rendre cette relation aussi simple que possible, en disposant convenablement des surfaces S et S'.

En cherchant, par exemple, à éliminer de la relation précédente le rapport $\frac{\cos\theta'}{\cos\theta}$, on est conduit à prendre pour S et S', soit un *système de deux plans parallèles*, soit une *sphère* (les points homologues sur chaque rayon sont dans ce cas les deux points d'intersection du rayon avec la sphère), soit un *cylindre de révolution* (les deux points homologues sur chaque rayon sont alors les deux points d'intersection du rayon avec le cylindre).

Dans ces trois cas, on a $\theta = \theta'$, et la relation (1) s'écrit :

$$\frac{ds'}{ds} = \frac{r'_1 r'_2}{r_1 r_2}. \tag{2}$$

La relation (2) s'applique à *toutes* les congruences rectilignes. Pour isoler de l'ensemble des congruences rectilignes, celles dont nous nous sommes proposé l'étude, il suffit maintenant, comme on va le voir, d'introduire la condition fort simple :

$$\frac{ds'}{ds} = +1.$$

Ayant égard aux trois choix différents des couples de surfaces S et S', qui ont conduit à la relation (2), nous allons étudier les trois problèmes suivants :

Problème I : Recherche des congruences rectilignes déterminant sur un système de deux plans parallèles quelconques des correspondances par aires constantes.

Problème II : Recherche des congruences rectilignes déterminant sur une sphère quelconque des corespondances par aires constantes.

Problème III : Recherche des congruences rectilignes déterminant sur un cylindre de révolution quelconque des correspondances par aires constantes.

Dans les trois cas, l'égalité de deux aires homologues ayant lieu en valeur algébrique : $\frac{ds'}{ds} = +1$.

[**4**] *Étude du premier problème.* — Soient (*fig.* 2) P et P′ deux plans parallèles quelconques. Supposons trouvée une congruence (C) répondant à la question.

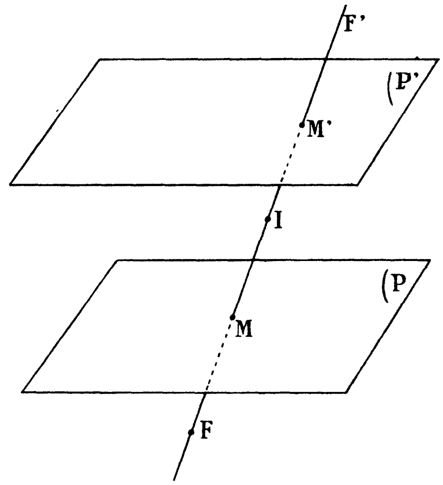

FIG. 2.

Soient M et M′ les points où l'un quelconque de ses rayons coupe P et P′, F et F′ les foyers de ce rayon; si ds et ds' sont les deux éléments d'aire homologues, la condition :

$$\frac{r'_1 r'_2}{r_1 r_2} = 1,$$

qui s'écrit :

$$\overline{MF} \times \overline{MF'} = \overline{M'F} \times \overline{M'F'}$$

exige que F et F′ soient symétriques par rapport au milieu I du segment MM′.

Lorsque le rayon MM′ de la congruence varie, le point I se déplace dans le plan parallèle à P et à P′ et équidistant de P et de P′.

On peut donc dire de la congruence (C) qu'elle admet un plan pour surface moyenne.

Réciproquement d'ailleurs, à toute congruence admettant un plan pour surface moyenne, sont attachées une infinité de correspondances par aires constantes entre deux plans. Il suffit, pour en avoir une, de couper la congruence par deux plans parallèles quelconques symétriques par rapport au plan moyen, et de faire se correspondre les points où un même rayon coupe les deux plans.

On a en effet dans ces conditions :

$$\overline{M'F'} = -\overline{MF}, \qquad \overline{M'F} = -\overline{MF'},$$
$$\overline{M'F} \times \overline{M'F'} = \overline{MF} \times \overline{MF'},$$

et par suite, d'après la formule (2) :

$$\frac{ds'}{ds} = \frac{\overline{\mathrm{M'F}} \times \overline{\mathrm{M'F'}}}{\overline{\mathrm{MF}} \times \overline{\mathrm{MF'}}} = +1.$$

Le problème que l'on s'est posé prend donc la forme intéressante suivante :

Déterminer toutes les congruences rectilignes à surface moyenne plane.

[**5**] Le problème de la détermination des congruences rectilignes à surface moyenne plane a été étudié par C. Guichard, dans une note que nous avons citée. A la construction de ces congruences pouvant se rattacher, comme nous le verrons plus loin, les constructions des congruences à enveloppée moyenne point et à foyers associés équidistants d'une droite fixe, nous allons la rappeler rapidement.

Elle est basée sur le théorème suivant (Darboux, t. IV, p. 61) :

« *Si deux surfaces* (S) *et* (S') *se correspondent avec orthogonalité des éléments linéaires, la droite menée par un point de l'une d'elles* (S'), *parallèlement à la normale au point correspondant de l'autre, engendre une congruence dont* (S') *est la surface moyenne.* »

Ce théorème étant admis, on en déduit ainsi les congruences cherchées :

Soient (S) et (P) une surface et un plan quelconques, et (d) une droite fixe perpendiculaire au plan (P). Si l'on fait tourner (S) de 90° autour de (d), et si l'on projette ensuite les différents points de la surface dans sa nouvelle position, sur le plan P, on établit une correspondance entre les points de la surface initiale (S) et ceux du plan (P). Cette correspondance est une correspondance par éléments linéaires orthogonaux, comme on le constate aisément. Il suffit donc, en vertu du théorème énoncé, de mener par chaque point de (P) la parallèle à la normale à (S) au point correspondant pour avoir une congruence admettant le plan (P) pour surface moyenne.

En faisant varier la surface (S), on obtient par ce procédé toutes les congruences à surface moyenne plane.

Il résulte de ce qui précède, qu'une nouvelle solution du problème de la détermination de toutes les congruences à surface moyenne plane, repose sur la considération de toutes les correspondances par aires constantes entre deux plans.

Envisageons une telle correspondance entre deux plans (P) et (Q). Si l'on place les deux plans (P) et (Q) parallèlement l'un à l'autre, de façon que deux contours homologues soient parcourus dans le même sens par deux points homologues, les droites joignant les couples de points homologues sont les rayons d'une congruence possédant la propriété indiquée ; la surface moyenne de cette congruence est le plan équidistant des plans (P) et (Q).

Remarquons que les congruences à surface moyenne plane jouissent de la propriété évidente de se transformer en des congruences du même type, lorsqu'on les soumet à une homographie quelconque conservant le plan de l'infini. Ainsi, toute congruence formée par les tangentes communes à deux sphères admettant pour surface moyenne le plan radical des deux sphères, et la transformation homographique la plus générale conservant le plan de l'infini, transformant les deux sphères en deux quadriques homothétiques, on peut dire que la congruence formée par les tangentes communes à deux quadriques homothétiques quelconques est une congruence à surface moyenne plane.

Signalons enfin, à propos de correspondances par aires constantes entre deux plans, la construction géométrique simple suivante :

Sur deux plans parallèles (R) et (S), symétriques par rapport au plan équidistant de deux plans parallèles donnés (P) et (Q) [*fig. 3*], traçons deux courbes quelcon-

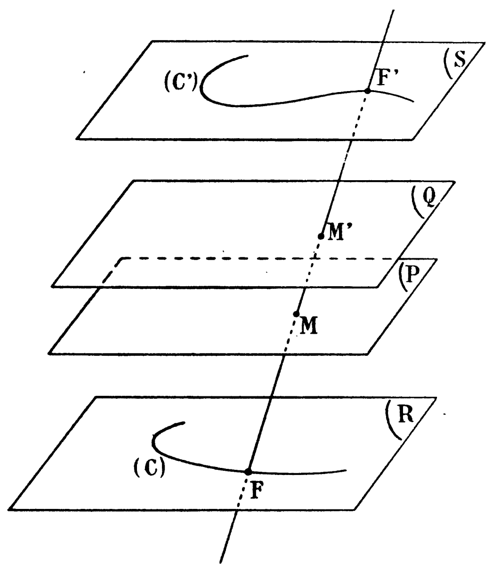

FIG. 3.

ques (C) et (C') ; les droites F F', joignant un point quelconque de (C) à un point quelconque de (C'), déterminent sur (P) et (Q) deux points M et M' se correspondant avec égalité des aires ([1]).

([1]) Il suffit de supposer que les quatre plans de la figure 3 viennent se confondre en un seul, pour obtenir des correspondances par aires constantes entre deux points d'un plan, faciles à réaliser pratiquement.

Pour avoir, par exemple, une correspondance algébrique conservant les aires entre les points des plans (P) et (Q), il n'y a qu'à prendre pour (C) et (C') des courbes algébriques.

[**6**] *Étude du deuxième problème.* — Considérons une sphère quelconque (S) (*fig. 4*). Supposons trouvée une congruence rectiligne dont les rayons coupent (S) en deux points M et M' se correspondant de telle façon que deux aires homologues quelconques de (S) soient égales $\left(\frac{ds'}{ds} = +1\right)$.

Désignons par F et F' les foyers du rayon MM', on a :

$$\frac{ds'}{ds} = \frac{\overline{M'F} \times \overline{M'F'}}{\overline{MF} \times \overline{MF'}} = +1,$$

par suite :

$$\overline{M'F} \times \overline{M'F'} = \overline{MF} \times \overline{MF'}$$

Cette dernière égalité montre que les points F et F' sont symétriques par rapport au milieu I du segment MM'.

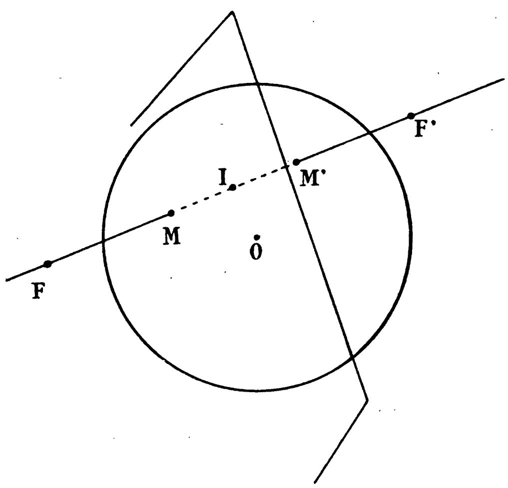

Fig. 4.

Il revient évidemment au même de dire que le plan perpendiculaire au milieu du segment focal FF' passe par le centre O de la sphère. Ainsi, les congruences cherchées jouissent de cette propriété que le plan perpendiculaire au milieu d'un segment focal quelconque passe par le centre de la sphère ; ce sont des congruences admettant pour enveloppée moyenne le point O, centre de la sphère.

Réciproquement, d'ailleurs, si les plans perpendiculaires aux milieux des segments focaux d'une congruence rectiligne passent par un point fixe de l'espace, O, la congruence détermine sur toute sphère ayant pour centre le point O une correspondance par aires constantes.

On a en effet dans ces conditions :

$$\overline{M'F'} = -\overline{MF}, \qquad \overline{M'F} = -\overline{MF'},$$

par suite :

$$\overline{M'F} \times \overline{M'F'} = \overline{MF} \times \overline{MF'},$$

et d'après (2) :

$$\frac{ds'}{ds} = \frac{\overline{M'F} \times \overline{M'F'}}{\overline{MF} \times \overline{MF'}} = +1.$$

Il y a donc identité entre le problème de la recherche de toutes les correspondances par aires constantes sur une sphère et celui de la recherche des congruences rectilignes dont les plans perpendiculaiers aux milieux des segments focaux passent par un point fixe (congruences à enveloppée moyenne point).

Le problème que l'on s'est posé prend donc la forme intéressante suivante :

Déterminer toutes les congruences rectilignes à enveloppée moyenne point.

Il est assez remarquable que les deux problèmes de la recherche des correspondances par aires constantes entre les points de deux plans (on peut évidemment dire d'un même plan), et de la recherche des correspondances par aires constantes entre les points d'une même sphère, correspondent respectivement à une particularité extrêmement simple des deux surfaces *moyenne* et *enveloppée moyenne* que Ribaucour a introduites dans la théorie des congruences rectilignes.

[**7**] Les congruences dont l'enveloppée moyenne est un point ont été étudiées dans le cas particulier des congruences de normales par Ribaucour et MM. Appell et Goursat dans des notes que nous avons signalées. M. L. Bianchi, dans ses « Leçons de géométrie différentielle » (T. I.), étudie précisément les congruences *générales* à enveloppée moyenne point dont nous nous occupons (congruences d'Appell généralisées). Dans l'ouvrage cité, les congruences d'Appell généralisées sont déduites des formules générales auxquelles Sannia a été conduit en cherchant à caractériser une congruence rectiligne par deux formes différentielles quadratiques.

M. Bianchi indique la propriété que possèdent les congruences d'Appell généralisées, de déterminer sur toute sphère ayant pour centre le point par où passent les plans perpendiculaires aux milieux des segments focaux, des correspondances par aires constantes; il dit que cette propriété n'est pas caractéristique des congruences d'Appell généralisées et signale l'existence d'une autre famille de congruences rectilignes jouissant de la même propriété. Cette deuxième famille est celle pour laquelle le rapport de deux aires homologues est égal à -1 $\left(\frac{ds'}{ds}=-1\right)$. Mais on peut remarquer qu'étant donnée une congruence rectiligne de la seconde famille, il suffit de remplacer l'un des deux systèmes de points déterminés à l'entrée et à la sortie sur la sphère attachée à la congruence par les rayons de cette dernière, par le système symétrique par rapport à un plan diamétral quelconque, pour transformer cette congruence en une congruence d'Appell généralisée.

Un procédé géométrique permettant de construire un nombre illimité de congruences d'Appell généralisées est basé sur la considération d'une correspondance par aires constantes très simple entre deux points d'une sphère, que nous allons rapidement exposer.

Signalons d'abord le théorème suivant, bien facile à établir d'ailleurs :

« Étant donnés, un conoïde droit d'axe (Δ) dont les génératrices s'appuient sur un contour fermé (C), et une série de sphères,

$$\Sigma_1, \quad \Sigma_2, \quad \Sigma_3, \quad \ldots, \quad \Sigma_n, \quad \ldots$$

ayant leurs centres sur (Δ) et de rayons respectifs,

$$R_1, \quad R_2, \quad R_3, \quad \ldots, \quad R_n, \quad \ldots$$

transpercées par le conoïde, si l'on désigne par

$$S_1, \quad S_2, \quad S_3, \quad \ldots, \quad S_n, \quad \ldots$$

les aires découpées par le conoïde sur les sphères, on a :

$$\frac{S_1}{R_1}=\frac{S_2}{R_2}=\frac{S_3}{R_3}=\ldots=\frac{S_n}{R_n}=\ldots \text{ »}$$

(les aires sont proportionnelles aux rayons des sphères correspondantes).

Ce théorème étant admis, envisageons deux sphères concentriques (Σ) et (Σ'), de centre O, et soit (Δ) un diamètre commun. Soit d'autre part (C) un contour quelconque tracé sur (Σ), enfermant une aire sphérique S; si (C') est la projection conoïdale de (C) sur (Σ') (l'axe de projection est (Δ) et les projetantes sont perpendiculaires à (Δ)), et si S' est l'aire sphérique enfermée dans (C') on peut écrire :

$$\frac{S'}{S}=\frac{R'}{R}$$

R et R' étant les rayons de (Σ) et de (Σ'); ou encore :

$$S' = S\frac{R'}{R}.$$

Dans l'expression de S' n'interviennent que S, R' et R; S' ne dépend donc pas de la direction de (Δ), et l'on peut énoncer le théorème suivant :

Un contour sphérique quelconque se projette sur une sphère concentrique quelconque suivant des contours équivalents, les projections étant faites au moyen de conoïdes droits d'axes quelconques passant par le centre de la sphère.

Le théorème précédent n'est vrai naturellement que dans les limites où les conoïdes projetants percent la sphère sur laquelle s'effectuent les projections; il constitue une généralisation immédiate de la propriété que possède un contour plan de se projeter sur un plan parallèle au sien (projection cylindrique) suivant des contours équivalents (égaux).

De ce théorème résulte une construction simple d'une infinité de congruences d'Appell généralisées :

Associons à la sphère (S) (*fig.* 5), une sphère concentrique quelconque (Σ), un plan diamétral fixe quelconque (P), et deux diamètres fixes quelconques (D) et (Δ).

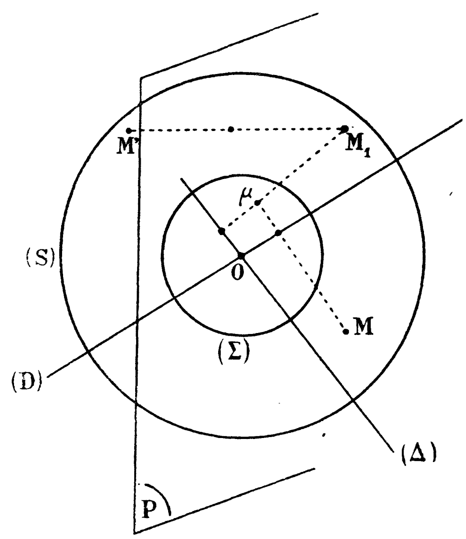

FIG. 5.

Prenons sur (Σ) un point quelconque μ, projetons μ sur la sphère (S), en M, perpendiculairement à (D), (M est l'un quelconque des deux points où la projetante du point μ coupe (S)), et en M_1 perpendiculairement à (Δ). Nous établissons ainsi une correspondance entre les deux points M et M_1 de (S).

Les aires de deux contours homologues sur (S), étant d'après ce qui précède, dans le même rapport avec l'aire correspondante sur (Σ), ces deux contours limitent la même aire sphérique, et la correspondance entre M et M_1 est une correspondance par aires constantes.

On voit sans difficulté que le rapport de deux éléments d'aire homologues est négatif. La congruence des droites MM_1 correspondant aux différents points μ de (Σ), est une congruence du deuxième type signalée par M. Bianchi. Pour avoir une congruence d'Appell généralisée, il suffit, comme nous l'avons fait remarquer plus haut, de remplacer M_1 par son symétrique M' par rapport au plan (P). Deux contours homologues de (S) sont tels cette fois, que le rapport de leurs aires est égal à $+1$, et la congruence des droites MM' est bien une congruence d'Appell généralisée. En faisant varier (D) et (Δ), on obtient par le procédé indiqué autant de congruences d'Appell généralisées que l'on veut.

Indiquons à propos des correspondances par aires constantes entre deux points d'une sphère, la construction géométrique simple suivante :

Soit une sphère (S) quelconque (*fig.* 6); envisageons une sphère concentrique à (S), soit (Σ); traçons sur (Σ) deux courbes quelconques (C) et (C'), et consi-

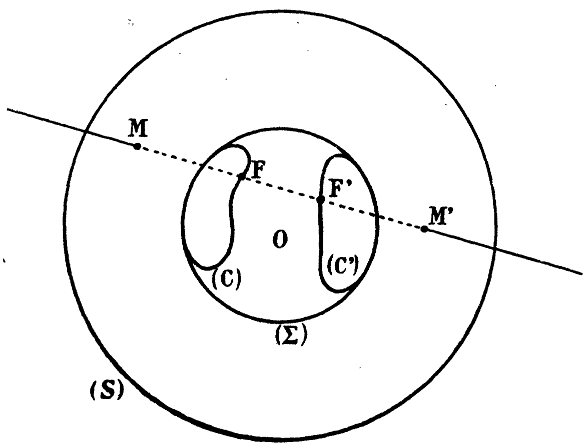

FIG. 6.

dérons la congruence rectiligne formée par les droites s'appuyant sur (C) et (C'); si l'on désigne par M et M' les points où l'un des rayons de cette congruence (FF') perce la sphère (S), on a manifestement :

$$\overline{M'F} \times \overline{M'F'} = \overline{MF} \times \overline{MF'}.$$

La correspondance qui existe entre M et M′, conserve les aires. A chaque couple de courbes sphériques tracées sur (Σ) est donc attachée une correspondance par aires constantes sur (S).

Pour avoir des correspondances algébriques, il suffira de définir la congruence rectiligne (MM′) par deux contours (C) et (C′) eux-mêmes algébriques.

[8] *Étude du troisième problème.* — Considérons maintenant un cylindre de révolution quelconque (C) (*fig.* 7), et supposons trouvée une congruence rectiligne dont les rayons déterminent sur le cylindre une correspondance par aires constantes $\left(\frac{ds'}{ds} = +1\right)$.

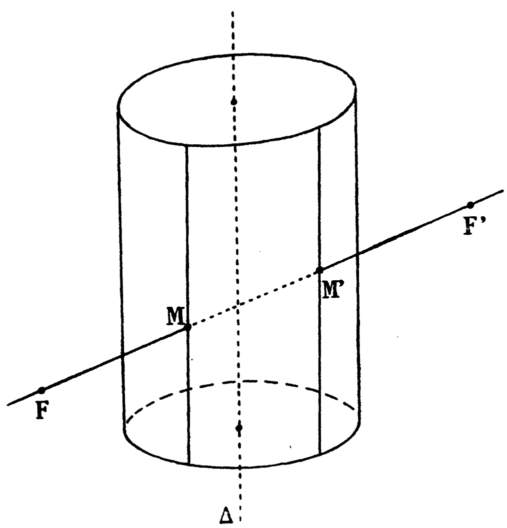

FIG. 7.

Désignons par F et F′ les foyers du rayon MM′, on a, comme dans les deux problèmes précédents :

$$\frac{ds'}{ds} = \frac{\overline{M'F} \times \overline{M'F'}}{\overline{MF} \times \overline{MF'}} = +1$$

d'où :

$$\overline{M'F} \times \overline{M'F'} = \overline{MF} \times \overline{MF'}$$

et les deux segments MM′ et FF′ ont le même milieu.

Il revient évidemment au même de dire que F et F′ sont à la même distance de l'axe Δ du cylindre (C).

Les congruences cherchées jouissent donc de cette propriété que deux foyers associés quelconques, sont à la même distance de la droite Δ (axe du cylindre).

Réciproquement d'ailleurs, si deux foyers associés quelconques d'une congruence rectiligne sont équidistants d'une droite fixe Δ de l'espace, la congruence détermine sur tout cylindre de révolution ayant pour axe la droite fixe Δ, une correspondance par aires constantes $\left(\frac{ds'}{ds} = +1\right)$.

Il y a identité entre le problème de la recherche de toutes les correspondances par aires constantes entre deux points d'un cylindre de révolution, et celui de la recherche des congruences rectilignes à foyers associés équidistants d'une droite fixe. Le problème à résoudre prend donc la forme suivante :

Déterminer toutes les congruences rectilignes à foyers associés équidistants d'une droite fixe.

Ce problème sera étudié plus loin en détail. Nous donnerons alors les formules générales définissant analytiquement les congruences du nouveau type, lesquelles formules mettront en évidence des liens étroits entre ces congruences et celles dont il a été question précédemment.

L'existence de relations entre les trois types de congruences qui font l'objet de l'étude actuelle, peut aussi s'établir par des considérations géométriques extrêmement simples.

Nous verrons dans les paragraphes suivants comment on peut passer de la construction des congruences à surface moyenne plane, à celle des congruences à enveloppée moyenne point, et à celle des congruences à foyers associés équidistants d'une droite fixe, par de simples procédés géométriques.

Signalons, avant d'aborder cette nouvelle question, le procédé simple suivant, analogue à ceux qui ont été indiqués à propos des deux problèmes précédents, pour obtenir des correspondances par aires constantes entre deux points d'un même cylindre de révolution :

Sur un cylindre de révolution quelconque, coaxial au premier, traçons deux courbes quelconques; les rayons de la congruence rectiligne, admettant ces deux courbes pour courbes focales, déterminent sur le premier cylindre une correspondance par aires constantes. La correspondance est algébrique si les deux courbes envisagées le sont.

[**9**] *Rapprochements entre les solutions des trois problèmes précédents.* — Nous venons de ramener le problème de la détermination des congruences à surface moyenne plane, à celui de la détermination des correspondances par aires constantes entre deux points d'un même plan; celui de la détermination des congruences à

enveloppée moyenne point, à celui de la détermination des correspondances par aires constantes entre deux points d'une même sphère; et celui de la détermination des congruences à foyers associés équidistants d'une droite fixe, à celui de la détermination des correspondances par aires constantes entre deux points d'un même cylindre de révolution.

Dans chaque cas, on est conduit à rechercher toutes les correspondances par aires constantes entre deux points d'une certaine surface, c'est-à-dire en somme à un problème de nature analytique bien déterminée.

La solution de ce problème dépend, comme on le sait, d'une fonction arbitraire de deux variables indépendantes; on peut donc dire que les trois familles de congruences dont il est question présentent le *même degré de généralité;* chacune d'elles dépend d'une fonction arbitraire de deux variables.

Dans le cas des congruences à surface moyenne plane, par exemple, on peut voir l'image de cette fonction arbitraire dans la surface arbitraire qui intervient dans la construction qui a été rappelée au n° 5.

Envisageons maintenant un plan, une sphère et un cylindre de révolution. On sait représenter l'une quelconque de ces trois surfaces sur les autres avec égalité des éléments superficiels homologues. On pourra donc, si l'on veut, ramener la recherche des correspondances par aires constantes entre deux points d'une même sphère, ou d'un même cylindre de révolution, à la recherche des correspondances par aires constantes entre deux points d'un même plan; c'est-à-dire, la recherche des congruences à enveloppée moyenne point et à foyers associés équidistants d'une droite fixe, à la recherche des congruences à surface moyenne plane.

Dans le paragraphe qui suit, nous mettons à profit les observations précédentes, et nous montrons comment on peut effectivement passer de l'une des trois familles de congruences aux autres.

[**10**] Imaginons une correspondance quelconque, que nous désignerons par (C), entre les points d'un plan et d'une sphère, dans laquelle les éléments superficiels homologues ont même aire. (C) transforme une correspondance quelconque par aires constantes entre les points de la sphère, en une correspondance par aires constantes entre les points du plan (ou ce qui revient au même, entre les points de deux plans distincts), et inversement.

Soit dès lors une congruence (Γ) à surface moyenne plane (π) quelconque. Coupons les rayons de cette congruence par deux plans parallèles (P) et (P′), symétriques par rapport au plan moyen; nous obtenons ainsi dans (P) et (P′) deux systèmes de points se correspondant avec égalité des aires homologues $\left(\dfrac{ds'}{ds} = +1\right)$.

Soient d'autre part une sphère quelconque (S) de centre O, et une correspondance (C) de nature bien déterminée, permettant de représenter (P) et (P′) sur (S) avec égalité des aires homologues.

A tout rayon de la congruence précédente (Γ), coupant (P) et (P′) en M et M′, (C) fait correspondre une droite, $m\,m'$, joignant les points m et m' qui correspondent sur (S) respectivement à M et à M′. Cette droite engendre une congruence bien déterminée. Les rayons de cette nouvelle congruence déterminent sur (S) une correspondance par aires constantes. Si donc (C) est telle que non seulement les aires homologues sur (S) soient égales, mais que leur rapport soit positif, on peut dire que la congruence engendrée par $m\,m'$ est une congruence dont l'enveloppée moyenne est un point, le point O.

Si l'on imagine que (P), (P′) et (S) restent fixes dans l'espace, et que l'on remplace la congruence (Γ) par toutes les congruences dont la surface moyenne est le plan (π), congruences dont la construction a été rappelée, on voit que l'on obtiendra, à partir de ces congruences, et par l'intermédiaire de la correspondance (C), toutes les congruences dont l'enveloppée moyenne est le point O.

En réalité, le procédé qui vient d'être exposé ne donne pas la construction de *tous* les rayons d'une congruence du type précédent; seuls peuvent être construits ceux de ces rayons qui coupent la sphère (S); son intérêt est cependant manifeste, il permet de construire des portions de *toutes* les congruences dont l'enveloppée moyenne est un point. Les portions de congruences obtenues seront d'ailleurs d'autant plus grandes que le rayon de la sphère (S) aura été pris plus grand.

Pour que le procédé qui vient d'être indiqué pour construire géométriquement les congruences dont l'enveloppée moyenne est un point puisse être appliquée effectivement, il n'y a plus qu'à faire un choix pour la correspondance que nous avons appelée (C).

Cette correspondance est en principe quelconque; nous en choisirons une basée sur la considération d'une courbe intéressante à quelques égards, la *trisécante de Delanges* (¹) d'équation polaire :

$$\rho \cos \frac{\omega}{2} = R \qquad (oz = \text{axe polaire}, \textit{fig. } 8)$$

courbe qui se construit très simplement à partir du cercle de centre O et de rayon R figuré.

Considérons la sphère (S) de centre O et de rayon R, et la surface de révolution (T) engendrée par la trisécante en tournant autour de Oz, et envisageons un plan quelconque perpendiculaire à Oz.

On sait que si l'on prend dans le plan précédent, à l'intérieur du cercle déter-

(¹) G. Loria. *Ebene Kurven*, Leipzig, 1902, p. 215.

miné dans ce plan par le cylindre asymptote de la surface (T), un point quelconque M, si l'on élève en M la perpendiculaire au plan, et si l'on joint son intersection μ avec (T) au centre O de (S), μO perce la sphère en un point m qui correspond à M dans une correspondance par aires constantes entre la sphère et le plan.

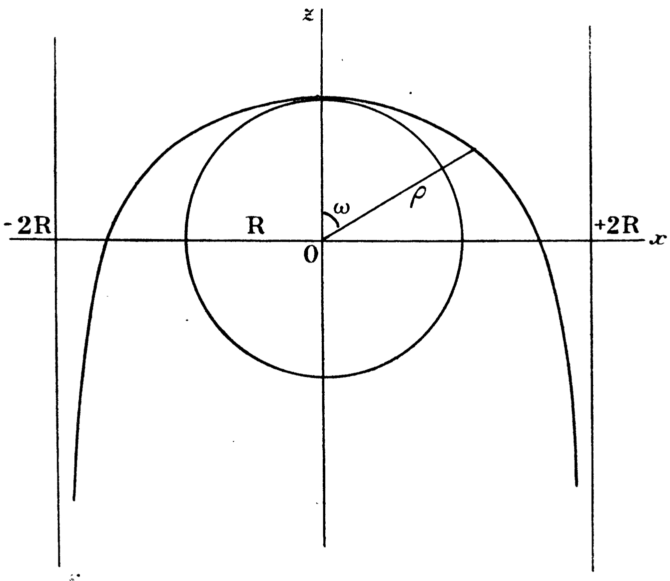

FIG. 8.

Cela étant, envisageons deux plans parallèles fixes, (P) et (P′), et construisons une congruence quelconque (Γ) admettant pour surface moyenne le plan (π) équidistant de (P) et de (P′). Les rayons de (Γ) déterminent une correspondance par aires constantes entre les points de (P) et de (P′).

Attachons (*fig.* 9) à l'ensemble des deux plans (P) et (P′) la figure de révolution formée par la sphère (S) et la surface (T) dont il vient d'être question, l'axe de révolution étant perpendiculaire à (P) et à (P′).

Si l'on considère un rayon quelconque de la congruence (Γ) coupant (P) et (P′) en des points M et M_1 situés à l'intérieur des cercles (σ) et (σ') déterminés par le cylindre asymptote de (T) sur (P) et (P′), et si l'on construit, comme il vient d'être expliqué, par l'intermédiaire de (T), les points m et m_1 qui correspondent respectivement à M et M_1 avec égalité des aires, m et m_1 se correspondent sur (S) avec égalité des aires.

La congruence dont les rayons sont les différentes droites mm_1 détermine sur (S) une correspondance par aires constantes.

Cette congruence n'est pas une congruence à enveloppée moyenne point, le rapport des aires limitées par deux contours homologues sur (S) étant négatif, comme il est aisé de le constater. Pour avoir une congruence jouissant de la propriété requise, il n'y a, par exemple, qu'à remplacer chaque point M_1 par son symétrique par rapport à un diamètre quelconque fixe de (σ'), ou chaque point m_1 par son symétrique par rapport à un plan diamétral quelconque fixe de la sphère (S).

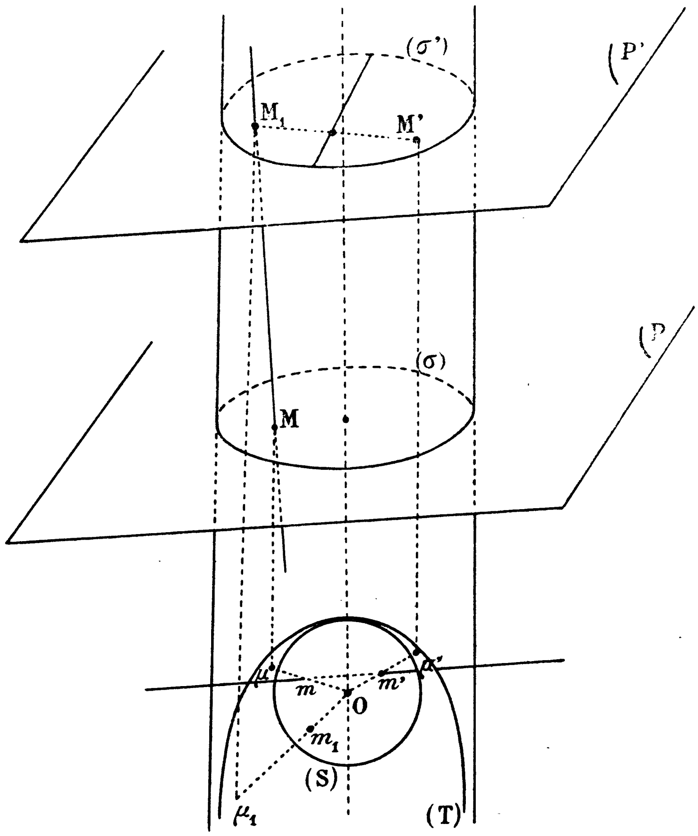

FIG. 9.

En désignant par exemple par M' le symétrique de M_1 par rapport à un diamètre fixe de (σ'), le point m', que (T) fait correspondre à M' sur (S), correspond à m avec égalité algébrique des aires homologues, et la congruence des droites mm' admet pour enveloppée moyenne le centre O de (S)[1].

En faisant varier la congruence (Γ), on obtient par le procédé qui vient d'être exposé toutes les congruences admettant pour enveloppée moyenne le point O.

---

[1] La construction géométrique qui vient d'être exposée m'a été suggérée par l'audition du cours « sur les Invariants intégraux » fait à la Faculté des Sciences de Toulouse par M. A. Buhl, en 1920. Voir aussi, du même auteur, *Géométrie et analyse des intégrales doubles* (collection « Scientia », 1920, Gauthier-Villars, Paris).

Les développements qui précèdent permettent, notons-le, d'énoncer une propriété nouvelle et non des moins intéressantes de la trisécante de Delanges(¹) :

C'est un agent de transformation des congruences à surface moyenne plane en congruences à enveloppée moyenne point.

Indiquons maintenant une construction permettant de transformer les congruences à enveloppée moyenne point en congruences à foyers associés équidistants d'une droite fixe.

Supposons construite une congruence dont l'enveloppée moyenne est un point, par le procédé traduit par la figure 9 par exemple. Envisageons un cylindre de révolution quelconque dont l'axe passe par le centre O de la sphère (S) de la figure indiquée, par exemple le cylindre asymptote de la surface (T); si l'on projette les points m, m', où un rayon quelconque de la congruence envisagée perce la sphère, en α, α', sur le cylindre (*fig. 10*), les projections étant faites normalement à l'axe du cylindre, les points α, α' se correspondent sur le cylindre avec égalité des aires $\left(\dfrac{ds'}{ds} = +1\right)$, comme il est aisé de s'en rendre compte. Les différentes droites $\alpha\alpha'$ sont donc les rayons d'une congruence du type en question.

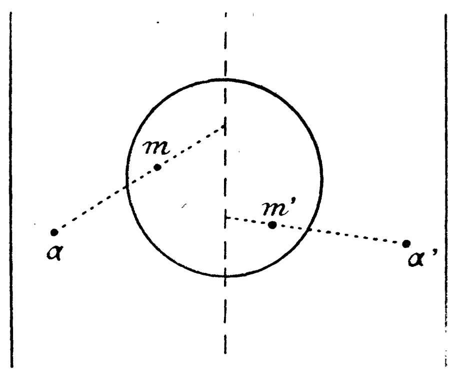

FIG. 10.

En faisant varier la congruence (Γ) des droites MM_1, on obtient par le procédé précédent *toutes* les congruences dont les foyers associés sont équidistants de l'axe de la figure 10.

En reportant la figure 10 sur la figure 9, on obtient une figure unique, sur laquelle on suit avec une extrême simplicité la façon dont on peut réaliser le

(¹) La trisécante de Delanges a été retrouvée dans une étude très intéressante de M. R. Goormaghtich, intitulée : *Sur la transformation par aires constantes* (Nouvelles annales de mathématiques, t. XV, septembre 1915).

passage de l'une quelconque des trois familles de congruences étudiées aux deux autres.

La constuction géométrique permettant de passer d'une congruence d'Appell généralisée à une congruence à foyers associés équidistants d'une droite fixe est, remarquons-le, beaucoup plus simple que celle qui permet de passer d'une congruence à surface moyenne plane à une congruence d'Appell généralisée. On peut faire la même remarque en comparant les formules qui définissent les trois familles de congruences, formules qui seront établies dans ce qui suit.

DEUXIÈME PARTIE

[11] Il ressort nettement de la première partie de ce travail qu'il existe des relations entre les trois types de congruences qui y sont étudiées.

Nous nous proposons dans cette deuxième partie de préciser analytiquement ces relations.

Les notations employées sont celles-là même employées par M. Bianchi dans ses « leçons de géométrie différentielle »; nous allons les rappeler rapidement.

Pour définir analytiquement une congruence rectiligne, on coupera l'ensemble de ses rayons par une surface, que l'on regardera comme surface de départ, et l'on prendra comme origine sur chaque rayon l'un des points où il rencontre la surface de départ.

La surface de départ de la congruence aura des équations de la forme :

$$x = f(u, v), \qquad y = g(u, v), \qquad z = h(u, v).$$

Les cosinus directeurs du rayon de la congruence issu du point (u, v) de la surface précédente seront désignés par X, Y, Z.

X, Y, Z seront des fonctions de u et de v vérifiant la relation :

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1.$$

Le point de la sphère de rayon 1, de coordonnées X, Y, Z, sera dit l'*image* du rayon (u, v) de la congruence, et l'ensemble des trois expressions de X, Y, Z, en fonction de u et de v, la *représentation sphérique* de la congruence.

Les coordonnées d'un point quelconque du rayon (u, v) sont données par les formules :

$$\xi = x + \rho X, \qquad \eta = y + \rho Y, \qquad \zeta = z + \rho Z.$$

Introduisons (Kummer) les fonctions fondamentales :

$$E = S\left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2, \qquad F = S\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v}, \qquad G = S\left(\frac{\partial X}{\partial v}\right)^2$$

$$e = S\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u}, \qquad f = S\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}, \qquad f' = S\frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}, \qquad g = S\frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v};$$

au moyen de ces fonctions, les deux formes différentielles quadratiques (formes fondamentales de Kummer) :

$$\mathrm{S}dx^2 \quad \text{et} \quad \mathrm{S}d\mathrm{X}\,dx,$$

s'écrivent :

$$\left\{\begin{array}{ll} \mathrm{E}du^2 + 2\mathrm{F}du\,dv + \mathrm{G}dv^2 & \text{(1}^{\text{re}}\text{ forme de Kummer)} \\ e\,du^2 + (f+f')du\,dv + g\,dv^2 & \text{(2}^{\text{e}}\text{ forme de Kummer)} \end{array}\right.$$

(la première forme de Kummer est le carré de l'élément linéaire de la représentation sphérique de la congruence; c'est une forme positive et de courbure $+1$).

Avec les notations précédentes, l'équation aux abscisses des foyers de la congruence situés sur le rayon (u, v) s'écrit :

$$(\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2)\rho^2 + [g\mathrm{E}-(f+f')\mathrm{F}+e\mathrm{G}]\rho + eg - ff' = 0.$$

Si l'on choisit pour surface de départ d'une congruence rectiligne la surface moyenne, on a entre les coefficients des deux formes de Kummer la relation :

$$g\mathrm{E} + e\mathrm{G} - (f+f')\mathrm{F} = 0.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que la congruence soit une congruence de normales est :

$$f = f'.$$

Lorsque, au cours des développements qui vont suivre, nous rechercherons les congruences rectilignes satisfaisant à une condition déterminée, nous nous donnerons généralement *arbitrairement* sa représentation sphérique, qui sera par conséquent une donnée du problème; la forme différentielle quadratique :

$$\mathrm{E}du^2 + 2\mathrm{F}du\,dv + \mathrm{G}dv^2,$$

sera la forme différentielle quadratique la plus générale, positive et de courbure $+1$.

Il nous arrivera quelquefois de particulariser cette représentation pour simplifier l'établissement de tel ou tel résultat, qui n'en sera pas moins général pour cela.

Enfin, il sera fait usage des symboles à trois indices de deuxième espèce de Christoffel, relatifs à la première forme de Kummer, dont voici les valeurs :

$$\left\{\begin{matrix}1 & 1\\ & 1\end{matrix}\right\} = \frac{G\dfrac{\partial E}{\partial u} + F\dfrac{\partial E}{\partial v} - 2F\dfrac{\partial F}{\partial u}}{2(EG - F^2)}, \qquad \left\{\begin{matrix}1 & 1\\ & 2\end{matrix}\right\} = \frac{-F\dfrac{\partial E}{\partial u} + 2E\dfrac{\partial F}{\partial u} - E\dfrac{\partial E}{\partial v}}{2(EG - F^2)};$$

$$\left\{\begin{matrix}1 & 2\\ & 1\end{matrix}\right\} = \frac{G\dfrac{\partial E}{\partial v} - F\dfrac{\partial G}{\partial u}}{2(EG - F^2)}, \qquad \left\{\begin{matrix}1 & 2\\ & 2\end{matrix}\right\} = \frac{E\dfrac{\partial G}{\partial u} - F\dfrac{\partial E}{\partial v}}{2(EG - F^2)};$$

$$\left\{\begin{matrix}2 & 2\\ & 1\end{matrix}\right\} = \frac{-F\dfrac{\partial G}{\partial v} + 2G\dfrac{\partial F}{\partial v} - G\dfrac{\partial G}{\partial u}}{2(EG - F^2)}, \qquad \left\{\begin{matrix}2 & 2\\ & 2\end{matrix}\right\} = \frac{E\dfrac{\partial G}{\partial v} + F\dfrac{\partial G}{\partial u} - 2F\dfrac{\partial F}{\partial v}}{2(EG - F^2)}.$$

[**12**] *Congruences d'Appell généralisées.* — Les équations générales des congruences d'Appell généralisées sont connues (Bianchi, *loc. cit.*); nous allons toutefois reprendre le procédé de calcul indiqué par M. Bianchi, parce qu'il suffira de lui apporter une légère modification, pour en déduire les équations générales des congruences à foyers associés équidistants d'une droite fixe.

Envisageons une congruence d'Appell généralisée relative à un point O, qui sera l'origine des coordonnées. Prenons comme surface de départ de la congruence la surface moyenne. Donnons-nous arbitrairement la représentation sphérique de la congruence (X, Y, Z sont des fonctions connues de u et de v).

Soient x, y, z les coordonnées du milieu du segment focal d'un rayon quelconque. Le plan perpendiculaire au rayon en ce point a pour équation :

$$X\xi + Y\eta + Z\zeta = 0 \quad (\xi, \eta, \zeta = \text{coordonnées courantes})$$

et cette équation est vérifiée si l'on remplace ξ, η, ζ, par x, y, z :

$$Xx + Yy + Zz = 0.$$

Écrivons les coordonnées du milieu du segment focal sous la forme :

$$x = A\frac{\partial X}{\partial u} + B\frac{\partial X}{\partial v}, \qquad y = A\frac{\partial Y}{\partial u} + B\frac{\partial Y}{\partial v}, \qquad z = A\frac{\partial Z}{\partial u} + B\frac{\partial Z}{\partial v},$$

A et B étant des fonctions momentanément inconnues de u et de v ; on déduit des formules ci-dessus :

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} &= \alpha\frac{\partial X}{\partial u} + \beta\frac{\partial X}{\partial v} - (EA + FB)X \\ \frac{\partial x}{\partial v} &= \gamma\frac{\partial X}{\partial u} + \delta\frac{\partial X}{\partial v} - (FA + GB)X, \end{aligned}\right.$$

après avoir posé :

$$\alpha = \frac{\partial A}{\partial u} + \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{matrix} \right\} A + \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ & 1 \end{matrix} \right\} B, \qquad \beta = \frac{\partial B}{\partial u} + \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 \\ & 2 \end{matrix} \right\} A + \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ & 2 \end{matrix} \right\} B,$$

$$\gamma = \frac{\partial A}{\partial v} + \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ & 1 \end{matrix} \right\} A + \left\{ \begin{matrix} 2 & 2 \\ & 1 \end{matrix} \right\} B, \qquad \delta = \frac{\partial B}{\partial v} + \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ & 2 \end{matrix} \right\} A + \left\{ \begin{matrix} 2 & 2 \\ & 2 \end{matrix} \right\} B.$$

Si l'on remarque que l'on a :

$$e = E\alpha + F\beta, \qquad f = E\gamma + F\delta$$
$$f' = F\alpha + G\beta, \qquad g = F\gamma + G\delta,$$

et si l'on tient compte de ces relations dans celle qui exprime que la surface de départ de la congruence est la surface moyenne :

$$Ge + Eg - F(f + f') = 0,$$

on obtient :

$$\alpha + \delta = 0.$$

En multipliant les deux membres de cette nouvelle relation par $\sqrt{EG - F^2}$, et en utilisant les relations :

$$\left\{ \begin{matrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ & 2 \end{matrix} \right\} = \frac{\partial \log \sqrt{EG - F^2}}{\partial u}, \qquad \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ & 1 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 2 & 2 \\ & 2 \end{matrix} \right\} = \frac{\partial \log \sqrt{EG - F^2}}{\partial v},$$

la relation peut s'écrire :

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(A\sqrt{EG - F^2}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(B\sqrt{EG - F^2}\right) = 0.$$

Cette dernière relation montre que l'on peut poser :

$$B = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \frac{\partial \Phi}{\partial u}, \qquad A = \frac{-1}{\sqrt{EG - F^2}} \frac{\partial \Phi}{\partial v},$$

Φ étant une fonction arbitraire de u et de v.

De sorte que les formules définissant les congruences d'Appell généralisées, sont :

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial v} - \frac{\partial \Phi}{\partial v} \frac{\partial X}{\partial u} \right), \\ y &= \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \frac{\partial Y}{\partial v} - \frac{\partial \Phi}{\partial v} \frac{\partial Y}{\partial u} \right), \\ z &= \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \frac{\partial Z}{\partial v} - \frac{\partial \Phi}{\partial v} \frac{\partial Z}{\partial u} \right). \end{aligned} \right.$$

[**13**] *Recherche des congruences à foyers associés équidistants d'une droite fixe.* — Prenons pour axe oz la droite équidistante de deux foyers associés quelconques de l'une des congruences cherchées.

Supposons, comme dans le calcul précédent, que la surface de départ de la congruence soit la surface moyenne.

Écrivons l'équation du plan perpendiculaire au milieu du segment focal sous la forme :

$$X\xi + Y\eta + Z\zeta = M,$$

M étant une fonction de u et de v momentanément inconnue.

Les coordonnées x, y, z du milieu du segment focal vérifient l'équation ci-dessus ; on a donc :

$$Xx + Yy + Zz = M.$$

Cela montre que l'on peut mettre les expressions de x, y, z sous les formes :

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= A\frac{\partial X}{\partial u} + B\frac{\partial X}{\partial v} + MX, \\ y &= A\frac{\partial Y}{\partial u} + B\frac{\partial Y}{\partial v} + MY, \\ z &= A\frac{\partial Z}{\partial u} + B\frac{\partial Z}{\partial v} + MZ, \end{aligned}\right.$$

A et B étant des fonctions provisoirement inconnues de u et de v.

L'hypothèse que la surface de départ de la congruence est la surface moyenne, se traduit comme on sait par l'équation :

$$(5)\qquad Ge + Eg - F(f + f') = 0.$$

L'hypothèse que deux foyers associés quelconques sont à la même distance de oz, se traduit, comme on s'en rend compte immédiatement, par l'équation :

$$(6)\qquad \frac{M}{Z} = A\frac{\partial Z}{\partial u} + B\frac{\partial Z}{\partial v} + MZ.$$

On déduit des formules (4), les formules :

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \alpha\frac{\partial X}{\partial u} + \beta\frac{\partial X}{\partial v} + \left[\frac{\partial M}{\partial u} - AE - BF\right]X,$$
$$\frac{\partial x}{\partial v} = \gamma\frac{\partial X}{\partial u} + \delta\frac{\partial X}{\partial v} + \left[\frac{\partial M}{\partial v} - AF - BG\right]X,$$

où α, β, γ, δ, ont les valeurs suivantes :

$$\alpha = \frac{\partial A}{\partial u} + \left\{ {1\ \ 1 \atop 1} \right\} A + \left\{ {1\ \ 2 \atop 1} \right\} B + M,$$

$$\beta = \frac{\partial B}{\partial u} + \left\{ {1\ \ 1 \atop 2} \right\} A + \left\{ {1\ \ 2 \atop 2} \right\} B,$$

$$\gamma = \frac{\partial A}{\partial v} + \left\{ {1\ \ 2 \atop 1} \right\} A + \left\{ {2\ \ 2 \atop 1} \right\} B,$$

$$\delta = \frac{\partial B}{\partial v} + \left\{ {1\ \ 2 \atop 2} \right\} A + \left\{ {2\ \ 2 \atop 2} \right\} B + M.$$

En reprenant le procédé de calcul de M. Bianchi, développé dans le paragraphe précédent, et tenant compte des relations :

$$e = E\alpha + F\beta, \qquad f = E\gamma + F\delta,$$
$$f' = F\alpha + G\beta, \qquad g = F\gamma + G\delta,$$

dans la relation (5), on obtient comme précédemment :

$$\alpha + \delta = 0$$

On a vu comment de cette dernière relation M. Bianchi a déduit les congruences d'Appell généralisées.

La forme particulière qu'affecte la relation (6), va nous permettre d'utiliser cette même relation ($\alpha + \delta = 0$) à la détermination des congruences du nouveau type.

La relation $\alpha + \delta = 0$, s'écrit dans le cas actuel :

$$\frac{\partial A}{\partial u} + \left[\left\{ {1\ \ 1 \atop 1} \right\} + \left\{ {1\ \ 2 \atop 2} \right\} \right] A + \frac{\partial B}{\partial v} + \left[\left\{ {1\ \ 2 \atop 1} \right\} + \left\{ {2\ \ 2 \atop 2} \right\} \right] B + 2M = 0.$$

Soit, en utilisant les relations :

$$\left\{ {1\ \ 1 \atop 1} \right\} + \left\{ {1\ \ 2 \atop 2} \right\} = \frac{\partial \log \sqrt{EG - F^3}}{\partial u}, \qquad \left\{ {1\ \ 2 \atop 1} \right\} + \left\{ {2\ \ 2 \atop 2} \right\} = \frac{\partial \log \sqrt{EG - F^2}}{\partial v}.$$

$$(7) \qquad \frac{\partial A}{\partial u} + A \frac{\partial \log \sqrt{EG - F^2}}{\partial u} + \frac{\partial B}{\partial v} + B \frac{\partial \log \sqrt{EG - F^2}}{\partial v} + 2M = 0.$$

L'élimination de M entre les équations (6) et (7) fournit une relation entre A et B, d'où l'on peut simplement déduire les formes que doivent affecter les fonctions inconnues A et B; après quoi, la relation (6) donnera l'expression de M, et les formules (4) résoudront la question que l'on s'est posée.

On tire de l'équation (6) :

$$2M = -A\frac{\partial \log(1 - Z^2)}{\partial u} - B\frac{\partial \log(1 - Z^2)}{\partial v}.$$

Portons cette valeur de $2M$ dans l'équation (7), celle-ci devient :

$$\frac{\partial A}{\partial u} + A\frac{\partial}{\partial u}\left(\log\frac{\sqrt{EG - F^2}}{1 - Z^2}\right) + \frac{\partial B}{\partial v} + B\frac{\partial}{\partial v}\left(\log\frac{\sqrt{EG - F^2}}{1 - Z^2}\right) = 0.$$

En multipliant les deux membres de la nouvelle équation par $\frac{\sqrt{EG - F^2}}{1 - Z^2}$, on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(A\frac{\sqrt{EG - F^2}}{1 - Z^2}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(B\frac{\sqrt{EG - F^2}}{1 - Z^2}\right) = 0.$$

Cette dernière équation permet de poser :

$$A = -\frac{1 - Z^2}{\sqrt{EG - F^2}}\frac{\partial \Phi}{\partial v}, \qquad B = \frac{1 - Z^2}{\sqrt{EG - F^2}}\frac{\partial \Phi}{\partial u},$$

Φ étant une fonction arbitraire de u et de v.

La fonction Φ étant choisie, la valeur de M qu'il faut adjoindre aux valeurs précédentes de A et de B est donnée par l'équation (6). On trouve :

$$M = \frac{Z}{\sqrt{EG - F^2}}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u}\frac{\partial Z}{\partial v} - \frac{\partial \Phi}{\partial v}\frac{\partial Z}{\partial u}\right).$$

On obtient alors pour la surface moyenne d'une congruence du type étudié les équations générales :

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{1 - Z^2}{\sqrt{EG - F^2}}\left[\frac{\partial \Phi}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} - \frac{\partial \Phi}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial u}\right] + \frac{ZX}{\sqrt{EG - F^2}}\left[\frac{\partial \Phi}{\partial u}\frac{\partial Z}{\partial v} - \frac{\partial \Phi}{\partial v}\frac{\partial Z}{\partial u}\right], \\ y &= \frac{1 - Z^2}{\sqrt{EG - F^2}}\left[\frac{\partial \Phi}{\partial u}\frac{\partial Y}{\partial v} - \frac{\partial \Phi}{\partial v}\frac{\partial Y}{\partial u}\right] + \frac{ZY}{\sqrt{EG - F^2}}\left[\frac{\partial \Phi}{\partial u}\frac{\partial Z}{\partial v} - \frac{\partial \Phi}{\partial v}\frac{\partial Z}{\partial u}\right], \\ z &= \frac{1 - Z^2}{\sqrt{EG - F^2}}\left[\frac{\partial \Phi}{\partial u}\frac{\partial Z}{\partial v} - \frac{\partial \Phi}{\partial v}\frac{\partial Z}{\partial u}\right] + \frac{Z^2}{\sqrt{EG - F^2}}\left[\frac{\partial \Phi}{\partial u}\frac{\partial Z}{\partial v} - \frac{\partial \Phi}{\partial v}\frac{\partial Z}{\partial u}\right]. \end{aligned}\right.$$

La forme qu'affectent les formules (8), rapprochée de celle qu'affectent les formules (3) qui définissent les congruences d'Appell généralisées, met en évidence une relation géométrique intéressante entre les deux types de congruences.

Envisageons une congruence d'Appell généralisée définie par les formules (3), et la congruence à foyers associés équidistants d'une droite fixe définie par les formules (8), ayant la même représentation sphérique et correspondant à la même fonction Φ.

Si nous désignons plus particulièrement par x_1, y_1, z_1 les coordonnées d'un point quelconque de la surface moyenne de la première congruence, et par x, y, z celles du point correspondant de la surface moyenne de la deuxième congruence, et si nous posons :

$$\rho = \frac{Z}{\sqrt{EG - F^2}}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial u}\frac{\partial Z}{\partial v} - \frac{\partial\Phi}{\partial v}\frac{\partial Z}{\partial u}\right),$$

nous voyons que l'on a :

$$\left\{\begin{array}{l} x = (1 - Z^2)\,x_1 + \rho X, \\ y = (1 - Z^2)\,y_1 + \rho Y, \\ z = (1 - Z^2)\,z_1 + \rho Z. \end{array}\right.$$

Si l'on prend sur chaque rayon de la deuxième congruence le point d'abscisse $-\rho$, et si l'on choisit pour surface de départ de la congruence le lieu des points obtenus, les formules précédentes se réduisent à :

$$\left\{\begin{array}{l} x = (1 - Z^2)\,x_1, \\ y = (1 - Z^2)\,y_1, \\ z = (1 - Z^2)\,z_1. \end{array}\right.$$

Ces dernières formules prouvent que deux rayons homologues des deux congruences sont homothétiques, dans une homothétie de centre l'origine des coordonnées, et de rapport le carré du rayon du parallèle qui contient leur point représentatif commun, et permettent d'énoncer le résultat suivant :

Envisageons une congruence d'Appell généralisée relative à un certain point O, *et dans cette congruence, les surfaces réglées qui ont pour images sphériques une famille quelconque de parallèles; si l'on soumet ces surfaces reglées à des homothéties de centre* O *et de rapport le carré du rayon du parallèle correspondant, on obtient une congruence à foyers associés équidistants d'une droite fixe : la parallèle menée par le point* O *à l'axe commun des parallèles envisagés.*

En faisant varier la famille de parallèles dont il est question dans l'énoncé ci-dessus, on obtient, à partir d'une congruence d'Appell généralisée, autant de congruences à foyers associés équidistants d'une droite fixe que l'on veut.

Réciproquement d'ailleurs, *étant donnée une congruence à foyers associés équidistants d'une droite fixe, si l'on soumet les surfaces réglées de cette congruence ayant pour images sphériques la famille de parallèles dont l'axe est parallèle à la droite, à des homothéties ayant pour centre un point* O *de la droite et pour rapports les inverses des carrés des rayons des parallèles correspondants, on obtient une congruence d'Appell généralisée relative au point* O.

[**14**] Les formules (8) permettent de déterminer très simplement les congruences à foyers associés équidistants d'une droite fixe, qui ont en outre pour surface moyenne un plan perpendiculaire à cette droite.

En prenant la droite pour axe Oz et le plan moyen pour plan xOy, les équations de la congruence seront les équations (8) où z devra être identiquement nulle.

Il faut et il suffit pour cela que :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u}\frac{\partial Z}{\partial v} - \frac{\partial \Phi}{\partial v}\frac{\partial Z}{\partial u} = 0.$$

c'est-à-dire que Φ soit une fonction de Z.

On obtiendra donc toutes les congruences cherchées en remplaçant dans les formules (8), Φ par une fonction arbitraire de Z.

Les équations (8) s'écrivent alors :

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{1 - Z^2}{\sqrt{EG - F^2}}\frac{\partial \Phi}{\partial Z}\left(\frac{\partial Z}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} - \frac{\partial Z}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial u}\right),\\ y &= \frac{1 - Z^2}{\sqrt{EG - F^2}}\frac{\partial \Phi}{\partial Z}\left(\frac{\partial Z}{\partial u}\frac{\partial Y}{\partial v} - \frac{\partial Z}{\partial v}\frac{\partial Y}{\partial u}\right),\\ z &= 0. \end{aligned}\right.$$

Si l'on introduit la fonction Ψ, définie par la quadrature :

$$\Psi = \int (1 - Z^2)\frac{\partial \Phi}{\partial Z}\, dZ,$$

on voit que les équations (9) peuvent s'écrire :

$$\left\{\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} - \frac{\partial \Psi}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial u}\right),\\ y &= \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial u}\frac{\partial Y}{\partial v} - \frac{\partial \Psi}{\partial v}\frac{\partial Y}{\partial u}\right),\\ z &= 0. \end{aligned}\right.$$

Il suffit de rapprocher ces nouvelles équations des équations (3) pour voir que les congruences cherchées appartiennent aussi au type des congruences d'Appell généralisées relatives à l'origine des coordonnées.

On peut donc énoncer le résultat suivant :

Si une congruence, à foyers associés équidistants d'une droite fixe, admet pour surface moyenne un plan perpendiculaire à la droite, deux foyers associés quelconques sont à la même distance dn point d'intersection de la droite et du plan.

Cette propriété est d'ailleurs d'une démonstration géométrique immédiate : Deux foyers associés sont d'abord sur un même cylindre de révolution ayant pour axe la droite fixe; ils sont ensuite sur deux plans parallèles symétriques par rapport au plan moyen; ils sont donc situés sur les deux circonférences sections du cylindre par le système des deux plans précédents, et par suite sont équidistants du point où la droite fixe perce le plan moyen, qui est le centre d'une sphère contenant les deux cercles précédents.

On établit sans plus de difficulté que :

Toute congruence jouissant de deux quelconques des trois propriétés qui font l'objet de l'énoncé ci-dessus, jouit aussi de la troisième.

[**15**] On pourrait se demander s'il existe d'autres congruences à surface moyenne plane, dont deux foyers associés quelconques sont à égale distance d'une droite fixe, et à égale distance d'un point fixe de l'espace, que celles pour lesquelles la droite fixe est perpendiculaire au plan moyen au point fixe.

Il est aisé de voir qu'il n'en existe pas.

Supposons trouvée une congruence répondant à la question. Désignons par O le point d'intersection de la droite fixe et du plan moyen (on se rend facilement compte que la direction du plan moyen ne peut pas être parallèle à la droite). Envisageons un système de trois axes de coordonnées rectangulaires issues du point O, Oz étant confondu avec la droite fixe.

Soient α, β, γ les trois coordonnées du point fixe, et :

$$Ax + By + Cz = 0$$

l'équation du plan moyen.

Si l'on suppose, pour simplifier, que la représentation sphérique de la congruence est définie par les équations :

$$\left\{\begin{array}{l} X = \sin u \cos v, \\ Y = \sin u \sin v, \\ Z = \cos u, \\ ds^2 = du^2 + \sin^2 u dv^2 \quad \text{(première forme de Kummer)} \end{array}\right.$$

les équations (8) qui définissent la surface moyenne de la congruence s'écrivent :

$$\begin{cases} x = -\dfrac{\partial \Phi}{\partial u} \sin^2 u \sin v, \\ y = \dfrac{\partial \Phi}{\partial u} \sin^2 u \cos v, \\ z = \dfrac{\partial \Phi}{\partial v}. \end{cases}$$

Écrivons que cette surface moyenne est le plan :

$$Ax + By + Cz = 0,$$

nous obtenons l'équation :

$$(10) \qquad -\frac{\partial \Phi}{\partial u} \sin^2 u \,.\, \sin v \,.\, A + \frac{\partial \Phi}{\partial u} \sin^2 u \cos v \,.\, B + \frac{\partial \Phi}{\partial v} \,.\, C = 0$$

à laquelle doit satisfaire la fonction Φ qui définit la congruence.

Exprimons maintenant que le plan perpendiculaire au milieu du segment focal passe constamment par le point de coordonnées α, β, γ.

L'équation de ce plan est :

$$Xx + Yy + Zz - M = 0$$

où M a, comme on a vu au n° 13, la valeur :

$$M = \frac{Z}{\sqrt{EG - F^2}} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \frac{\partial Z}{\partial v} - \frac{\partial \Phi}{\partial v} \frac{\partial Z}{\partial u} \right).$$

Avec la représentation sphérique adoptée, on a :

$$M = \frac{\partial \Phi}{\partial v} \cos u,$$

et la condition pour que le plan perpendiculaire au milieu du segment focal passe constamment par le point de coordonnées α, β, γ, qui est :

$$\alpha X + \beta Y + \gamma Z - M = 0,$$

s'exprime par la relation :

$$(11) \qquad \alpha \sin u \cos v + \beta \sin u \sin v + \gamma \cos u - \frac{\partial \Phi}{\partial v} \cos u = 0.$$

Des relations (10) et (11) on tire les valeurs suivantes de $\frac{\partial \Phi}{\partial u}$ et de $\frac{\partial \Phi}{\partial v}$:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} = \frac{C(\alpha \operatorname{tg} u \cos v + \beta \operatorname{tg} u \sin v + \gamma)}{\sin^2 u(A \sin v - B \cos v)},$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial v} = \alpha \operatorname{tg} u \cos v + \beta \operatorname{tg} u \sin v + \gamma.$$

Le calcul des dérivées partielles secondes $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial v \partial u}$, $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial v}$ donne :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial v \partial u} = \frac{1}{\cos^2 u}(\alpha \cos v + \beta \sin v),$$
$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial v} = -\frac{C}{\sin^2 u}\,\frac{(\alpha A + \beta B) \operatorname{tg} u + \gamma(A \cos v + B \sin v)}{(A \sin v - B \cos v)^2}.$$

En écrivant qu'il y a identité entre les deux dérivées partielles, on obtient :

$$C\gamma(A \cos v + B \sin v) \operatorname{cotg}^2 u + C(\alpha A + \beta B) \operatorname{cotg} u$$
$$-(\alpha \cos v + \beta \sin v)(A \sin v - B \cos v)^2 = 0.$$

Le premier membre étant un polynôme du second degré en $\operatorname{cotg} u$, pour que l'identité ait lieu, il faut et il suffit que les trois coefficients soient identiquement nuls :

$$\gamma(A \cos v + B \sin v) \equiv 0,$$
$$A\alpha + B\beta \equiv 0,$$
$$(\alpha \cos v + \beta \sin v)(A \sin v - B \cos v)^2 \equiv 0$$

($C \neq 0$, le plan moyen ne pouvant être parallèle à Oz, comme nous l'avons fait remarquer plus haut).

Pour que la première des trois identités ci-dessus ait lieu, il faut que l'on ait :

soit $\gamma = 0$, soit $A = B = 0$.

Si $\gamma = 0$, la troisième identité exige que $\alpha = \beta = 0$; dans ces conditions on a :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial v} \equiv 0$$

comme le montre l'expression de $\frac{\partial \Phi}{\partial v}$, et il résulte alors de la relation (10) que :

$$A = B = 0;$$

on peut donc écrire :

$$\alpha = \beta = \gamma = A = B = 0.$$

Si $A = B = O$, on a :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial v} = 0,$$

d'après (10); et l'expression de $\frac{\partial \Phi}{\partial v}$ montre que l'on a aussi :

$$\alpha = \beta = \gamma = 0.$$

On peut donc écrire comme dans le cas précédent :

$$\alpha = \beta = \gamma = A = B = 0.$$

Les conditions ci-dessus expriment que le plan moyen de la congruence, dont l'équation se reduit à :

$$Cz = 0$$

est le plan xOy, et que le point fixe par où passent les plans perpendiculaires aux milieu des segments focaux, dont les trois coordonnées sont nulles, est le point O.

Les seules congruences répondant à la question sont donc bien celles pour lesquelles la droite fixe est perpendiculaire au plan moyen au point fixe.

[**16**] Les deux nappes focales des congruences définies par les formules (9), se correspondent point par point, de façon que la droite joignant deux points homologues quelconques, ait son milieu dans le plan xOy, et soit tangente aux deux surfaces en ces points qui sont équidistants de l'origine des coordonnées.

Proposons-nous de déterminer explicitement les couples de surfaces possédant les propriétés précédentes.

La représentation sphérique d'une congruence (9), étant définie, comme on l'a supposé plus haut, par les formules :

$$\left\{\begin{aligned} X &= \sin u \cos v, \\ Y &= \sin u \sin v, \\ Z &= \cos u, \\ ds^2 &= du^2 + \sin^2 u\, dv^2 \end{aligned}\right.$$

les équations (9) s'écrivent ici, puisque Z est uniquement fonction de u :

$$\begin{cases} x = \dfrac{1 - Z^2}{\sqrt{EG - F^2}} \dfrac{\partial \Phi}{\partial u} \dfrac{\partial X}{\partial v}, \\ y = \dfrac{1 - Z^2}{\sqrt{EG - F^2}} \dfrac{\partial \Phi}{\partial u} \dfrac{\partial Y}{\partial v}, \\ z = 0, \end{cases}$$

Φ étant une fonction de u.

Soit, en remplaçant $1 - Z^2$, $\sqrt{EG - F^2}$, $\dfrac{\partial X}{\partial v}$, $\dfrac{\partial Y}{\partial v}$ par leurs valeurs :

$$\begin{cases} x = -U \sin v, \\ y = U \sin v, \\ z = 0. \end{cases} \tag{12}$$

U étant fonction de la seule variable u.

Les équations des deux nappes focales de la congruence, qui sont les couples de surfaces cherchées, sont :

$$\begin{cases} \xi = -U \sin v + \rho \sin u \cos v, \\ \eta = U \cos v + \rho \sin u \sin v, \\ \zeta = \phantom{-U \cos v + {}} \rho \cos u \end{cases}$$

où ρ doit être remplacé successivement par les deux racines de l'équation aux abscisses des foyers, qui se réduit ici à :

$$(EG - F^2)\rho^2 + eg - ff' = 0.$$

En tenant compte des valeurs :

$$E = 1, \qquad G = \sin^2 u, \qquad F = 0,$$
$$e = 0, \qquad f = -U \cos u, \qquad f' = U' \sin u, \qquad g = 0,$$

l'équation ci-dessus s'écrit :

$$\sin^2 u \rho^2 + UU' \cos u \sin u = 0.$$

On tire de cette équation :

$$\rho = \pm \sqrt{-UU' \cot\mathrm{g}\, u},$$

et les équations générales des couples de surfaces cherchées sont :

$$(13)\qquad \begin{cases} \xi = -\mathrm{U}\sin v \pm \sqrt{-\mathrm{UU}'\operatorname{cotg} u}\,\sin u\cos v, \\ \eta = \mathrm{U}\cos v \pm \sqrt{-\mathrm{UU}'\operatorname{cotg} u}\,\sin u\sin v, \\ \zeta = \pm\sqrt{-\mathrm{UU}'\operatorname{cotg} u}\,\cos u. \end{cases}$$

Les signes supérieurs et inférieurs se correspondent. On voit sans difficulté que deux surfaces associées sont de révolution autour de oz et symétriques par rapport au plan xoy.

Les formules (13) représentent d'ailleurs tous les couples de surfaces de révolution autour de oz symétriques par rapport à xoy. De sorte qu'on peut dire que l'on obtient toutes les congruences à foyers associés équidistants d'une droite fixe, d'un point fixe, et d'un plan fixe, en envisageant les tangentes communes aux différents couples de surfaces de révolution de même axe symétriques par rapport à un plan perpendiculaire à l'axe.

[**17**] Les formules ci-dessus donnent immédiatement celles des congruences définies par les formules (12), qui sont formées par les normales à une famille de surfaces.

Il suffit de déterminer U par la condition $f = f'$, pour qu'il en soit ainsi ; on trouve :

$$\mathrm{U} = \frac{a}{\sin u}. \qquad (a \text{ étant une constante arbitraire.})$$

Les équations correspondantes sont :

$$\begin{cases} x = -a\dfrac{\sin v}{\sin u}, \\ y = a\dfrac{\cos v}{\sin u}, \\ z = 0. \end{cases}$$

De la comparaison de ces équations et de celles qui définissent la représentation sphérique des congruences correspondantes, résulte une construction géométrique très simple de ces congruences :

Envisageons une sphère de centre O (fig. 11) *et un système de trois axes de coordonnées rectangulaires* Oxyz ; *projetons un point quelconque* M *de la sphère sur le* *plan xOy, en m; prenons sur le diamètre Om, le point m_1 conjugué de m par rapport à la sphère; faisons tourner Om dans le plan xOy, d'un angle $m_1 \hat{o} m' = 90°$, m_1 vient en m'; par m' menons la parallèle à OM, soit (Δ); les droites (Δ) correspondant aux différents points M de la sphère, forment une congruence du type en question.*

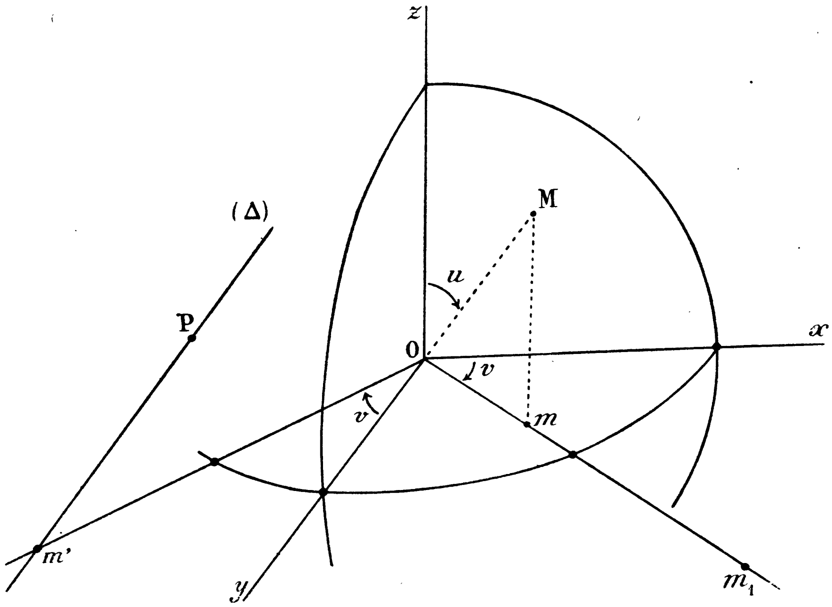

FIG. 11.

Il suffit, pour justifier la construction ci-dessus, de montrer que les coordonnées du point m', dans le plan xOy, sont justement :

$$-a\frac{\sin v}{\sin u} \quad \text{et} \quad a\frac{\cos v}{\sin u}$$

(a étant le rayon de la sphère).

On a :

$$Om = a \sin u;$$

par suite :

$$Om_1 = Om' = \frac{a}{\sin u}.$$

Les coordonnées du point m' qui sont :

$$\mathrm{O}m' \cos\left(\frac{\pi}{2}+v\right) \quad \text{et} \quad \mathrm{O}m' \sin\left(\frac{\pi}{2}+v\right),$$

ont bien pour valeurs :

$$-a\frac{\sin v}{\sin u} \quad \text{et} \quad a\frac{\cos v}{\sin u},$$

ce qui justifie la construction.

On peut, conformément à un théorème général établi par Darboux (*Théorie des Surfaces*, tome IV, n° 911), rattacher la construction des congruences ci-dessus à la considération du système des normales d'une alysséide quelconque d'axe Oz.

Dans l'ouvrage cité, Darboux a établi le théorème suivant :

Pour obtenir toutes les congruences normales dans lesquelles la surface moyenne est un plan, il suffit d'établir (par le procédé indiqué ici au n° 5) *une correspondance avec orthogonalité des éléments linéaires, entre une surface minima quelconque et un plan, puis de mener par chaque point du plan une droite parallèle à la normale au point correspondant de la surface minima.*

Il est aisé de voir que dans le cas des congruences actuellement envisagées, cette surface minima est une alysséide.

Envisageons (*fig.* 12) le plan $z\mathrm{O}m_1$ de la figure 11. Prenons dans ce plan comme axes de coordonnées Oz, et Oρ confondu avec Om_1, et considérons la chaînette d'équation :

$$\rho = a ch\frac{z}{a}.$$

Parmi les normales à la chaînette aux points d'abcisse :

$$\rho = \mathrm{O}m_1 = \frac{a}{\sin u},$$

il y en a une parallèle à OM :

En désignant en effet par α l'angle formé par l'une des tangentes à la chaînette en ces points avec Oz, on a :

$$\mathrm{tg}\,\alpha = sh\frac{z}{a}.$$

L'angle θ de la normale au point considéré avec Oz, est tel que :

$$\operatorname{tg} \theta = -\operatorname{cotg} \alpha ;$$

on tire de là :

$$\sin \theta = \frac{\operatorname{cotg} \alpha}{\pm\sqrt{1 + \operatorname{cotg}^2 \alpha}} = \pm \frac{1}{ch \frac{z}{a}} .$$

Comme :

$$\sin u = \frac{a}{\rho} = \frac{1}{ch \frac{z}{a}} ,$$

on a :

$$\sin \theta = \pm \sin u ,$$

et l'une des normales envisagées est bien parallèle à OM.

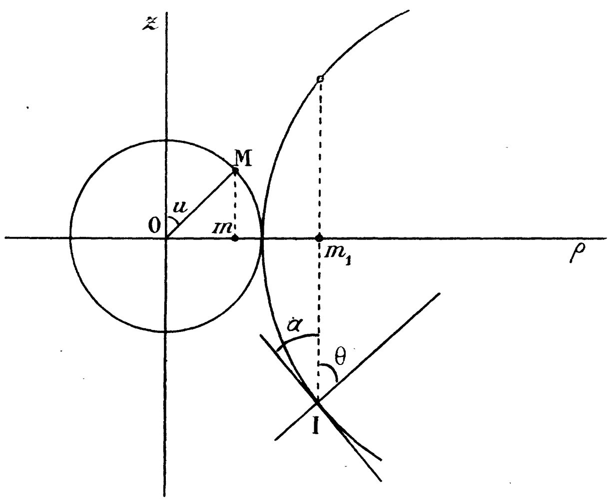

FIG. 12.

Si I est le point de la chaînette d'où est issue la normale, on voit que la droite (Δ) de la figure 11 s'obtient en projetant le point I de l'alyssèide engendrée par la chaînette précédente en tournant autour de sa base Oz, sur le plan xOy, en faisant tourner la projection m_1 du point I de 90° autour de Oz, puis en menant par le point obtenu m' la parallèle à la normale à l'alyssèide au point I. Les différents rayons de la congruence, s'obtiennent en effectuant la même construction à partir des différents points de l'alyssèide(1).

(1) Cette construction est susceptible de généralisation comme on le verra au n° 22.

[**18**] *Surfaces normales aux rayons des congruences précédentes.* — L'étude des surfaces normales aux rayons des congruences précédentes, que nous allons entreprendre, est assez intéressante. Elle va établir une certaine analogie entre ces surfaces et les développantes de cercle du plan, et elle va mettre en évidence des générations de ces surfaces, particulièrement faciles à se représenter au point de vue géométrique.

On obtient les surfaces en question en déterminant ρ dans les équations :

$$\left\{\begin{aligned} x &= -\frac{\sin v}{\sin u} + \rho \sin u \cos v, \\ y &= \frac{\cos v}{\sin u} + \rho \sin u \sin v, \\ z &= \rho \cos u \end{aligned}\right.$$

de façon que :

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz \equiv 0$$

(nous avons supposé $a = 1$, en négligeant une homothétie).

Un calcul simple donne :

$$\frac{\partial \rho}{\partial u} = 0, \qquad \frac{\partial \rho}{\partial v} = 1,$$

et par suite :

$$\rho = v + h. \qquad (h \text{ étant une constante arbitraire.})$$

Les surfaces cherchées ont pour équations :

$$(14) \qquad \left\{\begin{aligned} x &= -\frac{\sin v}{\sin u} + (v + h) \sin u \cos v, \\ y &= \frac{\cos v}{\sin u} + (v + h) \sin u \sin v, \\ z &= (v + h) \cos u. \end{aligned}\right.$$

Il résulte de la forme des équations (14), que les surfaces (Σ) qu'elles représentent se déduisent de l'une quelconque d'entr'elles, par rotation autour de Oz. Si donc on fait tourner l'une de ces surfaces autour de Oz, le système de ses normales ne change pas, de même que lorsqu'on fait tourner une développante de cercle dans son plan, autour du centre du cercle de base, le système de ses normales reste inaltéré.

Cette analogie entre les surfaces (Σ) et les développantes de cercle, n'est pas la seule; une autre analogie intéressante sera établie un peu plus loin.

Envisageons plus particulièrement la surface (Σ) correspondant à $h = 0$, d'équations :

$$(15) \quad \begin{cases} x = -\dfrac{\sin v}{\sin u} + v \sin u \cos v, \\ y = \dfrac{\cos v}{\sin u} + v \sin u \sin v, \\ z = v \cos u. \end{cases}$$

On voit sans difficulté que l'origine, les trois plans de coordonnées, les trois axes de coordonnées sont autant d'éléments de symétrie pour la surface.

La section de la surface par le plan xOy, s'obtient en remplaçant dans les expressions de x et de y, soit v par zéro, soit u par $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$. En prenant $v = 0$, on obtient :

$$x = 0, \qquad y = \frac{1}{\sin u};$$

Ces équations représentent la portion de Oy extérieure au cercle du plan xOy de centre O et de rayon 1.

En prenant $u = \frac{\pi}{2}$, on obtient la courbe d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = -\sin v + v \cos v, \\ y = \cos v + v \sin v. \end{cases}$$

Cette courbe est la développante du cercle du plan xOy de centre O et de rayon 1, ayant son point de retroussement au point de Oy d'ordonnée $+1$.

En prenant $v = \frac{3\pi}{2}$, on obtient la développante symétrique de la précédente par rapport au point O.

Courbes $u =$ constante. — Considérons le point M de la surface, de coordonnées curvilignes u, v. Si u reste fixe et si v varie, la droite (Δ) de la figure 11, engendre un hyperboloïde de révolution à une nappe d'axe Oz, normal à (Σ) tout le long de la courbe décrite par le point M, laquelle est par conséquent une trajectoire orthogonale des génératrices de l'hyperboloïde.

Les différentes courbes $u =$ constante de la surface (Σ), sont donc des trajectoires orthogonales des génératrices d'hyperboloïdes de révolution à une nappe.

Ces courbes jouissent d'une propriété géométrique intéressante :

Les développables circonscrites à (Σ) *le long des différentes courbes* $u = c^{te}$, *sont des hélicoïdes développables, lieux des tangentes à des hélices circulaires d'axe* Oz.

Considérons la génératrice issue de P (*fig. 11*) de la développable circonscrite à (Σ) le long de la courbe $u = c^{te}$ qui passe par P. Il suffit de se reporter à la représentation sphérique de (Σ), pour voir que la direction de cette génératrice est celle de la tangente en M (image de P), au cercle section de la sphère O par le plan zom_1, et que par suite l'angle que cette génératrice fait avec Oz est constant $\left(\frac{\pi}{2} - u\right)$. Si l'on remarque maintenant que la projection de la génératrice précédente sur le plan xoy, qui est la parallèle menée de m' à Om_1, reste constamment tangente au cercle de centre O et de rayon $Om' = \frac{1}{\sin u}$, on peut ajouter que la génératrice en question reste constamment tangente au cylindre de révolution d'axe Oz et de rayon $\frac{1}{\sin u}$.

Les différentes génératrices de la développable circonscrite à (Σ) tout le long d'une courbe $u =$ constante, étant tangentes au cylindre de révolution d'axe Oz et de rayon $R = \frac{1}{\sin u}$, et faisant un angle constant $\left(\frac{\pi}{2} - u\right)$, avec Oz, cette développable est un hélicoïde, lieu des tangentes à une hélice tracée sur le cylindre précédent, hélice dont le pas réduit est comme on le voit aisément [1] : $h = \frac{1}{\cos u}$. Cette hélice coupe Oy.

Si l'on envisage la famille des hélicoïdes développables coaxiaux correspondant aux différentes valeurs de u, on peut dire que (Σ) est l'enveloppe de cette famille d'hélicoïdes.

En considérant (Σ) à ce nouveau point de vue, on peut, comme nous allons le voir, mettre facilement en évidence une propriété géométrique remarquable de la surface, complétant son analogie avec les développantes de cercle.

Rappelons tout d'abord quelques propriétés faisant l'objet d'une Note que nous avons publiée dans les *Nouvelles Annales de mathématiques* (janvier 1925).

Nous avons montré dans la Note citée, que les développantes de cercle jouissent de cette propriété que *des arcs de même longueur pris sur une même développante, engendrent des aires égales en tournant autour du centre du cercle de base.*

---

[1] Remarquons que nous avons établi incidemment le théorème suivant :

« Les plans perpendiculaires aux génératrices de l'un des systèmes d'un hyperboloïde de révolution à une nappe aux points où ces génératrices sont coupées par une de leurs trajectoires orthogonales, enveloppent un hélicoïde développable dont l'arête de rebroussement est une hélice circulaire ayant pour axe l'axe de l'hyperboloïde. »

De cette propriété nous avons déduit une propriété analogue des hélicoïdes développables lieux des tangentes à une hélice circulaire quelconque (1) :

Toutes les cloisons de même aire tracées sur un tel hélicoïde engendrent, en tournant autour de l'axe de l'hélicoïde, des volumes égaux.

Plus précisément, en désignant par S l'aire d'une cloison tracée sur l'hélicoïde, par V le volume engendré par cette cloison effectuant une rotation complète autour de l'axe, par R le rayon du cylindre portant l'hélice de rebroussement, et par h le pas réduit de cette hélice, nous avons établi la formule :

$$V = \frac{2\pi h RS}{\sqrt{h^2 + R^2}}.$$

Les hélicoïdes développables dont il est question ci-dessus, ne sont pas les seules surfaces jouissant de la propriété indiquée. L'ensemble de *toutes* ces surfaces est indiqué dans une Note de M. A. Buhl « *Sur quelques équations non linéaires aux dérivées partielles du premier ordre* » (Nouvelles Annales mathématiques, juillet 1925).

Disons seulement pour l'instant que si l'on considère une famille d'hélicoïdes coaxiaux pour lesquels on a :

$$\frac{hR}{\sqrt{h^2 + R^2}} = \text{constante},$$

l'enveloppe des hélicoïdes de cette famille jouit, par rapport à l'axe commun, de la même propriété que les hélicoïdes eux-mêmes.

Pour l'hélicoïde circonscrit à (Σ) tout le long de la courbe $u =$ constante, on a comme on a vu :

$$R = \frac{1}{\sin u}, \qquad h = \frac{1}{\cos u},$$

---

(1) La propriété des développantes de cercle qui vient d'être indiquée, est un cas particulier de la proposition générale suivante, facile à établir :

Les trajectoires orthogonales des géodésiques d'une surface de révolution quelconque, correspondant à la même valeur de la constante de Clairaut, sont des courbes jouissant de la propriété d'engendrer par rotation autour de l'axe de la surface des aires proportionnelles aux arcs ($A = ms$, *avec* $m = 2k\pi$, *k étant la constante de Clairaut correspondante*). On obtient d'ailleurs toutes les courbes jouissant de la propriété $A = ms$, en envisageant toutes les surfaces de révolution.

par suite :

$$\frac{hR}{\sqrt{h^2+R^2}} = \frac{\frac{1}{\cos u}\cdot\frac{1}{\sin u}}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 u}+\frac{1}{\sin^2 u}}} = 1. \qquad \text{(constante)}$$

Les hélicoïdes circonscrits à (Σ) le long des différentes courbes $u = c^{te}$ forment une famille pour laquelle la relation :

$$\frac{hR}{\sqrt{h^2+R^2}} = c^{te},$$

est satisfaite.

Leur enveloppe, c'est-à-dire la surface (Σ) étudiée, jouit donc de cette propriété, complétant son analogie avec les développantes de cercle du plan que *des cloisons de même aire prises sur* (Σ) (*la même propriété subsiste d'ailleurs pour toutes les surfaces dérivant de* (Σ) *par homothétie*), *engendrent des volumes égaux en tournant autour de* Oz [1].

Cette propriété se vérifie d'ailleurs directement sans difficulté sur les équations qui définissent la surface (Σ).

Courbes $v =$ *constante*. — Si c'est v qui est fixe, la droite (Δ) de la figure 11, engendre un conoïde droit, ayant pour axe la droite Om'; la courbe décrite par M ($v =$ constante), s'obtient en portant sur les génératrices de ce conoïde, à partir de l'axe, des longueurs égales à $|v|$; cette courbe est donc l'intersection du conoïde avec le cylindre de révolution ayant pour axe l'axe du conoïde et pour rayon $|v|$.

En prenant pour axes :

OX	confondu avec	Om_1
OY	....	Om'
OZ	....	Oz,

les équations du conoïde sont :

$$\begin{cases} X = v \sin u, \\ Y = \dfrac{1}{\sin u}, \\ Z = v \cos u. \end{cases}$$

[1] Les propriétés rapprochant (Σ) des développantes de cercle appartiennent, comme on le verra plus loin, à d'autres surfaces : les surfaces orthogonales aux rayons des congruences normales *de révolution* (c'est-à-dire ne cessant de coïncider avec elles-mêmes après une rotation d'angle quelconque autour d'un axe).

L'intersection de ce conoïde avec le cylindre (C) d'équation :

$$(C) \qquad X^2 + Y^2 = v^2,$$

est, comme on le voit aisément, la biquadratique section de (C) par le cylindre hyperbolique d'équation :

$$XY = v.$$

La forme de la biquadratique apparaît nettement; elle admet le plan xoy pour plan de symétrie, et se compose de deux branches distinctes symétriques par rapport à Oz. Cette biquadratique admet pour asymptotes les parallèles à Om' coupant Oz aux deux points distants du point O de la longueur $|v|$. Lorsque v varie, la biquadratique précédente engendre la surface (Σ). Ses asymptotes engendrent deux hélicoïdes *gauches* d'axe Oz symétriques par rapport au plan xoy, lesquels hélicoïdes apparaissent comme des surfaces *asymptotes* à la surface (Σ).

Considérons maintenant l'une quelconque des biquadratiques ci-dessus, correspondant à une valeur déterminée du paramètre v. Les normales à (Σ) tout le long de cette biquadratique, qui sont les génératrices du conoïde sur lequel elle se trouve, sont également normales au cylindre de révolution d'axe Om' et de rayon $|v|$ qui la contient. Ce cylindre (C) est donc tangent à (Σ) tout le long de la biquadratique, et (Σ) apparaît ainsi comme l'enveloppe de la famille de cylindres (C).

Lorsque $v = 0$, le cylindre (C) se réduit à l'axe Oy; lorsque v varie, l'axe du cylindre tourne autour de Oz, son rayon étant à chaque instant mesuré par le même nombre que l'angle de rotation correspondant.

On peut donc dire que l'on obtient la surface (Σ), en prenant l'enveloppe d'un cylindre de révolution dont l'axe tourne autour de l'une de ses perpendiculaires, et dont le rayon est à chaque instant mesuré par le même nombre que l'angle de rotation ($r = |v|$). Il suffit maintenant d'introduire une homothétie quelconque pour pouvoir énoncer le résultat général suivant :

Les surfaces dont les normales forment une congruence à surface moyenne plane, et à foyers associés équidistants d'un point du plan moyen, et de la normale au plan en ce point, sont les enveloppes de cylindres de révolution dont les axes tournent autour d'une de leurs perpendiculaires pendant que leurs rayons varient proportionnellement à l'angle de rotation ($r = |av|$).

Le plan moyen est le plan des axes des cylindres, la droite et le point de l'énoncé sont l'axe de rotation et le point où il coupe les axes des cylindres.

[**19**] Nous compléterons l'étude des congruences de normales définies par des équations du type (12) en recherchant leurs nappes focales (les deux nappes des développées des surfaces (Σ) dont il vient d'être question).

Il suffit pour cela, en négligeant une homothétie, de remplacer dans les équations (13) du n° 16, la fonction arbitraire U par $\frac{1}{\sin u}$. On obtient alors pour les deux nappes focales les équations :

$$\left\{\begin{aligned} x &= \frac{-\sin v \pm \cos u \cos v}{\sin u}, \\ y &= \frac{\cos v \pm \cos u \sin v}{\sin u}, \\ z &= \pm \operatorname{cotg}^2 u. \end{aligned}\right.$$

Les deux premières équations donnent :

$$x^2 + y^2 = \frac{1 + \cos^2 u}{\sin^2 u}.$$

En éliminant u entre cette nouvelle équation et la dernière, on obtient l'équation cartésienne du système des deux nappes focales; on trouve :

$$z = \pm \frac{1}{2}(x^2 + y^2 - 2).$$

Cette équation représente deux paraboloïdes de révolution d'axe Oz, symétriques par rapport au plan xoy et ayant leur foyer au point O.

On peut donc dire des congruences de normales à surface moyenne plane et à foyers associés équidistants d'un point fixe, et d'une droite fixe, qu'elles sont *formées par les tangentes communes aux différents couples de paraboloïdes de révolution homofocaux égaux.*

[**20**] *Congruences à surface moyenne plane. — Leurs relations avec les deux types de congruences précédemment étudiés.* — Nous avons indiqué, à la fin du n° 13, un procédé géométrique permettant de déduire d'une congruence d'Appell généralisée, des congruences à foyers associés équidistants d'une droite fixe et inversement. Nous dirons, pour simplifier, d'une congruence d'Appell généralisée, et de l'une des congruences à foyers associés équidistants d'une droite fixe qui lui sont attachées par la construction rappelée qu'elles sont *associées.*

Les formules analytiques définissant deux congruences *associées* sont les formules (3) et (8).

Nous nous proposons actuellement de montrer comment on peut déduire toutes les congruences à surface moyenne plane de l'ensemble des couples de congruences associées.

Cette déduction est basée sur le théorème suivant :

Envisageons deux congruences associées, la congruence d'Appell généralisée étant relative à un point O, *l'autre à la droite* (Δ) *passant par* O. *Soit* (D) *l'un quelconque des rayons de la première congruence,* (D') *le rayon qui lui correspond dans la deuxième* (D *et* D' *sont parallèles et dans un même plan passant par* O). *Si* M *et* M' *sont les points où un plan perpendiculaire à* (Δ) *coupe* (D) *et* (D'), *si l'on mène par un point quelconque de l'espace,* O *par exemple, un vecteur* (OI) *équipollent au vecteur* (M M'), *et si par l'extrémité* I *de ce vecteur on mène la droite* (D'') *parallèle à* (D) *et à* (D') ; (D'') *engendre, lorsque* (D) *varie, une congruence à surface moyenne plane, le plan moyen étant perpendiculaire en* O *à* (Δ).

Nous établirons ce théorème, en ayant égard aux formules (3) et (8) définissant les deux surfaces associées, et en supposant, ce qui est loisible, que la représentation sphérique des deux congruences est celle que nous avons déjà employée à diverses reprises :

$$\left\{\begin{aligned} X &= \sin u \cos v, \\ Y &= \sin u \sin v, \\ Z &= \cos u. \end{aligned}\right.$$

Dans ces conditions, la surface moyenne de la congruence d'Appell généralisée est définie par les équations :

$$\left\{\begin{aligned} x &= -\frac{\partial \Phi}{\partial u} \sin v - \frac{\partial \Phi}{\partial v} \operatorname{cotg} u \cos v, \\ y &= \frac{\partial \Phi}{\partial u} \cos v - \frac{\partial \Phi}{\partial v} \operatorname{cotg} u \sin v, \\ z &= \frac{\partial \Phi}{\partial v}. \end{aligned}\right.$$

La surface moyenne de la congruence associée a pour équations :

$$\left\{\begin{aligned} x' &= -\frac{\partial \Phi}{\partial u} \sin^2 u \sin v, \\ y' &= \frac{\partial \Phi}{\partial u} \sin^2 u \cos v, \\ z' &= \frac{\partial \Phi}{\partial v}. \end{aligned}\right.$$

Soient $M(x, y, z)$, $M'(x', y', z')$, deux points homologues sur les deux surfaces moyennes, situés sur les deux rayons homologues (D) et (D'). Les deux points M et M', ont la même cote $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial v}\right)$, la droite M M' est donc perpendiculaire à Oz, conformément à l'énoncé du théorème que nous nous proposons d'établir.

Le point I (*fig. 13*), extrémité du vecteur (OI) mené par O équipollent à (M M') a pour coordonnées :

$$\begin{cases} x'' = x' - x = \dfrac{\partial \Phi}{\partial u} \cos^2 u \sin v + \dfrac{\partial \Phi}{\partial v} \operatorname{cotg} u \cos v, \\ y'' = y' - y = -\dfrac{\partial \Phi}{\partial u} \cos^2 u \cos v + \dfrac{\partial \Phi}{\partial v} \operatorname{cotg} u \sin v, \\ z'' = z' - z = 0. \end{cases}$$

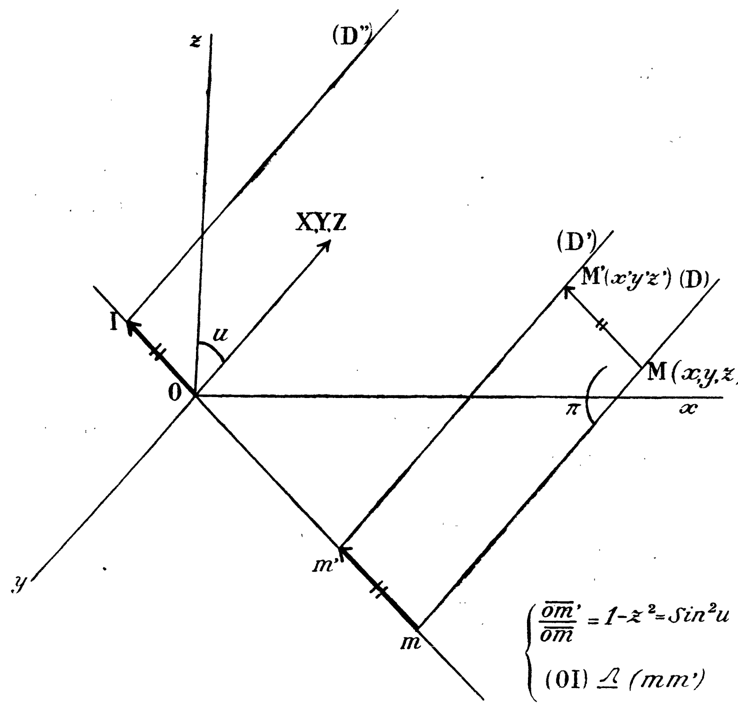

FIG. 13.

La congruence des droites (D") menées par I parallèlement à (D) et à (D'), a des équations de la forme :

$$(16) \qquad \begin{cases} \xi = x'' + \rho X, \\ \eta = y'' + \rho Y, \\ \zeta = \rho Z. \end{cases}$$

Cette congruence aura le plan xoy pour surface moyenne si l'on a :

$$gE + eG = 0$$

($F = 0$ à cause du choix que l'on a fait pour la représentation sphérique).

On a :

$$E = 1, \qquad G = \sin^2 u.$$

D'autre part, le calcul de e et de g fournit les valeurs suivantes :

$$\left\{\begin{aligned} e &= \frac{\partial^2\Phi}{\partial u\partial v}\frac{\cos^2 u}{\sin u} - \frac{\partial\Phi}{\partial v}\frac{\cos u}{\sin^2 u}, \\ g &= -\frac{\partial^2\Phi}{\partial u\partial v}\cos^2 u \sin u + \frac{\partial\Phi}{\partial v}\cos u. \end{aligned}\right.$$

Si l'on porte les valeurs précédentes de E, G, e, g, dans la relation :

$$gE + eG = 0,$$

on constate que cette relation est vérifiée.

La congruence des droites (D'') est donc bien une congruence à surface moyenne plane. Elle se déduit des deux congruences associées dont on est parti, conformément au théorème énoncé.

On peut donner à l'énoncé du théorème précédent une forme légèrement différente.

On voit sans difficulté que l'on a dans la figure 13 :

$$\frac{\overline{OI}}{\overline{Om'}} = \frac{-Z^2}{1 - Z^2} = -\operatorname{cotg}^2 u.$$

Par suite, *si l'on soumet chaque rayon d'une congruence à foyers associés équidistants d'une droite fixe à une homothétie, de centre un point* O *de la droite, et de rapport* $\operatorname{cotg}^2 u$ *(u étant l'angle du rayon avec la droite), on obtient une congruence à surface moyenne plane, le plan moyen étant le plan mené par* O *perpendiculairement à la droite fixe.* En écrivant $\operatorname{cotg}^2 u$ au lieu de $-\operatorname{cotg}^2 u$, nous avons introduit une symétrie relativement à O.

On peut de même énoncer le résultat suivant relatif au passage d'une congruence d'Appell généralisée à une congruence à surface moyenne plane :

Si l'on soumet chaque rayon d'une congruence d'Appell généralisée relative à un point O, *à une homothétie de centre* O *et de rapport* $\cos^2 u$ *(u étant l'angle que fait* *le rayon envisagé avec une droite fixe issue de* O); *on obtient une congruence à surface moyenne plane; le plan moyen étant le plan mené par* O *perpendiculairement à la droite fixe.*

Ce théorème résulte de ce que dans la figure 13, on a : $\dfrac{\overline{\mathrm{OI}}}{\overline{\mathrm{O}m}} = -\mathrm{Z}^2 = -\cos^2 u.$

Les formules (16) dépendent d'une fonction arbitraire de deux variables indépendantes u et v; elles définissent *toutes* les congruences à surface moyenne plane.

Si, au système formé par deux congruences associées, on ajoute la congruence à surface moyenne plane qui en dérive conformément au théorème ci-dessus, on obtient une configuration géométrique assez remarquable; trois rayons associés D, D′, D″, sont dans un même plan passant constamment par le point fixe O, et dans ce plan présentent les relations traduites par la figure 13.

Dans les formules (16) qui définissent la congruence à surface moyenne plane la plus générale, la représentation sphérique adoptée, a la forme que nous avons choisie pour établir précisément le théorème dont nous avons déduit les congruences en question.

Proposons-nous, maintenant que le théorème est établi, d'en déduire les formules définissant les congruences à surface moyenne plane en coordonnées générales (représentation sphérique quelconque).

Envisageons les formules générales (3) et (8), en continuant à appeler x, y, z, les premiers membres des formules (3), mais en désignant par x', y', z', ceux des formules (8).

La surface moyenne de la congruence à surface moyenne plane la plus générale aura pour équation, en vertu du théorème du début :

$$\left\{\begin{aligned} x'' &= x' - x = \frac{\mathrm{Z}}{\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial u}\left(\mathrm{X}\frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial v} - \mathrm{Z}\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial v}\right) - \frac{\partial\Phi}{\partial v}\left(\mathrm{X}\frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial u} - \mathrm{Z}\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial u}\right)\right],\\ y'' &= y' - y = \frac{\mathrm{Z}}{\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial u}\left(\mathrm{Y}\frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial v} - \mathrm{Z}\frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial v}\right) - \frac{\partial\Phi}{\partial v}\left(\mathrm{Y}\frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial u} - \mathrm{Z}\frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial u}\right)\right],\\ z'' &= z' - z = 0. \end{aligned}\right.$$

Si l'on tient compte des relations bien connues :

$$\mathrm{X} = \frac{\dfrac{\partial \mathrm{Y}}{\partial u}\dfrac{\partial \mathrm{Z}}{\partial v} - \dfrac{\partial \mathrm{Z}}{\partial u}\dfrac{\partial \mathrm{Y}}{\partial v}}{\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}}, \qquad \mathrm{Y} = \frac{\dfrac{\partial \mathrm{Z}}{\partial u}\dfrac{\partial \mathrm{X}}{\partial v} - \dfrac{\partial \mathrm{X}}{\partial u}\dfrac{\partial \mathrm{Z}}{\partial v}}{\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}},$$

$$\mathrm{Z} = \frac{\dfrac{\partial \mathrm{X}}{\partial u}\dfrac{\partial \mathrm{Y}}{\partial v} - \dfrac{\partial \mathrm{Y}}{\partial u}\dfrac{\partial \mathrm{X}}{\partial v}}{\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}},$$

les coefficients de $\frac{\partial \Phi}{\partial u}$ et de $\frac{\partial \Phi}{\partial v}$ dans les formules ci-dessus, peuvent s'écrire :

$$X\frac{\partial Z}{\partial v} - Z\frac{\partial X}{\partial v} = \frac{G\frac{\partial Y}{\partial u} - F\frac{\partial Y}{\partial v}}{\sqrt{EG - F^2}},$$

$$X\frac{\partial Z}{\partial u} - Z\frac{\partial X}{\partial u} = \frac{F\frac{\partial Y}{\partial u} - E\frac{\partial Y}{\partial v}}{\sqrt{EG - F^2}},$$

$$Y\frac{\partial Z}{\partial v} - Z\frac{\partial Y}{\partial v} = \frac{F\frac{\partial X}{\partial v} - G\frac{\partial X}{\partial u}}{\sqrt{EG - F^2}},$$

$$Y\frac{\partial Z}{\partial u} - Z\frac{\partial Y}{\partial u} = \frac{E\frac{\partial X}{\partial v} - F\frac{\partial X}{\partial u}}{\sqrt{EG - F^2}},$$

et les formules peuvent se mettre sous la forme :

$$(17)\quad \left\{ \begin{aligned} x'' &= \frac{Z}{EG - F^2}\left[\left(G\frac{\partial \Phi}{\partial u} - F\frac{\partial \Phi}{\partial v}\right)\frac{\partial Y}{\partial u} + \left(E\frac{\partial \Phi}{\partial v} - F\frac{\partial \Phi}{\partial u}\right)\frac{\partial Y}{\partial v}\right], \\ y'' &= -\frac{Z}{EG - F^2}\left[\left(G\frac{\partial \Phi}{\partial u} - F\frac{\partial \Phi}{\partial v}\right)\frac{\partial X}{\partial u} + \left(E\frac{\partial \Phi}{\partial v} - F\frac{\partial \Phi}{\partial u}\right)\frac{\partial X}{\partial v}\right], \\ z'' &= 0, \end{aligned} \right.$$

dont il convient au moins de noter le caractère rationnel.

En introduisant le paramètre différentiel mixte du premier ordre de Beltrami relatif au ds^2 de la représentation sphérique de la congruence :

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

on peut donner aux formules (17), la forme simple et remarquable :

$$(17')\quad \left\{ \begin{aligned} x'' &= Z\Delta(\Phi, Y), \\ y'' &= -Z\Delta(\Phi, X), \\ z'' &= 0. \end{aligned} \right.$$

Les formules (17), où Φ est une fonction arbitraire de u et de v, définissent la congruence à surface moyenne plane la plus générale.

Les équations de l'un quelconque des rayons de la congruence sont :

$$\left\{ \begin{aligned} x &= x'' + \rho X, \\ y &= y'' + \rho Y, \\ z &= \rho Z. \end{aligned} \right.$$

Le paragraphe actuel donne un intérêt tout spécial aux congruences que nous avons introduites au cours de ce travail, auprès des congruences d'Appell généralisées, et des congruences de Guichard à surface moyenne plane.

La connaissance d'une congruence à foyers associés équidistants d'une droite fixe entraîne celle de deux autres congruences remarquables :

Si l'on soumet chaque rayon de cette congruence à une homothétie de centre O (point quelconque de la droite fixe), et de rapport $\operatorname{cotg}^2 u$ (u étant l'angle que fait le rayon considéré avec la droite fixe), on obtient une congruence à surface moyenne plane.

Si l'on soumet chaque rayon à une homothétie de centre O et de rapport $\operatorname{cos\acute{e}c}^2 u$, on obtient une congruence d'Appell généralisée.

Il n'est pas non plus sans intérêt de noter la simplicité avec laquelle la considération d'une congruence d'Appell généralisée et d'une congruence à foyers associés équidistants d'une droite fixe *associée*, a conduit aux équations générales (17) ou (17') définissant la congruence à surface moyenne plane la plus générale.

Revenons à la figure (13), et désignons par J le milieu du segment Om'. Menons par J la parallèle (Δ) aux trois droites (D), (D'), (D''). Lorsque les trois droites (D), (D') et (D'') varient en engendrant trois congruences, à enveloppée moyenne point, à surface moyenne plane et à foyers associés équidistants d'une droite fixe, *associées*, (Δ) engendre une congruence à foyers associés équidistants d'une droite fixe $\Big($la congruence homothétique de celle engendrée par (D') dans l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{2}\Big)$. D'autre part, J, milieu de Om', est aussi le milieu de Im, et les droites (D'') et (D) sont symétriques par rapport à (Δ).

On peut donc énoncer le résultat suivant :

Envisageons une congruence à foyers associés équidistants d'une droite fixe Oz, *et un point* O *pris sur cette droite. Soit* (π) *le plan mené par* O *et un rayon quelconque* (Δ) *de la congruence. Il existe dans le plan* (π) *deux droites variables, parallèles,* symétriques *par rapport à* (Δ), *engendrant, lorsque* (Δ) *varie, l'une une congruence à enveloppée moyenne point, l'autre une congruence à surface moyenne plane.*

Considérons maintenant la droite ($I_1 D_1''$), symétrique de ($I D''$) par rapport à O dans la figure 13, et menons par le milieu J de Om ou de $I_1 m'$; la parallèle (Δ) à (D), (D'), (D''), (D_1''), *fig. 14*.

Lorsque les droites (D), (D'), (D'') engendrent trois congruences associées, (D_1'') engendre une congruence à surface moyenne plane (congruence symétrique de celle engendrée par (D''), par rapport à O). (Δ) engendre une congruence d'Appell généralisée relative au point O $\Big($la congruence homothétique de celle engendrée par (D) dans l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{2}$). Les droites (D_1'') et (D') étant constamment symétriques par rapport à (Δ), on voit que l'on peut énoncer ce résultat (analogue au précédent) :

Envisageons une congruence d'Appell généralisée relative à un certain point O. *Soit* (π) *le plan mené par* O *et un rayon quelconque* (Δ) *de la congruence précédente. Il existe dans le plan* (π) *deux droites variables parallèles,* symétriques *par rapport à* (Δ), *engendrant, lorsque* (Δ) *varie, l'une une congruence à foyers associés équidistants d'une droite fixe, l'autre une congruence à surface moyenne plane.*

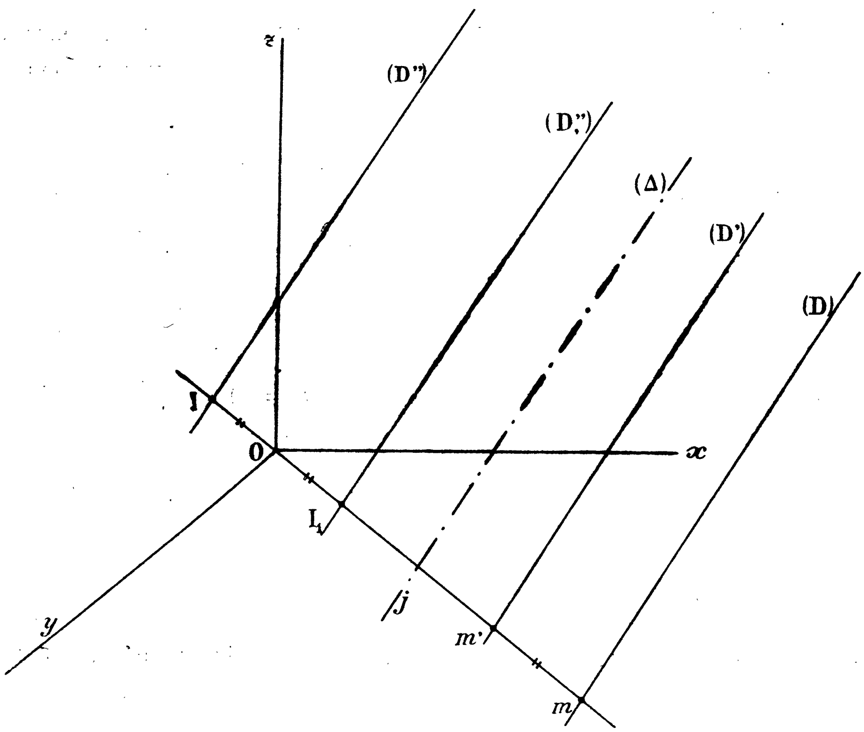

FIG. 14.

[**21**] *Remarques relatives aux congruences de normales appartenant aux trois types de congruences étudiés.* — Les rapprochements géométriques et analytiques entre les trois types de congruences qui viennent d'etre étudiés, rapprochements qui font l'objet de la plupart des développements qui précèdent, se poursuivent, dans une certaine mesure, jusque dans l'étude des congruences de normales appartenant à chacun des types envisagés.

Nous allons montrer tout d'abord, que les problèmes de la recherche des congruences de normales appartenant respectivement aux trois types de congruences ci-dessus, donnent lieu à des équations aux dérivées partielles, différant très peu, et appartenant toutes les trois au type des *équations de Laplace à invariants égaux* pouvant être ramenés à des *équations harmoniques*.

Envisageons d'abord les congruences à surface moyenne plane. Avec la représentation sphérique :

$$\left\{\begin{aligned} X &= \sin u \cos v, \\ Y &= \sin u \sin v, \\ Z &= \cos u, \end{aligned}\right.$$

que nous conserverons dans la suite, la surface moyenne de la congruence à surface moyenne plane la plus générale a, comme on a vu au n° précédent, pour équations :

$$\left\{\begin{aligned} x &= \frac{\partial \Phi}{\partial u} \cos^2 u \sin v + \frac{\partial \Phi}{\partial v} \operatorname{cotg} u \cos v, \\ y &= -\frac{\partial \Phi}{\partial u} \cos^2 u \cos v + \frac{\partial \Phi}{\partial v} \operatorname{cotg} u \sin v, \\ z &= 0. \end{aligned}\right.$$

Exprimons que la congruence est de normales ($f = f'$).

Le calcul de f et de f' donne :

$$f = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} \frac{\cos^2 u}{\sin u} + \frac{\partial \Phi}{\partial u} \cos^3 u,$$

$$f' = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} \cos^2 u \sin u + 2 \frac{\partial \Phi}{\partial u} \sin^2 u \cos u.$$

La fonction Φ devra, pour que la congruence soit de normales, satisfaire à l'équation aux dérivées partielles :

$$\sin^2 u \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} + \operatorname{tg} u (1 - 3 \sin^2 u) \frac{\partial \Phi}{\partial u} = - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2}. \tag{18}$$

Considérons maintenant une congruence d'Appell généralisée, d'équations :

$$\left\{\begin{aligned} x &= -\frac{\partial \Phi}{\partial u} \sin v - \frac{\partial \Phi}{\partial v} \operatorname{cotg} u \cos v, \\ y &= \frac{\partial \Phi}{\partial u} \cos v - \frac{\partial \Phi}{\partial v} \operatorname{cotg} u \sin v, \\ z &= \frac{\partial \Phi}{\partial v}. \end{aligned}\right.$$

Calculons f et f' :

$$f = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} - \frac{\partial \Phi}{\partial u} \cos u \sin u,$$

$$f' = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} \sin^2 u.$$

La congruence sera de normales si Φ satisfait à l'équation [1] :

$$(19) \qquad \sin^2 u \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} + \sin u \cos u \frac{\partial \Phi}{\partial u} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2}.$$

Enfin considérons une congruence à foyers associés équidistants d'une droite fixe, d'équations :

$$\left\{ \begin{aligned} x &= -\frac{\partial \Phi}{\partial u} \sin^2 u \sin v, \\ y &= \frac{\partial \Phi}{\partial u} \sin^2 u \cos v, \\ z &= \frac{\partial \Phi}{\partial v}. \end{aligned} \right.$$

On a ici :

$$f = -\sin u \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} - \sin^2 u \cos u \frac{\partial \Phi}{\partial u},$$

$$f' = \sin^3 u \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} + 2 \sin^2 u \cos u \frac{\partial \Phi}{\partial u}.$$

L'équation à satisfaire est dans ce cas :

$$(20) \qquad \sin^2 u \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} + 3 \sin u \cos u \frac{\partial \Phi}{\partial u} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2}.$$

---

[1] Si l'on écrit l'équation (19) :

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\sin u \frac{\partial \Phi}{\partial u}\right) + \frac{1}{\sin u} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} = 0$$

et si l'on pose :

$$\frac{du}{\sin u} = du_1, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad u_1 = \log \operatorname{tg} \frac{u}{2},$$

l'équation prend la forme :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} = 0.$$

C'est là une équation de Laplace. On sait le rôle que cette dernière équation joue dans l'étude des *systèmes isothermes*. Ainsi se trouvent liés le problème de M. Appell et le problème de physique mathématique qui vient d'être rappelé.

Les équations (18), (19) et (20) sont toutes les trois de la forme :

$$\sin^2 u \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} + N \frac{\partial \Phi}{\partial u} = - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2}$$

N étant dans chaque cas une fonction de la seule variable u.

L'équation ci-dessus est d'un type connu :

$$A \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} + B \frac{\partial \Phi}{\partial u} + C\Phi = A' \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} + B' \frac{\partial \Phi}{\partial v} + C'\Phi$$

où A, B et C sont uniquement fonctions de u, et A', B' et C' uniquement fonctions de v.

Il suffit, comme on sait, de poser (Darboux, *Surfaces*, t. II, p. 207) :

$$u_1 = \int \frac{du}{\sin u} - iv,$$
$$v_1 = \int \frac{du}{\sin u} + iv$$

pour transformer simultanément les trois équatione (18), (19), (20), en des équations de Laplace à invariants égaux, pouvant être ramenées à la forme harmonique.

Nous avons déterminé au n° 17 les congruences de normales appartenant à la fois aux trois types ci-dessus. On obtient des résultats assez intéressants en recherchant les congruences de normales jouissant simplement de deux quelconques des trois propriétés qui font l'objet de la présente étude.

Congruences normales à enveloppée moyenne point et à foyers associés équidistants d'une droite fixe. — Envisageons une congruence à foyers associés équidistants d'une droite fixe que nous prendrons pour axe Oz.

L'équation du plan perpendiculaire au milieu du segment focal est :

$$X\xi + Y\eta + Z\zeta - M = 0$$

(ξ, η, ζ étant les coordonnées courantes).

Avec la représentation sphérique adoptée, on a :

$$X = \sin u \cos v, \qquad Y = \sin u \sin v, \qquad Z = \cos u,$$

$$M = \frac{\partial \Phi}{\partial v} \cos u. \qquad (\text{n}^\circ\ 15)$$

Si l'on exprime que le plan précédent passe par le point fixe de coordonnées α, β, γ, on obtient la condition :

$$\alpha \sin u \cos v + \beta \sin u \sin v + \gamma \cos u - \frac{\partial \Phi}{\partial v} \cos u = 0.$$

On tire de là :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial v} = \operatorname{tg} u (\alpha \cos v + \beta \sin v) + \gamma$$

d'où :

$$\Phi = \operatorname{tg} u (\alpha \sin v - \beta \cos v) + \gamma v + \varphi(u),$$

$\varphi(u)$ étant une fonction arbitraire de u.

En adoptant cette forme pour Φ, on a toutes les congruences à foyers associés équidistants d'une droite fixe, qui sont en même temps des congruences d'Appell généralisées.

Pour avoir celles de ces congruences qui sont de normales, il suffira de déterminer la fonction Φ de façon à ce qu'elle vérifie l'équation (20).

En remplaçant dans l'équation (20) les dérivées par leurs expressions, on trouve après un calcul facile :

$$2(\alpha \sin v - \beta \cos v)(\operatorname{tg}^3 u + \operatorname{tg} u) + \sin^2 u \, \varphi''(u) + 3 \sin u \cos u \, \varphi'(u) = 0.$$

φ étant uniquement fonction de u, on voit que l'on doit avoir :

$$\alpha = \beta = 0.$$

Le problème n'est possible que si le point fixe (α, β, γ) est sur la droite fixe Oz. Mais alors les congruences cherchées ont aussi leur surface moyenne plane (n° 14), et ne sont autres que celles qui ont été étudiées en détail au n° 17.

Notons ce résultat :

Si une congruence à foyers associés équidistants d'une droite fixe, et à enveloppée moyenne point, est normale, elle est à surface moyenne plane.

Congruences normales à surface moyenne plane et à foyers associés équidistants d'une droite fixe. — Envisageons une congruence répondant à la question. Prenons comme axe Oz la droite fixe, et comme origine des coordonnées le point où le plan moyen coupe la droite fixe. En réalité, en procédant ainsi, nous supposons que le plan moyen coupe la droite fixe; mais le cas où il n'en serait pas ainsi, qui se traite très simplement directement, n'infirme pas le résultat auquel nous allons parvenir.

Les équations de la surface moyenne de la congruence sont, comme on sait :

$$\begin{cases} x = -\dfrac{\partial \Phi}{\partial u} \sin^2 u \sin v\,, \\ y = \dfrac{\partial \Phi}{\partial u} \sin^2 u \cos v, \\ z = \dfrac{\partial \Phi}{\partial v}\,. \end{cases}$$

Le plan moyen aura une équation de la forme :

$$A\xi + B\eta + C\zeta = 0\,.$$

Écrivons que la surface moyenne est le plan précédent, nous obtiendrons ainsi une équation aux dérivées partielles du premier ordre à laquelle devra satisfaire la fonction Φ :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} \sin^2 u\,(B \cos v - A \sin v) + C\frac{\partial \Phi}{\partial v} = 0\,.$$

Le système différentiel associé est :

$$\frac{du}{\sin^2 u\,(B \cos v - A \sin v)} = \frac{dv}{C} = \frac{d\Phi}{0}\,.$$

On a les deux combinaisons immédiates :

$$\begin{cases} \Phi = \lambda\,, \\ C \operatorname{cotg} u + B \sin v + A \cos v = \xi \end{cases}$$

et l'on déduit pour Φ la forme :

$$\Phi = F(C \operatorname{cotg} u + B \sin v + A \cos v).$$

Nous écrirons pour simplifier :

$$\Phi = F(\xi)\,.$$

En prenant pour Φ la forme ci-dessus, on aura toutes les congruences à surface moyenne plane et à foyers associés équidistants d'une droite fixe.

Pour avoir celles de ces congruences qui sont de normales, il reste à déterminer la fonction $\Phi = F(\xi)$ de façon à ce qu'elle vérifie l'équation (20).

On a :

$$\frac{\partial F}{\partial u} = -\frac{\partial F}{\partial \xi} \cdot \frac{C}{\sin^2 u},$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} = \frac{C^2}{\sin^4 u} \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} + 2C \frac{\cos u}{\sin^3 u} \frac{\partial F}{\partial \xi},$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial v^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} (B \cos v - A \sin v)^2 - \frac{\partial F}{\partial \xi} (B \sin v + A \cos v)$$

d'où pour déterminer Φ l'équation :

$$\left[\frac{C^2}{\sin^2 u} + (B \cos v - A \sin v)^2\right] \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} = \xi \frac{\partial F}{\partial \xi}.$$

Cette équation montre que le coefficient de $\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2}$ doit être uniquement fonction de ξ ; il faut et il suffit pour cela, comme on s'en rend compte immédiatement, que :

$$A = B = 0.$$

Autrement dit, le plan moyen est le plan xoy.

Le problème n'est possible que si le plan moyen est perpendiculaire à la droite fixe. On sait alors (n° 14) que la congruence a aussi ses couples de foyers associés équidistants de l'intersection de la droite fixe et du plan moyen. Les congruences cherchées ne sont donc autres, ici aussi, que celles qui ont été étudiées au n° 17. On peut dire :

Si une congruence à foyers associés équidistants d'une droite fixe et à surface moyenne plane est normale, c'est une congruence d'Appell.

Ce qui précède permet d'énoncer le résultat suivant :

Si une congruence à foyers associés équidistants d'une droite fixe est normale, il suffit qu'elle possède l'une des propriétés d'avoir ses foyers associés équidistants d'un point fixe ou sa surface moyenne plane, pour posséder également l'autre.

Les deux questions qui viennent d'être étudiées conduisent toutes les deux aux mêmes congruences, celles du n° 17. Il n'en est pas de même de la dernière question qu'il nous reste à examiner, celle de la recherche des congruences d'*Appell* à surface moyenne plane.

L'étude de cette question conduit à des congruences généralisant immédiatement les congruences du n° 17, et dont les surfaces normales jouissent des propriétés essentielles des surfaces (Σ) du n° 18.

Envisageons une congruence d'Appell généralisée définie par les équations rappelées au début de ce n°.

Écrivons que la surface moyenne de cette congruence est le plan $z = h$ (on peut toujours prendre sous cette forme l'équation du plan moyen en choisissant convenablement les axes). On obtient la condition :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial v} = h$$

d'où :

$$\Phi = hv + \varphi(u),$$

φ étant une fonction arbitraire de u.

En prenant cette forme pour Φ, on obtient toutes les congruences d'Appell généralisées à surface moyenne plane.

Le fait que la congruence est normale se traduit par l'équation (19). En remplaçant dans cette équation les dérivées partielles par leurs expressions, on obtient pour déterminer Φ, ou ce qui revient au même φ, l'équation :

$$\sin u \, \varphi''(u) + \cos u \, \varphi'(u) = 0 .$$

On tire de cette équation :

$$\varphi(u) = k \log \left| \operatorname{tg} \frac{u}{2} \right| +$$

et par suite :

$$\Phi = hv + k \log \left| \operatorname{tg} \frac{u}{2} \right| + l ,$$

k et l étant deux constantes.

En adoptant cette expression pour Φ, on aura toutes les congruences d'*Appell* à surface moyenne plane.

Des trois constantes h, k, l, qui interviennent dans l'expression de Φ, la dernière, l, n'a aucune influence sur la congruence dont les équations dépendent simplement des dérivées de Φ ; la variation des constantes k et h proportionnellement l'une à l'autre, introduit simplement une homothétie ; le seul paramètre de forme est $\frac{k}{h}$.

Les équations générales des congruences cherchées, que l'on obtient en remplaçant Φ par l'expression ci-dessus dans les équations définissant la surface moyenne d'une congruence d'Appell généralisée, sont :

$$\begin{cases} x = -k\dfrac{\sin v}{\sin u} - h \operatorname{cotg} u \cos v, \\ y = \quad k\dfrac{\cos v}{\sin u} - h \operatorname{cotg} u \sin v, \\ z = \quad h. \end{cases}$$

Les nappes focales de ces congruences s'obtiennent en remplaçant dans les équations :

$$\begin{cases} x = -k\dfrac{\sin v}{\sin u} - h \operatorname{cotg} u \cos v + \rho \sin u \cos v, \\ y = \quad k\dfrac{\cos v}{\sin u} - h \operatorname{cotg} u \sin v + \rho \sin u \sin v, \\ z = \quad h + \rho \cos u, \end{cases}$$

ρ par les racines de l'équation aux abscisses des foyers qui s'écrit ici puisque la surface de départ est la surface moyenne :

$$(\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2)\rho^2 + eg - ff' = 0.$$

On a :

$$\mathrm{E} = 1, \qquad \mathrm{G} = \sin^2 u, \qquad \mathrm{F} = 0;$$

$$e = h\frac{\cos u}{\sin^2 u}, \qquad f = f' = -k \operatorname{cotg} u, \qquad g = -h \cos u.$$

L'équation ci-dessus s'écrit donc :

$$\sin^2 u \rho^2 - (k^2 + h^2) \operatorname{cotg}^2 u = 0,$$

et donne pour ρ les deux valeurs :

$$\rho = \pm\sqrt{k^2 + h^2}\frac{\cos u}{\sin^2 u}.$$

Les équations des nappes focales sont par suite :

$$\left\{\begin{aligned} x &= -k\frac{\sin v}{\sin u} + \left(-h \pm \sqrt{k^2 + h^2}\right) \operatorname{cotg} u \cos v, \\ y &= k\frac{\cos v}{\sin u} + \left(-h \pm \sqrt{k^2 + h^2}\right) \operatorname{cotg} u \sin v, \\ z &= h \pm \sqrt{k^2 + h^2}\operatorname{cotg}^2 u. \end{aligned}\right.$$

Les signes supérieurs et inférieurs se correspondent devant le radical.

Les équations cartésiennes des deux nappes focales s'obtiennent sans difficulté; on trouve :

$$x^2 + y^2 \pm 2\left(\sqrt{k^2 + h^2} \mp h\right)(z - h) - k^2 = 0$$

(les signes supérieurs et inférieurs se correspondent).

On voit que les deux nappes focales sont constituées par deux paraboloïdes de révolution homofocaux (le foyer commun est l'origine, point par où passent les plans perpendiculaires aux milieux des segments focaux), se coupant dans le plan $z = h$ (plan moyen). On peut donc énoncer le résultat suivant :

*Les congruences d'*APPELL *à surface moyenne plane, sont constituées par les tangentes communes aux différents couples de paraboloïdes de révolution homofocaux.* Le foyer commun est le point par lequel passent les plans perpendiculaires aux milieux des segments focaux, et le plan contenant le cercle d'intersection est le plan moyen.

Les congruences étudiées au n° 17 correspondent à $h = 0$.

Surfaces normales aux rayons des congruences précédentes. — Elles ont pour équations :

$$\left\{\begin{aligned} x &= -k\frac{\sin v}{\sin u} - h \operatorname{cotg} u \cos v + \rho \sin u \cos v, \\ y &= k\frac{\cos v}{\sin u} - h \operatorname{cotg} u \sin v + \rho \sin u \sin v, \\ z &= h + \rho \cos u \end{aligned}\right.$$

où ρ est déterminé par la condition :

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz \equiv 0.$$

Cette condition s'écrit, tous calculs faits :

$$\left(\frac{h}{\sin u} + \frac{\partial \rho}{\partial u}\right) du + \left(-k + \frac{\partial \rho}{\partial v}\right) dv = 0.$$

Elle se décompose en les deux suivantes :

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial u} &= -\frac{h}{\sin u}, \\ \frac{\partial \rho}{\partial v} &= k \end{aligned}\right.$$

d'où l'on tire :

$$\rho = -h \log \left|\operatorname{tg} \frac{u}{2}\right| + kv + d. \qquad (d = \text{c}^{\text{te}} \text{ arbitraire.})$$

En donnant à ρ la valeur précédente, les équations générales des surfaces en question s'écrivent :

$$(21) \quad \left\{\begin{aligned} x &= -k\frac{\sin v}{\sin u} - h \operatorname{cotg} u \cos v + \left(kv - h \log \left|\operatorname{tg}\frac{u}{2}\right| + d\right) \sin u \cos v, \\ y &= k\frac{\cos v}{\sin u} - h \operatorname{cotg} u \sin v + \left(kv - h \log \left|\operatorname{tg}\frac{u}{2}\right| + d\right) \sin u \sin v, \\ z &= h + \left(kv - h \log \left|\operatorname{tg}\frac{u}{2}\right| + d\right) \cos u. \end{aligned}\right.$$

Les surfaces (21) jouissent de propriétés les rapprochant des surfaces (Σ) dont l'étude fait l'objet du n° 18.

Tout d'abord, comme ces dernières, elles sont normales aux rayons d'une congruence rectiligne de révolution.

Il est ensuite aisé de voir, soit analytiquement, soit géométriquement, que, comme ces dernières, elles appartiennent à la catégorie des surfaces sur lesquelles on peut détacher des cloisons d'aire S à contour quelconque, donnant avec Oz comme axe de rotation des volumes tournants V tels que $V = aS$ (a étant une constante).

Pour vérifier analytiquement ce dernier résultat, il suffit d'établir, en se reportant à l'article déjà cité de M. A. Buhl, que le rapport :

$$\frac{py - qx}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

est constant pour tous les points d'une même surface (21).

On a :

$$p = \frac{\sin u \cos v}{\cos u}, \qquad q = \frac{\sin u \sin v}{\cos u};$$

d'où :

$$\frac{py - qx}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} = k \text{ (constante)},$$

Ce qui établit la propriété.

Le fait que les surfaces orthogonales aux rayons des congruences normales à enveloppée moyenne point et à surface moyenne plane jouissent de la propriété $V = aS$, pourrait laisser croire à une relation intime entre cette propriété ($V = aS$) et les deux propriétés ci-dessus de la surface moyenne et de l'enveloppée moyenne. Il est bon de préciser la nature de cette relation.

En réalité, la propriété $V = aS$ est due à ce que le fait, pour une congruence rectiligne normale, d'avoir un point pour enveloppée moyenne et un plan pour surface moyenne, entraîne pour cette même congruence la propriété d'être *de révolution*, et que si une congruence quelconque de révolution est normale, les surfaces orthogonales aux rayons jouissent de la propriété $V = aS$. Cette dernière propriété s'établit géométriquement de la façon la plus simple.

Soit S une cloison appartenant à une surface orthogonale aux rayons d'une congruence normale de révolution d'axe Oz (*fig. 15*); faisons tourner S de $d\alpha$ autour de Oz, S vient en S'. La congruence étant supposée être de révolution, S et S' sont deux cloisons appartenant à deux surfaces parallèles; désignons par dh leur distance. Si dV est le volume engendré par S pendant la rotation $d\alpha$, on a :

$$dV = S \times dh;$$

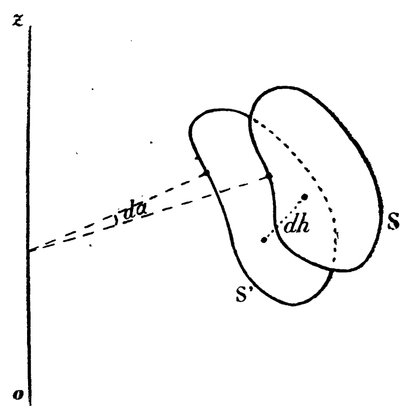

FIG. 15.

pour une rotation finie α :

$$V = \int_0^h S dh = S \times h,$$

h étant la distance des cloisons qui limitent le volume engendré.

h étant indépendant de la cloison S choisie sur la surface orthogonale envisagée, cette surface jouit bien de la propriété de proportionnalité annoncée.

Le résultat précédent conduit au procédé que voici de recherche de nouvelles surfaces jouissant de la propriété $V = aS$:

On se donne la congruence de normales de révolution la plus générale, et on cherche ses surfaces orthogonales.

Observons que les congruences formées par les tangentes communes à deux quadriques homofocales quelconques étant normales, on aura une famille de surfaces telles que $V = aS$, en prenant les surfaces orthogonales aux tangentes communes aux différents couples de quadriques de révolution homofocales.

D'une façon générale, on pourra définir une congruence rectiligne de révolution par une de ses nappes focales (nécessairement de révolution), (Γ), et par une famille de géodésiques (G) de (Γ) correspondant à la même valeur de la constante de Clairaut (superposables par rotation autour de l'axe de (Γ)).

Les tangentes à ces différentes géodésiques déterminent une congruence du type en question. Si (γ) est une trajectoire orthogonale quelconque de la famille de géodésiques (G), l'ensemble simplement infini des développantes des différentes courbes (G) ayant leurs points de rebroussement sur (γ), engendre une surface (Σ) normale aux différents rayons de la congruence, comme il est facile de le constater, et jouissant par conséquent de la propriété $V = aS$.

Il suffira de choisir pour (Γ) des surfaces sur lesquelles on connaîtra une famille de géodésiques (G), pour pouvoir construire une surface telle que $V = aS$.

Pour donner un exemple simple, supposons que (Γ) soit une sphère de rayon R; dans ces conditions, les géodésiques (G) sont des grands cercles tangents à deux parallèles coaxiaux de la sphère, de même rayon r.

Si (Δ) est l'axe des deux parallèles, les cercles (G) se déduisent de l'un d'eux par rotation autour de (Δ). Pour obtenir une trajectoire orthogonale des cercles (G), il suffit, comme on le constate aisément, de prendre la trajectoire d'un point M tournant sur l'un des cercles (G) pendant que ce dernier tourne autour de Δ, le rapport des deux vitesses de rotation étant à chaque instant $\frac{r}{R}$, et les rotations ayant lieu en sens inverse autour de (Δ).

On engendrera donc une surface jouissant de la propriété $V = aS$, au moyen d'une développante d'un cercle (G), tournant autour du centre du cercle, pendant que ce dernier tourne autour de (Δ) (en sens inverse), le rapport des vitesses de rotation étant à chaque instant égal à $\frac{r}{R}$.

Demandons-nous maintenant si *toute* surface (Σ), jouissant de la propriété $V = aS$, peut être définie comme surface orthogonale aux rayons d'une congruence rectiligne normale de révolution.

Considérons à cet effet toutes les surfaces (Σ), dérivant, comme il a été expliqué plus haut, de l'ensemble formé par toutes les surfaces de révolution, en précisant que les familles de géodésiques choisies sur les différentes surfaces de révolution correspondent toutes à la même valeur k de la constante de Clairaut.

Nous allons montrer que le coefficient de proportionnalité a attaché à toutes les surfaces (Σ) considérées est indépendant de la forme des surfaces de révolution génératrices, et ne dépend que de k.

Envisageons pour cela (*fig. 16*) une surface (Σ) déduite d'une surface de révolution quelconque (Γ), d'axe Oz, en prenant les développantes des géodésiques (G) de (Γ) correspondant à la même valeur k de la constante de Clairaut ayant leurs points de rebroussement sur la trajectoire orthogonale (γ).

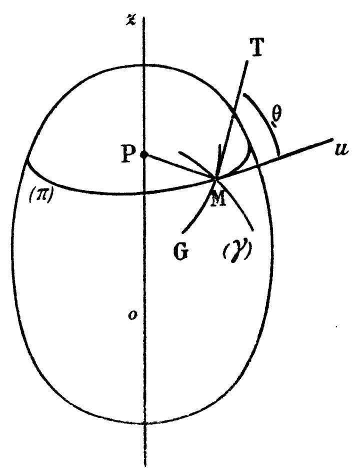

FIG. 16.

Soit M un point de (Σ) situé sur (γ), MT la tangente à la géodésique (G) passant par M, Mu la tangente au parallèle (π) du point M de centre P.

L'élément d'aire $d\sigma$ de (Σ) entourant le point M étant normal à MT, si dV est le volume engendré par $d\sigma$ en tournant autour de Oz, on a, en désignant par θ l'angle de MT avec Mu :

$$dV = 2\pi \mathrm{PM} \cos \theta \, d\sigma \text{ (1)}$$

(1) Cette formule est le point de départ d'une théorie extrêmement élégante des volumes tournants, exposée dans l'opuscule de M. A. Buhl (*Géométrie et Analyse des intégrales doubles*, collection *Scientia*, Gauthier-Villars).

Or, PM $\cos\theta$ est la constante k de Clairaut relative au système de géodésiques (G) envisagé; on peut donc écrire :

$$dV = 2\pi . k . d\sigma$$

ou :

$$V = 2k\pi S.$$

Le coefficient de proportionnalité a attaché aux différentes surfaces (Σ) considérées, ne dépend donc que de la constante de Clairaut, et est absolument indépendant de la forme de la surface de révolution de départ.

Cela posé, envisageons la famille des surfaces (S) telles que :

$$V = aS.$$

Son équation aux dérivées partielles est (A. Buhl, *loc. cit.*) :

$$py - qx = \frac{a}{2\pi}\sqrt{1 + p^2 + q^2}. \tag{22}$$

La famille des surfaces (S) dépend d'une fonction arbitraire. Les surfaces (Σ) déduites des familles de géodésiques correspondant à la valeur $\frac{a}{2\pi}$ de la constante de Clairaut, tracées sur les différentes surfaces de révolution, constituent une famille de surfaces dépendant d'une fonction arbitraire (celle qui définit la surface de révolution) vérifiant l'équation (22). Il faut donc voir en ces surfaces (Σ) l'intégrale générale de l'équation (22).

Ainsi se trouve lié le problème de volumes tournants de M. A. Buhl avec le problème des géodésiques des surfaces de révolution.

Si l'on tient compte de la note de la page (47), on voit qu'il existe deux problèmes, d'aires et de volumes tournants, tout à fait analogues, et liés tous les deux de la façon la plus étroite au problème des geodésiques des surfaces de révolution.

[**22**] *Congruences normales à surface moyenne plane et surfaces minima.* — Revenons sur le théorème de Darboux relatif aux relations qui existent entre les congruences normales à surface moyenne plane et les surfaces minima, indiqué au n° 17.

Conformément à ce théorème, à toute surface minima on peut attacher une infinité de congruences de normales à surface moyenne plane. Réciproquement, une congruence normale étant donnée, il est possible de lui attacher une surface minima, définie à une translation près, la surface minima dont elle dérive par la construction de Darboux.

On voit ainsi apparaître la possibilité de déduire les surfaces minima de l'équation aux dérivées partielles des congruences normales à surface moyenne plane.

Cette façon indirecte d'aborder le problème des surfaces minima serait sans doute loin de se prêter aux élégants développements auxquels se prêtent les procédés classiques; il n'en est pas moins vrai que tout progrès dans la recherche des congruences normales à surface moyenne plane entraînera un progrès correspondant dans la récherche des surfaces minima; que la connaissance *a priori* d'une congruence normale à surface moyenne plane entraînera la connaissance d'une surface minima.

Soit (n° 21) :

$$\sin^2 u \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} + \operatorname{tg} u (1 - 3 \sin^2 u) \frac{\partial \Phi}{\partial u} = - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2}$$

l'équation dont dépend la congruence normale à surface moyenne plane la plus générale.

Supposons connue une solution, $\Phi(u, v)$, de cette équation ; on sait que la congruence correspondante est définie par les équations :

$$\begin{cases} x = \dfrac{\partial \Phi}{\partial u} \cos^2 u \sin v + \dfrac{\partial \Phi}{\partial v} \operatorname{cotg} u \cos v. \\ y = -\dfrac{\partial \Phi}{\partial u} \cos^2 u \cos v + \dfrac{\partial \Phi}{\partial v} \operatorname{cotg} u \sin v, \\ z = 0. \end{cases}$$

Pour avoir la surface minima correspondante, il suffira d'envisager le point du plan xoy, obtenu en faisant tourner autour de l'origine le point (x, y), de 90 degrés, point dont nous désignerons les coordonnées par ξ et η, puis de déterminer la cote ζ du point (ξ, η, ζ) par la condition :

$$d\zeta = p d\xi + q d\eta$$

(p, q, -1, étant les paramètres directeurs du rayon u, v, de la congruence, c'est-à-dire de la normale au point ξ, η, ζ, à la surface minima cherchée).

La surface minima cherchée existant, l'expression $p d\xi + q d\eta$ sera d'ailleurs toujours une différentielle totale exacte.

Pour donner des exemples, envisageons d'abord les congruences d'Appell à surface moyenne plane, congruences que nous avons déterminées, et cherchons les surfaces minima dont elles dérivent par la construction de Darboux.

A la vérité, la famille de surfaces minima que nous allons obtenir ainsi est connue depuis longtemps; mais ce qu'il sera intéressant de noter, ce sera précisément le lien qui existe entre cette famille de surfaces minima et la famille des congruences d'Appell à surface moyenne plane.

Les équations générales des congruences d'Appell à surface moyenne plane sont, comme on a vu, en négligeant une homothétie :

$$\left\{\begin{aligned} x &= -\frac{\sin v}{\sin u} - h \operatorname{cotg} u \cos v, \\ y &= \frac{\cos v}{\sin u} - h \operatorname{cotg} u \sin v, \\ z &= h. \end{aligned}\right.$$

Faisons tourner le point (x, y) dans le plan xoy, de 90 degrés, dans le sens inverse autour de Oz par exemple; nous obtenons pour la projection d'un point de la surface minima dont dérive la congruence envisagée :

$$\xi = \quad y = \frac{\cos v}{\sin u} - h \operatorname{cotg} u \sin v,$$

$$\eta = -x = \frac{\sin v}{\sin u} + h \operatorname{cotg} u \cos v.$$

La cote ζ du point en question est déterminée par :

$$d\zeta = p\,d\xi + q\,d\eta,$$

Soit :

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$

en désignant par x, y, z, au lieu de ξ, η, ζ, les coordonnées d'un point de la surface minima cherchée.

En tenant compte de ce que :

$$p = \frac{\sin u \cos v}{\cos u}, \qquad q = \frac{\sin u \sin v}{\cos u},$$

et en remplaçant dx et dy par leurs expressions en u et v, on trouve, tous calculs faits :

$$dz = -\frac{1}{\sin u}\,du - h\,dv.$$

Le second membre est une différentielle totale exacte, comme il était prévu, et l'on trouve, en intégrant :

$$z = -\log \operatorname{tg} \frac{u}{2} - hv,$$

d'où, pour les surfaces minima cherchées, et en négligeant une translation parallèle à Oz et une symétrie par rapport à xoy, les équations :

$$(\mathrm{H}) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{\cos v}{\sin u} - h \operatorname{cotg} u \sin v, \\ y &= \frac{\sin v}{\sin u} + h \operatorname{cotg} u \cos v, \\ z &= \log \operatorname{tg} \frac{u}{2} + hv. \end{aligned} \right.$$

On a là, à une homothétie près, les équations générales des *hélicoïdes minima*; ainsi :

Les congruences d'Appell à surface moyenne plane dérivent par la construction de Darboux des hélicoïdes minima.

Remarque relative à la construction des hélicoïdes minima. — Considérons les équations :

$$\left\{ \begin{aligned} x &= \frac{\dfrac{\cos v}{\sin u} - h \operatorname{cotg} u \sin v}{1 + h}, \\ y &= \frac{\dfrac{\sin v}{\sin u} + h \operatorname{cotg} u \cos v}{1 + h}, \\ z &= \frac{\log \operatorname{tg} \dfrac{u}{2} + hv}{1 + h}, \end{aligned} \right.$$

Elles définissent elles aussi, à l'homothétie près, la famille des hélicoïdes minima. On voit sur les équations précédentes, que l'on obtient un point quelconque de l'hélicoïde minima correspondant à la valeur h du paramètre, en partageant dans le rapport h le segment joignant deux points homologues sur les deux surfaces

$$x = \frac{\cos v}{\sin u}, \qquad y = \frac{\sin v}{\sin u}, \qquad z = \log \operatorname{tg} \frac{u}{2} \quad \text{(alysseïde)},$$

$$x = -\operatorname{cotg} u \sin v, \qquad y = \operatorname{cotg} u \cos v, \qquad z = v.$$

(hélicoïde gauche à plan directeur ayant même axe que l'alysseïde.)

Les points homologues sur l'alysseïde et sur l'hélicoïde gauche sont ceux ayant la même représentation sphérique; on peut dire :

A l'homothétie près, on obtient la famille des hélicoïdes minima, en établissant une correspondance par plans tangents parallèles entre une alysseïde et un hélicoïde gauche à plan directeur de même axe, et en partageant dans un rapport constant les segments joignant les couples de points correspondants.

Si au lieu de diviser les seconds membres des équations (H) par $1 + h$, comme nous l'avons fait pour mettre en évidence la construction qui vient d'être indiquée, nous les divisons par $\sqrt{1 + h^2}$, nous mettons en évidence, comme il est facile de s'en rendre compte, la famille des hélicoïdes minima applicables les uns sur les autres, permettant de passer, par déformation continue, de l'alysseïde à l'hélicoïde gauche à plan directeur.

Les équations de cette famille d'hélicoïdes sont :

$$\left\{\begin{aligned} x &= \frac{\dfrac{\cos v}{\sin u} - h \operatorname{cotg} u \sin v}{\sqrt{1+h^2}}, \\ y &= \frac{\dfrac{\sin v}{\sin u} + h \operatorname{cotg} u \cos v}{\sqrt{1+h^2}}, \\ z &= \frac{\log \operatorname{tg} \dfrac{u}{2} + hv}{\sqrt{1+h^2}}. \end{aligned}\right.$$

L'élément linéaire de l'un quelconque des hélicoïdes de la famille précédente est :

$$ds^2 = \frac{1}{\sin^4 u}(du^2 + \sin^2 u \, dv^2).$$

Reprenons l'équation :

$$\sin^2 u \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} + \operatorname{tg} u (1 - 3 \sin^2 u) \frac{\partial \Phi}{\partial u} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2}$$

définissant les congruences normales à surface moyenne plane.

Il est aisé de voir que les solutions de la forme :

$$\Phi = (\mathrm{A} \sin mv + \mathrm{B} \cos mv) \,.\, \varphi(u),$$
$$\Phi = (\mathrm{A}\, sh\, mv + \mathrm{B}\, ch\, mv) \,.\, \varphi(u),$$

où A, B, m, sont des constantes, se déterminent par l'intégration d'une équation différentielle ordinaire du second ordre.

Une fois l'intégration de cette équation effectuée, l'application de la méthode précédemment exposée fournira des surfaces minima par la simple quadrature d'une différentielle totale exacte.

Posons par exemple :

$$\Phi = \sin v\, \varphi(u).$$

nous obtenons, pour déterminer φ, l'équation différentielle :

$$\sin^2 u\, \varphi'' + \operatorname{tg} u\,(1 - 3\sin^2 u)\,\varphi' - \varphi = 0.$$

Si l'on remarque que $\varphi_0 = \operatorname{tg} u$ vérifie cette équation, on peut intégrer facilement; on trouve, tous calculs faits :

$$\varphi = \alpha\left(\frac{1}{\sin u} + \operatorname{tg} u \log \operatorname{cotg} \frac{u}{2}\right) + \beta \operatorname{tg} u,$$

et par suite :

$$\Phi(u, v) = \sin v\left[\alpha\left(\frac{1}{\sin u} + \operatorname{tg} u \log \operatorname{cotg} \frac{u}{2}\right) + \beta \operatorname{tg} u\right].$$

Avec cette expression de Φ, les équations définissant la congruence sont :

$$\begin{cases} x = \dfrac{\partial \Phi}{\partial u}\cos^2 u \sin v + \dfrac{\partial \Phi}{\partial v}\operatorname{cotg} u \cos v = \beta + \alpha\left(\dfrac{\cos u \cos 2v}{\sin^2 u} + \log \operatorname{cotg}\dfrac{u}{2}\right), \\ y = -\dfrac{\partial \Phi}{\partial u}\cos^2 u \cos v + \dfrac{\partial \Phi}{\partial v}\operatorname{cotg} u \sin v = \alpha\dfrac{\cos u \sin 2v}{\sin^2 u}, \\ z = 0. \end{cases}$$

La projection d'un point de la surface minima correspondante sur le plan xoy a pour coordonnées :

$$\begin{cases} \xi = y = \alpha\dfrac{\cos u \sin 2v}{\sin^2 u}, \\ \eta = -x = -\beta - \alpha\left(\dfrac{\cos u \cos 2v}{\sin^2 u} + \log \operatorname{cotg}\dfrac{u}{2}\right). \end{cases}$$

La cote ζ du point s'obtient en intégrant :

$$d\zeta = p\,d\xi + q\,d\eta\,;$$

on trouve, en négligeant une translation :

$$\zeta = 2\alpha \frac{\sin v}{\sin u}.$$

d'où, pour la surface minima cherchée, en négligeant une translation, une symétrie et une homothétie :

$$\left\{\begin{aligned} x &= \frac{\cos u \sin 2v}{\sin^2 u}, \\ y &= \frac{\cos u \cos 2v}{\sin^2 u} + \log \operatorname{cotg} \frac{u}{2}, \\ z &= 2\frac{\sin v}{\sin u}. \end{aligned}\right.$$

La forme de la surface précédente est très facile à imaginer. Les trois plans de coordonnées sont des plans de symétrie. L'axe des y est une *droite double* de la surface, qui contient en outre la *portion de* Oz comprise entre les points de cotes $+2$ et -2.

Les parallèles relatifs à Oz, au sens de Minding (courbes $u = c^{te}$), sont des courbes *algébriques* analogues à la courbe de Viviani (intersections de cylindres de révolution d'axes parallèles à Oz situés dans le plan yoz, avec des cylindres paraboliques ayant pour sections droites des paraboles du plan yoz d'axe Oy, les deux cylindres déterminant un même parallèle étant tangents en un point de Oy).

La surface minima que l'on vient de trouver est solution du problème de Schwarz pour une chaîne formée par les deux côtés d'un angle droit yoA (oy est une demi-droite indéfinie et oA un segment de droite), et le plan de l'angle.

Si l'on prend pour Φ les formes générales indiquées plus haut :

$$\Phi = (\mathrm{A} \sin mv + \mathrm{B} \cos mv)\,\varphi(u),$$
$$\Phi = (\mathrm{A}\ sh\,mv + \mathrm{B}\ ch\,mv)\,\varphi(u),$$

on trouve que φ est solution de l'équation :

$$\sin^2 u \frac{d^2\Phi}{du^2} + \operatorname{tg} u\,(1 - 3\sin^2 u)\frac{d\Phi}{du} \mp m^2\varphi = 0$$

(— pour la première forme, + pour la deuxième).

En posant $\operatorname{tg} u = x$, l'équation précédente prend la forme :

$$x^2(1 + x^2)\frac{d^2\Phi}{dx^2} + x\frac{d\Phi}{dx} + k\varphi = 0$$

(où k est une constante quelconque).

On voit qu'il y aurait un certain intérêt à savoir intégrer l'équation différentielle précédente au point de vue de la recherche des surfaces minima.

On rencontre une équation linéaire analogue à l'équation ci-dessus dans la recherche de la surface minima passant par un quadrilatère gauche quelconque (Darboux, *Surfaces*, t. I, p. 534).