Annales de la faculté des sciences de Toulouse

Beniamino Segre

Les systèmes conjugués de 2e espèce en involution ou grilles

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 3e série, tome 20 (1928), p. 1-46
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1928_3_20__1_0>

ANNALES

DE LA

FACULTÉ DES SCIENCES

DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE.

LES SYSTÈMES CONJUGUÉS DE 2^e ESPÈCE EN INVOLUTION OU GRILLES

Par BENIAMINO SEGRE

PREMIÈRE PARTIE

§ I. — Généralités.

[**1**] Considérons un double système de courbes tracées sur une même surface d'un hyperspace, ou, comme nous dirons brièvement, un *réticule*. On peut définir un réticule avec quelques propriétés, et ensuite l'étudier comme tout autre être géométrique [1].

Un exemple bien connu, est celui des ordinaires doubles systèmes conjugués ou *réseaux*. On peut les définir sur une surface comme les caractéristiques d'une équation de LAPLACE à laquelle satisfassent les coordonnées de ses points, et on démontre alors que les tangentes aux courbes d'une des deux familles du système, le long d'une courbe de l'autre famille, forment une développable. Cela revient à dire que les courbes de chaque famille sont les arêtes de rebroussement des développables d'une famille d'une *congruence de droites*, et d'ici découle tout naturellement la classique transformation de LAPLACE [2].

[1] Il y a même, comme nous le verrons dans la suite, des propriétés communes à *tous* les réticules.

[2] Pour l'espace ordinaire, voir G. DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, II^e partie, 2^e édition (1915), livre IV, chap. I ; pour les hyperspaces, voir C. SEGRE, *Su una classe di superficie degl'iperspazi legate colle equazioni lineari alle derivate parziali di 2° ordine*, Atti R. Accad. delle Scienze di Torino, **42** (1907), p. 1047, n^os 15 et 16.

On peut définir des réticules avec des conditions qui soient dans un certain sens moins restrictives que celles qui caractérisent les réseaux : c'est ce qu'a fait M. E. Bompiani (¹), qui, en généralisant une propriété des réseaux, a défini des systèmes qu'il appelle *systèmes conjugués d'espèce* ν, et qui (pour $\nu = 1$) comprennent les réseaux comme cas particulier. L'importance de ces nouveaux réticules est augmentée du fait que chaque surface d'un hyperspace contient toujours quelque système conjugué d'espèce ν, en prenant l'entier ν suffisamment grand.

J'ai repris récemment ces considérations (²), et j'ai donné plusieurs propriétés de ces réticules : au point de vue analytique j'ai montré qu'ils sont les caractéristiques de certaines équations aux dérivées partielles (que j'appelle équations $\mathfrak{L}$ d'espèce ν), et pour celles-ci j'ai développé une transformation, qui (pour $\nu = 1$) comprend la méthode de Laplace comme cas particulier.

Cependant pour $\nu > 1$ se présente un fait nouveau, savoir que les deux familles dont se compose le réticule n'ont pas en général des rôles échangeables : si l'on veut conserver la symétrie, on doit imposer une nouvelle condition et l'on obtient ainsi des réticules (moins généraux que ceux de Bompiani), que je dirai *systèmes conjugués d'espèce* ν EN INVOLUTION. La théorie de ces systèmes se présente sous une forme particulièrement simple lorsque l'entier ν a sa valeur la plus basse $\nu = 2$: je vais la développer, en me bornant à ce cas particulier.

[**2**] Je commence à exposer quelques propriétés générales des réticules.

Si l'on a un réticule tracé sur une surface Σ, considérons deux courbes du réticule qui soient de famille différente, et qui se croisent dans un point P. Pour les points de chacune de ces courbes, traçons les droites qui touchent les courbes de l'autre famille qui y passent. Nous avons ainsi *deux surfaces réglées;* et bien *celles-ci ont un même* E_3 *1-osculateur le long des génératrices qui passent par* P. Cette proposition se démontre tout de suite analytiquement, en prenant sur Σ les courbes du réticule comme courbes coordonnées.

Pour chaque point P d'un réticule on a ainsi un espace, qui sera appelé *le* E_3 *tangent au réticule dans le point* P. Cet E_3 contient, par la définition même, les droites tangentes en P aux deux courbes du réticule qui y passent, c'est-à-dire le plan tangent en P à la surface Σ.

Le E_3 tangent en P au réticule n'est pas bien déterminé, seulement dans le cas

---

(¹) E. Bompiani, *Sistemi coniugati sulle superficie degli iperspazi*, Rendic. Circ. Mat. di Palermo, **46** (1922), p. 91.

(²) B. Segre, *Les systèmes conjugués et autoconjugués d'espèce* ν *et leur transformation de Laplace*, Ann. de l'Éc. Norm. Sup., III^e sér., **44** (1927), p. 153.

J'indiquerai ce Mémoire par la lettre (**S**).

où une des deux surfaces réglées considérées plus haut ait la génératrice relative à P comme génératrice singulière : dans ce cas le même fait se présente aussi pour l'autre surface réglée, et comme E_3 tangent en P au réticule on peut prendre un E_3 quelconque qui touche Σ en P.

Si un réticule est tel que dans chacun de ses points le E_3 tangent relatif est indéterminé, on a que les droites tangentes aux courbes de l'une des deux familles du réticule, dans les points d'une même courbe de l'autre famille, doivent former une développable : cela arrive si le réticule est un réseau, et seulement dans ce cas. Donc :

Un réticule dont les E_3 *tangents sont indéterminés est un réseau; et inversement.*

[3] Si nous considérons un réticule qui ne soit pas un réseau, nous aurons pour chacun de ses points un E_3 tangent; en général on aura ainsi en total ∞^2 E_3 : nous nous proposons de déterminer s'il est possible que les E_3 distincts ne soient pas une double infinité.

Si un réticule admet dans chacun de ses points un E_3 tangent fixe, le réticule même doit évidemment être plongé dans cet E_3.

Supposons maintenant que le réticule ait seulement ∞^1 E_3 tangents distincts. Sur la surface Σ support du réticule nous aurons une famille de ∞^1 courbes γ, le long de chacune desquelles le réticule admet un même E_3 tangent. Chaque courbe γ est donc dans un E_3, qui en plus touche Σ dans tous les points de γ, et donc qui contient γ et la courbe consécutive de ladite famille. Nous avons trois cas à distinguer, suivant que l'espace d'appartenance d'une courbe γ générique est à trois, à deux ou à une seule dimension.

Dans le premier cas *le* E_3 qui contient une courbe γ contient aussi la consécutive, et par conséquent il contient *toutes* les courbes γ. La surface Σ, donc aussi le réticule considéré, est dans un E_3, et le réticule admet un E_3 tangent fixe.

Supposons maintenant que les courbes γ soient planes et non rectilignes. Les ∞^1 plans de ces courbes sont tels que deux consécutifs sont dans un E_3, et donc ils sont *les plans d'une développable*(1). Les courbes de notre réticule d'au moins une famille seront différentes des courbes γ. Considérons une courbe γ *générique* et la courbe consécutive γ'; prenons sur γ un point P *générique*, et traçons par P la courbe de notre réticule de ladite famille, dont soit P' l'intersection (infiniment

(1) Avec cette locution, ici et dans la suite, nous indiquons une ∞^1 de plans d'un des trois types suivants :

1° *plans osculateurs d'une courbe;*
2° *plans tangents d'un cône de première espèce;*
3° ∞^1 *plans passant par une droite fixe.*

voisine de P) avec la courbe γ'. Les droites qui touchent en P, P′ les courbes de l'autre famille qui passent par ces points, doivent être dans le E_3 qui contient les deux courbes γ et γ'. Cet E_3 contient la droite qui touche γ' en P′, mais aucune autre droite qui soit tangente en P′ à Σ, sauf dans le cas où il touche Σ en P′. Donc les courbes du réticule de la dernière famille doivent coïncider avec les courbes γ, avec une seule exception pour le cas où chaque E_3 toucherait Σ non seulement suivant une courbe γ, mais encore suivant la courbe consécutive γ'. Dans ce dernier cas, trois plans consécutifs de ladite développable sont dans un E_3, et nous tombons de nouveau dans le cas où Σ est dans un E_3.

Il ne nous reste plus que le cas où les courbes γ sont rectilignes : dans cette hypothèse, en raisonnant comme tout à l'heure, on voit qu'une des familles de notre réticule doit se composer des *droites* γ, sauf dans le cas où trois droites γ consécutives sont dans un E_3, et donc où Σ soit dans un E_3, ou bien soit une développable (ou en particulier un cône). — Nous avons en conclusion que :

Un réticule qui n'a pas une double infinité de E_3 *tangents distincts, est un réticule d'un des 4 types suivants :*

1° *réticule appartenant à un* E_3*;*

2° *réticule dont une des familles se compose de courbes tracées dans les plans d'une développable ;*

3° *réticule dont une des familles se compose de droites ;*

4° *réticule tracé sur une surface développable.*

On vérifie tout de suite qu'un réticule quelconque de ceux-ci jouit de la propriété énoncée.

§ II. — **Les grilles**.

[**4**] Un système conjugué de 2^e espèce en involution, ou, comme nous dirons aussi pour abréger, *une* GRILLE, est un réticule dont les deux familles ont des rôles symétriques, et qui jouit des propriétés suivantes (**S**) :

1° Les plans osculateurs aux courbes d'une famille dans les points d'une même courbe de l'autre famille, *touchent une même courbe.*

2° Les droites tangentes aux courbes d'une famille dans les points d'une même courbe de l'autre famille forment une surface réglée *dont le premier indice de développabilité est égal à* 2.

3° Si l'on prend les courbes du réticule comme lignes u=const., et v=const., les coordonnées projectives et homogènes (x) de ses points *satisfont à un même système du type suivant :*

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} x_{uuv} = r x_{uu} + s x_{uv} + p x_u + q x_v + m x \\ x_{vvu} = r' x_{vv} + s' x_{uv} + q' x_u + p' x_v + m' x, \end{cases}$$

où les lettres en bas représentent (ici et dans la suite) des dérivations, et les r, r', s, ... sont des fonctions données de u, v (¹).

Chacune de ces propriétés entraîne les deux autres, et est à la fois nécessaire et suffisante pour que le réticule soit une grille.

On voit très aisément que les réticules qui sont dans un espace de dimension inférieure à 5, et les réseaux, sont des cas particuliers de grilles.

Si l'on a un réticule sur une surface Σ, on démontre sans difficulté que les E_3 tangents au réticule dans un point P de Σ et dans les points de Σ infiniment voisins de P, sont en général dans un même E_7 qui contient le E_5 2-osculateur à Σ dans le point P. Et bien les équations (1) montrent que *si le réticule est une grille, lesdits* E_3 *tangents sont tous dans le* E_5 *2-osculateur considéré; et inversement.*

[5] Par définition une grille peut être envisagée de deux façons différentes comme un double système conjugué de 2^e espèce : elle admettra donc (**S**) deux premières transformées de LAPLACE de 2^e espèce, et deux deuxièmes transformées. Les premières n'offrent pas ici beaucoup d'intérêt, car ce sont des doubles systèmes conjugués de 2^e espèce, qui, en général, ne sont pas des grilles. Les deuxièmes transformées, au contraire, sont tout à fait remarquables; en effet nous verrons que :

Les deuxièmes transformées de Laplace de 2^e espèce d'une grille, sont en général des RÉSEAUX; *l'on passe de l'un de ceux-ci à l'autre en appliquant trois fois dans un sens déterminé l'ordinaire transformation de* LAPLACE.

[6] Considérons en attendant une grille, dont soient ψ' les courbes d'une famille, et ψ'' les courbes de l'autre. Pour la proposition 2° du n° 4, les droites tangentes aux courbes ψ' dans les points d'une même courbe ψ'' forment une surface réglée dont les E_3 1-osculateurs sont les E_3 osculateurs d'une même courbe; et pareillement en changeant les deux familles de courbes ψ' et ψ''. En nous rappelant la définition donnée au n° 2, nous pourrons donc dire que :

(¹) Les accents n'indiquent pas des dérivations. — Les (1) sont deux équations $\mathfrak{L}$ de 2^e espèce et du type hyperbolique (**S**).

En nous bornant pour le moment aux réticules qui ont effectivement ∞^2 E_3 *tangents distincts et déterminés, la condition nécessaire et suffisante pour qu'un tel réticule soit une grille, est que ses* E_3 *tangents s'assemblent suivant un double système de* ∞^1 *développables, en correspondance aux diverses courbes du réticule.*

On a évidemment d'après (**S**), que les deux surfaces deuxièmes transformées de LAPLACE d'une grille, sont les lieux des arêtes de rebroussement des deux systèmes de développables, qu'on forme comme nous venons de le dire avec les E_3 tangents de la grille.

[**7**] On voit aisément ce qui arrive dans le cas exclus auparavant, où les E_3 tangents du réticule sont indéterminés, ou bien ne sont pas une double infinité.

Dans le cas d'indétermination, le réticule est *un réseau* (n° 2), *et donc aussi une grille* (n° 4).

Si le réticule n'admet pas ∞^2 E_3 tangents distincts, nous pouvons appliquer les résultats du n° 3, et l'on voit sans peine que *le réticule est encore une grille*, avec une seule exception pour le cas où l'une des deux familles de courbes du réticule se compose *de droites* : en effet, dans ce cas, si l'on veut avoir une grille, il faut que la surface réglée support du réticule, ait *son premier indice de développabilité égal à deux*, c'est-à-dire que les génératrices soient dans les plans d'une développable.

[**8**] En nous basant sur la proposition du n° 6, nous pouvons aisément construire des grilles en ayant recours à une *congruence* de droites. Rappelons qu'on dit que ∞^2 droites d'un hyperspace forment une congruence, lorsqu'elles peuvent s'assembler dans un double système de ∞^1 développables, ou, ce qui revient au même, lorsqu'elles touchent deux surfaces différentes (les surfaces focales de la congruence). Chacune de ces deux surfaces contient un réseau, et les deux réseaux sont transformés de LAPLACE l'un de l'autre. Chaque droite d'une congruence admet deux droites infiniment voisines qui lui sont incidentes. — Nous dirons brièvement *variété* Θ pour indiquer une variété réglée à trois dimensions dont les génératrices sont les droites d'une congruence.

Il est évident qu'une variété Θ est touchée le long de chacune de ses génératrices par l'espace E_3 qui contient cette génératrice et les deux génératrices qui lui sont incidentes; cet E_3 peut aussi se considérer comme l'espace qui joint les deux plans qui touchent les deux surfaces focales de la congruence, dans les deux points focaux du rayon considéré. La dite propriété est *caractéristique*, c'est-à-dire qu'inversement *une* V_3 *telle que ses* E_3 *tangents la touchent suivant des droites, est une variété* Θ [1].

---

[1] Cf. SEGRE, *Preliminari di una teoria delle varietà luoghi di spazi*, Rendic. Circ. Mat. di Palermo, **30**, (1910), p. 87, n° 22.

[9] On a que :

Les ∞^2 E_3 *tangents d'une variété* Θ *peuvent s'assembler suivant un double système de développables*(1). En adoptant une locution introduite par M. BOMPIANI(2), nous dirons que ces E_3 forment une *configuration de* LAPLACE.

Nous démontrerons de plus que *les développables* de la configuration de LAPLACE *s'obtiennent précisément en correspondance aux développables qu'on peut former avec les génératrices de la variété* Θ, *et que les surfaces remplies par leurs arêtes de rebroussement, ne sont autre chose que les deux ultérieures transformées de Laplace des surfaces focales de la congruence qui engendre la variété* Θ.

En effet soient Σ et Σ' ces deux surfaces focales; considérons une surface développable de la congruence Δ, dont en soit L l'arête de rebroussement, situé par exemple sur Σ, et L' la courbe de contact avec l'autre surface Σ'. Soient P et P' les deux points focaux de L et L', relatifs à une génératrice PP' de Δ. L'espace E_3 qui touche Θ le long de PP' est l'espace qui joint les plans π et π' qui touchent Σ et Σ' respectivement en P et P'. — Déplaçons la droite PP', en lui faisant décrire Δ : nous aurons un nombre simplement infini de positions de π, π' et E_3. Un plan π et le plan consécutif se coupent suivant une droite : la droite conjuguée à la tangente en P à L; de même le plan π' correspondant, et le plan consécutif se coupent suivant la droite conjuguée à la tangente en P' à L', c'est-à-dire suivant la droite PP'. On a donc qu'un espace E_3 et le consécutif se coupent suivant un plan : le plan π. Par conséquent les divers E_3 forment une développable; et l'arête de rebroussement de celle-ci (c'est-à-dire de la développable des plans π tangents à Σ le long de L), est une courbe située sur la deuxième transformée de Laplace de Σ (la première étant Σ').

[10] Considérons inversement $\infty^2 E_3$ d'une *configuration de* LAPLACE, c'est-à-dire $\infty^2 E_3$ qui peuvent s'assembler suivant un double système de développables. Puisque chaque E_3 de la configuration appartient à *deux* de ces développables, ainsi il sera coupé suivant des plans par *deux* E_3 de la ∞^2 qui lui sont infiniment voisins; les deux plans qu'on a ainsi en E_3 se couperont dans une droite r de cet espace. Nous dirons r, *la droite caractéristique* de E_3. Nous avons que :

Si l'on a dans un E_n, *avec* $n \geqslant 5$, $\infty^2 E_3$ *d'une configuration de* LAPLACE, *leurs droites caractéristiques sont les droites d'une congruence, dont les développables s'obtiennent précisément en correspondance des développables de la configuration.*

La proposition à démontrer, pour $n = 5$ se déduit par *dualité* de la proposition démontrée au n° 9. Si $n > 5$ on a donc en projetant notre figure d'un E_{n-6} générique

(1) Voir C. SEGRE, Mémoire cité à la note précédente, n° 27 à la fin.

(2) Cfr. E. BOMPIANI, *Sur les configurations de Laplace*, Comptes rendus de l'Académie des Sciences, **156** (1913), p. 603.

sur un E_5 générique, que les ∞^2 droites caractéristiques se projettent suivant les droites d'une congruence, dont les développables s'obtiennent en correspondance des développables de la configuration : cela prouve la proposition à démontrer aussi dans le cas $n > 5$.

Pour $n = 4$, on a que $\infty^2 E_3$ d'un E_4 peuvent toujours s'assembler, et d'une *infinité* de manières, suivant un double système de développables. Cependant, quel que soit le double système choisi, on a toujours les mêmes droites caractéristiques, droites qui constituent l'*enveloppe* des $\infty^2 E_3$ de la configuration de LAPLACE. Cette enveloppe étant touchée par un E_3 le long de chacune de ses génératrices, sera constituée par les droits d'une congruence (n° 8). En correspondance aux développables de celle-ci, on aura un et un seul double système de $\infty^1 E_3$ de la configuration. On voit tout de suite que ce double système n'est autre chose que *le réseau* qui est toujours contenu dans la ∞^2 de E_3 considérée dans E_4(¹). On a donc que pour $n = 4$ la proposition précédente est vraie, seulement si l'on se borne à considérer les systèmes doubles de ce dernier type.

[**11**] Nous dirons qu'un réticule est *conjugué* à une congruence, lorsque les développables de la congruence passent par les courbes du réticule. Cela posé, on a que :

Si un réticule est conjugué à une congruence, l'espace E_3 *tangent au réticule dans un de ses points, est le même que le* E_3 *qui touche la variété* Θ *de la congruence le long de la génératrice qui passe par ce point.*

En effet, en conservant les notations du n° 9, soit λ la courbe du réticule conjugué à la congruence, qui est sur la surface Δ, et soit Π un point de λ, situé sur la génératrice PP'. La droite qui touche en Π la courbe du réticule autre que λ qui y passe, est dans le plan π, qui contient PP' et en plus la génératrice consécutive à PP' sur la développable de la congruence autre que Δ qui contient cette droite. Le E_3 qui touche en Π le réticule, est donc effectivement le E_3 tangent à Θ le long de PP', puisque celui-ci contient deux plans π consécutifs.

Il suffit alors de rapprocher la proposition précédente avec celles des nᵒˢ 6 et 9 pour voir que :

Tout réticule conjugué à une congruence est une grille.

(¹) Le mot *réseau* est ici employé dans la signification qui se déduit *par dualité* de la signification qu'on lui donne usuellement. De même la remarque précédente s'ensuit par dualité de propositions connues. — Il y a un cas de dégénération si la ∞^2 de E_3 se réduit aux E_3 tangents d'une surface développable : dans cette hypothèse les réseaux de ladite ∞^2 sont en nombre infini, et la congruence correspondante se réduit à cette développable comptée ∞^1 fois.

[12] Nous nous proposons de voir s'il est possible d'invertir le théorème précédent. Bornons-nous, pour le moment, à considérer une grille qui appartienne à un E_n avec $n \geqslant 5$, et qui ait ∞^2 E_3 tangents distincts et déterminés, ce qui sera le cas général. Pour le n° 6, ces ∞^2 E_3 se rangeront suivant un double système de développables, en correspondance aux courbes de la grille. En vertu du n° 10, on aura sur chaque E_3 une *droite* caractéristique r; et les ∞^2 droites r qu'on a ainsi engendrent *une congruence*, dont les développables s'obtiennent encore en correspondance aux courbes de la grille. On voit aisément que la droite r caractéristique d'un espace E_3 passe par le point de contact du E_3 avec la grille; il suffit pour cela de faire une projection générique sur un E_4, et de remarquer qu'on a alors en E_4 un système de ∞^2 E_3, qui sont tangents à la surface projection du support de la grille : cette surface sera sur l'enveloppe du dit système, et donc sur chaque E_3 la droite caractéristique passera par le point de contact avec la surface. En conclusion, en tenant aussi présent le premier théorème du n° précédent, nous avons que :

Une grille qui appartienne à un E_n *avec* $n \geqslant 5$, *qui ne soit pas un réseau, et qui ait* ∞^2 E_3 *tangents distincts, est toujours conjuguée à une congruence, et à une seule.*

Avec cela résulte aussi démontré le théorème du n° 5; il suffit en effet de rappeler la remarque finale du n° 6, et la proposition du n° 9.

Remarque. — Comme on le fait d'ordinaire, aussi dans ce qui précède il faut évidemment ne pas considérer comme *congruence*, un ensemble de ∞^2 droites par un point qui soit tout à fait arbitraire; cependant, on ne peut pas exclure *tous* les ensembles de ce type. Dans un E_n *avec* $n \geqslant 5$, une double infinité de droites par un point constitue un cône à trois dimensions du E_n; si les ∞^2 E_3 tangents de ce cône forment une configuration de Laplace, on dira encore que la ∞^2 de droites considérée est une *congruence* (spécialisée), et que le cône est une *variété* Θ spécialisée. Il est clair qu'on tombe sur une telle congruence, lorsqu'on applique le théorème précédent dans le cas où les ∞^2 E_3 tangents de la grille aient un point commun : on dira alors que la grille est *spécialisée*. — On obtient manifestement une variété Θ spécialisée, en projectant un réseau d'un point fixe : il résultera dans la suite qu'on peut les obtenir toutes de cette façon.

[13] Il nous reste maintenant à considérer les grilles que nous avons exclues au n° précédent.

Nous n'insistons pas sur le problème de déterminer les congruences conjuguées à un réseau, problème qui est classique, et *qui admet toujours un nombre infini de* *solutions* [1]. On peut faire la même remarque pour les grilles d'un E_3 (qui sont des réticules quelconques de cet espace) [2].

Considérons maintenant une grille d'un E_4 (c'est-à-dire un réticule quelconque de cet espace), qui ait ∞^2 E_3 tangents distincts et déterminés. Dans cette ∞^2 de E_3 on a généralement un et un seul *réseau* [3] : la grille considérée admet une (et une seule) congruence conjuguée, *seulement* dans le cas où ses courbes correspondent aux développables du réseau (n° 10).

Pour épuiser la question il ne nous reste plus que le cas où la grille ait *seulement* ∞^1 E_3 *tangents distincts :* alors, ou bien elle comprend une famille de courbes (éventuellement rectilignes) dans les plans d'une développable, ou bien elle est tracée sur une surface développable (n^os 3 et 7). Examinons séparément les deux possibilités.

Considérons donc une grille, dont les courbes ψ d'une famille soient *dans les plans d'une développable.* Je dis qu'on peut construire *un nombre infini de congruences* qui lui soient conjuguées. Considérons en effet une courbe ψ quelconque, des courbes de la dite famille, et les courbes $\psi_1, \psi_2, \ldots$ qui lui sont consécutives; soient respectivement $\pi, \pi_1, \pi_2, \ldots$ les plans de ladite développable qui contiennent ces courbes, et $r, r_1, r_2, \ldots$ leurs droites caractéristiques, de façon que π et π_1 se coupent le long de r, etc. — Traçons *n'importe comment* dans le plan π un système ∞^1 de droites : on aura une certaine correspondance entre ψ et r, en disant homologues deux points de ces courbes lorsqu'ils sont sur une de ces droites. On a de même une correspondance entre ψ et ψ_1, en disant homologues deux points de ces courbes, lorsqu'ils sont sur une même courbe de l'autre famille de la grille. Comme produit de ces deux correspondances, on obtient une certaine correspondance entre ψ_1 et r, et en joignant les points homologues on a dans le plan π_1 un système ∞^1 de droites. En procédant ainsi de proche en proche, on obtient ∞^1 droites dans chaque plan de la développable, donc en total ∞^2 droites : on voit aisément qu'elles forment une *congruence*, qui est conjuguée à la grille donnée.

Considérons enfin une grille *tracée sur une surface développable* et voyons si elle

---

(1) Voir G. DARBOUX, *op. cit.* à p. 1 en (2), livre IV, chap. x, n° 420; ou : B. SEGRE, *Una generalizzazione della trasformazione di Kœnigs.* Rendic. R. Acad. dei Lincei, 6e série, **4** $(1926)_2$, pag. 438, n° 1.

(2) En effet, on voit avec des simples considérations géométriques, que le problème de déterminer les congruences conjuguées à un réticule donné dans un E_3, admet toujours une infinité de solutions. Ceci sera confirmé dans la suite (au n° 22), où nous résolvons ce problème analytiquement.

(3) On en a deux ou plus, seulement si les $\infty^2 E_3$ ont un point P fixe commun, ou bien s'ils sont les E_3 tangents d'une surface développable (cf. C. SEGRE, Mém. cité á p. 1 en (2), n° 12). Dans le premier cas, leurs droites caractéristiques passent aussi par P et par les différents points de la grille : on doit admettre qu'elles constituent une *congruence spécialisée* conjuguée à cette grille. — Le deuxième cas, au contraire, ne peut pas se présenter dans l'hypothèse où nous sommes, que la grille ait $\infty^2 E_3$ tangents distincts.

peut être conjuguée à une congruence. Nous pouvons exclure que les génératrices de la développable soient une famille de la grille, puisque ceci serait un cas particulier du précédent[1]. On voit aisément que le E_3 qui touche la grille dans un de ses points P, n'est autre chose que le E_3 osculateur de la développable relatif au point P. Si donc p est une génératrice de la dite développable, les droites de la congruence conjuguée à la grille qui sortent par les différents points P de p, sont dans un même E_3 (n° 11)[2], et en plus (en vertu de l'hypotèse faite) deux consécutives de ces droites n'ont pas de points communs. Prenons un point P' sur la génératrice p' de la développable, qui est consécutive à p : la droite de la congruence qui passe par P', est incidente à deux consécutives des droites précédentes, et par conséquent elle est dans leur E_3. Cela démontre que cet E_3 ne change pas lorsqu'on passe de p à p', ce qui exige que la surface développable considérée *soit dans un* E_3. — Nous pouvons dire en conclusion :

Une grille est toujours *conjuguée à une congruence (au moins), sauf qu'elle soit tracée sur une surface développable, ou bien qu'elle soit dans un* E_4.

Un réticule qui soit conjugué à deux congruences différentes, est en conséquence conjugué à une infinité *de congruences, et il est nécessairement une grille d'un des types suivants* :

1° *les réseaux;*

2° *les réticules dont les courbes d'une famille sont dans les plans d'une développable;*

3° *les réticules appartenant à un* E_3.

§ III. — Applications à l'Analyse.

[**14**] Nous nous proposons maintenant de retrouver par le calcul les plus importants des résultats que nous venons d'obtenir. Les développements analytiques vont d'autre part nous conduire à une méthode, remarquable par sa simplicité, qui peut servir pour intégrer tout système (1) d'équations différentielles, qui soit complètement intégrable[3].

---

[1] En effet, on peut (et d'une infinité de manières) construire une développable dont les plans passent par les génératrices d'une surface développable donnée.

[2] Cet E_3 qui, pour ce qui précède, est le E_3 de la développable relatif à p, peut donc aussi se considérer comme l'espace qui contient ces droites.

[3] J'ai déjà exposée cette méthode dans une Note : *Sur l'intégration d'un certain système d'équations différentielles*, Comptes rendus, **184** (1927), p. 268.

Une méthode beaucoup moins simple et générale est donnée par M. E. Bompiani, dans le Mémoire *Determinazione delle superficie integrali d'un sistema di equazioni a derivate parziali lineari ed omogenee*; Rendic. R. Istit. Lombardo di Scienze e lettere, **52** (1919), Note II, p. 820, § 3.

La simple relation géométrique qui passe entre les deux méthodes, a été donnée par

[**15**] Un système d'équations différentielles :

$$(1)\qquad \begin{cases} x_{uuv} = r x_{uu} + s x_{uv} + p x_u + q x_v + mx \\ x_{vvu} = r' x_{vv} + s' x_{uv} + q' x_u + p' x_v + m' x \end{cases}$$

est changé dans un système semblable, par toute transformation du type

$$(2)\qquad x = \lambda \bar{x},$$

λ étant une fonction arbitraire de u, v; et pareillement pour les transformations de la forme :

$$(3)\qquad \begin{cases} u = u(\bar{u}) \\ v = v(\bar{v}), \end{cases}$$

et pour la transformation :

$$(4)\qquad \begin{cases} u = \bar{v} \\ v = \bar{u}. \end{cases}$$

On connaît (**S**) des invariants des équations (1) par rapport aux transformations précédentes. Nous trouverons plus loin un autre invariant du système (1), savoir :

$$(5)\qquad \mathfrak{J} = r_u + s_v - r'_v - s'_u;$$

on vérifie aisément que $\mathfrak{J}$ ne change pas en effectuant une transformation (2) sur le système (1); qu'il vient seulement multiplié par $\dfrac{du}{d\bar{u}}\dfrac{dv}{d\bar{v}}$ si l'on applique une transformation (3), et enfin qu'il change seulement de signe lorsqu'on applique la (4).

Un système (1) sera dit SPÉCIALISÉ lorsque son invariant $\mathfrak{J}$ est nul.

[**16**] Posons :

$$(6)\qquad y = x_{uv} - r x_u - r' x_v - \alpha x,$$

α étant une fonction, pour le moment arbitraire, de u et v. Dérivons la (6) par rapport à u et par rapport à v, et dans les deux relations ainsi obtenues éliminons x_{uuv}, x_{vvu} et x_{uv} au moyen des (1) et de la (6). Avec cela disparaissent aussi x_{uu} et x_{vv}, et nous obtenons le système suivant :

$$(7)\qquad \begin{cases} y_u = ey + f x_u + g x_v + hx \\ y_v = e'y + f' x_v + g' x_u + h' x, \end{cases}$$

P. Tzitzeica, dans la Note *Sur un certain système d'équations aux dérivées partielles*, Comptes rendus, **184** (1927), p. 582.

La méthode qui suit, peut être employée dans des cas plus étendus : cela a été remarqué par G. Cerf, dans la Note *Sur l'intégration des systèmes en involution d'équations linéaires aux dérivées partielles*, publiée dans le même Recueil à p. 507.

où, pour abréger, nous avons posé :

$$
(8)\qquad
\begin{aligned}
e &= \quad s - r' & e' &= \quad s' - r\\
f &= - r_u + rs - rr' + p - \alpha & f' &= - r'_v + r's' - rr' + p' - \alpha\\
g &= - r'_u + r's - r'^2 + q & g' &= - r_v + rs' - r^2 + q'\\
h &= - \alpha_u + m + \alpha s - \alpha r' & h' &= - \alpha_v + m' + \alpha s' - \alpha r.
\end{aligned}
$$

Il est clair que, inversement, en éliminant y entre les (6), (7) on tombe de nouveau sur le système (1). Au point de vue analytique, ce système est donc équivalent au système formé par les équations (6), (7). Géométriquement les (7) expriment que la droite qui joint les points $x(u, v)$ et $y(u, v)$ décrit une *congruence*; et la (6) montre que les E_3 tangents d'un réticule $x(u, v)$ intégral du système (1), sont précisément les E_3 tangents de la variété Θ remplie par les droites de cette congruence.

Pour les (5), (8), on a :

$$
(9)\qquad \mathfrak{J} = e_v - e'_u,
$$

et donc si le système (1) est spécialisé, on peut éliminer la y et ses dérivées entre les (7) et les équations qu'on obtient de celles-ci en les dérivant une seule fois.

[**17**] Supposons que le système (1) *soit complètement intégrable*; on a alors les conditions d'intégrabilité :

$$
(10)\qquad
\begin{aligned}
-A &\equiv - r_v + rs' - r^2 + q' = 0\\
C &\equiv - r'_u + r's - r'^2 + q = 0\\
B &\equiv \quad s_v - s'_u + rs - r's' + p - p' = 0\\
D &\equiv \quad p_v - q'_u + rp + sq' - r'q' - s'p - m' = 0\\
-E &\equiv \quad p'_u - q_v + r'p' + s'q - rq - sp' - m = 0\\
F &\equiv \quad m_v - m'_u + rm - r'm' + sm' - s'm = 0. \text{ (1)}
\end{aligned}
$$

Les (8), (10), montrent que $g \equiv C$ et $g' \equiv - A$, et donc les deux premières équations (10) expriment que :

$$
g = g' = 0,
$$

---

(1) Précisément on obtient l'équation :

$$
Ax_{uu} + Bx_{uv} + Cx_{vv} + Dx_u + Ex_v + Fx = 0
$$

en éliminant x_{uuvv}, x_{uuv} et x_{vvu} entre les (1) et les deux équations qu'on a des (1) en dérivant la première par rapport à v et la deuxième par rapport à u.

avec quoi le système (7) se simplifie, en se réduisant à :

$$(11)\qquad \begin{cases} y_u = ey + fx_u + hx \\ y_v = e'y + f'x_v + h'x; \end{cases}$$

cela revient à dire que la congruence (xy) considérée au n° précédent est rapportée aux développables, et donc qu'elle est *conjuguée* au réticule $x(u, v)$.

Dérivons la première des équations (11) par rapport à v et la deuxième par rapport à u, et éliminons les y_{uv}, y_u, y_v entre les 4 équations que nous avons ainsi. Nous obtenons, en tenant présente la (9) :

$$(12)\qquad \mathfrak{J}y = ax_{uv} - bx_u - cx_v - dx,$$

où nous avons posé :

$$(13)\qquad \begin{aligned} a &= f' - f \\ b &= f_v - e'f - h' \\ c &= -f'_u + ef' + h \\ d &= h_v - h'_u + eh' - e'h. \end{aligned}$$

Un calcul aisé montre que, en vertu des (8), (10) et (13), l'on a :

$$(14)\qquad a = \mathfrak{J}; \qquad b = r\mathfrak{J}; \qquad c = r'\mathfrak{J}; \qquad d = \alpha\mathfrak{J}.\ ^{(1)}$$

On peut aussi démontrer ces relations sans calculs, en remarquant que, si l'on élimine la y de la (12) en se servant de la (6), on obtient une équation différentielle pour le seul x, laquelle doit être vérifiée en conséquence des (1). Mais, comme cette équation est seulement du 2ᵉ ordre, et d'autre part le système (1) est par hypothèse complètement intégrable, ainsi elle doit être vérifiée *identiquement*. Cela s'exprime précisément avec les (14).

Nous allons distinguer deux cas, suivant que l'invariant $\mathfrak{J}$ est différent de zéro, ou bien est nul.

---

(1) En effet des (8), (13) on déduit :

$$\begin{cases} a - \mathfrak{J} = -B \\ b - r\mathfrak{J} = D + eA - A_u \\ c - r'\mathfrak{J} = E + e'C - C_v \\ d - \alpha\mathfrak{J} = F. \end{cases}$$

[18] Supposons $\mathfrak{J} \neq 0$. Les deux foyers du rayon (xy) de la congruence sont pour les (11) les points :

$$z = y - fx$$
$$z' = y - f'x, \tag{15}$$

et ils sont distincts, puisque pour les (13), (14) on a :

$$f' - f = \mathfrak{J}. \tag{16}$$

Dans ces hypothèses les (14) montrent que l'équation (6) est *identique* à la (12). Pour ce que nous avons dit au n° 16, on obtiendra le système (1) en éliminant y des (11) au moyen de la (12).

Réciproquement, si l'on se donne un système (11) quelconque, avec $f \neq f'$ (1), on en déduit comme au n° 17 une équation (12), avec $a \neq 0$. S'il est $\mathfrak{J} \neq 0$ on peut éliminer la variable y des (11) au moyen de la (12), et on obtient un système de la forme (1). Cela démontre le théorème (du n° 11), que tout réticule conjugué à une congruence est une grille (ou, comme cas particulier, s'il résulte $\mathfrak{J} = 0$, un réseau).

Au point de vue de l'intégration du système (1), ce qui précède nous montre qu'on en obtient toutes et seules les solutions x, en intégrant le système (11). Ce système peut encore se simplifier en disposant convenablement de la fonction α; par exemple on peut annuler f ou f' (*non* tous les deux en vertu de la (16)) : cela revient à prendre y dans un des foyers z ou z'. Prenons donc : $\alpha = -r_u + rs - rr' + p$, ce qui rend $f = 0$; on a deux cas différents, suivant que pour cette valeur de α, h n'est pas nul, ou bien est égal à zéro. — Dans le premier cas la première des équations (11) fournit :

$$x = \frac{1}{h} y_u - \frac{e}{h} y; \tag{17}$$

si nous substituons dans la deuxième équation (11) à x la valeur (17), nous obtenons (puisque $f' \neq 0$) *une équation de* LAPLACE pour le seul y (2). A chaque solution y de cette équation, la (17) fait correspondre une solution x du système (1). — Supposons maintenant que pour ladite valeur de α, h soit nul, ce qui arrive si :

$$r_{uu} - 2r_u(s - r') + r(s - r')^2 - rs_u + rr'_u - p_u + sp - r'p + m = 0 \text{ (3)}.$$

(1) Un tel système exprime géométriquement que la droite (xy) décrit une congruence rapportée aux développables.

(2) Les coefficients de cette équation s'expriment aisément en fonction des coefficients du système (1), en tenant présentes les (8); on peut faire des considérations analogues pour l'*autre* détermination de α, qui rend $f' = 0$.

(3) Cette équation exprime la condition qu'une des surfaces focales de la congruence xy se réduise à une courbe.

Dans ce cas la première des équations (11) est une équation dans le seul y, et, lorsque cette équation est intégrée, on a le x en intégrant l'équation (11) restante. En résumant :

L'intégration d'un système (1) *complètement intégrable et non spécialisé, peut en général se reconduire, et de* DEUX *façons différentes, à l'intégration d'une seule équation de* LAPLACE, *les deux problèmes étant parfaitement équivalents; les deux équations de Laplace (chacune desquelles peut se substituer au système considéré), sont transformées de Laplace l'une de l'autre. — Comme cas particulier, il peut arriver qu'on puisse intégrer le dit système, en intégrant successivement deux équations aux dérivées ordinaires, linéaires et du premier ordre.*

[**19**] Supposons maintenant qu'on ait $\mathfrak{J} = 0$. En vertu de la (16), sur chaque rayon (xy) de la congruence les deux foyers sont confondus. Pour voir mieux comment se passent les choses, prenons pour α la valeur : $\alpha = -r_u + rs - rr' + p$ qui annule f et f', ce qui revient à prendre y dans le foyer unique du rayon (xy). En tenant compte des (14), on voit qu'a présent $b = c = 0$, et donc, pour le (13), $h = h' = 0$. Avec cela le système (11) se réduit à :

$$\left\{\begin{aligned} y_u &= ey \\ y_v &= e'y, \end{aligned}\right. \tag{18}$$

et détermine toujours le y à un facteur constant près, et par des seules quadratures(¹). On obtient alors toutes et seules les solutions x du système (1) en intégrant l'équation :

$$x_{uv} - rx_u - r'x_v + (r_u - rs + rr' - p)\,x - y = 0. \tag{19}$$

L'intégration d'un système (1) *spécialisé et complètement intégrable, peut toujours être reconduite à l'intégration d'une équation de* LAPLACE *non homogène* (19), *avec la préalable integration d'une différentielle exacte :* $d \log y = e\,du + e'\,dv$.

Géométriquement les équations (18) expriment que le point $y(u, v)$ est *fixe;* un réticule intégral du système (1), est tel que ses E_3 tangents ont un point commun, et donc (n° 12) il est une grille *spécialisée.* — Si nous déterminons *une* solution $\lambda(u, v)$ quelconque de l'équation aux dérivées partielles :

$$(\lambda y)_{uv} - r(\lambda y)_u - r'(\lambda y)_v + (r_u - rs + rr' - p)(\lambda y) - y = 0,$$

(¹) Le système (18) est complètement intégrable, puisque, en vertu de la (9), on a : $e_v = e'_u$.

et si nous posons :

$$X = x - \lambda y,$$

nous voyons tout de suite que X satisfait à l'équation de LAPLACE (homogène) :

$$X_{uv} - rX_u - r'X_v + (r_u - rs + rr' - p)X = 0.$$

Inversement, si X satisfait à une telle équation, et si nous posons :

$$x = X + \varphi,$$

φ étant une fonction *donnée* de u, v, qui contient en facteur une constante arbitraire, on voit aisément que x satisfait à un système (1) spécialisé et complètement intégrable. On a donc que :

Une grille spécialisée est toujours perspective à un réseau; et inversement, tout réticule perspectif à un réseau est une grille spécialisée.

Nous retrouvons ainsi les congruences spécialisées : elles s'obtiennent en projectant d'un point fixe les différents points d'un réseau, les développables (propres) provenant des courbes du réseau.

[20] Considérons le système qu'on obtient en joignant aux (1) une équation de LAPLACE :

$$(20) \qquad Ax_{uu} + Bx_{uv} + Cx_{vv} + Dx_u + Fx_v + Gx = 0.$$

Nous supposons qu'il existe des *réticules* qui satisfont à ces équations (1) et (20) : par conséquent les coefficients A, B, C ne seront pas nuls à la fois. Distinguons trois cas, suivant que, aucun, un ou deux des coefficients A et C sont nuls.

Si $AC \neq 0$, considérons les (1) et les deux équations qu'on obtient de la (20) en la dérivant par rapport à u et par rapport à v. On voit alors que les quatre dérivées troisièmes de x par rapport à u, v s'expriment linéairement en fonction des dérivées d'ordre inférieur, qui, à leur tour, sont liées par la (20) : le système considéré aura au plus cinq solutions linéairement indépendantes, et un réticule qui le vérifie appartient à un espace de dimension inférieure à 5.

Si $A \neq 0$, $C = 0$, on peut voir qu'un réticule qui satisfait aux (1), (20) est dans un E_3, ou bien est tracé sur une surface développable, ou enfin, il a un système de courbes ($v =$ const.) dans les plans d'une développable[1].

[1] La démonstration de cette proposition n'est pas difficile, et nous l'omettons par brièveté. Il faut remarquer que la dite proposition est plus précise que celle qu'on peut déduire comme cas particulier d'un théorème de M. BOMPIANI (voir Mém. cité à p. 11 en [3], Note I, p. 616).

Si $A = C = 0$, la (20) montre que tout réticule qui satisfait au (1), (20) est un réseau.

Nous avons pour ce qui précède que :

Une surface qui contient un réseau, ne contient pas d'autre GRILLE, *sauf les surfaces qui ont un système* ∞^1 *de courbes dans les plans d'une développable, et les surfaces de* E_4 *ou* E_3, *lesquelles en ont un nombre infini.*

[21] Considérons un système (1) qui *ne soit pas complètement intégrable*; on peut encore étudier ce cas en partant des considérations du n° 16. Remarquons plutôt que dans cette hypothèse les équations (1) entraînent comme conséquence une équation (20)([1]) : nous sommes donc dans les conditions du numéro précédent, et les résultats obtenus là, nous renseignent sur les intégrales du système proposé. Au point de vue géométrique, ce cas est parfaitement le même que celui que nous avons traité au n° 13.

On serait aussi reconduit aux hypothèses du numéro précédent, si l'on voulait déterminer les réticules $x = x(u, v)$ qui sont conjugués à *deux congruences différentes*, donc qui satisfont à deux systèmes différents de la forme (1) : on a ainsi aisément par cette voie, les résultats obtenus sur ce sujet-là au n° 13.

[22] Nous nous proposons maintenant de *déterminer toutes les congruences conjuguées à un réticule donné, appartenant à* E_3. — Soient

$$x_i = x_i(u, v) \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, 3, 4. \tag{21}$$

les équations du réticule, dont les courbes des deux familles s'obtiennent donc des (21) pour $u =$ const. et pour $v =$ const. Nous excluons le cas bien connu où le réticule serait un réseau([2]). Il sera par conséquent :

$$(x\ x_u\ x_v\ x_{uv}) \neq 0, \tag{22}$$

en indiquant par $(x\ x_u\ x_v\ x_{uv})$ le déterminant dont les lignes s'obtiennent successivement en substituant dans x, x_u, x_v, x_{uv} à x les fonctions x_i pour $i = 1, 2, 3, 4$.

En tenant compte de ce que nous avons dit plus haut, et spécialement du n° 18, on voit que ledit problème revient à ceci : *déterminer les systèmes d'équations* (1) *auxquels satisfassent les fonctions* (21), *et qui soient complètement intégrables.* Si l'on

---

([1]) Voir la note ([1]) à p. 13.
([2]) Voir *op. cit.* à p. 10, en ([1]).

connaît un tel système (1), on obtient une congruence conjuguée au réticule donné, en prenant les droites qui joignent le point x au point y donné par :

$$y = x_{uv} - r x_u - r' x_v; \text{ (}^1\text{)}$$

et toutes les congruences cherchées peuvent s'obtenir de cette façon.

Si nous exprimons que les (21) satisfont à la première des équations (1) nous obtenons 4 équations linéaires et non homogènes dans les 5 coefficients inconnus r, s, p, q, m; un de ceux-ci pourra être pris arbitrairement : précisément, en vertu de la (22), lesdites équations *déterminent* les s, p, q, m en fonction de r, avec les formules :

$$(23) \qquad \left\{ \begin{aligned} s &= \sigma r + \sigma_1 \\ p &= \pi r + \pi_1 \\ q &= \chi r + \chi_1 \\ m &= \mu r + \mu_1 \end{aligned} \right.$$

dans lesquelles $\sigma, \sigma_1, \pi, \ldots$ s'expriment aisément au moyen des fonctions (21); par exemple on a :

$$\sigma = -\frac{(x_{uu} x_u x_v x)}{(x_{uv} x_u x_v x)}$$

$$\sigma_1 = \frac{(x_{uuv} x_u x_v x)}{(x_{uv} x_u x_v x)}$$

$$\pi = -\frac{(x_{uv} x_{uu} x_v x)}{(x_{uv} x_u x_v x)} \quad \text{etc.,}$$

en employant des notations semblables à celles que nous avons employées dans la (22).

En raisonnant pareillement pour la deuxième équation (1), nous exprimerons s', p', q', m' en fonction de r', avec les formules :

$$(23') \qquad \left\{ \begin{aligned} s' &= \sigma' r' + \sigma'_1 \\ p' &= \pi' r' + \pi'_1 \\ q' &= \chi' r' + \chi'_1 \\ m' &= \mu' r' + \mu'_1 \end{aligned} \right.$$

analogues aux (23).

Nous devons maintenant exprimer que le système (1) est complètement intégrable, c'est-à-dire que les équations (10) sont vérifiées. En tenant compte des (23)

(1) Avec ceci nous entendons naturellement signifier, que les coordonnées du point y s'obtiennent successivement en substituant dans cette expression à x, les fonctions x_i (pour $i = 1, 2, 3, 4$) fournies par les (21).

et (23'), cela porte à écrire *6* équations dans les deux fonctions inconnues r et r'; et bien, je dis que de ces *6* équations les 4 dernières sont *des conséquences* des deux premières. En effet supposons que les 10 coefficients du système (1) satisfassent aux équations (23), (23') et aux deux premières équations (10). On a en attendant que les 4 fonctions (21) sont des solutions du système (1). Pour ce que nous avons dit au n° 17, ces 4 fonctions satisferont en conséquence à l'équation considérée à p. 13 dans la note ([1]), équation qui se réduit à :

$$\mathrm{B}x_{uv} + \mathrm{D}x_u + \mathrm{E}x_v + \mathrm{F}x = 0,$$

puisque, en vertu des deux premières équations (10), on a $\mathrm{A} = \mathrm{C} = 0$. Il suffit alors de se rappeler l'inégalité (22), pour conclure qu'on doit avoir $\mathrm{B} = \mathrm{D} = \mathrm{E} = \mathrm{F} = 0$, c'est-à-dire que les 4 dernières équations (10) sont aussi vérifiées.

En vertu des (23), (23'), les deux premières équations (10) fournissent :

$$\begin{aligned} r_v &= -r^2 + r(\sigma' r' + \sigma'_1) + \chi' r' + \chi'_1 \\ r'_u &= -r'^2 + r'(\sigma r + \sigma_1) + \chi r + \chi_1, \end{aligned}$$

et *il suffira d'intégrer ce système de deux équations différentielles dans deux fonctions inconnues* (r *et* r'), *pour connaître* TOUTES *les congruences conjuguées au réticule donné*([1]). Le problème que nous nous sommes posé admet donc toujours une infinité de solutions.

Remarquons le cas où le réticule donné se compose des deux familles d'*asymptotiques* d'une surface : dans cette hypothèse le système précédent se simplifie, puisque l'on a :

$$\sigma = \sigma' = 0.$$

([1]) On peut résoudre la première équation par rapport à r' et substituer dans la deuxième : on obtient alors pour r une équation aux dérivées partielles du 2e ordre (non linéaire).

DEUXIÈME PARTIE

§ IV. — Le cas parabolique.

[23] Si l'on a sur une surface une simple infinité de courbes, on peut les considérer comme constituant un réticule dont les deux familles de courbes soient confondues. C'est pour nous rappeler ce point de vue, que nous appellerons parfois une ∞^1 de courbes, avec le nom de *réticule parabolique*. Lorsqu'il est possible de faire confusion, nous appliquerons par contre l'adjectif *hyperbolique* à un réticule dont les deux familles de courbes sont distinctes.

Si l'on envisage un réticule parabolique comme un cas limite d'un réticule hyperbolique, on peut se demander ce que deviennent à la limite les propositions démontrées dans la Partie précédente de ce travail. Nous allons montrer qu'elles subsistent encore pour le cas parabolique, pourvu qu'on introduise des locutions convenables.

Considérons sur une surface Σ un réticule parabolique; si P est un point de la surface, le plan osculateur en P à la courbe du réticule qui y passe, et le plan tangent en P à Σ, ont commune la tangente en P à cette courbe, et par conséquent sont dans un E_3 : ce sera par définition *le* E_3 *tangent en* P *au réticule.*

Comme cas limite des réseaux, nous avons les systèmes autoconjugués de 1^re^ espèce, savoir les systèmes d'asymtotiques (S) : un tel système sera aussi nommé *réseau parabolique.*

Cela posé, on voit avec des raisonnements tout à fait semblables à ceux qui ont été faits dans la 1^re^ Partie, que les théorèmes des n^os^ 2 et 3 sont encore vrais dans le cas parabolique.

[24] Nous appellerons *congruence parabolique* un système de ∞^2 droites qui sont les tangentes des courbes d'un réseau parabolique. Il y a des cas particuliers où la surface focale dégénère : entre autres remarquons les *congruences spécialisées* qu'on obtient en projectant d'un point fixe les différents points d'un réseau parabolique.

Les ∞^2 droites d'une congruence parabolique constituent une *variété* Θ *parabolique* : celle-ci admet le long de chaque génératrice un E_3 tangent fixe; et les ∞^2 E_3 qu'on a ainsi peuvent s'assembler, et d'*une seule* façon, suivant les E_3 de ∞^1 développables. Ces deux propriétés *caractérisent* ces variétés Θ.

On dira qu'un réticule parabolique est *conjugué* à une congruence parabolique, lorsque les surfaces développables de la congruence passent par les courbes du réticule.

Une double infinité d'espaces sera dite constituer *une configuration de* LAPLACE *parabolique,* lorsque ses espaces sont les espaces osculateurs des courbes d'un réseau parabolique, etc., etc. (1).

[**25**] Un système conjugué de 2e espèce dont les deux familles sont confondues, est un système *autoconjugué* de 2e espèce (**S**). Avec les locutions introduites tout à

---

(1) Remarquons la propriété suivante, qui peut être utile dans l'étude des congruences paraboliques, et (plus généralement) des configurations de LAPLACE paraboliques.

Si l'on a dans E_n *un réseau parabolique, les* ∞^1 *développables qui ont pour arêtes de rebroussement les différentes courbes du réseau, constituent généralement une figure qui correspond à soi-même par dualité.*

Cette proposition, bien connue pour le cas $n = 3$, se démontre aisément comme il suit pour n quelconque. Soient $x_i(u, v)$ (pour $i = 0, 1, \ldots, n$) les coordonnées d'un point P du réseau, et $\xi_i(u, v)$ les coordonnées de l'hyperplan osculateur en P à la courbe du réseau qui y passe. Nous aurons :

$$\sum_{i=0}^{n} x_i \xi_i = 0,$$

relation que nous convenons d'écrire plus simplement : $(x, \xi) = 0$. Supposons qu'on ait les courbes du réseau pour $v = \text{const.}$; les x_i satisferont à une équation de la forme :

$$(*) \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = a \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + b \frac{\partial x}{\partial u} + cx$$

et on aura pour les ξ_i les relations :

$$\left(\frac{\partial^r x}{\partial u^r}, \xi\right) = 0 \quad \text{pour} \quad r = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Avec des dérivations, et en tenant présente la (*), on tire d'ici que

$$\lambda = \xi, \qquad \lambda = \frac{\partial \xi}{\partial u}, \qquad \lambda = \frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2}, \qquad \lambda = \frac{\partial \xi}{\partial v},$$

sont 4 solutions du système :

$$\left(\frac{\partial^s x}{\partial u^s}, \lambda\right) = 0 \quad \text{pour} \quad s = 0, 1, \ldots, n-3;$$

elles seront donc dépendantes entre elles, ce qui prouve que les ξ_i vérifient une même équation de la forme :

$$\frac{\partial \xi}{\partial v} = \alpha \frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} + \beta \frac{\partial \xi}{\partial u} + \gamma \xi.$$

l'heure, nous pouvons dire qu'un tel système est un réticule parabolique, pour lequel les E_3 tangents s'assemblent suivant des développables, en correspondance aux courbes du réticule; les arêtes de rebroussement de ces développables constituent généralement un autre système autoconjugué de 2e espèce, le deuxième transformé de LAPLACE du système considéré (**S**).

Un système autoconjugué de 2e espèce ne peut pas, en général, être envisagé comme une grille dont les deux familles de courbes soient confondues(1); si nous considérons un tel système, soit P un quelconque de ses points, et P′ le point homologue du deuxième transformé de LAPLACE : le E_3 tangent en P au réticule considéré, passe par P′, en y osculant une courbe du système deuxième transformé. Et bien nous dirons qu'un réticule parabolique est une *grille parabolique* lorsque :

1° il se compose des courbes d'un *système autoconjugué de 2e espèce*;

2° pour chacun de ses points P, le E_3 tangent au réticule résulte aussi *tangent* dans le point P′ homologue du système deuxième transformé, à la *surface* support de ce système.

Au point de vue analytique, la première condition se traduit par le fait que les coordonnées $x = x(u, v)$ du point P satisfont à une même équation $\mathcal{L}$ de 2e espèce du type parabolique :

$$(24_1) \qquad x_{uuu} = s x_{uu} + r x_{uv} + p x_u + q x_v + m x.$$

Les coordonnées x' du point P′ sont données par la formule :

$$x' = x_{uu} - r x_v + \beta x_u + \gamma x,$$

où, pour le moment, il est inutile de préciser les valeurs des fonctions β et γ. Cela posé, la deuxième condition se traduit par le fait que les coordonnées x du point P satisfont à une même équation de la forme :

$$(24_2) \qquad x_{uuv} = s' x_{uu} + r' x_{uv} + r x_{vv} + p' x_u + q' x_v + m' x.$$

Les développements analytiques qui suivent (n° 28), démontrent que cette équation traduit *complètement* la dernière condition.

[**26**] Nous pouvons démontrer que :

En général une grille parabolique admet une deuxième transformée de LAPLACE *qui est un* RÉSEAU *parabolique; les tangentes aux courbes de ce réseau forment une congruence parabolique, qui est* CONJUGUÉE *à la grille considérée. Réciproquement, tout réticule parabolique conjugué à une congruence parabolique est une* GRILLE *parabolique.*

---

1. Pour se convaincre de cela, il suffit de se rappeler la proposition finale du n° 4 : avec la définition qui suit *la partie directe* de ce théorème est encore vraie dans le cas parabolique.

On peut parvenir à cette proposition avec des raisonnements géométriques, analogues à ceux que nous avons employés dans la Première Partie de ce travail. Nous nous bornerons cette fois aux développements analytiques, qui en plus nous montreront que :

L'intégration d'un système (24_1), (24_2) *complètement intégrable, peut en général se reconduire à l'intégration d'une seule équation de* Laplace *du type parabolique*(1).

[27] Un système d'équations différentielles :

$$(25)\qquad \begin{cases} x_{uuu} = s\,x_{uu} + r\,x_{uv} + p\,x_u + q\,x_v + m\,x \\ x_{uuv} = s'\,x_{uu} + r'\,x_{uv} + t'\,x_{vv} + p'\,x_u + q'\,x_v + m'\,x \end{cases}$$

est changé dans un système semblable, par toute transformation du type :

$$(26)\qquad x = \lambda \bar{x},$$

λ étant une fonction arbitraire de u, v; et pareillement pour les transformations de la forme :

$$(27)\qquad \begin{cases} u = u(\bar{u}, \bar{v}) \\ v = v(\bar{v}). \end{cases}$$

Les coefficients r, t' et leur différence

$$\mathfrak{J} = r - t'.$$

sont des invariants du système (25), puisqu'on voit aisément qu'ils ne changent pas en appliquant une transformation (26), tandis qu'ils sont seulement multipliés par $\left(\frac{du}{d\bar{u}}\right)^2 \Big/ \frac{dv}{d\bar{v}}$ lorsqu'on effectue une transformation (27)(2).

---

(1) Ce résultat et ceux qui ont été obtenus dans la Première Partie pour le système (1), sont d'autant plus remarquables si l'on les rapproche de la proposition suivante. — Considérons un système de deux équations aux dérivées partielles du 3e ordre, linéaires et homogènes, l'inconnue étant fonction de deux variables u, v. Supposons : 1° que ce système soit *complètement intégrable*; 2° que le système qu'on obtient de celui-ci en lui adjoignant les 4 équations qu'on obtient de ses deux équations en les dérivant une fois par rapport à u et une fois par rapport à v, se compose de *6 équations linéairement dépendantes.* Dans ces hypothèses le système considéré peut toujours au moyen d'un convenable changement des variables u et v, *se ramener à un système complètement intégrable de la forme* (1) *ou de la forme* (24_1) et (24_2). Cette proposition est substantiellement démontrée dans le travail de M. Bompiani, cité à p. 11 en (3), Note II, § 2.

(2) On a par suite un *invariant absolu* en considérant le rapport $r : t'$; nous revenons plus loin sur cette observation.

Particulièrement intéressant est le cas (auquel nous nous bornerons pour le moment) dans lequel l'invariant $\mathfrak{J}$ est nul. Nous avons alors le système considéré au n° précédent :

$$(24)\qquad \begin{cases} x_{uuu} = s x_{uu} + r x_{uv} + p x_u + q x_v + m x \\ x_{uuv} = s' x_{uu} + r' x_{uv} + r x_{vv} + p' x_u + q' x_v + m' x. \end{cases}$$

Il admet, comme on vérifie aisément, l'invariant :

$$(28)\qquad \mathfrak{J} = s_v - r'_v - s'_u.$$

Un système (24) sera dit SPÉCIALISÉ lorsque son invariant $\mathfrak{J}$ est nul.

[**28**] Pour intégrer le système (24), posons :

$$(29)\qquad y = x_{uu} - r' x_u - r x_v - \alpha x,$$

α étant une fonction, pour le moment arbitraire, de u, v. Dérivons la (29) par rapport à u et par rapport à v, et dans les deux relations ainsi obtenues éliminons x_{uuu}, x_{uuv} et x_{uu} au moyen des (24) et de la (29). Avec cela disparaissent aussi x_{uv} et x_{vv}, et nous obtenons le système suivant :

$$(30)\qquad \begin{cases} y_u = e y + f x_u + g x_v + h x \\ y_v = e' y + f' x_v + g' x_u + h' x, \end{cases}$$

où, pour abréger, nous avons posé :

$$(31)\qquad \begin{cases} e = s - r' & e' = s' \\ f = -r'_u + r's - r'^2 + p - \alpha & f' = -r_v + rs' + q' - \alpha \\ g = -r_u + rs - rr' + q & g' = -r'_v + r's' + p' \\ h = -\alpha_u + m + \alpha s - \alpha r' & h' = -\alpha_v + m' + \alpha s'. \end{cases}$$

On obtient toutes et seules les solutions x du système (24), en déterminant les solutions x, y communes aux équations (29) et (30).

Remarquons que, en vertu des (28), (31), l'on a :

$$(32)\qquad \mathfrak{J} = e_v - e'_u.$$

[**29**] Supposons que le système (21) *soit complètement intégrable*. En tenant compte des conditions d'intégrabilité (que nous n'écrivons pas par brièveté) on voit, pour les (31), que dans cette hypothèse l'on a :

$$f - f' = 0; \qquad g = 0.$$

Avec cela le système (30) se simplifie; on peut le simplifier davantage, en choisissant pour α la détermination :

$$(33) \qquad \alpha = -r_v + rs' + q'$$

qui, pour les (31), annule en même temps f et f'. Nous avons ainsi le système :

$$(34) \qquad \begin{cases} y_u = ey + hx \\ y_v = e'y + g'x_u + h'x. \end{cases}$$

Dérivons la première de ces équations par rapport à v, la deuxième par rapport à u, et entre les deux équations ainsi obtenues et les (34) éliminons y_u, y_v et y_{uv}. En tenant présente la (32) nous obtenons :

$$(35) \qquad \mathfrak{J}y = g'x_{uu} - \beta x_u - hx_v - \gamma x,$$

où nous avons posé :

$$(36) \qquad \beta = -g'_u + eg' - h'; \qquad \gamma = h_v - h'_u + eh' - e'h.$$

En vertu de l'intégrabilité du système (24), on aura :

$$(37) \qquad g' = \mathfrak{J}; \qquad \beta = r'\mathfrak{J}; \qquad h = r\mathfrak{J}; \qquad \gamma = \alpha\mathfrak{J}.$$

Nous allons maintenant distinguer deux cas, suivant que l'invariant $\mathfrak{J}$ est différent de zéro, ou bien est nul.

[30] S'il est $\mathfrak{J} \neq 0$, les équations (37) expriment que l'équation (29) coïncide avec la (35), et donc qu'elle est *une conséquence* du système (34), qui n'est qu'une forme particulière du système (30). Pour ce que nous avons dit au n° 28, il suffira d'intégrer le système (34), pour avoir la solution x la plus générale du système (24).

Si h n'est pas nul, la première des équations (34) peut s'écrire :

$$(38) \qquad x = \frac{1}{h}y_u - \frac{e}{h}y,$$

et en substituant cette expression de x dans l'équation (34) restante, on obtient pour le seul y *une équation de* Laplace du type parabolique. Cette équation intégrée, la (38) nous fera connaître le x. — Dans ces hypothèses la proposition finale du n° 26 est donc vraie, et l'on peut conclure de même pour l'autre proposition de ce numéro, en ajoutant quelques simples considérations géométriques.

Si maintenant nous supposons $h = 0$ la première des équations (34) ne contient plus le x; et l'on intègre le système (24) en intégrant successivement *les deux équations différentielles* (34), *aux dérivées ordinaires linéaires du 1er ordre*[1].

[31] Si le système (24) est spécialisé, c'est-à-dire si $\mathfrak{J} = 0$, on a en vertu des (37), (36) :

$$g' = h = h' = 0,$$

et les (34) se réduisent à :

$$y_u = ey$$
$$y_v = e'y.$$

Ces équations (pour la (32)) déterminent y à un facteur constant près. On a alors le x en intégrant *l'équation de* Laplace *non homogène* (29), dans laquelle α est la fonction de u et v fournie par la (33).

[32] Considérons maintenant le système qu'on obtient en ajoutant aux (24) *une équation de* Laplace :

(39) $$\mathrm{A}x_{uu} + \mathrm{B}x_{uv} + \mathrm{C}x_{vv} + \mathrm{D}x_u + \mathrm{E}x_v + \mathrm{F}x = 0,$$

et supposons qu'il admette *une surface* Σ *intégrale*; les coefficients A, B, C ne pourront pas être nuls à la fois.

Si C n'est pas nul on voit que la surface Σ *est plongée dans un* E_4 : en effet dans cette hypothèse les (24), (39) montrent que les 4 dérivées troisièmes de x s'expriment linéairement en fonction des dérivées d'ordre inférieur, dérivées qui sont liées par la (39).

Ce cas exclus, supposons donc $\mathrm{C} = 0$. Si l'on a en même temps $\mathrm{B} = 0$, la (39) montre que sur Σ les courbes $v = \text{const.}$ forment *un réseau parabolique*. — Si $\mathrm{B} \neq 0$ la (39) fournit une équation de la forme :

(39′) $$x_{uv} = ax_{uu} + bx_u + cx_v + dx.$$

---

[1] Le fait en question se présente si :

$$r_{uv} - r_u s' - r s'_u - q'_u + (r' - s)(r_v - rs' - q') + m = 0.$$

On voit tout de suite la signification géométrique de cette condition. En général le point y défini par la (29) dans laquelle on donne à α la valeur (33), décrit la surface focale de la congruence parabolique (xy); si $h = 0$ on voit pour les (34) que ce point y ne décrit plus qu'une courbe, et ladite congruence renferme ∞^1 faisceaux de droites, dont les centres sont sur cette courbe, et les plans touchent cette courbe dans ces points.

Je dis que l'on doit avoir :

$$r = q = 0. \tag{40}$$

En effet, s'il était $r \neq 0$, en dérivant la (39') par rapport à u, et en y chassant x_{uuu} et x_{uuv} au moyen des (24), on aurait pour le x une équation de LAPLACE qui contiendrait un terme en x_{vv}, ce qui nous conduirait au cas exclus. De même s'il était $r = 0$, $q \neq 0$, on parviendrait au même résultat en éliminant x_{uuu}, x_{uuv} et x_{uuuv} entre les (24) et les équations qu'on obtient de celles-ci en dérivant la première par rapport à v et la seconde par rapport à u. — La première des équations (24), en tenant compte des (40), se réduit à :

$$x_{uuu} = s x_{uu} + p x_u + m x,$$

et montre donc que les courbes $v =$ const. de Σ sont planes[1]. Puisque en vertu de la (39') ces courbes doivent faire partie d'un système conjugué, ainsi leurs plans seront les plans d'une développable.

Nous avons en conclusion que *si la surface Σ n'est pas dans un E_4 ou dans un E_3, les courbes $v =$ const. sont dans les plans d'une développable, ou forment un réseau parabolique*; ce résultat est analogue à celui du n° 20.

Les considérations précédentes s'appliquent en particulier à toute surface Σ qui soit intégrale d'*un système* (24) NON *complètement intégrable* : en effet, dans cette hypothèse les équations (24) portent nécessairement comme conséquence une équation de la forme (39).

[**33**] Nous sommes encore dans les conditions du n° précédent si nous considérons un réticule parabolique *qui soit conjugué à deux congruences différentes :* en effet il satisfera à deux systèmes différents du type (24), et par suite aussi à une équation (39). A l'exclusion du cas où le réticule appartiendrait à un E_4, on voit que dans les cas énumérés ci-dessus on a effectivement non seulement deux, mais *un nombre infini de congruences conjuguées*.

Si le réticule est dans un E_3, on détermine ces congruences avec un procédé analogue à celui que nous avons tenu au n° 22 pour le cas hyperbolique.

Si le réticule se compose de ∞^1 courbes dans les plans d'une développable, on a un nombre infini de congruences paraboliques conjuguées, en considérant dans chaque plan de la développable un faisceau de droites, dont le centre soit un point quelconque de la droite caractéristique de ce plan.

---

[1] Nous pouvons exclure qu'elles soient rectilignes, puisque dans ce cas elles formeraient un réseau parabolique.

Si le réticule x est un réseau parabolique, en soit :

$$x_{uu} = ax_u + bx_v + cx$$

l'équation. Formons l'équation adjointe :

$$\gamma_{uu} + a\gamma_u + b\gamma_v - (c - a_u - b_v)\gamma = 0;$$

si γ en est une solution quelconque qui ne soit pas nulle, le système :

$$\begin{aligned} y_u &= \gamma b x \\ y_v &= \gamma x_u - (\gamma a + \gamma_u)x \end{aligned}$$

est complètement intégrable, et détermine en conséquence le y : la droite (x, y) décrit une congruence parabolique conjuguée au réseau x donné, dont la surface focale est celle décrite par le point y (1). On voit aisément que, en correspondance aux diverses solutions γ de l'équation adjointe, *on obtient ainsi toutes les congruences conjuguées au réseau donné.*

(1) L'équation de Laplace à laquelle satisfait y est :

$$y_{uu} = \left[a + \frac{\partial}{\partial u}\log(\gamma^2 b)\right] y_u + b y_v.$$

TROISIÈME PARTIE

§ V. — **Les surfaces Ψ.**

[**34**] Nous appellerons *surface* Ψ, toute surface sur laquelle on puisse tracer une grille; suivant que celle-ci sera hyperbolique ou parabolique, la surface Ψ sera dite du type hyperbolique ou du type parabolique.

Une surface Ψ est telle que les coordonnées projectives et homogènes de ses points satisfont à un même système de deux équations aux dérivées partielles, linéaires et homogènes du troisième ordre; nous dirons brièvement que la surface vérifie ce système. Il est clair qu'en appliquant une transformation omographique à coefficients constants, la surface transformée satisfait au même système. Avec un choix convenable des variables indépendantes, ledit système peut se réduire à la forme (1) ou à la forme (24), suivant que la surface Ψ est du type hyperbolique ou parabolique.

En vertu des n^{os} 11, 12, 13 on a aisément que :

Si l'on considère une variété Θ (hyperbolique ou parabolique), toute surface de la variété qui ne soit pas composée avec les génératrices rectilignes, est une surface Ψ (du type hyperbolique ou parabolique); réciproquement toute surface Ψ appartient à (au moins) une variété Θ.

Nous nous proposons maintenant de déterminer les grilles qui peuvent éventuellement exister sur une surface donnée, donc en particulier de voir si une surface donnée est une surface Ψ, et de déterminer les variétés Θ auxquelles elle appartient.

[**35**] Une surface qui contient un réseau est une surface Ψ. Considérons une surface Ψ qui ne contient pas de réseaux : elle ne satisfera à aucune équation de Laplace, et vérifiera deux équations aux dérivées partielles, linéaires et homogènes du troisième ordre; si ladite surface vérifie *seulement deux* équations linéairement indépendantes de ce type, elle sera dite *normale*. Cependant elle peut aussi en vérifier *trois* ou *quatre* : dans le premier cas la surface est dans un E_6, ou bien elle a

∞^1 courbes dans les E_3 d'une développable [1]; dans le deuxième cas la surface est dans un E_5 [2].

Les surfaces Ψ jouissent de la remarquable propriété suivante :

Les E_5 *2-osculateurs d'une surface* Ψ *qui n'ait pas de réseaux, forment une configuration de* LAPLACE.

En effet si nous sommes dans le cas hyperbolique, les équations (1) montrent aisément que le E_5 2-osculateur à la surface dans un de ses points x (c'est-à-dire le E_5 qui joint les points $x, x_u, x_v, x_{uu}, x_{uv}, x_{vv}$), décrit une développable lorsque le point x décrit sur la surface une courbe $u = const.$ ou une courbe $v = const.$ — Si nous sommes dans le cas parabolique, il suffit de se rapporter aux développements analytiques des n^os^ 28 et suivants : on a que le point y là défini avec les (29), (33), décrit généralement un réseau parabolique; et il est aisé de voir que les E_5 osculateurs des courbes de ce réseau, sont précisément les E_5 2-osculateurs de la surface donnée, lieu du point x. La proposition énoncée est ainsi démontrée aussi dans ce cas, en vertu du théorème démontré dans la note de p. 22.

On peut démontrer inversement que :

Si l'on a dans un hyperspace une surface dont les E_5 *2-osculateurs forment une configuration de* LAPLACE, *ses espaces 3-osculateurs sont au plus de dimension 7 : s'ils ont précisément la dimension 7, la surface considérée est une surface* Ψ *normale.*

Le cas où les espaces 3-osculateurs aient une dimension inférieure à 7, sera traité dans la suite.

[36] Une surface qui contient un réseau, ne contient pas d'autre grille, sauf les cas envisagés au n° 20 : examinons-les brièvement, en nous rappelant les résultats du n° 13.

Si la surface est *développable,* tous ses réticules sont des grilles : mais si la surface n'est pas dans un E_3, seulement les réticules qui ont *les génératrices comme une des familles,* admettent des congruences conjuguées.

---

[1] Cfr. E. BOMPIANI, Mém. cité à p. 11 en [3], Note I, pag. 610, chap. II.

Avec la locution E_3 d'une développable, j'entends ∞^1 E_3 dont chacun est coupé suivant un plan par le E_3 consécutif; donc ∞^1 E_3 d'un des types suivants :

1° E_3 *osculateurs d'une courbe.*
2° E_3 *osculateurs d'un cône de 1^re^ espèce.*
3° E_3 *tangents d'un cône de 2^e^ espèce.*
4° ∞^1 E_3 *passant par un plan fixe.*

[2] En effet, dans cette hypothèse les quatre dérivées troisièmes de x (et donc aussi *toutes* les dérivées successives) s'expriment en fonction des dérivées d'ordre inférieur.

Si la surface a *une famille de courbes dans les plans d'une développable*, cette famille avec une autre famille *quelconque* de courbes de la surface, constitue une grille, qui admet un nombre infini de congruences conjuguées.

Si la surface *est dans un* E_3, *tous* ses réticules sont des grilles, dont chacune admet un nombre infini de congruences conjuguées (n° 22).

Si enfin la surface *appartient à un* E_4, on a encore que tous ses réticules sont des grilles; mais *seulement une partie d'entre eux* admet une congruence conjuguée. En correspondance à ces derniers réticules on a un nombre infini de variétés Θ qui passent par la surface donnée; ces variétés Θ dépendent d'une fonction arbitraire, et ne sont autre chose que les enveloppes de ∞^2 E_3 tangents à la surface[1].

[37] Passons maintenant au cas des *surfaces* Ψ *normales.*

Une telle surfaee vérifie un système de la forme :

$$(41)\qquad \begin{aligned} a_0 x_{uuu} + a_1 x_{uuv} + a_2 x_{vvu} + a_3 x_{vvv} &= E(2) \quad [2] \\ a'_0 x_{uuu} + a'_1 x_{uuv} + a'_2 x_{vvu} + a'_3 x_{vvv} &= E(2); \end{aligned}$$

ce système (41) doit être complètement intégrable[3], et on doit pouvoir avec un changement de variables le ramener à la forme (1) ou à la forme (24).

Les (41) montrent en attendant, que pour chaque point de notre surface l'espace 3-osculateur est un E_7. Considérons une surface quelconque qui jouisse de cette propriété, c'est-à-dire qui satisfasse à un système quelconque de la forme (41); dans un point $x(u, v)$ de cette surface, les groupes de trois droites qui sont tangentes aux sections hyperplanes qui ont dans ce point un point triple, sont toutes *harmoniques* ou *apolaires* aux deux groupes suivants de trois directions :

$$(42)\qquad \begin{cases} a_0 dv^3 - a_1 dv^2 du + a_2 du^2 dv - a_3 du^3 = 0 \\ a'_0 dv^3 - a'_1 dv^2 du + a'_2 du^2 dv - a'_3 du^3 = 0, \quad [4] \end{cases}$$

donc aussi à tous les groupes de la g^1_3 qu'ils déterminent[5]. Cette g^1_3 sera nommée la g^1_3 *caractéristique* relative au point considéré. Cela posé nous allons voir que :

---

(1) Suivant que la ∞^2 de E_3 tangents est hyperbolique ou parabolique, la grille qu'on obtient sur la surface est de même hyperbolique ou parabolique.

Remarquons que sur chaque surface de E_4 on a ainsi des systèmes particuliers de courbes, dont l'étude offrirait peut-être quelque intérêt.

(2) Avec cette notation $E(2)$, nous indiquons une expression (dont les coefficients ne nous intéressent pas) linéaire et homogène par rapport à la fonction x et à ses dérivées premières et secondes.

(3) En effet la surface ne doit pas vérifier aucune équation de LAPLACE, ni aucune équation du troisième ordre qui soit linéairement indépendante des (41).

(4) Cfr. C. SEGRE, Mém. cité à p. 1 en (2), n° 28.

(5) Les deux groupes (42) déterminent *effectivement* une g^1_3, puisque s'ils n'étaient pas distincts, les équations (41) porteraient comme conséquence une équation de LAPLACE.

Une surface Ψ *normale est une surface qui ne contient pas de réseaux, et qui jouit des propriétés caractéristiques suivantes :*

1° *Dans chacun de ses points l'espace 3-osculateur est un* E_7.

2° *Dans chaque point la* g^1_3 *caractéristique admet deux éléments* FIXES (*distincts ou infiniment voisins*) (¹).

On démontre aisément que ces conditions sont *nécessaires* afin que la surface soit une surface Ψ normale. — Supposons-les remplies. La première condition exprime en attendant que la surface vérifie un système (41). La deuxième exprime alors que les deux équations (42) ont deux racines communes (²) :

$$\frac{dv}{du} = \alpha(u, v); \qquad \frac{dv}{du} = \beta(u, v).$$

Si $\alpha \neq \beta$, prenons comme nouvelles variables (au lieu des u, v) deux intégrales de ces équations différentielles; avec cela le système (41) sera remplacé par un système analogue. Nous aurons de même des équations analogues aux (42), et celles-ci doivent maintenant être vérifiées par $du = 0$ et par $dv = 0$; cela exige que dans le nouveau système (41) ne paraissent pas x_{uuu} et x_{vvv}, donc que ce système puisse se réduire à la forme :

$$(43) \qquad \left\{ \begin{aligned} x_{uuv} &= r x_{uu} + s x_{uv} + t x_{vv} + p x_u + q x_v + m x \\ x_{vvu} &= t' x_{uu} + s' x_{uv} + r' x_{vv} + q' x_u + p' x_v + m' x. \end{aligned} \right.$$

Dérivons la première de ces équations par rapport à v, la deuxième par rapport à u, et entre les deux équations ainsi obtenues et les (43) éliminons x_{uuv}, x_{vvu} et x_{uuvv}. Nous aurons une équation de la forme :

$$(44) \qquad t x_{vvv} - t' x_{uuu} = E_2.$$

Cette équation doit être vérifiée identiquement, puisque pour la 1^re hypothèse dans chaque point x de la surface l'espace 3-osculateur est un E_7 (et non un E_6), et la (44) est linéairement indépendante des (43). On aura donc en particulier :

$$t = t' = 0,$$

ce qui montre que le système (43) est bien du type (1).

(¹) Cela revient à dire que les groupes de la g^1_3 *apolaire* (c'est-à-dire les groupes des trois tangentes aux sections hyperplanes avec point triple) *ont un même couple Hessien*, c'est-à-dire ladite g^1_3, ou bien est *cyclique*, ou bien a deux éléments *fixes* infiniment voisins.

(²) Elle se traduit donc analytiquement par deux relations (qu'il serait aisé d'écrire) entre les 8 coefficients a_0, a'_0, a_1, ..., a'_3. Remarquons encore que les deux équations (42) ne peuvent pas avoir en commun les *trois* racines (cfr. la note (⁵) à la page précédente).

Si, au contraire, les deux équations (42) ont en commun une racine double

$$\frac{dv}{du} = \alpha(u, v), \tag{45}$$

on voit d'une façon analogue que le système (41) peut se réduire à la forme (24); pour cela il suffit de prendre comme nouvelle variable v une intégrale de l'équation (45).

De ce qui précède résulte en plus que :

Une surface Ψ normale contient une et une seule grille.

Dans un point de la surface, les tangentes aux courbes de la grille qui y passent, sont précisément les éléments *fixes* de la g^1_3 caractéristique.

[**38**] Considérons maintenant une surface Σ qui ne contient aucun réseau, et qui satisfasse à trois (et trois seulement) équations linéairement indépendantes du troisième ordre. Dans chaque point de Σ, les sections hyperplanes avec point triple auront un groupe fixe de trois tangentes : la g^2_3 des groupes apolaires sera *la g^2_3 caractéristique.*

Pour ce que nous avons dit au n° précédent, si sur Σ existe une grille, le couple des droites qui touchent dans un point P de Σ les courbes de la grille qui y passent, sont communes aux ∞^1 groupes d'une g^1_3 de ladite g^2_3. Le couple considéré est donc *associé* par rapport à la g^2_3 caractéristique, c'est-à-dire que ses deux éléments présentent *une seule* condition aux groupes de cette g^2_3.

Sur Σ nous aurons trois familles ∞^1 de courbes, qui dans chaque point ont pour tangente une des trois tangentes aux sections hyperplanes avec point triple. Prenons les courbes d'une de ces familles comme lignes $v = const.$: on voit aisément que la surface Σ satisfait à une équation de la forme :

$$x_{uuu} = \mathrm{F}(2)$$

ce qui démontre que les courbes $v = const.$ sont des quasi-asymptotiques $\gamma_{2,3}$ (1). Nous avons donc sur la surface Σ *trois familles ∞^1 de quasi-asymtotiques* $\gamma_{2,3}$.

---

(1) Les courbes *quasi-asymptotiques* ont été introduites par M. E. Bompiani; voir *Alcune proprietà proiettivo-differenziali dei sistemi di rette negli iperspazi,* Rendic. Circ. Mat. di Palermo, **37** (1914), p. 305, n° 1.

[**39**] Examinons d'abord le cas où *ces trois familles sont confondues* dans un seul système ∞^1 : cela revient à dire que dans chaque point de Σ la g^2_3 caractéristique admet comme élément *fixe* la tangente à la quasi-asymptotique $\gamma_{2,3}$ qui y passe. Prenons ces quasi-asymptotiques comme lignes $v = const.$: on voit alors que le système de trois équations différentielles auquel satisfait Σ, peut être mis sous la forme :

$$(46) \qquad \begin{cases} x_{uuu} = \mathrm{E}(2) \\ x_{uuv} = \mathrm{E}(2) \\ x_{vvu} = \mathrm{E}(2). \end{cases}$$

Ces équations montrent que le long d'une courbe $v = const.$ la surface Σ admet un E_5 2-osculateur *fixe*. Puisque Σ n'est pas dans un E_5, d'ici il s'ensuit aisément que *les courbes* $\gamma_{2,3}$ ($v = const.$) *sont dans les* E_3 *d'une développable* (1). Inversement si la surface Σ a les courbes $v = const.$ dans les E_3 d'une développable, elle vérifie un système (46), et les trois familles de $\gamma_{2,3}$ sont confondues dans la famille des courbes $v = const.$

Considérons une telle surface Σ; elle satisfera aux équations (46) : dans les deux premières de ces équations ne figure pas le terme en x_{vv}, puisque dans le cas contraire on déduirait des (46) avec des dérivations, une quatrième équation du troisième ordre, dans laquelle figurerait x_{vvv}. Lesdites équations s'écrivent donc plus explicitement comme il suit :

$$(47) \qquad \begin{cases} x_{uuu} = s x_{uu} + r x_{uv} + p x_u + q x_v + m x \\ x_{uuv} = s' x_{uu} + r' x_{uv} + p' x_u + q' x_v + m' x \\ x_{vvu} = s'' x_{uu} + r'' x_{uv} + t x_{vv} + p'' x_u + q'' x_v + m'' x. \end{cases}$$

Nous voulons voir si sur Σ existent des grilles. Dans les hypothèses actuelles la g^2_3 caractéristique admet comme direction *fixe* celle de la $\gamma_{2,3}$: pour ce que nous avons dit au n° précédent, ceci démontre que si sur Σ l'on a une grille, l'une des deux familles de la grille doit se composer des quasi-asymptotiques $\gamma_{2,3}$.

Cela posé faisons un changement de variables :

$$\bar{u} = \bar{u}(u, v)$$
$$\bar{v} = v$$

qui conserve les courbes $v = const.$; le système (47) sera transformé dans un système analogue : si nous écrivons que le nouveau coefficient s'' est nul, nous

(1) Il suffit en effet de remarquer que chacun des ∞^1 espaces 2-osculateurs de Σ contient *trois* $\gamma_{2,3}$ consécutives, etc., etc.

obtenons une équation différentielle du 2ᵉ ordre (qu'ici est inutile d'écrire) pour la fonction $\bar{u}(u, v)$, et il est clair qu'on a *toutes* les grilles hyperboliques de Σ, en unissant aux courbes $v = const.$ une quelconque des familles de courbes $\bar{u} = const.$ intégrales de cette équation. La surface Σ contient donc *une infinité de grilles hyperboliques* (¹).

On peut aisément construire une infinité de variétés Θ qui passent par Σ. Considérons en effet les courbes $\gamma_{2,3}$ de Σ, qui sont dans les E_3 d'une développable Δ, et soit (γ) une d'entre elles. Dans le E_3 de cette courbe construisons *arbitrairement* une surface développable qui la contienne; cette surface coupera le plan caractéristique de E_3, suivant une courbe (C). Soit E'_3 l'espace de Δ qui est consécutif à E_3, et (γ') la courbe de Σ qu'il contient. Dans E'_3 nous avons les deux courbes (γ') et (C), et nous pouvons faire passer par elles une nouvelle surface développable. On peut procéder de la même façon pour les E_3 suivants de Δ, et l'on obtient ainsi une surface développable dans chaque E_3 de Δ. Ces ∞^1 surfaces réglées, forment une variété Θ qui passe par Σ.

[**40**] Pour compléter l'étude commencée au n° 38, nous devons maintenant envisager le cas où, sur la surface Σ, les trois familles de quasi-asymptotiques ne sont pas confondues dans une seule famille. La surface Σ n'aura pas ∞^1 courbes dans les E_3 d'une développable, donc elle sera dans un E_6 (n° 35). Inversement *une surface générique de* E_6 *est dans les conditions voulues.*

Dans chaque point P de Σ, la g^2_3 caractéristique n'a pas d'éléments fixes; pour une propriété connue on aura toujours *un et un seul* couple de droites tangentes à Σ en P, qui est *associé* par rapport à cette g^2_3 : il sera nommé le couple des *directions caractéristiques*, et les courbes de Σ qui dans chacun de leurs points ont pour tangente une telle direction seront appelées les *courbes caractéristiques* de Σ.

Nous considérons deux cas, suivant que l'on a sur Σ trois ou seulement deux familles distinctes de quasi-asymptotique $\gamma_{2,3}$.

Si Σ a trois familles distinctes de $\gamma_{2,3}$, elle a deux familles distinctes de courbes caractéristiques : dans un point quelconque de Σ, chacune des deux directions caractéristiques forme un faisceau équianharmonique avec les tangents aux trois $\gamma_{2,3}$

(¹) On peut voir que Σ *ne contient pas de grilles paraboliques*. En effet, si sur Σ on a une grille parabolique, ses courbes pour ce qui précède doivent être les lignes $v = const.$ — En comparant les deux premières équations (47) avec les (24), nous avons que si cette hypothèse est vérifiée, on doit avoir $r = 0$. La première des équations (47) montre alors que les E_3 tangents du réticule parabolique $v = \text{const.}$ coïncident avec les E_3 osculateurs de ces courbes, donc ils sont seulement une simple infinité : le théorème du n° 3 appliqué dans le cas parabolique, nous montre que la surface Σ contient un réseau, ce que nous avons exclu par hypothèse.

qui y passent. Si nous prenons les courbes caractéristiques des deux familles, comme courbes coordonnées $u = const.$ et $v = const.$, on voit comme au n° 37, que la surface Σ satisfait à un système de la forme (43). Pour ce qui précède, et en se basant sur ces équations, on démontre aisément que :

Une surface générique de E_6, *contient trois familles* ∞^1 *de quasi-asymptotiques* $\gamma_{2,3}$, *et un double système de caractéristiques. Ces courbes constituent deux réticules paraboliques qui jouissent de la propriété suivante :*

les E_3 *tangents à l'un d'eux le long d'une même courbe de l'autre, touchent une même courbe*(1).

Si l'on prend les courbes caractéristiques comme courbes coordonnées, la surface satisfait à un système de trois équations différentielles de la forme (43) *et* (44).

Si Σ a seulement deux familles distinctes de $\gamma_{2,3}$, l'une d'elles devra figurer comptée deux fois : celle-ci comptée encore deux fois, constituera aussi les deux familles de caractéristiques de Σ. Dans ce cas on peut faire des considérations analogues aux précédentes.

Pour ce que nous avons dit au n° 37, on a aisément que :

Une surface générique de E_6 *ne contient pas de grilles. Une surface de* E_6 *qui n'ait pas des réseaux, ni un système* ∞^1 *de courbes dans les* E_3 *d'une développable, contient* AU PLUS UNE GRILLE, *qui alors constitue son système de caractéristiques*(2).

Si l'on tient compte des équations (43) et de ce qui précède, on peut démontrer que :

Une surface Σ *générique de* E_6, *admet* ∞^2 *hyperplans* 2 — *osculateurs, dont la première enveloppe est constituée par* ∞^2 E_3; *ces* E_3 *ne sont autre chose que les* E_3 *tangents du réticule caractéristique de* Σ.

Si Σ *est une surface* Ψ, *les* ∞^2 E_3 *considérés forment une* CONFIGURATION DE LAPLACE, *et réciproquement.*

Cela démontre que :

Si l'on a dans E_6 *une surface* Ψ, *ses espaces* 2 — *osculateurs forment généralement une double infinité d'hyperplans de* E_6, *qui contient un* RÉSEAU(3), *en correspondance aux courbes de la grille de la surface donnée.*

---

(1) Les courbes que l'on a ainsi en partant des deux familles de caractéristiques, constitueront deux nouvelles surfaces invariantivement liées à la surface donnée. On a de la sorte une remarquable *transformation des surfaces de* E_6, qui présente quelque analogie avec la transformation de LAPLACE.

(2) Il serait aisé de caractériser les surfaces de E_6 qui contiennent une grille, par rapport à la transformation dont nous avons parlé à la note précédente.

(3) Ici on doit faire la même remarque que nous avons faite en note à page 8.

Cette proposition vient compléter les résultats du n° 35. — Au point de vue analytique elle démontre que :

Si l'on considère 7 solutions x_i d'un système (1) *ou* (24), *et si avec elles on forme la matrice* $(x\ x_u\ x_v\ x_{uu}\ x_{uv}\ x_{vv})$, *les 7 mineurs du 6e ordre ξ_i extraits de cette matrice, sont 7 solutions d'*UNE MÊME ÉQUATION DE LAPLACE, *qui dans les deux cas respectivement est de la forme :*

$$\xi_{uv} = \alpha\xi_u + \beta\xi_v + \gamma\xi \qquad \text{ou :} \qquad \xi_{uu} = \alpha\xi_u + \beta\xi_v + \gamma\xi.$$

[**41**] Passons enfin à résoudre la question du n° 34, pour les surfaces de la dernière catégorie, savoir pour les surfaces de E_5 qui n'ont pas de réseaux. Considérons donc une telle surface Σ, dont soient :

$$x_i = x_i(u, v) \quad \text{pour} \quad i = 0, 1 \ldots, 5,$$

les équations; puisque sur Σ on n'a pas de réseaux, il sera :

$$\Delta \equiv (x\ x_u\ x_v\ x_{uu}\ x_{uv}\ x_{vv}) \neq 0, \tag{48}$$

en employant ici une notation que nous avons déjà usée au n° 22.

Considérons sur Σ deux différentes familles de courbes, que nous supposons données comme intégrales de deux équations du 1er ordre :

$$\frac{dv}{du} = \varphi(u, v); \qquad \frac{dv}{du} = \psi(u, v) \qquad (\varphi \neq \psi). \tag{49}$$

On voit aisément que, pour que ces deux familles constituent une grille, il est nécessaire et suffisant que :

$$\begin{aligned} &(x\ x_u\ x_v\ x_{uu} + \varphi x_{uv}\ x_{uv} + \varphi x_{vv}\ \Omega_{\varphi,\psi}) = 0 \\ &(x\ x_u\ x_v\ x_{uu} + \psi x_{uv}\ x_{uv} + \psi x_{vv}\ \Omega_{\psi,\varphi}) = 0, \end{aligned} \tag{50}$$

où, pour abréger, nous avons posé :

$$\Omega_{\varphi,\psi} = (\varphi_u + \varphi\varphi_v)(\psi - \varphi)x_{vv} + x_{uuu} + (2\varphi + \psi)x_{uuv} + (\varphi^2 + 2\varphi\psi)x_{uvv} + \varphi^2\psi x_{vvv}. \text{ (1)}$$

(1) On obtient sans peine les relations (50), en exprimant par exemple que le réticule formé par nos deux familles, jouit de la première propriété caractéristique des grilles, donnée au n° 4. Ces relations (50) se déduisent aussi aisément de la relation (1) donnée par M. BOMPIANI dans son Mémoire cité en (1) à p. 2.

En développant les premiers membres des (50), nous obtenons deux équations de la forme :

$$
(51)\quad \begin{cases} (\varphi_u + \varphi\varphi_v)(\varphi - \psi) = (\mathcal{M}\varphi^4 + \mathcal{N}\varphi^3 + \mathcal{L}\varphi^2 + \mathcal{Q}\varphi + \mathcal{R})\psi \\ \qquad + \mathcal{M}'\varphi^4 + \mathcal{N}'\varphi^3 + \mathcal{L}'\varphi^2 + \mathcal{Q}'\varphi + \mathcal{R}' \\ (\psi_u + \psi\psi_v)(\psi - \varphi) = (\mathcal{M}\psi^4 + \mathcal{N}\psi^3 + \mathcal{L}\psi^2 + \mathcal{Q}\psi + \mathcal{R})\varphi \\ \qquad + \mathcal{M}'\psi^4 + \mathcal{N}'\psi^3 + \mathcal{L}'\psi^2 + \mathcal{Q}'\psi + \mathcal{R}', \end{cases}
$$

dans lesquelles les coefficients se calculent sans difficulté; par exemple, en se rappelant la (48), on a :

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M} &= (x\ x_u\ x_v\ x_{uv}\ x_{vv}\ x_{vvv}) : \Lambda \\
\mathcal{M}' &= (x\ x_u\ x_v\ x_{uv}\ x_{vv}\ x_{uvv}) : \Lambda \\
\mathcal{R}' &= (x\ x_u\ x_v\ x_{uu}\ x_{uv}\ x_{uuv}) : \Lambda .
\end{aligned}
$$

La première des équations (51) ne contient aucune des dérivées de la fonction ψ, et même contient cette fonction *linéairement*; on peut donc la résoudre par rapport à ψ : en substituant dans la deuxième équation (51), on obtient une équation aux dérivées partielles du 2^e ordre (non linéaire) dans la seule inconnue φ. En correspondance à chaque intégrale de cette équation, la première des équations (49) nous fournira une famille ∞^1 de courbes, laquelle avec la famille de courbes de Σ qui lui est conjuguée (de 2^e espèce) constituera une grille. Donc :

Une surface quelconque de E_5 *est toujours une surface* Ψ : *bien plus, si elle n'a pas de réseaux, elle contient toujours un nombre infini de grilles hyperboliques.*

[**42**] Si dans les équations (50) nous posons :

$$\varphi = \psi = \frac{dv}{du},$$

nous obtenons une même équation différentielle, qui manifestement n'est autre chose que l'équation différentielle des *lignes principales de* Σ. Cela montre que ces familles de courbes, comptées deux fois, figurent parmi les grilles de Σ. Cependant on ne doit pas croire qu'elles constituent des grilles paraboliques : en effet, pour qu'il en soit ainsi il faut ajouter une autre condition (n° 25); nous retournerons bientôt sur cet argument-là.

Supposons que Σ soit une *surface de* VERONESE : dans cette hypothèse elle a les lignes principales indéterminées [1], et par conséquent les équations (50), donc aussi

---

[1] Cette propriété *caractérise* la surface de VERONESE et les développables de E_5; cfr. C. SEGRE, *Le linee principali di una superficie di* S_5 *e una proprietà caratteristica della superficie di Veronese*, Rendic. R. Acc. Lincei, 5^e série, t. XXX (1921)₁, Note II, p. 227, n° 6.

les (51), s'évanouissent en y faisant $\varphi = \psi$ [1]. A cause de cela on pourra diviser les deux membres de chaque équation (51) par $\varphi - \psi$, et l'on obtient ainsi deux équations, dont chacune ne contient seulement plus qu'*une* des inconnues φ et ψ, et qui (sauf le changement de φ en ψ) sont une même équation. Si à la place de φ et de ψ nous écrivons $\frac{dv}{du}$, nous obtenons l'équation différentielle :

$$\frac{d^2 v}{du^2} + \mathfrak{N}\left(\frac{dv}{du}\right)^3 + \mathfrak{L}\left(\frac{dv}{du}\right)^2 + \mathfrak{Q}\frac{dv}{du} + \mathfrak{R} = 0. \tag{52}$$

On voit donc que sur la surface de VERONESE on obtient *toutes* les grilles en choisissant deux familles ∞^1 dans un système *fixe* de ∞^2 courbes. Si nous considérons sur notre surface deux familles ∞^1 quelconques de coniques, elles remplissent p. ex. la première propriété caractéristique des grilles, donnée au n° 4. Cela démontre que :

La (52) *est l'équation différentielle des* CONIQUES *de la surface de* VERONESE, *écrite en coordonnées u, v quelconques* [2].

Sur une surface de VERONESE *on obtient la* GRILLE *la plus générale en associant deux familles ∞^1 quelconques de coniques.*

On a ainsi que si une variété Θ passe par une surface de VERONESE, les développables de sa congruence s'obtiennent en correspondance à des coniques de la surface, donc elles *sont dans des* E_3. En même temps on a le moyen de construire la variété Θ la plus générale qui contient une surface de VERONESE : en effet ses E_3 tangents sont les E_3 tangents d'une grille de la surface (n° 11).

[**43**] En conservant les notations du n° 41, nous avons que toute surface Σ de E_5 qui ne contient pas de réseaux, satisfait à un système de 4 équations aux dérivées partielles, linéaires et homogènes, du troisième ordre, qui peuvent être résolues par rapport aux 4 dérivées du 3e ordre. En particulier, on aura deux équations de la forme :

$$\left\{\begin{aligned} x_{uuu} &= s x_{uu} + r x_{uv} + t x_{vv} + p x_u + q x_v + m x \\ x_{uuv} &= s' x_{uu} + r' x_{uv} + t' x_{vv} + p' x_u + q' x_v + m' x, \end{aligned}\right. \tag{53}$$

---

[1] Avec cela, donc, les seconds membres des (51) deviennent un même polynome du 5e degré en φ, dont tous les coefficients sont nuls; on a en particulier : $\mathfrak{M} = 0$, $\mathfrak{R}' = 0$.

[2] Cette équation peut être réduite à $\frac{d^2v}{du^2} = 0$, en choisissant des coordonnées curvilignes u, v convenables.

et les coefficients s, s', r, ... se calculent tout de suite; par exemple on a :

(54)
$$\begin{aligned} r &= -(x\ x_u\ x_v\ x_{uu}\ x_{vv}\ x_{uuu}) : \Delta \\ t &= (x\ x_u\ x_v\ x_{uu}\ x_{uv}\ x_{uuu}) : \Delta \\ t' &= (x\ x_u\ x_v\ x_{uu}\ x_{uv}\ x_{uuv}) : \Delta \quad \text{etc.}; \end{aligned}$$

si l'on exécute une transformation homographique à coefficients constants, la surface transformée de Σ satisfera encore aux mêmes équations (53).

Supposons maintenant d'avoir choisi sur Σ comme lignes $v = const.$, un de 5 systèmes de lignes *principales* (¹) : il résultera $t = 0$, et le système (53) sera de la forme (25) envisagée au nº 27. Le choix fait ne détermine pas encore complètement les équations de la surface : en effet, on peut encore multiplier toutes les coordonnées par une même fonction λ de u et v, ou bien faire sur les variables u, v une transformation de la forme (27), ou enfin exécuter une transformation homographique (à coefficients constants). Cependant, en vertu du nº 27 et d'une remarque précédente, l'expression :

$$\Xi = \frac{r}{t'} = -\frac{(x\ x_u\ x_v\ x_{uu}\ x_{vv}\ x_{uuu})}{(x\ x_u\ x_v\ x_{uu}\ x_{uv}\ x_{uuv})}$$

sera toujours la même. Donc :

En correspondance à chacun de 5 *systèmes de lignes principales d'une surface* Σ *de* E_5, *nous avons un* INVARIANT PROJECTIF ABSOLU Ξ, *fonction seulement des points de la surface.*

[**44**] Nous allons maintenant donner une signification géométrique très simple de l'invariant Ξ que nous venons de définir. — Considérons un point P générique de Σ, et la ligne principale (C) de Σ du système fixé qui passe par P. Soit π le plan tangent à Σ en P, et χ le plan osculateur à (C) dans le point P. Ces deux plans sont certainement *distincts* (puisque dans le cas contraire les courbes (C) formeraient un réseau parabolique), et se coupent suivant une droite d qui est la tangente en P à (C). Les deux plans π et χ sont donc dans un E_3 : le E_3 tangent en P au réticule des courbes (C).

Considérons un point P′ de Σ, infiniment voisin de P : l'espace E'_3 tangent en P′ au réticule précédent, coupera E_3 suivant une droite δ passant par P, avec une seule exception pour le cas dans lequel P′ soit dans la direction d de (C), cas où les

(¹) Ici et dans les trois nºˢ qui suivent, nous excluons que la surface Σ soit la *surface de* VERONESE, sur laquelle (note à p. 39), les lignes principales sont indéterminées, et en même temps nous supposons que la surface n'ait pas de réseaux.

espaces E_3 et E'_3 se coupent suivant *un plan* ρ passant par d. Nous allons voir que les ∞^1 droites δ qu'on obtient en correspondance aux différents points P', sont dans un même plan σ passant par d, et que :

l'invariant Ξ *calculé en* P, *n'est autre chose que le rapport anharmonique des quatre plans considérés* π, χ, σ, ρ, *pris dans cet ordre.*

Avec les notations du numéro précédent, soient

$$x = x(u, v) \quad \text{et} \quad x = x(u + du, v + dv)$$

les coordonnées de P et de P'; la droite d est celle qui joint les points x et x_u; le plan π joint ces points c'est-à-dire la droite d au point x_v; le plan χ joint la droite d au point x_{uu}. Les coordonnées y d'un point Q quelconque de E_3 sont données par :

$$y(u, v) = x_{uu} - \lambda x_v - \mu x_u - \nu x, \tag{55}$$

λ, μ et ν étant trois fonctions quelconques de u et v. Les coordonnées d'un point Q' quelconque de E'_3 seront donc :

$$y(u + du, v + dv) = y + y_u du + y_v dv, \tag{56}$$

en nous bornant aux infiniment petits du 1^{er} ordre. Dans le second membre de cette équation exprimons y au moyen de la (55), et substituons à x_{uuu} et x_{uuv} leurs expressions fournies par les (53) : nous exprimerons que le point Q' est dans E_3, en annulant les coefficients de x_{uv} et x_{vv} dans l'expression ainsi obtenue, ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} &(r - \lambda) du + (r' - \mu) dv = 0 \\ &(t' - \lambda) dv = 0. \end{aligned} \tag{57}$$

Si $dv = 0$, c'est-à-dire si PP' coïncide avec la tangente d, ces équations sont vérifiées pour μ et ν quelconques et $\lambda = r$: on a donc des (56), (55) que le plan ρ est celui qui joint la droite d au point :

$$x_{uu} - r x_v.$$

Si au contraire $dv \neq 0$, les équations (57) sont vérifiées pour ν quelconque, et :

$$\lambda = t'; \qquad \mu = r' + (r - t')\frac{du}{dv};$$

ceci démontre que la droite δ est celle qui joint le point x au point :

$$x_{uu} - t' x_v - \left\{ r' + (r - t')\frac{du}{dv} \right\} x_u,$$

et l'on voit bien que toutes les droites qu'on a ainsi en correspondance aux différentes valeurs de $\frac{du}{dv}$ sont dans un même plan σ passant par d, savoir le plan qui joint la droite d au point :

$$x_{uu} - t'x_v .$$

On a en plus tout de suite, que les 4 plans π, χ, σ, ρ d'un même faisceau, ont pour rapport anharmonique $r : t'$.

[**45**] En rapprochant les considérations précédentes à celles du n° 25, et en particulier les équations (53) aux équations (24), nous avons que :

Sur une surface Σ *de* S_5, *une grille parabolique n'est autre chose qu'un système de lignes principales, pour lequel l'invariant* Ξ *vaut* 1, *c'est-à-dire pour lequel les deux plans* ρ *et* σ *définis au numéro précédent, sont toujours coïncidents*(1).

Autrement dit :

Dans E_5 *les surfaces* Ψ *du type parabolique, c'est-à-dire les surfaces non réglées qui appartiennent à une variété* Θ *parabolique, sont les surfaces pour lesquelles un des* 5 *invariants* Ξ *vaut* 1.

Cette proposition complète le résultat du n° 41.

[**46**] On pourrait poser beaucoup de questions intéressantes, sur les 5 invariants Ξ d'une surface Σ de E_5. Nous nous contenterons ici de donner quelques propriétés, dans un certain sens analogues à la précédente, en faisant voir comme on peut caractériser certaines propriétés de la surface, par le fait qu'*un* de ses invariants Ξ prend des valeurs particulières.

Avec les notations du n° 43, on aura $t = 0$, et s'il est $\Xi = 0$ donc aussi $r = 0$, la première équation (53) montre que dans chaque point de Σ le E_3 osculateur à la courbe $v = const.$ qui y passe, est *tangent* à la surface. Cela démontre que :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une surface Σ *de* E_5 *ait un système* ∞^1 *de quasi-asymptotique* $\gamma_{1,3}$, *est qu'un de ses invariants* Ξ *soit nul.*

Supposons maintenant $\Xi = \infty$, donc $t' = 0$. Dans ce cas les (53) montrent que les courbes $v = const.$ sont dans les E_3 d'une développable(2), ou, autrement

(1) On voit tout de suite que dans ce cas (et seulement dans ce cas), la droite δ ne décrit pas un faisceau, mais *elle est fixe dans le plan* σ.

(2) Cfr. E. Bompiani. Mém. cité à p. 2 en (1), § 7. — Pour $t = t' = 0$, les équations (53) montrent que le système de courbes $v = const.$ est conjugué de 2e espèce à *toutes* les familles

dit, la surface Σ admet un hyperplan tangent fixe le long de chacune de ces courbes. Donc :

Si une surface Σ *de* E_5 *admet un système* ∞^1 *d'hyperplans qui la touchent chacun le long d'une courbe, un de ses invariants* Ξ *est infini; et réciproquement.*

Les deux cas que nous venons de considérer peuvent se superposer : c'est-à-dire que l'on peut avoir sur Σ un système ∞^1 de $\gamma_{1,3}$, le long de chacune desquelles Σ admet un hyperplan tangent fixe. On voit aisément que ces $\gamma_{1,3}$ sont des courbes *planes*, dont les plans résultent tangents à une même courbe. Par conséquent :

Si une surface Σ *de* E_5 *admet un système* ∞^1 *de courbes planes, dont les plans sont tangents à une courbe fixe (ou, comme cas particulier, passent par un point fixe), un de ses invariants* Ξ *a la forme indéterminée* $\frac{0}{0}$*; et réciproquement.*

Avec les notations des nos 41 et 43, l'équation différentielle des lignes principales de Σ est :

$$\left(x \;\; x_u \;\; x_v \;\; x_{uu} + \frac{dv}{du}x_{uv} \qquad x_{uv} + \frac{dv}{du}x_{vv} \qquad \Omega_{\frac{dv}{du},\frac{dv}{du}}\right) = 0;$$

le premier membre de cette équation est un polynome du 5e degré en $\frac{dv}{du}$: en nous bornant aux termes du premier degré nous avons :

$$\begin{aligned}&(x \;\; x_u \;\; x_v \;\; x_{uu} \;\; x_{uv} \;\; x_{uuu})\\ &+ [(x \;\; x_u \;\; x_v \;\; x_{uu} \;\; x_{vv} \;\; x_{uuu}) + 3(x \;\; x_u \;\; x_v \;\; x_{uu} \;\; x_{uv} \;\; x_{uuv})]\frac{dv}{du} + \ldots = 0,\end{aligned}$$

c'est-à-dire, en divisant par Λ (qui pour la (48) n'est pas nul) les deux membres de cette équation, et en tenant compte des (54) :

$$t + (3t' - r)\frac{dv}{du} + \ldots = 0.$$

D'ici on déduit (ce que nous savons déjà) que, s'il est $t = 0$, cette équation est

---

∞^1 de courbes de la surface : et le problème de déterminer tous les systèmes qui jouissent de cette propriété, est posé et résolu dans l'endroit cité, par M. BOMPIANI. Je me permets ici de faire remarquer une méprise dans laquelle est tombé ce distingué géomètre à cet égard ; en effet, il n'a pas considéré comme solutions de son problème *les systèmes* ∞^1 *de courbes planes, dont les plans sont tangents à une même courbe* : si un tel système est dans un E_n avec $n > 5$, il ne rentre pas en général dans les cas trouvés par M. BOMPIANI, tout en satisfaisant aux conditions qu'il s'est posées.

satisfaite par $\frac{dv}{du} = 0$, c'est-à-dire que les courbes $v = const.$ constituent un des 5 systèmes de lignes principales de Σ. En plus on voit que si outre à $t = 0$ on a $3t' - r = 0$, savoir $\Xi = \frac{r}{t'} = 3$, $\frac{dv}{du} = 0$ est une racine double de ladite équation.

Donc :

Si un système de lignes principales compte pour DEUX *parmi les 5 systèmes de lignes principales d'une surface Σ de E_3, l'invariant Ξ de Σ relatif à ce système vaut 3 dans tous les points de Σ; et inversement.*

Aux propositions démontrées dans ce n°, on peut donner une forme géométriquement plus significative, en tenant compte du résultat du n° 44, c'est-à-dire en considérant (au lieu de l'invariant Ξ) les plans π, χ, ρ, σ envisagés dans ce n°.

[**47**] Avec ce qui précède, nous avons complètement résolu le problème que nous nous sommes posé à la fin du n° 34. En examinant les résultats obtenus dans les différents cas, on voit tout de suite que :

Si une surface contient deux grilles différentes, elle en contient nécessairement un nombre infini, et ou bien elle est dans un espace de dimension $n \leqslant 5$, ou bien elle a une famille de courbes dans les E_3 d'une développable.

Les grilles qui sont conjuguées à deux congruences différentes, ont été déterminées au n° 13; les résultats de ce n°, avec le théorème précédent, nous permettent de donner la proposition suivante, qui vient compléter le théorème du n° 34 :

Une surface non réglée qui soit commune à deux variétés Θ différentes, appartient en conséquence à une infinité de variétés Θ, et est nécessairement une surface d'un des types suivants :

1° *surfaces appartenant à un espace de dimension $n \leqslant 5$;*

2° *surfaces qui ont un réseau (hyperbolique ou parabolique);*

3° *surfaces qui ont une famille ∞^1 de courbes dans les E_3 d'une développable.*

RÉSUMÉ

Les droites d'une congruence d'un hyperspace, remplissent une variété Θ réglée à trois dimensions, qui jouit de la propriété caractéristique d'être touchée par un E_3 fixe le long de chacune de ses génératrices.

Dans ce Mémoire j'étudie les surfaces non réglées appartenant à une variété Θ, et les systèmes de courbes que les développables de celle-ci déterminent sur la surface. Ces systèmes de courbes se rattachent, comme cas particuliers, aux systèmes conjugués d'ordre supérieur, que j'ai étudiés dans un Mémoire récent des Annales de l'École Normale Supérieure.

Les résultats que j'obtiens, peuvent trouver leur emploi dans beaucoup de questions de Géométrie et d'Analyse, dont quelques-unes sont traitées ici-même. Je rappellerai seulement la détermination des congruences de droites de l'espace ordinaire, dont les développables découpent sur une surface un système donné de courbes quelconques; l'introduction de cinq invariants projectifs absolus, attachés à une surface arbitraire de E_5, au moyen desquels on peut caractériser quelques-unes de ces surfaces; enfin l'intégration de certains systèmes d'équations aux dérivées partielles, linéaires et du troisième ordre.

TABLE DES MATIÈRES