ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

F. MARTY

Recherches sur la répartition des valeurs d'une fonction méromorphe

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 3e série, tome 23 (1931), p. 183-261
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1931_3_23__183_0>

RECHERCHES

SUR LA

RÉPARTITION DES VALEURS D'UNE FONCTION MÉROMORPHE

Par M. F. MARTY.

INTRODUCTION

Divers auteurs ont étudié des problèmes des deux types suivants : Étant donné un domaine, et la famille des fonctions qui ont une propriété de valence [1] donnée dans ce domaine, quelles conclusions sur la famille de fonctions peut-on en tirer; par exemple y a-t-il des relations d'égalité ou d'inégalité entre les diverses constantes attachées à la fonction? ou bien, étant donnée une famille de fonctions, que peut-on dire sur les domaines de p-valence de forme donnée, circulaire par exemple, des fonctions de la famille? On trouvera l'exposé des principaux résultats, notamment dans :

P. Montel, *Leçons sur les familles normales* (Paris, Gauthier-Villars, 1927).

---

(1) Voici la terminologie que j'ai adoptée sur ces points; elle est directement inspirée de celle de M. Montel.

Dans un domaine fermé D où elle est méromorphe, une fonction $f(z)$ non constante prend une valeur Z au plus p fois, p étant un entier qui dépend de f et du domaine. Nous appellerons p la *valence* ou l'*ordre de multivalence* de f dans D; f sera dite *p-valente* (univalente, bivalente, trivalente, ...) dans D, et D sera dit domaine de p-valence pour f. Une fonction qui n'est pas univalente est *multivalente*. Nous appellerons *valence en un point* z_0 le minimum de la valence de f dans un cercle de centre z_0; si f est univalente en z_0, z_0 est un point d'*univalence locale* pour f. Deux points où $f(z)$ prend la même valeur seront dits *homologues* par rapport à $f(z)$. Enfin une propriété de valence est dite vraie *à l'intérieur* d'un domaine D lorsqu'elle s'applique seulement aux points qui n'ont pas d'homologues sur le contour de D.

A. Bloch, *Les fonctions holomorphes et méromorphes dans le cercle unité* (Mém. des Sc. math., Fasc. XX. Paris, Gauthier-Villars, 1926).

J. Dieudonné, *Recherches relatives aux polynômes et aux fonctions bornées d'une variable complexe* (Thèse, Paris, Gauthier-Villars, 1931, et Annales de l'École Normale, 1931).

Dans ce travail, j'étudie tout d'abord des problèmes de ces deux catégories par des méthodes nouvelles, et je suis conduit à des résultats généraux sur la répartition des valeurs d'une fonction méromorphe; puis je résous, par une méthode inspirée des recherches de Poincaré sur les fonctions fuchsiennes, des problèmes sur les groupes d'automorphie des fonctions analytiques auxquels conduisait assez naturellement la première partie de mes recherches (¹).

Dans le premier chapitre, j'applique à l'étude des familles de fonctions méromorphes la notion nouvelle de dérivée sphérique.

Dans le § 1 (nᵒˢ 1 à 4) j'introduis la dérivée sphérique, et je donne ses principales propriétés, notamment ses relations avec la valence locale.

Dans le § 2 (nᵒˢ 5 à 9) je montre comment on peut, au moyen de la dérivée sphérique, écrire d'une manière très simple la condition nécessaire et suffisante pour qu'une famille soit normale, pour que ses fonctions limites soient non constantes, pour que ses fonctions limites soient localement univalentes, et j'en tire quelques théorèmes généraux sur les familles normales.

Dans le § 3 (nᵒˢ 10 à 12) j'étudie au moyen de la dérivée sphérique les points irréguliers d'une famille quasi-normale, et j'applique les résultats à l'étude de la dérivée sphérique d'une fonction $f(z)$ au voisinage d'un point singulier essentiel isolé.

Dans le § 4 (nᵒˢ 13 à 16) j'applique les résultats précédents à des familles de fonctions à valence bornée, ou à zéros fixes, et j'obtiens une série de critères nouveaux de familles normales ou quasi-normales.

Dans le § 5 (nᵒ 17) j'indique comment on peut généraliser les propriétés de la dérivée sphérique à des fonctions de variable complexe non analytiques.

Le Chapitre II est consacré à l'étude d'une décomposition particulière d'un domaine fermé D de méromorphie d'une fonction donnée en domaines d'univalence.

Dans le § 1 (nᵒˢ 18 à 21) je montre comment on peut, si la fonction est holomorphe et si la dérivée ne s'annule pas dans D, décomposer D en « cellules » où

(¹) Une partie de ces résultats a été résumée dans deux Notes aux *Comptes Rendus* des 24 février et 26 mai 1930.

(z) est univalente, et telles que, étant donné deux cellules, ou bien tout point de l'une a un homologue dans l'autre, ou bien aucun point de l'une n'a d'homologue dans l'autre.

Dans le § 2 (nos 22 à 27) je montre comment ces propriétés s'étendent aux fonctions méromorphes et aux domaines où la dérivée sphérique s'annule; j'étudie en particulier les domaines où tous les points ont le même nombre d'homologues, notamment les domaines « réduits » (les points du contour n'ont pas d'homologues intérieurs) et les domaines « complets » (la fonction y prend toute valeur donnée). Enfin j'indique un procédé de groupement des cellules qui sera utilisé au chapitre suivant.

Dans le § 3 (nos 28 et 29) je donne quelques propriétés des points homologues par rapport à certaines fonctions simples, et j'indique des généralisations à des transformations planes non conformes.

Le Chapitre III étudie une fonction dans tout son domaine d'existence.

Dans le § 1 (nos 30 à 32) je montre comment, en partant de la notion de cellule, on peut décomposer le domaine d'existence de la fonction en domaines fondamentaux, qui mettent en évidence, comme la surface de Riemann, la structure de la fonction étudiée; j'étudie plus particulièrement leur forme au voisinage d'un point singulier isolé.

Certains résultats du Chapitre II et du § 1 du Chapitre III ont d'ailleurs déjà été obtenus par divers auteurs à partir des surfaces de Riemann. Il y avait peut-être intérêt à étudier ces problèmes directement et d'une manière systématique.

Les § 2 et 3 étudient les fonctions d'automorphie H d'une fonction $f(z)$, définies par l'équation fonctionnelle $f[H(z)] = f(z)$.

Le § 2 (nos 33 à 38) étudie quelques problèmes sur les fonctions d'automorphie algébroïdes, algébriques, ou uniformes, des fonctions à point essentiel isolé, et introduit dans le cas général la notion de groupe d'automorphie régulier.

Le § 3 est consacré à la recherche des fonctions $f(z)$ admettant un groupe d'automorphie régulier donné. Après avoir montré directement que ces fonctions admettent une décomposition en domaines fondamentaux, je montre comment la méthode des séries Θ de Poincaré permet de résoudre le problème d'existence dans des cas très généraux.

Qu'il me soit permis d'exprimer ici ma bien vive reconnaissance à M. Montel, qui a bien voulu diriger ces recherches, et dont les conseils m'ont été d'un secours précieux; à M. Vessiot, qui a facilité mon travail à l'École Normale; enfin à M. Picard, que j'ai été heureux de voir s'intéresser à mes études.

INDEX DE CE MÉMOIRE

CHAPITRE PREMIER

La notion de dérivée sphérique d'une fonction analytique.

§ 1. — Dérivée sphérique d'une fonction méromorphe en un point.

[**1**] Prenons avec A. Ostrowski (¹) une sphère de Riemann de rayon 1. Soit Z l'affixe d'un point; appelons *distance sphérique* $|Z, Z'|$ de deux points sur la sphère la longueur du plus petit arc de grand cercle qui les joint. On a :

$$
\begin{aligned}
&|Z, Z'| \leqslant |Z, Z''| + |Z'', Z'|, \\
&\left|\frac{1}{Z'}, \frac{1}{Z}\right| = |Z, Z'|, \\
&|Z, Z + dZ| = \frac{2\,|dZ|}{1 + |Z|^2}.
\end{aligned} \tag{1}
$$

Si $|Z| \leqslant A$ on a :

$$\frac{2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} A}{A} |Z| \leqslant |0, Z| \leqslant 2\,|Z|.$$

Dans tout ce qui va suivre nous considérerons les fonctions méromorphes comme définissant une correspondance de sphère à sphère.

Le rapport des longueurs de deux arcs infiniment petits correspondants tracés sur ces sphères a toujours une limite finie lorsque la fonction est méromorphe au point envisagé. Pour un point à distance finie où la fonction est holomorphe la valeur du rapport est :

$$\mathfrak{D}f(z_0) = |f'(z_0)| \frac{1 + |z_0|^2}{1 + |f(z_0)|^2}. \tag{2}$$

Dans les cas où la fonction est méromorphe, où le point considéré n'est pas à distance finie le résultat provient de l'invariance du rapport étudié dans le changement de z en $\frac{1}{z}$ ou de Z en $\frac{1}{Z}$. Nous appellerons *dérivée sphérique* le nombre positif ou nul ainsi défini.

(¹) *Mathematische Zeitschrift*, t. 24, 1926.

Étant donné un domaine fermé D dans lequel une fonction donnée est méromorphe il sera toujours possible de le décomposer en un nombre fini de domaines ne contenant aucun zéro ou aucun pôle. Cette opération permet de conclure facilement que :

THÉORÈME 1 : *Si une fonction $f(z)$ est méromorphe dans un domaine fermé, la dérivée sphérique y est continue.*

La continuité dans un domaine partiel d'holomorphie à distance finie résulte de la formule (2). Autour d'un pôle ou du point à l'infini le résultat s'obtient en changeant z en $\frac{1}{z}$ ou Z en $\frac{1}{Z}$. Toute fonction continue étant bornée, la dérivée sphérique est bornée dans un domaine fermé. Cette remarque jouera un rôle fondamental dans la plupart des applications que nous donnerons.

[2] Supposons qu'en un point z_0 la dérivée sphérique soit nulle. Ou bien ni z ni Z ne sont infinis, et dans ce cas la dérivée ordinaire est nulle : dans tout domaine, si petit soit-il, entourant z_0 la fonction est multivalente. Si z ou Z ou les deux sont infinis nous nous ramènerons au cas précédent par le changement de z en $\frac{1}{z}$ ou de Z en $\frac{1}{Z}$. Nous énoncerons donc la propriété suivante :

THÉORÈME 2 : a) *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un point z_0 soit le centre d'un cercle dans lequel la fonction $f(z)$ est univalente est que l'on ait*

$$\mathfrak{D}f(z_0) \neq 0.$$

b) *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction analytique soit égale à une constante est que sa dérivée sphérique soit partout nulle.*

Les conditions sont à la fois nécessaires et suffisantes puisque des hypothèses contraires entraînaient des conclusions contraires.

On peut se demander si l'existence d'une dérivée sphérique est une propriété qui caractérise les fonctions analytiques; nous n'avons en effet introduit ici que des modules de rapports. On peut déduire la réponse d'un résultat de M. Harald Bohr(¹) : Si une fonction de variable complexe $Z(z)$ est univalente dans un domaine fermé, et si le module de $\frac{\Delta Z}{\Delta z}$ tend vers une limite quand Δz tend vers 0, la fonction est analytique, ou conjuguée d'une fonction analytique. L'emploi d'une décomposition en domaines partiels permet alors d'énoncer :

THÉORÈME 3 : *Si une transformation de sphère à sphère, définie dans un domaine*

(¹) *Mathematische Zeitschrift*, 1918.

fermé, y admet une dérivée sphérique; si la dérivée sphérique ne s'annule qu'en un nombre fini de points du domaine, et si autour de tout point où elle ne s'annule pas la fonction est univalente, cette fonction est analytique ou conjuguée de fonction analytique.

[**3**] Nous avons vu que la transformation $Z_1 = \frac{1}{Z}$ effectuée sur la variable ou la fonction n'altère pas la dérivée sphérique. La transformation la plus générale qui jouit de cette propriété c'est le déplacement de la sphère de Riemann; seule transformation qui permette d'appliquer la sphère sur elle-même au sens de la géométrie. Analytiquement c'est une transformation homographique particulière dépendant d'un paramètre complexe et d'un paramètre réel, que l'on obtient facilement comme produit de deux symétries par rapport à deux cercles se coupant en deux points diamétralement opposés sur la sphère de Riemann. La transformation peut se mettre sous la forme

$$Z = \frac{1 + \lambda z}{\bar{\lambda} - z} e^{i\theta} \tag{3}$$

où λ est un nombre complexe arbitraire et θ un nombre réel arbitraire. En particulier pour $\theta = \pi$ et $\lambda = 0$ on retrouve la transformation

$$Z = \frac{1}{z}$$

déjà utilisée.

[**4**] Plusieurs règles de calcul des dérivées sphériques s'obtiennent immédiatement; la règle des fonctions de fonction est la même que pour les dérivées ordinaires. Si en particulier nous envisageons une suite de fonctions itérées, la dérivée sphérique de la n^{me} itérée au point z_0 est le produit des dérivées sphériques de la fonction initiale au point z_0 et en ses $n - 1$ premiers conséquents.

La dérivée sphérique de la fonction inverse d'une fonction donnée est l'inverse (au sens arithmétique) de la dérivée sphérique de la fonction donnée.

En un point critique algébrique nous ne savons pas encore quel sens donner à la dérivée sphérique. Mais ramenons-nous par une transformation de la forme (3), effectuée sur la fonction et sur la variable, au cas où l'on a $Z = z = 0$. Supposons que la fonction se comporte au voisinage de ce point comme $z^{\frac{p}{q}}$, la dérivée ordinaire et par suite la dérivée sphérique se comporteront comme $z^{\frac{p-q}{q}}$. Si donc $p > q$ la dérivée sphérique tendra vers 0 quand z tendra vers 0; si $p = q$ il n'y a pas point critique; si $p < q$ la dérivée sphérique augmentera indéfiniment au voisinage du point zéro, mais au plus comme $z^{\frac{1-q}{q}}$; le produit $z\mathfrak{D}f(z)$ tend toujours vers zéro quel que soit l'ordre du point critique envisagé. Ce résultat nous servira ultérieurement.

§ 2. — Application aux familles normales [1].

[**5**] Soit une suite de fonctions $f_1(z), f_2(z), \ldots f_n(z), \ldots$ méromorphes dans un domaine d et convergeant uniformément vers une fonction $f(z)$ qui est méromorphe dans d. Soit d'abord z_0 un point qui n'est pas pôle de $f(z)$, et formons la suite des dérivées sphériques $\mathfrak{D}f_1(z_0)$, $\mathfrak{D}f_2(z_0) \ldots \mathfrak{D}f_n(z_0), \ldots$ c'est-à-dire la suite des nombres

$$|f'_n(z_0)| \frac{1 + |z_0|^2}{1 + |f_n(z_0)|^2}.$$

La suite des nombres $\dfrac{1 + |z_0|^2}{1 + |f_n(z_0)|^2}$ tend vers $\dfrac{1 + |z_0|^2}{1 + |f(z_0)|^2}$. On sait que, les fonctions f étant analytiques, la suite des nombres $|f'_n(z_0)|$ tend vers $|f'(z_0)|$. Donc, au point z_0, la suite des dérivées sphériques a une limite égale à la dérivée sphérique de la fonction limite. Si z_0 était un pôle pour f nous aboutirions à la même conclusion en substituant aux $f_n(z)$ les fonctions $\dfrac{1}{f_n(z)}$. Nous obtenons ainsi le théorème fondamental.

Théorème 4 : *Si une suite de fonctions méromorphes $f_n(z)$ converge uniformément vers $f(z)$ dans le domaine d, les fonctions $\mathfrak{D}f_n(z)$ convergent vers $\mathfrak{D}f(z)$, uniformément dans l'intérieur de d.*

[**6**] Nous allons ainsi pouvoir donner une forme particulièrement simple, au moins au point de vue théorique, à certains critères concernant les familles normales :

Théorème 5 : *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une famille de fonctions $f_n(z)$ soit normale dans un domaine D est que, à tout domaine d intérieur à D on puisse associer un nombre M tel que l'inégalité :*

$$\mathfrak{D}f_n(z) < \mathrm{M}$$

soit vérifiée quel que soit n et quel que soit z intérieur à d.

---

[1] Dans tout ce qui suit les fonctions d'une même famille sont affectées d'un indice pour la commodité de l'exposition; mais tous les raisonnements faits peuvent tout aussi bien s'appliquer à des familles ayant la puissance du continu.

La condition est nécessaire; car si elle n'était pas réalisée on pourrait trouver une suite de fonctions f_n convergeant uniformément dans d vers une fonction limite; la dérivée sphérique de la fonction limite serait bornée supérieurement dans d, et on pourrait faire en sorte que quelque grand que soit p il y ait une fonction f_n d'indice supérieur à p dont la dérivée sphérique serait supérieure à un nombre donné en un point au moins. Comme il y a convergence uniforme des dérivées sphériques la contradiction est établie.

Pour montrer que la condition est suffisante, je vais montrer qu'elle entraîne l'égale continuité sphérique (au sens de M. Ostrowski) de la famille étudiée. Soit M la borne dans d de la dérivée sphérique des $f_n(z)$. La distance sphérique de deux valeurs $f(z_1)$, $f(z_2)$ est inférieure à l'intégrale curviligne :

$$\mathrm{I} = \int_{z_1}^{z_2} \mathfrak{D}f(z)\, ds$$

prise le long d'un arc de grand cercle allant de z_1 à z_2 sur la sphère de Riemann, ds étant l'élément d'arc. D'où

$$\mathrm{I} \leqslant \mathrm{M}l$$

l étant la longueur de l'arc qui joint z_1 à z_2, et par suite

$$|f(z_2), f(z_1)| \leqslant \mathrm{M}l.$$

Donc pour obtenir deux valeurs de la fonction différant de ε dans d il suffit de prendre deux points intérieurs à un même cercle de diamètre sphérique $\frac{\varepsilon}{\mathrm{M}}$. Il y a égale continuité sphérique au sens de M. Ostrowski, la famille est normale.

THÉORÈME 6 : *La condition nécessaire et suffisante pour que toute fonction limite d'une suite extraite d'une famille normale dans* D *soit univalente dans un cercle assez petit de centre z_0 quel que soit z_0 intérieur à* D *est que, à tout domaine d intérieur à* D, *on puisse associer un nombre* M *tel que l'on ait en tout point z de d et quel que soit $n > n_0$:*

$$\mathfrak{D}f_n(z) > \mathrm{M}.$$

Si la condition n'était pas réalisée il serait possible de trouver une suite de fonctions $f_n(z)$ dont les dérivées sphériques prendraient respectivement en des points $z_1 \ldots z_n \ldots$ intérieurs à d, des valeurs $\mathfrak{D}f_1(z_1)$, $\mathfrak{D}f_2(z_2)$, ... $\mathfrak{D}f_n(z_n)$, ... tendant vers zéro. Les points z_n auraient un point d'accumulation z_0. Extrayons de la suite $f_n(z)$ une suite qui ait une fonction limite $f(z)$. Nécessairement on aura $\mathfrak{D}f(z_0) = 0$ à cause de la convergence uniforme de la dérivée sphérique. Il y a donc contradiction.

Si inversement la condition est réalisée, toutes les fonctions limites vérifieront l'inégalité et par suite auront la propriété annoncée.

Théorème 7 : *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une famille normale de fonctions n'ait aucune fonction limite constante, est que pour tout domaine d intérieur à D il existe un nombre m tel que, pour chaque fonction $f_n(z)$ l'inégalité*

$$\mathfrak{D}f_n(z) > m$$

soit vérifiée en un point de d au moins.

La condition est nécessaire car si on ne la supposait pas réalisée il y aurait au moins une suite $f_1(z) \ldots f_n(z) \ldots$ telle que pour n assez grand on aurait $\mathfrak{D}f_n(z) < \varepsilon$ partout dans d. Si $f(z)$ était la fonction limite de cette suite, on aurait nécessairement dans tout d

$$\mathfrak{D}f(z) < \varepsilon$$

quel que soit ε, c'est-à-dire $\mathfrak{D}f(z) = 0$.

La condition est évidemment suffisante.

[**7**] Cette propriété va nous donner un corollaire intéressant relatif à la comparaison des dérivées sphériques en deux points du domaine D.

Soit $f_n(z)$ une famille normale de fonctions méromorphes dans D*; soient d_1 et d_2 deux domaines intérieurs à* D. *Si le maximum de $\mathfrak{D}f_n(z)$ dans d_1 est borné inférieurement par un nombre positif, le maximum de $\mathfrak{D}f_n(z)$ dans d_2 est borné inférieurement par un nombre positif.*

Donc dans ce cas le rapport de ces deux maxima est compris entre deux nombres positifs fixes. Il peut en être différemment dans le cas où il y a fonction limite constante.

Formons la famille normale suivante de polynômes :

$$P_n(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^n.$$

Ces polynômes forment une famille normale dans le cercle $|z| < 2$. Dans le cercle $|z| < \frac{1}{2}$ la dérivée sphérique $\frac{n}{2}\left(\frac{z}{2}\right)^{n-1} \frac{1+|z|^2}{1+\left|\frac{z^n}{2^n}\right|^2}$ est limitée supérieurement par $\frac{n}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \times \frac{5}{4} \leqslant \frac{5 \times n}{4^n}$. D'autre part pour $z = 1$ on a

$$\mathfrak{D}P_n(z) = \frac{n}{2^n} \times \frac{1+1}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}} \geqslant \frac{n}{2^n}.$$

Le maximnm de $\mathfrak{D}P_n$ pour un point pris dans le cercle de rayon $\frac{1}{2}$ est donc inférieur à $\frac{5n}{4^n}$ tandis que pour un petit domaine entourant le point $+1$ il est supérieur à $\frac{n}{2^n}$. Le rapport de ces deux maxima est donc supérieur à $\frac{2^n}{5}$; il n'est pas borné supérieurement lorsque n tend vers l'infini, mais les fonctions limites de la famille se réduisent à la constante zéro.

[**8**] Il est fondamental dans le problème de l'itération de rechercher en quels points les itérées d'une même fonction forment une famille normale. Soient z un point, z_1, $z_3 \dots z_n$ ses n premiers conséquents, $f(z)$ la fonction étudiée, $f_1(z) \dots f_n(z)$ les itérées successives. On a vu que $\mathfrak{D}f_{n+1}(z) = \mathfrak{D}f(z) . \mathfrak{D}f(z_1) \dots \mathfrak{D}f(z_n)$. Si la famille des itérées est normale au point z le produit du second membre doit rester inférieur à un nombre fixe. Donc :

THÉORÈME 8 : *Pour que les itérées d'une fonction $f_1(z)$ forment une famille normale en un point z il faut et suffit que le produit des valeurs de la dérivée sphérique au point z_1 et à ses n premiers conséquents reste inférieur à un nombre fixe quelque grand que soit n pour tout point z_1 d'un petit domaine entourant z.*

C'est notamment ce qui se passe en un point du domaine d'attraction d'un point double attractif : au point double en effet et dans son voisinage la dérivée sphérique est inférieure à $\theta < 1$. De sorte que le produit infini tend vers 0. La famille est normale et la fonction limite est constante et égale à l'affixe du point double.

Pour un point dont les conséquents tendraient vers un point indifférent on aurait un produit infini dont le terme général tendrait vers 1, et qui par suite pourrait être convergent au sens ordinaire de la théorie du produit infini.

[**9**] Le critère de famille normale que nous avons obtenu permet de déduire d'une famille normale une infinité d'autres familles normales au moyen du principe général suivant : Supposons définie une famille de fonctions $\varphi_n(u)$ telle que :

$$\mathfrak{D}\varphi_n(u) < M$$

soit vérifié dans un domaine d. Si $f_n(z)$ appartient à une famille normale et si l'on sait que les fonctions f_n ne prennent que des valeurs du domaine d on en déduit que la famille des fonctions $g_n = \varphi_n[f_n(z)]$ est normale car on a la relation :

$$\mathfrak{D}g_n(z) = \mathfrak{D}\varphi_n[f_n] \times \mathfrak{D}f_n(z) < M\mathfrak{D}f_n(z)$$

et par suite si $\mathfrak{D}f_n$ est borné $\mathfrak{D}g_n$ l'est aussi.

Cela serait facile à démontrer directement, la famille des φ_n étant normale dans le domaine d. Mais inversement une famille de fonctions qui transforme une suite normale donnée en suite normale n'est pas nécessairement normale. Par exemple la famille des fonctions $f_n(z) = \frac{z}{n}$ est normale dans le cercle unité, la famille des fonctions $\varphi_n(u) = \sqrt{n}\, u$ n'est pas normale dans un domaine contenant l'origine. Et cependant la famille $\varphi_n(f_n) = \frac{z}{\sqrt{n}}$ est normale. Toutefois on peut énoncer la proposition suivante :

THÉORÈME 9 : *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une famille de fonctions $\varphi_n(u)$ transforme toute suite normale en une suite normale est que les fonctions φ_n forment une famille de fonctions rationnelles normale dans tout le plan.*

La condition est d'après ce que nous avons vu plus haut suffisante. φ_n doit nécessairement être une fonction rationnelle, puisqu'elle doit être définie et uniforme pour toute valeur finie ou infinie de la variable. Supposons alors que la famille des φ ne soit pas normale. Il existerait une suite de nombres $u_1, u_2, \ldots, u_n \ldots$ telle que la suite $\mathfrak{D}\varphi_1(u_1)$, $\mathfrak{D}\varphi_2(u_2)$, $\ldots$, $\mathfrak{D}\varphi_n(u_n) \ldots$ augmenterait indéfiniment.

Soit alors une famille de fonctions f_n normale en un point z_0, et telle pour fixer les idées que la dérivée sphérique de toutes les fonctions de la famille soit en ce point égale à 1. Nous allons déduire des f_n une famille normale des fonctions g_n telles que : $g_n(z_0) = u_n$. Pour cela utilisons les transformations $\psi_n(u) = \frac{1 + \lambda_n u}{\bar{\lambda}_n - u} e^{i\theta_n}$ où λ_n sera déterminé par la condition

$$e^{i\theta_n} \frac{1 + \lambda_n f_n(z_0)}{\bar{\lambda}_n - f_n(z_0)} = u_n .$$

Cette détermination est toujours possible : géométriquement, en effet, cela revient à trouver un déplacement d'une sphère sur elle-même amenant un point donné sur un autre point donné. Ces transformations ont toutes pour dérivée sphérique 1 (voir n° 3) et par suite forment une famille normale. Mais la famille $\varphi_n[g_n(z)]$ ne pourrait être normale en z_0 puisque la dérivée sphérique n'y est pas bornée, d'où la contradiction.

Si maintenant nous voulons que les fonctions inverses des φ_n aient la même propriété, nous devons prendre pour les φ_n des fonctions homographiques, et nous énoncerons :

THÉORÈME 10 : *Si une famille φ_n transforme toute suite normale en suite normale et ne transforme en suites normales que les suites normales les fonctions φ_n forment une famille normale de fonctions homographiques.*

Il faut en effet que les fonctions inverses des φ_n aient leur dérivée sphérique bornée supérieurement par un nombre positif p c'est-à-dire que la dérivée sphérique des fonctions φ_n soit bornée inférieurement par $\frac{1}{p}$; par suite les φ_n sont partout localement univalentes, leurs fonctions inverses sont uniformes; il est bien nécessaire et suffisant que les φ_n qui sont rationnelles soient homographiques.

§ 3. — Application aux familles quelconques; points irréguliers, familles quasi-normales.

[**10**] Soit une famille de fonctions $f_n(z)$ qui n'est pas normale dans un domaine D. Quel que soit le nombre M il existera des fonctions f_n en nombre infini pour lesquelles l'inégalité

$$\mathfrak{D}f_n(z) > \mathrm{M}$$

sera vérifiée en un point au moins.

Nous appellerons $k(\mathrm{M}, n, \varepsilon)$ le nombre minimum de cercles de rayon ε nécessaires pour couvrir dans le domaine D les points où la fonction $f_n(z)$ vérifie l'inégalité

$$\mathfrak{D}f_n(z) > \mathrm{M}\,.$$

On a

$$k(\mathrm{M}, n, \varepsilon) < \frac{\mathrm{A}}{\varepsilon^2},$$

A étant une constante et ε étant assez petit.

Pour une fonction donnée de la suite, soit f_n, il existe toujours un nombre μ tel que si $\mathrm{M} > \mu$

$$k(\mathrm{M}, n, \varepsilon) = 0\,.$$

Supposons que la famille donnée soit quasi-normale d'ordre q, c'est-à-dire que de toute suite donnée on puisse extraire une suite qui ait q points irréguliers au plus. Cela revient à dire que, quel que soit ε, on peut lui associer un nombre μ tel qu'il y ait une suite infinie de n vérifiant l'inégalité

$$k(\mathrm{M}, n, \varepsilon) \leqslant q$$

pourvu que l'on ait :

$$\mathrm{M} > \mu\,.$$

En effet à l'extérieur de q cercles ayant pour centre les points irréguliers et pour rayon le nombre ε donné $\mathfrak{D}f_n$ est borné. Réciproquement d'ailleurs si une telle condition est réalisée on aura toujours des suites dont les points irréguliers seront enfermés dans k cercles de rayon ε arbitrairement petit, c'est-à-dire qu'il n'y a pas plus de k points irréguliers. Nous allons transformer cette condition.

Lorsque M et ε sont donnés et que n varie, l'entier k est borné supérieurement. Soit $K(M, \varepsilon)$ sa plus grande limite, c'est-à-dire le plus grand entier auquel k devient égal une infinité de fois. Je dis que :

THÉORÈME 11 : *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une famille de fonctions soit quasi-normale d'ordre* q *dans* D *est qu'il existe une fonction* $M(\varepsilon)$ *telle que l'inégalité*

$$M > M(\varepsilon)$$

entraîne l'inégalité

$$K(M, \varepsilon) \leqslant q$$

l'égalité étant réalisée une infinité de fois.

Supposons que la fonction $M(\varepsilon)$ n'existe pas, on pourra définir une valeur ε telle que l'inégalité $K(M, \varepsilon) \geqslant q + 1$ soit vérifiée par une suite de nombres $M_1 M_2 .., M_n ...$ augmentant indéfiniment.

Soit f_n une fonction de la famille telle que :

$$k(M_n, n, \varepsilon) = K(M_n, \varepsilon)$$

nous pouvons choisir les f_n toutes distinctes puisque $k = K$ est obtenu une infinité de fois, et aucune suite extraite de la suite f_n ne pourra vérifier l'inégalité

$$k(M, n, \varepsilon) \leqslant q \, .$$

Réciproquement si l'inégalité $K(M, \varepsilon) \leqslant q$ est possible l'ensemble des points irréguliers doit être couvert par q cercles de rayon ε au plus quelque petit que soit ε : donc il est formé de q points au plus.

Remarquons d'ailleurs que si cette inégalité cesse d'être vérifiée pour un nombre ε elle ne peut être vérifiée pour un nombre inférieur; $K(M, \varepsilon)$ est donc une fonction non décroissante de ε.

On pourrait énoncer des critères analogues pour les cas plus généraux de répartition des points irréguliers; par exemple pour les « *familles hyponormales* » de M. A. Bloch. Ce sont des familles telles que l'on puisse extraire de toute suite une suite pour laquelle l'ensemble des points irréguliers est de mesure linéaire nulle. Nous considérerons successivement $K(M, \varepsilon)$ déjà défini, puis $K_1(\varepsilon)$ nombre qui n'est pas dépassé par K lorsque ε étant donné, M est supérieur à $M(\varepsilon)$. Le critère sera le suivant :

THÉORÈME 12 : *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une famille de fonctions soit hyponormale est que l'on ait :*

$$\text{limite } \varepsilon K_1(\varepsilon) = 0$$

lorsque ε *tend vers zéro.*

Si nous voulons simplement que de toute suite on puisse extraire une suite dont l'ensemble irrégulier ait une mesure superficielle nulle il faudra que

$$\text{limite } \varepsilon^2 K_1(\varepsilon) = 0.$$

[**11**] En général nous ne pouvons pas conclure, du fait que la dérivée sphérique est bornée en un point, que la famille est normale en ce point. Par exemple les fonctions

$$f_n(z) = z + nz^2$$

sont telles que

$$f_n(0) = 0, \qquad f'_n(0) = 1$$

c'est-à-dire

$$\mathcal{D} f_n(0) = 1$$

et cependant la famille admet l'origine pour point irrégulier. Au contraire si une famille est normale en un point la dérivée sphérique est bornée en ce point.

Cependant si à la connaissance de la dérivée sphérique en un point on ajoute d'autres renseignements, on peut arriver à des conclusions précises. Rappelons notamment que M. Montel a démontré(1) la propriété suivante :

Si une famille quasi-normale de fonctions f_n vérifie dans un domaine D les propriétés suivantes : la fonction f_n ne prend pas plus de q fois la valeur 0 dans le domaine D ; en un point P_1 la fonction est bornée ainsi que ses $\alpha_1 - 1$ premières dérivées ; en un point P_2 la fonction est bornée ainsi que ses $\alpha_2 - 1$ premières dérivées ... en un point P_K la fonction est bornée ainsi que ses $\alpha_K - 1$ premières dérivées ; avec $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_K \geqslant q + 1$ la famille n'admet pas la constante infinie comme fonction limite ; en particulier si les fonctions de la famille sont holomorphes, la famille est normale.

Nous allons donner une propriété voisine de ce théorème et qui pourrait se ramener à un de ses cas particuliers : tous les α sauf un égaux à 1, l'autre étant égal à 2, pour les fonctions à zéros fixes, mais qui nous permettra ultérieurement de mettre en évidence des familles normales nouvelles en l'utilisant dans d'autres cas particuliers.

(1) P. MONTEL, *Leçons sur les familles normales* (Paris, Gauthier-Villars, 1927, p. 145).

THÉORÈME 13 : *Soit une famille de fonctions méromorphes, quasi-normale dans l'intérieur d'un domaine* D, *et vérifiant les propriétés suivantes :*

1°) *La distance d'un zéro à un pôle d'une fonction de la famille est bornée inférieurement.*

2°) *Il existe à l'intérieur de* D *un domaine* δ *dans lequel les fonctions de la famille ont au moins un et au plus* k *zéros.*

3°) *L'un des zéros* z_0 *intérieurs à* δ *est tel que le quotient de* $f'(z)$ *par le produit de ses distances aux autres zéros intérieurs à* δ *est borné supérieurement sans être nul.*

Aucun point limite de zéros d'une suite convergente ne peut être irrégulier.

En effet, soit une suite de fonctions convergeant dans un domaine intérieur à D et contenant δ ; si un point irrégulier est limite de zéros il ne peut pas être limite de pôles ; par suite la convergence a lieu vers la constante infinie. Soit alors dans δ un point limite des zéros z_0, et soit un petit cercle γ entourant z_0. On pourra toujours supposer en prenant γ assez petit que dans ce cercle la fonction donnée a exactement $m \leqslant k$ zéros autres que z_0. Soient $z_1 \ldots z_m$ ces zéros, formons la fonction

$$g_n(z) = \frac{\prod\limits_{i=0}^{m} (z - z_i)}{f_n(z)}$$

qui est holomorphe dans le cercle γ ; l'on a :

$$g_n(z_0) = \frac{\prod\limits_{i=1}^{m} (z_0 - z_i)}{f'_n(z_0)}$$

nombre dont le module est par hypothèse borné inférieurement. Donc le module de la fonction g_n doit toujours dépasser au moins une fois cette borne inférieure sur la circonférence de γ. Mais $\left| \prod\limits_{i=0}^{m} (z - z_i) \right|$ est borné supérieurement sur γ, et $f_n(z)$ par hypothèse tend vers l'infini uniformément sur γ. Donc, à partir d'un certain rang, $|g_n|$ sera inférieur à un nombre arbitraire sur tout le cercle γ. Il y a contradiction ; donc aucun point limite de zéros n'est un point irrégulier.

Remarquons d'ailleurs que, dire que la fonction est nulle en un point et que sa dérivée y est limitée revient à limiter la dérivée sphérique ; nous pouvons donc étendre le théorème au cas d'une valeur exceptionnelle variable ; je me bornerai à énoncer le résultat suivant :

THÉORÈME 14 : *Étant donné dans un domaine* D *une famille quasi-normale de fonctions dont la dérivée sphérique est bornée supérieurement sans être nulle en un point* P *intérieur à un domaine* δ *de* D, *s'il existe un domaine* δ' *auquel* δ *est complètement intérieur et tel qu'aucune fonction de la famille ne reprenne dans* δ' *la valeur* a_n *qu'elle prend en* P; *et s'il existe pour chaque fonction une valeur* A_n *qu'elle ne prend pas dans* δ' *et telle que la distance sphérique* $|A_n, a_n|$ *soit bornée inférieurement, la famille envisagée est normale dans* δ'.

D'autre part en analysant de plus près les conditions données par M. Montel, que nous rappelions ci-dessus, on peut énoncer la proposition suivante :

THÉORÈME 15 : *Si dans un domaine* D *une famille de fonctions* f_n *est quasi-normale et si en un point* P, *elle vérifie les propriétés suivantes :*

1°) *La fonction* f_n *et ses* k *premières dérivées sont bornées en* P.

2°) P *n'est pas limite de pôles des* f_n.

3°) *Dans tout cercle de centre* P *si petit soit-il, les fonctions* f_n *ont à partir d'un certain rang* k *zéros exactement.*

On a aussi les propriétés suivantes :

1°) *La famille est normale en* P.

2°) *Aucune fonction limite n'est la constante infinie.*

3°) *La seule valeur limite en* P *des* $k-1$ *premières dérivées est nulle, tandis que la* k^{me} *dérivée est inférieurement bornée, sauf si la famille admet la constante zéro comme fonction limite.*

En effet dans un domaine assez petit autour de P on a une famille de fonctions holomorphes auxquelles le critère de M. Montel s'applique : la famille est donc normale en P et ne peut pas avoir de limite infinie; puisque k zéros exactement tendent vers P la fonction limite a un zéro d'ordre k exactement, ou est constante. Comme la convergence uniforme se transmet aux dérivées successives on en conclut bien que les $k-1$ premières dérivées ont une limite nulle, et la k^{me} n'a une limite nulle que si la fonction limite est une constante.

D'autre part le procédé basé sur la considération de la fonction g_n peut s'étendre au cas où il y a une infinité de zéros au voisinage du point irrégulier.

THÉORÈME 16 : *Soit une famille quasi-normale de fonctions holomorphes* f_n *et un point irrégulier* P *limite d'une infinité de zéros. Soit* γ *un cercle quelconque de centre* P, *de rayon* r *ne contenant que ce point irrégulier ; la plus petite valeur de*

$$\frac{f'_n(z_0)}{\prod_i (z_0 - z_i)}$$

où l'on désigne par z_0 un zéro simple arbitraire de f_n intérieur à γ et par z_i tous les autres zéros, dépasse à partir d'un certain rang $\dfrac{A}{(\lambda r)^\nu}$.

λ désigne un nombre supérieur à 1, ν le nombre de zéros de f_n dans γ, A est un nombre positif arbitraire.

Le point P est en effet nécessairement irrégulier comme limite d'une infinité de zéros. A partir d'un certain rang $f(z)$ dépasse A sur tout le cercle γ, et les z_i sont, sauf un nombre fini d'entre eux, intérieurs à un cercle arbitrairement petit intérieur à γ. Par suite sur γ g_n est inférieur à $\dfrac{(1+\varepsilon)^\nu r^\nu}{A}$ et la valeur de g_n en un point intérieur est inférieure en module à ce terme. En prenant les inverses on en déduit l'énoncé donné.

Nous pouvons toujours prendre r assez petit pour que $\dfrac{A}{(\lambda r)^\nu}$ tende vers l'infini; d'ailleurs le produit $\prod\limits_i |(z_0 - z_i)|$ tend vers 0 car tous ses termes sont inférieurs à un nombre inférieur à 1, et le nombre de ces termes augmente indéfiniment par hypothèse.

[**12**] Comme application des notions précédentes, nous allons étudier la dérivée sphérique d'une fonction méromorphe autour d'un point singulier essentiel.

Soit $f(z)$ une fonction méromorphe, et $f_n(z)$ la famille des fonctions définies par l'égalité

$$f_n(z) = f(2^n z)$$

dans l'anneau (Γ)

$$\frac{1}{2} \leqslant |z| \leqslant 2.$$

Nous aurons l'égalité

$$\frac{\mathfrak{D} f_n(z_0)}{\underset{(2^n z_0)}{\mathfrak{D} f}\,(2^n z_0)} = \mathfrak{D}_{z_0}[2^n z_0].$$

Or dans l'anneau (Γ) la famille des fonctions $Z_n = 2^n z_0$ est normale et à limite constante : sa dérivée sphérique a une limite nulle lorsque n tend vers l'infini. Si donc nous pouvons affirmer que l'on a des indices n tels que en un point au moins d'un domaine intérieur à (Γ) $\mathfrak{D} f_n(z_0)$ est supérieur à une valeur positive fixe, nous pourrons affirmer qu'il y a une suite de points où la dérivée sphérique de la fonction donnée n'est pas bornée supérieurement; d'où par exemple :

Théorème 17 : *Si une fonction méromorphe admet des droites de Julia, il y a sur* *chacune de ces droites une suite de points tels que la dérivée sphérique devienne supérieure à tout nombre donné à l'avance dans une infinité de cercles ayant pour centres ces points et vus de l'origine sous un angle donné arbitrairement petit.*

Nous obtiendrons la même conclusion si la fonction est exceptionnelle d'Ostrowski et si l'une au moins des limites de la famille normale f_n n'est pas constante. Nous pouvons même conclure alors que sur toute droite issue de l'origine il y a une suite infinie de points sur lesquels la dérivée sphérique n'est pas bornée. C'est par exemple le cas de la fonction

$$f(z) = \frac{\prod\limits_{n=0}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{2^n}\right)}{\prod\limits_{n=0}^{\infty}\left(1 + \frac{z}{2^n}\right)}$$

correspondant à la suite, convergente dans l'anneau Γ

$$f_n(z) = \left[\prod_{p=1}^{p=n}\left(\frac{1 - 2^p z}{1 + 2^p z}\right)\right] f(z).$$

Quand n tend vers l'infini, le produit entre crochets ne peut converger vers $\frac{A}{f(z)}$ car il n'a pas le pôle $z = 1$; il ne peut converger ni vers zéro, ni vers l'infini, car le changement de z en $-z$ changerait Π en $\frac{1}{\Pi}$. Donc la limite des f_n n'est pas constante et la fonction $f(z)$ a bien les propriétés énoncées.

On peut obtenir directement dans le cas général une proposition moins précise : l'aire Riemannienne couverte par $f(z)$ sur une sphère est la limite des intégrales

$$I_n = \int\int_{D_n} \mathfrak{D}^2 f(z)\, d\omega$$

$d\omega$ étant l'élément d'aire sur la sphère de Riemann des z, et le domaine d'intégration D_n ne contenant pas le point à l'infini mais contenant tout autre point pour n assez grand. Si $\mathfrak{D}f(z)$ était bornée supérieurement par M on aurait

$$I_n < 4\pi M^2$$

et ceci est en contradiction avec le fait que le domaine Riemannien couvert dépasse toute limite.

Pour une fonction $f(z)$ exceptionnelle d'Ostrowski on peut limiter la croissance de $\mathcal{D}f$. Soit en effet la famille $f_t(z) = f(tz)$, elle est normale dans l'anneau Γ. En particulier sur le cercle de rayon 1 $\mathcal{D}f_t$ admet une borne supérieure M et l'on a :

$$\mathcal{D}f(z_0) = \frac{\mathcal{D}f_t(1)}{\underset{z=1}{\mathcal{D}}[z_0 z]}.$$

Or

$$\underset{z=1}{\mathcal{D}}[z_0 z] = |z_0| \frac{1+1}{1+|z_0|^2} = \frac{2|z_0|}{1+|z_0|^2}$$

d'où

$$\mathcal{D}f(z_0) = \mathcal{D}f_t(1) \frac{1+|z_0|^2}{2|z_0|}.$$

Si on suppose par exemple $|z_0| \geqslant 1$ on a $|z_0|^2 + 1 < 2|z_0|^2$

$$\mathcal{D}f(z_0) < (M-1)|z_0|.$$

Réciproquement si $\mathcal{D}f(z_0) < A\frac{|z_0|}{2}$ on a :

$$\mathcal{D}f(z_0) \underset{z=1}{\mathcal{D}}[z_0 z] < A \frac{2|z_0|^2}{1+|z_0|^2} \leqslant 2A$$

ce qui montre que la famille des fonctions $f_t(z)$ est normale dans un anneau entourant le cercle de rayon 1.

THÉORÈME 18 : *Pour qu'une fonction méromorphe soit exceptionnelle d'Ostrowski il faut et suffit que sa dérivée sphérique satisfasse à l'inégalité :*

$$\mathcal{D}f(z_0) < A|z_0|$$

dès que z_0 *est extérieur à un cercle donné.*

§ 4. — Familles de fonctions à valence bornée.

[**13**] On sait qu'une famille de fonctions dont la valence dans un domaine D ne dépasse pas un nombre p est quasi-normale d'ordre p dans l'intérieur de D. En particulier d'une suite de fonctions univalentes on peut extraire une suite convergeant uniformément dans l'intérieur du domaine, sauf peut-être en un point irrégulier. Je vais montrer que :

THÉORÈME 19 : *Si une suite de fonctions univalentes converge uniformément vers une fonction limite sauf en un point irrégulier, la fonction limite est constante.*

Le théorème est vrai, d'après les propriétés des familles quasi-normales, si toutes les fonctions envisagées sont holomorphes. Dans le cas général on sait que dans un cercle arbitrairement petit ayant le point irrégulier z_0 pour centre, à partir d'un certain rang, les fonctions f_n prennent toute valeur assignée, sauf peut-être une valeur exceptionnelle. Soit a une valeur prise par la fonction limite en $z \neq z_0$. Elle ne sera pas exceptionnelle si la limite n'est pas constante. Donc il y aura un indice n_0 tel que si $n > n_0$ $f_n(z)$ prenne la valeur a dans un cercle donné de centre z ne contenant pas z_0, et un indice n_1 tel que si $n > n_1$ $f_n(z)$ prenne la valeur a dans un cercle donné de centre z_0 sans point commun avec le précédent. La valeur a serait donc prise deux fois par $f_n(z)$ pour n assez grand. Il y a contradiction.

Nous savions déjà, que, étant données deux valeurs z_0 et z_1 dans un domaine D, si $f(z)$ est univalente et vérifie l'inégalité :

$$\mathfrak{D}f(z_0) > \mathrm{M}$$

il existe pour M dépassant une certaine limite une fonction $m(\mathrm{M}, z_0, z_1)$ telle que

$$\mathfrak{D}f(z_1) < m .$$

Si en effet cette propriété n'est pas réalisée on pourra trouver une suite de fonctions $f_n(z)$, univalentes dans D et telles que $\mathfrak{D}f_n(z_1) \geqslant \mathrm{M}_n$ et $\mathfrak{D}f_n(z_0) \geqslant \mathrm{M}_n$, la suite des nombres M_n augmentant indéfiniment; pour une telle famille toute suite extraite présenterait deux points irréguliers z_0 et z_1. Nous voyons maintenant que, la fonction limite étant toujours constante s'il y a un point irrégulier, nécessairement $m(\mathrm{M})$ tend vers o quand M augmente indéfiniment. Noùs énoncerons donc :

THÉORÈME 20 : *Étant donné deux points quelconques z_1 et z_2 d'un domaine* D, *il existe une fonction* $m(\mathrm{M})$, *tendant vers* o *lorsque* M *augmente indéfiniment, telle que si* $f(z)$ *est univalente dans* D, *l'inégalité*

$$\mathfrak{D}f(z_1) > \mathrm{M}$$

entraîne

$$\mathfrak{D}f(z_2) < m .$$

Comme corollaire immédiat nous énoncerons :

THÉORÈME 21 : *Si en un point z_1 la dérivée sphérique de la fonction f_n est inférieurement bornée, et si toutes les fonctions f_n sont univalentes, ou bien z_1 est le seul point irrégulier, ou bien la famille est normale et sans limite constante.*

[**14**] Ces propriétés sont susceptibles de généralisation pour les fonctions p-valentes.

Théorème 22 : *Soit une suite de fonctions p-valentes dans* D *convergeant uniformément vers une fonction limite sauf en q points irréguliers. Si $p = q$ la fonction limite est constante; si $p < q$ sa valence à l'intérieur de* D *est au plus $p - q$.*

Supposons en effet que l'on ait deux valeurs prises $p - q + 1$ fois par la fonction limite à l'intérieur de D; en reproduisant le raisonnement fait pour les fonctions univalentes, on voit que chacune de ces valeurs est exceptionnelle autour des points irréguliers. Or il n'y a qu'une valeur exceptionnelle au plus pour une suite quasi-normale. D'autre part dès qu'une valeur est prise a fois à l'intérieur de D, il y a tout un cercle entourant cette valeur qui est couvert a fois. Le théorème est donc démontré.

Considérons maintenant un groupe de p points $z_1 \dots z_p$, dans un domaine D, et supposons que l'on sache que $\mathfrak{D}f(z_1) > M$, $\mathfrak{D}f(z_2) > M \dots \mathfrak{D}f(z_p) > M$, la fonction f étant p valente dans le domaine D. Peut-on en déduire que $\mathfrak{D}f$ est bornée en un point z'_1? Il y a nécessairement une valeur M_1 de M à partir de laquelle la conclusion est possible : Si M est assez grand, on aura $\mathfrak{D}f(z'_1) < m$; dans le cas contraire on pourrait évidemment construire une suite possédant $p + 1$ points irréguliers (les z_i et le point z'_1). D'ailleurs si z'_1 se déplace dans un domaine d intérieur à D et ne contenant aucun z_i M_1 est inférieurement borné.

Soit un groupe de p points $z'_1 \dots z'_p$ distincts des z_i; il existe quel que soit M une fonction $m(M)$ telle qu'il y ait au moins un point z'_i tel que les inégalités

$$\mathfrak{D}f(z_1) > M \dots \mathfrak{D}f(z_p) > M \tag{1}$$

entraînent

$$\mathfrak{D}f(z'_i) \leqslant m(M).$$

Dans le cas contraire en effet on aurait une suite possédant les p points z'_i comme points irréguliers et dont la fonction limite ne serait pas constante à cause des inégalités en z_i. Bien entendu $m(M)$ tend vers zéro quand M augmente indéfiniment.

Nous obtenons ainsi deux résultats extrêmes. Donnons-nous maintenant $q - 1$ points $z'_1 \dots z'_{q-1}$ et supposons que nous ayons une suite infinie convergente dont en particulier les points $z'_1 \dots z'_{q-1}$ soient points irréguliers. A partir d'un certain rang ces fonctions ont une valence égale à $p - q + 1$ au plus dans le domaine D dont on retranche $q - 1$ petits cercles autour des points z'. Donc il existe pour les fonctions $(p - q + 1)$ valentes dans ce nouveau domaine une constante M_q telle que les inégalités (1) entraînent si $N > M_q$ l'inégalité

$$\mathfrak{D}f(z'_q) \leqslant m(M)$$

le point z'_q ayant été donné à l'avance. D'où

THÉORÈME 23 : 1°) *Étant donné dans un domaine* D *un groupe de* p *points* z_1, $z_2, \ldots, z_p$ *et un groupe de* q *points* $z'_1, z'_2, \ldots, z'_q$, *il existe un nombre* M_q *tel que les inégalités*

$$\mathfrak{D}f(z_1) \geqslant M, \qquad \mathfrak{D}f(z_2) \geqslant M, \qquad \mathfrak{D}f(z_p) \geqslant M$$

entraînent si $M > M_q$ *l'inégalité :*

$$\mathfrak{D}f(z'_i) \leqslant m(M)$$

pour l'un au moins des indices $i = 1, \ldots, q$;

2° *On a*

$$M_1 \geqslant M_2 \geqslant M_3 \ldots \geqslant M_{p-1} \geqslant M_p = 0$$

et

$$M_1 \neq 0;$$

3° *Si les* z'_i *sont dans un domaine donné ne contenant pas les* z_i, *les* M_i *sont bornés supérieurement.*

Comme application immédiate de ce théorème on peut énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME 24 : *Étant donné dans un domaine* D *une famille de fonctions* $f_n(z)$, *p-valentes dont la dérivée sphérique vérifie quel que soit* n *les inégalités :*

$$\mathfrak{D}f_n(z_1) > M, \qquad \mathfrak{D}f_n(z_2) > M \ldots \mathfrak{D}f_n(z_p) > M$$

en p *points donnés, ou bien les points* z_i *sont les points irréguliers d'une suite convergente donnée, ou bien la suite a au plus* $p - 1$ *points irréguliers.*

La remarque que les M_i sont bornés supérieurement si les z'_i sont dans un domaine d ne contenant pas les z_i permet d'ajouter à ce théorème le complément suivant :

THÉORÈME 25 : *Soit une famille de fonctions* $f_n(z)$ *p-valentes dans* D, *un groupe de* p *points* $z_1 \ldots z_p$, *et un domaine* d *ne contenant aucun* z_p; *il existe des nombres* $M_0 M_1 \ldots M_i \ldots M_{p-2}$, *tels que si toutes les fonctions de la famille vérifient*

$$\mathfrak{D}f(z_1) > M_i, \qquad \mathfrak{D}f(z_2) > M_i \ldots \mathfrak{D}f(z_p) > M_i$$

une suite convergente de la famille aura au plus i *points irréguliers dans* d.

[**15**] En particulier si nous fixons la valeur de la fonction et de sa dérivée première en un point, nous fixons *ipso facto* la valeur de la dérivée sphérique. Nous

arrivons ainsi à l'ensemble des énoncés ci-après; une partie d'entre eux est déjà connue ou peut être donnée comme conséquence du critère de M. Montel rappelé au § 11; nous les laisserons subsister ici pour conserver la symétrie des résultats.

THÉORÈME 26 : *Étant donné une famille de fonctions, p-valentes dans un domaine donné, et qui prennent des valeurs données en p points donnés; si leurs dérivées premières prennent aussi en ces points des valeurs fixes non nulles, cette famille est quasi-normale d'ordre $p-1$ au plus, à moins que les p points donnés ne soient irréguliers.*

En énonçant le dernier théorème du § 14 sous cette nouvelle forme, nous pouvons de même établir que :

THÉORÈME 27 : *Étant donné une famille de fonctions méromorphes, p-valentes dans un domaine D, et prenant ainsi que leurs dérivées premières des valeurs données en p points donnés; à chaque domaine d intérieur à D et ne contenant aucun des points donnés on peut associer un nombre m, tel que si les valeurs données aux dérivées sont supérieures en module à m la famille est normale dans le domaine d.*

Supposons maintenant une famille p-valente pour laquelle nous nous donnons les valeurs de la fonction et de la dérivée $\neq 0$ en $p+1$ points. Nous sommes sûrs *a priori* que la famille est quasi-normale d'ordre $p-1$ au plus. Car si elle était quasi-normale d'ordre p l'un au moins des points donnés ne serait pas irrégulier, et la valeur de la dérivée sphérique y est donnée et non nulle. Supposons que les dérivées sphériques données soient choisies de la façon suivante : la première étant arbitraire en z_1, nous choisirons les autres, supérieures à la borne supérieure en leurs points respectifs de la dérivée sphérique d'une fonction univalente ayant pour dérivée sphérique en z_1 la valeur assignée. Nous étant ensuite donné la dérivée en z_2, nous bornerons de même inférieurement les dérivées aux points d'indice >2, et ainsi de suite. Si une suite convergente extraite de la famille présentait $p-1$ points irréguliers exactement, elle aurait une fonction limite univalente; or deux au moins des points donnés sont réguliers, et nous avons choisi les dérivées sphériques en ces points de telle sorte qu'elles ne puissent pas appartenir à une fonction univalente. Donc la famille est quasi-normale d'ordre $p-2$ au plus. D'où :

THÉORÈME 28 : *Étant donnée une famille de fonctions méromorphes, p-valentes dans un domaine D, dont nous nous fixons les valeurs en $p+1$ points, et les valeurs $u_1, u_2, \ldots u_{p+1}$ de la dérivée en ces points, il existe p fonctions $m_1, m_2 \ldots m_p$, telles que si les inégalités*

$$u_2 > m_1(u_1), \qquad u_3 > m_2(u_2, u_1) \ldots u_{p+1} > m_p(u_p, u_{p-1} \ldots u_1)$$

sont vérifiées, la famille est quasi-normale d'ordre $p-2$ au plus dans le domaine D.

Soit toujours une famille de fonctions p-valentes dont nous nous fixons les valeurs en p points, mais supposons que les valeurs fixées soient toutes égales entre elles; fixons aussi des valeurs (non nulles) pour la dérivée; je vais montrer que la famille ne peut pas avoir d'autres points irréguliers que les points donnés. Supposons en effet qu'il y ait $p - q$ points donnés irréguliers et en outre $h \leqslant q - 1$ points irréguliers distincts des premiers pour une suite convergente. La fonction limite a pour valence $q - h$, et ne peut être constante. Or aux q points donnés restants supposés réguliers cette fonction prendrait la même valeur; il y a contradiction. D'où :

THÉORÈME 29 : *Étant donné une famille de fonctions p-valentes méromorphes, prenant une même valeur assignée en p points donnés et dont on se donne la dérivée en ces points. Cette famille ne peut avoir d'autres points irréguliers que les points donnés.*

Il peut d'ailleurs effectivement arriver que les points donnés soient irréguliers. Par exemple la famille des fonctions

$$f_n(z) = \frac{z}{1 - nz},$$

univalentes dans tout domaine, nulles et de dérivée 1 à l'origine, a l'origine pour point irrégulier.

Mais si nous savons que les points donnés ne peuvent être irréguliers, nous en concluerons que la famille est normale. En particulier si les fonctions de la famille ont toutes une même valeur exceptionnelle nous sommes dans un cas d'application du théorème énoncé au n° 11 : en effet autour d'un des points P donnés nous pouvons tracer un cercle dans lequel la valeur prise en P n'est pas reprise (la fonction est p-valente et prend cette valeur en p points fixes); il y a une valeur exceptionnelle fixe. Donc la famille est normale en P. En particularisant les valeurs des constantes nous énoncerons :

THÉORÈME 30 : *Étant donné un domaine* D, *q points* P_i *intérieurs à* D, *et un nombre positif donné* n_0 *la famille* F *des fonctions holomorphes p-valentes dans* D, *n'ayant que les points* P_i *pour zéros, et dont la dérivée prend aux points* P_i *une valeur égale en module à* n_0, *est une famille normale.*

Comme la fonction limite d'une suite extraite de la famille F ne peut pas être la constante infinie, et ne peut être nulle en un point distinct des P_i, nous en concluons immédiatement :

THÉORÈME 31 : *En chaque point d'un domaine* D, *le module d'une fonction de la famille* F *est compris entre deux nombres ne dépendant que du point; le module de la dérivée d'une fonction de la famille est borné supérieurement en fonction de la position du point.*

D'une manière plus générale, si nous fixons les p zéros P_i d'une famille de fonctions méromorphes et p-valentes dans D, et les dérivées des fonctions de la famille en ces points ; si en outre les fonctions de la famille prennent au plus $p-q$ fois une valeur donnée A, la famille sera quasi-normale d'ordre $p-q$ au plus. Soit en effet une suite de fonctions extraite de la famille. Il y a au moins un point P_i au voisinage duquel une infinité de fonctions de la famille ne prend pas la valeur A. Sinon en effet A serait pris p fois par toute fonction de la famille. Extrayons une nouvelle suite de cette forme et procédons de même jusqu'à ce que nous ayons extrait de la famille une suite par laquelle A est exceptionnel au voisinage de q des points donnés. Ces points sont nécessairement réguliers pour la suite envisagée, et nous avons ainsi montré que :

Théorème 32 : *Étant donné une famille de fonctions méromorphes, p-valente dans un domaine* D, *ayant ses p zéros en des points fixes de* D, *et dont la dérivée en un des zéros* z_0 *a une valeur fixe non nulle, et ayant au plus* $r<q$ *pôles dans* D, *la famille est quasi-normale d'ordre r au plus; les seuls points irréguliers possibles sont les zéros lorsque* z_0 *n'est pas limite de pôles.*

[**16**] Nous pouvons aussi étudier des familles pour lesquelles il y a un nombre non limité de zéros, mais qui occupent des positions fixes; soit par exemple une famille de fonctions, définies dans un domaine D, quasi-normale dans tout domaine intérieur à D, les fonctions de la famille ayant au plus q pôles dans D et leurs zéros étant fixes; supposons que les dérivées soient bornées inférieurement et supérieurement en module en $q+1$ des zéros Z. Extrayons une suite, convergente dans un domaine D_n intérieur à D mais contenant les $q+1$ zéros Z; et soit k le nombre des points irréguliers qui ne sont pas des zéros; ils sont limites de pôles, donc on a $k \leqslant q$. Soit r le nombre des zéros qui sont points irréguliers. On a $r \leqslant q-k$. Sans cela en effet un de ces zéros au moins ne serait pas limite de pôles; mais en outre un des zéros Z n'est pas limite de pôles et ne peut être point irrégulier puisque la dérivée y est bornée en module. S'il y a un point irrégulier qui n'est pas limite de pôles, la convergence a lieu vers la constante infinie, ce qui est contradictoire avec l'existence du point régulier Z où toutes les fonctions s'annulent.

D'autre part s'il y a des points irréguliers distincts des zéros, la convergence a lieu vers la constante zéro, ce qui n'est pas puisqu'en Z la dérivée ne peut pas tendre vers zéro. D'où :

Théorème 33 : *Étant donné une famille de fonctions méromorphes dans* D, *quasi-normale dans tout domaine intérieur à* D, *dont les zéros appartiennent à un ensemble infini de points assignés, et dont la dérivée prend en* $q+1$ *des zéros donnés des valeurs bornées supérieurement et inférieurement en module, la famille est quasi-normale d'or-*

dre q au plus dans le domaine D, *et les points irréguliers d'une suite convergente sont des zéros limites de pôles.*

Bien entendu le théorème s'applique au cas où l'on donne un nombre fini de zéros. Pour savoir que la famille est quasi-normale il suffit de savoir que le nombre de ses points unités intérieurs à un domaine arbitraire D_n intérieur à D est borné; car la famille sera quasi-normale dans le domaine D_n duquel on retranche les zéros, puisque o, 1 et ∞ y sont quasi-exceptionnels, t les points retranchés sont isolés; si nous prenons en particulier des fonctions holomorphes, la famille est normale. D'où :

THÉORÈME 34 : *Si une famille* G *de fonctions holomorphes dans* D *a des zéros donnés dans* D, *sa dérivée prenant des valeurs assignées non nulles en ces zéros; et si le nombre de fois que la fonction de la famille prend la valeur* 1 *dans tout domaine intérieur est limité pour chaque domaine, la famille est normale.*

Une fonction limite de la famille G ne peut être égale à la constante infinie, et ne peut pas s'annuler dans D en un point distinct des zéros assignés. D'où la conclusion habituelle sur la limitation du module :

THÉORÈME 35 : *Si une fonction $f(z)$ holomorphe dans le cercle unité prend la valeur* o *en des points assignés, et si sa dérivée a une valeur assignée non nulle en ces points; le module de la fonction est borné supérieurement et inférieurement, le module de sa dérivée est borné supérieurement en fonction de la position du point z_0, des modules des dérivées assignées, et du nombre de racines de $f(z) - 1$ inférieures en modules à z_0.*

Nous pouvons aussi limiter l'ordre d'une famille à zéros fixes, en fixant la position de ses pôles, et les résidus en ces points. Soit par exemple une fonction p-valente dans un domaine D, dont les zéros sont p points fixes, et les pôles p points fixes, les dérivées aux zéros et les résidus aux pôles étant donnés. Dans tout domaine intérieur à D ne contenant pas les pôles, la famille est holomorphe, p-valente, à zéros fixes, donc normale; de même dans tout domaine contenant les pôles et ne contenant pas les zéros elle est normale (il suffit d'échanger les rôles de o et ∞). Donc la famille est normale dans D, et nous énoncerons :

THÉORÈME 36 : 1) *La famille des fonctions p-valentes dans* D *dont les p zéros et les p pôles sont des points donnés (distincts) et dont les dérivées aux zéros et les résidus ont un module donné est une famille normale.*

2) *Pour une fonction p-valente dans* D *dont les p zéros et les p pôles sont des points donnés le module en un point donné est borné supérieurement et inférieurement, le module de la dérivée est borné supérieurement, en fonction des modules des dérivées aux zéros et des résidus aux pôles, et de la position du point.*

De même, si nous nous donnons une famille de fonctions ayant toutes des zéros donnés, et des pôles donnés (en nombre infini), et le module de la dérivée en chaque zéro et du résidu en chaque pôle ayant une valeur donnée, si la famille est quasi-normale en tout domaine intérieur à D, elle sera normale dans D (elle est normale d'une part dans D moins un domaine contenant les pôles, et d'autre part dans D moins un domaine contenant les zéros). En particularisant le domaine D, et la condition de « quasi-normalité », nous obtenons un énoncé qui généralise celui obtenu précédemment pour les fonctions holomorphes à zéros donnés (théorème 34) :

THÉORÈME 37 : *Pour toute fonction méromorphe dans le cercle unité et y présentant des zéros donnés et des pôles donnés tous simples le module en un point z_0 est borné supérieurement et inférieurement, le module de la dérivée est borné supérieurement, en fonction des modules des dérivées aux zéros, des modules des résidus, et du nombre de points unités inférieurs en module à $|z_0|$.*

Les résultats relatifs à trois suites de points où $f(z)$ a la même valeur sont d'une nature plus immédiate.

THÉORÈME 38 : *La famille des fonctions méromorphes dans un domaine* D *et ne prenant les valeurs* 0, 1 *et* ∞ *qu'en des points donnés sans point d'accumulation intérieur à* D *est une famille normale.*

Elle est en effet normale en un point distinct des points assignés, puisqu'elle y présente trois valeurs exceptionnelles; donc elle est quasi-normale dans tout domaine intérieur à D, les seuls points irréguliers étant les points assignés, mais autour de chacun d'eux il y a deux valeurs exceptionnelles; donc ils ne peuvent être irréguliers et le théorème est démontré.

Le théorème de limitation des modules qu'on peut déduire de ce critère de famille normale n'est au fond pas distinct du théorème de Schottky généralisé pour un domaine quelconque; il comporte toutefois un élément nouveau, parce qu'il montre que les dérivées aux zéros et aux points unités et les résidus aux pôles sont bornés supérieurement.

Si nous supposons maintenant que nous nous donnions non seulement les positions des zéros, des pôles et des points unités, mais encore l'ordre de multiplicité des zéros et des pôles, toute fonction de la famille est égale au produit d'une fonction fixe de la famille par une fonction φ holomorphe dans le domaine D, non nulle, et égale à un aux points unités de f et peut-être en d'autres points. Les fonctions φ forment nécessairement une famille normale; d'où :

THÉORÈME 39 : *La famille des fonctions* φ *holomorphes et différentes de zéro dans un domaine* D, *qui prennent la valeur* 1 *en des points donnés, et ne deviennent jamais égales en dehors de ces points à une fonction donnée* f *ne prenant la valeur* 1 *qu'en ces points est une famille normale.*

Soit en effet f la fonction donnée, la famille envisagée est constituée par les fonctions φ définies comme quotient de deux fonctions ayant mêmes zéros, mêmes pôles, et mêmes points unités que la fonction $\frac{1}{f}$, à savoir la fonction $\frac{\varphi}{f}$ et la fonction $\frac{1}{f}$.

Remarque : Les théorèmes énoncés ci-dessus supposent essentiellement que les familles envisagées comprennent une infinité de termes; on sait [1] que si D comprend le plan tout entier moins un point, il n'en est pas ainsi en général : une fonction méromorphe est déterminée par la répartition de ses zéros, pôles et points unités (à une exception près qui fournit deux fonctions f). De même s'il existe une fonction définie dans le cercle unité et d'ordre positif prenant les valeurs 0, 1 et ∞ en des points donnés, il en existe au plus une autre. Au contraire si l'on a une fonction telle que $\dfrac{T(r)}{\log \frac{1}{1-r}}$ tende vers zéro pour r tendant vers 1, il peut en exister une infinité d'autres ayant trois distributions communes avec elle. Dans ce cas les trois distributions données vérifient la relation $\lim \dfrac{N(r)}{\log \frac{1}{1-r}} = 0$.

Au contraire les familles ne comportant que 2 ou 1 distributions fixes comprennent toujours une infinité de termes. Enfin nous obtenons aussi une famille infinie dans le cas général, en nous donnant trois distributions et en ne fixant pas l'ordre de multiplicité en chaque point ou en admettant que la distribution peut ne pas comprendre tous les points donnés. Le théorème de famille normale montre alors que cet ordre est borné en chaque point, et on obtient ainsi le résultat suivant :

Théorème 40 : *Étant données trois suites de points δ_1 δ_2 δ_3 il n'est pas possible de construire une fonction méromorphe dans un domaine* D, *s'annulant uniquement en des points de δ_1, devenant égale à 1 seulement en des points de δ_2, ayant des pôles seulement en des points de δ_3, l'ordre de multiplicité du zéro de f, $1-f$, ou $\frac{1}{f}$ dépassant en un de ces points un nombre qui ne dépend que des trois suites données et du point choisi.*

Il est possible aussi de généraliser encore les divers critères de famille normale énoncés dans ce paragraphe au sujet des fonctions ayant plusieurs distributions fixes, en remplaçant la condition : la valeur 0 est prise en des points fixes et la valeur ∞ en des points fixes, par la condition : les valeurs 0 ou ∞ ne sont prises

---

[1] R. Nevannlina, *Le théorème de Picard Borel et la théorie des fonctions méromorphes.* Paris, Gauthier-Villars, 1929.

qu'en des points faisant partie d'un ensemble dénombrable donné sans point d'accumulation à l'intérieur du domaine D; en résumé :

a) *Si une famille de fonctions méromorphes dans le cercle unité a ses zéros ou ses pôles pris parmi les points d'un ensemble dénombrable donné sans point d'accumulation intérieur à* D, *les modules de la fonction et de sa dérivée en un point* z_0 *sont bornées en fonction des dérivées sphériques aux zéros et aux pôles, et du nombre de points unités inférieurs en module à* $|z_0|$.

b) *Si une famille de fonctions* f_n *a ses zéros, ses pôles et ses points unités pris parmi les points d'un ensemble donné du type étudié, les modules de* f, $1-f$, $\frac{1}{f}$, $\mathfrak{D}f$, *sont bornés supérieurement et inférieurement en chaque point par un nombre ne dépendant que de l'ensemble donné et du point envisagé.*

Enfin nous pouvons énoncer d'une manière plus générale encore :

Théorème 41 : *Soit une famille de fonctions* $f_n(z)$, *définies dans un domaine* D, *telles que :*

1°) *A l'intérieur de tout domaine intérieur à* D, *le nombre de zéros, de points unités et de pôles est borné supérieurement.*

2°) *La distance sphérique d'un zéro à un pôle ou à un point unité, d'un pôle à un point unité d'une même fonction, est bornée inférieurement dans tout domaine* D' *intérieur à* D.

La famille des fonctions f_n *est normale dans* D.

En effet elle est normale dans un domaine D' : dans D' les fonctions de la famille prennent les trois valeurs 0, 1 et ∞ un nombre limité de fois, donc la famille est quasi-normale dans D'. D'autre part un point irrégulier serait tel que dans son voisinage toute fonction de la famille à partir d'un certain rang prenne deux au moins des trois valeurs étudiées. C'est incompatible avec l'hypothèse 2°.

Les conditions ainsi énoncées sont nécessaires pour que la famille soit normale et sans limite égale à l'une des constantes 0, 1 ou ∞. Mais elles ne sont pas suffisantes pour entraîner ce résultat. Si la famille est normale et si le nombre des pôles dans D' d'une fonction de la famille dépasse une certaine limite, le nombre des zéros et des points unités est borné, et même devient nul à partir d'un certain rang dans toute suite où le nombre des pôles n'est pas borné. Mais la condition n'est cette fois pas suffisante dans le cas général; si toutefois on sait déjà que la famille est quasi-normale, on pourra conclure, les valeurs 0 et 1 devant être exceptionnelles pour un point irrégulier éventuel; il est donc impossible d'énoncer une condition nécessaire et suffisante uniquement basée sur le nombre de points de 3 distributions.

§ 5. — Fonctions dérivables non analytiques.

[17] On peut étendre quelques-unes des propriétés de la dérivée sphérique étudiées ci-dessus aux tranformations régulières non nécessairement conformes du plan définies par un système de deux fonctions réelles, continues, développables en chaque point en série de Taylor.

En un point à distance finie nous pouvons définir la dérivée en module de la transformation sur un chemin donné tendant vers le point et y admettant une tangente; ce sera la limite du rapport

$$\frac{\sqrt{(Y-Y_0)^2+(X-X_0)^2}}{\sqrt{(y-y_0)^2+(x-x_0)^2}}$$

quand y tend vers y_0, x vers x_0, le rapport $\dfrac{y-y_0}{x-x_0}$ ayant une limite donnée (X et Y étant les coordonnées du point transformé de x, y).

Nous définirons ensuite la dérivée sphérique en multipliant le rapport ci-dessus par le facteur $\dfrac{1+x^2+y^2}{1+X^2+Y^2}$. En tout point régulier il y a une dérivée sphérique maximum et une dérivée sphérique minimum. D'autre part pour une suite uniformément convergente de fonctions régulières, il y aura convergence uniforme de la dérivée si le point étudié est régulier; convergence de la dérivée sphérique vers o si la convergence a lieu vers la constante infinie; enfin si l'on a convergence vers une transformation à pôle isolé il y a encore convergence de la dérivée sphérique. Comme inversement si la dérivée sphérique maximum est bornée il y a égale continuité sphérique, on obtient le résultat suivant :

Théorème 42 : *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une famille de systèmes de deux fonctions de deux variables réelles, régulières, à pôles isolés, soit normale dans* D, *est que la dérivée sphérique maximum des fonctions de la famille soit bornée dans l'intérieur du domaine* D.

Nous avons supposé jusqu'à présent que les transformations étudiées ne faisaient pas correspondre à une ligne du plan x, y un même point du plan X, Y; la condition sous la forme que nous lui avons donnée subsiste encore pour des transformations de ce type, X et Y étant toujours supposées régulières : la dérivée sphérique a encore un sens dans ce cas, mais nous aurons une dérivée sphérique minimum nulle.

Soit une transformation régulière

$$X = f(x, y),$$
$$Y = g(x, y)$$

et supposons que nous ne soyons pas en un pôle de la transformation (ce que nous pouvons toujours faire, une inversion ayant l'origine pour pôle dans le plan XY ne changeant pas la dérivée sphérique). D'après un résultat classique, la condition de non univalence locale (c'est-à-dire pour que la transformation ne soit pas biunivoque autour de $x_0 y_0$) s'écrit :

$$\frac{D(f, g)}{D(x_0, y_0)} = 0.$$

Or calculons la valeur de la dérivée ordinaire en module dans la direction

$$\cos\varphi(x - x_0) + \sin\varphi(y - y_0) = 0.$$

On trouve

$$\sqrt{\cos^2\varphi\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2\right] - 2\sin\varphi\cos\varphi\left[\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial x}\cdot\frac{\partial g}{\partial y}\right] + \sin^2\varphi\left[\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2\right]}.$$

Cette forme quadratique en $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$ a pour discriminant

$$\Delta = \left[\frac{D(f, g)}{D(x, y)}\right]^2.$$

Elle est donc bornée inférieurement par un nombre positif si la transformation est localement univalente, et s'annule, dans le cas où il n'y a pas univalence, pour une valeur convenable de φ. Donc :

THÉORÈME 43 : *La condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait univalence locale d'une transformation régulière du plan réel est que la dérivée sphérique minimum ne soit pas nulle.*

Nous pourrons donc étendre les théorèmes sur les familles normales à limites constantes ou univalentes localement établis pour le cas des fonctions holomorphes ou méromorphes; mais pour avoir une limite constante il faut que la dérivée maximum tende vers 0, tandis que pour avoir une limite univalente localement il faut que la dérivée minimum ne tende pas vers 0.

CHAPITRE II

Décomposition cellulaire d'un domaine de méromorphie d'une fonction.

Dans tout ce chapitre, sauf indication contraire, nous étudierons une fonction $f(z)$ méromorphe dans un domaine fermé D, et nous chercherons à conclure de certaines propriétés particulières de $f(z)$ à des propriétés de domaines d'univalence de cette fonction intérieurs à D. Nous dirons que deux points de D sont ***homologues*** par rapport à $f(z)$, ou, plus brièvement ***homologues*** s'il n'y a pas de confusion possible, lorsque $f(z)$ prendra la même valeur en ces deux points.

§ 1. — Fonction holomorphe, dérivée ne s'annulant pas.

[18] Théorème 1 : *Soit un domaine fini* D, *tel que $f(z)$ soit holomorphe à son intérieur et que l'on y ait partout $f'(z) \neq 0$. Il existe trois nombres positifs d, m, n tels que si z_1 et z_2 sont les affixes de deux points intérieurs à* D, *l'inégalité*

$$|z_1 - z_2| < d$$

entraîne les inégalités

$$m < \left|\frac{f(z_1) - f(z_2)}{z_1 - z_2}\right| < n.$$

Il existe un nombre r tel que le rayon de convergence du développement de Taylor de la fonction $f(z)$ en un point du domaine D soit supérieur à r. Soit alors h un accroissement inférieur en module à $k_1 r$, avec $k_1 < 1$ et soit

$$\begin{aligned} f(z_1 + h) - f(z_1) &= hf'(z_1) + h^2\left[\frac{f''(z_1)}{2!} + h\frac{f'''(z_1)}{3!} + \dots\right]. \\ &= hf'(z_1) + h^2\delta(z_1) \end{aligned}$$

la série $\delta(z_1)$ est absolument convergente quel que soit z_1 pour $|h| \leqslant k_1 r$. Son module est borné supérieurement pour une valeur donnée de z_1 par

$$\Delta(z_1) = \frac{|f''(z_1)|}{2!} + k_1 r\frac{|f'''(z_1)|}{3!} + \dots.$$

Cette fonction de z_1 est elle-même bornée supérieurement dans D. Sinon, par la méthode classique de subdivisions successives, on peut définir un point z_0 tel que dans tout domaine si petit qu'il soit entourant z_0 il y a des points où cette expression ne sera pas bornée. Donc la série de Taylor de $f(z)$ relative à z_0 aurait un rayon de convergence au plus égal à $k_1 r < r$, il y a contradiction. Soit M la borne supérieure dont nous montrons ainsi l'existence.

$$\frac{f(z_1+h)-f(z_1)}{h}=f'(z_1)\left[1+h\frac{\delta(z_1)}{f'(z_1)}\right].$$

Mais $f'(z)$ est continue dans D et ne s'y annule pas. Donc on peut trouver deux nombres ρ_1 et ρ_2 positifs tels que l'on ait dans tout le domaine :

$$\rho_1 < |f'(z)| < \rho_2.$$

Si nous prenons $|h_1| < k_2 \frac{\rho_1}{M}$ avec $k_2 < 1$ on aura :

$$|1-k_2| < \left|1+\frac{\delta(z)}{f'(z)}\right| < |1+k_2|.$$

C'est bien la conclusion annoncée, il suffit de poser

$$d=\min\left(k_2\frac{\rho_1}{M},\, k_1 r\right),$$

$$m=(1-k_2)\rho_1, \qquad n=(1+k_2)\rho_2.$$

Ces résultats peuvent se déduire aussi de l'intégrale de Cauchy

$$\delta(z_1)=\frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z_1)^2(\zeta-z_1-\lambda)}$$

C étant un contour extérieur à D : on peut ainsi mettre en évidence une borne supérieure de $\delta(z)$.

On peut aussi tirer de ce raisonnement la conclusion que dans le domaine fermé D la fonction

$$\varphi(z,h)=\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$$

tend uniformément vers la fonction $f'(z)$ lorsque h tend vers o.

Si la distance d_1 de z_1 et z_2 est inférieure ou égale à d, $|f(z_2)-f(z_1)|$ est plus grand que md_1, et par suite n'est pas nul. Donc tout cercle de rayon $\frac{d}{2}$ intérieur au domaine D constituera un domaine d'univalence pour la fonction $f(z)$. Ce résultat est valable même pour les cercles de rayon $\frac{d}{2}$ dont le centre est dans D mais ayant des points extérieurs à D. En effet le raisonnement initial n'a utilisé que le fait que z_1 est intérieur à D.

Supposons que la fonction $f(z)$ soit multivalente d'ordre p à l'intérieur du domaine D, toujours sans que la dérivée s'annule dans D. A chaque point z_1 de D correspondent dans D au plus $p-1$ points homologues que nous appellerons $z_2, z_3, \ldots, z_k$, avec $k \leqslant p-1$. Autour de ces points comme centres, traçons des cercles de rayon $\lambda \leqslant \frac{d}{2}$. Supposons, ce qui est évidemment toujours possible, que tous ces cercles soient intérieurs au domaine D. Dans le plan de la variable $Z = f(z)$ ces cercles ont pour images des domaines « étalés » qui ont en commun le point $Z_1 = f(z_1)$, et chacun de ces domaines couvre en entier le cercle de rayon λm et de centre Z_1. Ces domaines ont donc en commun un nouveau domaine, dont une partie δ au moins est d'un seul tenant, située autour de Z_1 et couvrant le cercle de centre Z_1. En revenant au plan des z_1 on trouve que à δ correspondent biunivoquement k domaines, qui entourent respectivement les points $z_1, \ldots, z_k$, et qui couvriront chacun le cercle de centre z_i et de rayon $\lambda\frac{m}{n}$. Donc :

THÉORÈME 2 : *Étant donné k points homologues $z_1, z_2, \ldots, z_n$ intérieurs à D, il est possible de tracer autour de chacun d'eux un domaine δ_i tel que :*

1°) *$f(z)$ est univalente dans chaque domaine δ_i, et toute valeur prise dans l'un est prise dans tous les autres.*

2°) *à l'intérieur de chaque domaine δ_i on peut tracer un cerle de diamètre $a\frac{m}{n}$.*

a désigne ici la plus petite des longueurs d, plus haut définie, et l, plus courte distance d'un des points z_i à un point de la frontière.

Si l'un des points homologues était sur le contour, nous aurions un résultat analogue mais de forme un peu moins simple, qui résultera implicitement de la suite.

[**19**] Soient, à l'intérieur de D, deux points homologues z_1 et z_2. Traçons à partir de z_1 un arc de courbe continu, intérieur à D. Il part de z_2 un arc formé de points respectivement homologues des points du premier, continu, la correspondance entre les deux arcs étant bicontinue; puisque $f'(z_2)$ est $\neq 0$ cet arc est bien déterminé (dans le cas contraire il partirait de z_2 un nombre fini de tels arcs); cela tient à la possibilité de faire l'inversion de $f(z)$ au voisinage de tout point du domaine D. Nous pouvons être arrêtés dans le prolongement de l'arc issu de z_2 par la rencontre du contour de D, c'est-à-dire que l'arc issu de z_1 va rencontrer un point homologue d'un point du contour. Nous appellerons *arcs homologues* deux arcs ainsi définis.

Je désignerai dans la suite par *arc élémentaire* un arc de courbe analytique dans le plan des z, sans point double, et convexe. On sait alors qu'une transformation conforme transforme une courbe formée d'un nombre fini d'arcs élémentaires en une autre courbe formée d'un nombre fini, pouvant être différent du premier, d'arcs élémentaires, et que deux courbes qui sont formées d'un nombre fini d'arcs élémentaires ne se coupent qu'en un nombre fini de points.

THÉORÈME 3 : *Si le contour* C *est une courbe de Jordan non composée d'arcs homologues, il y a des points intérieurs au domaine qui ont un homologue sur le contour.*

Soit en effet un point z_1 intérieur au domaine, traçons un arc continu allant de z_1 à un point P du contour, par l'intérieur du domaine D. Supposons z_1 choisi de façon à posséder un homologue z_2 intérieur à D. Trois cas sont possibles *a priori* : ou bien quand on atteint P sur z_1P, on atteint sur l'arc homologue un point intérieur, et le théorème est démontré ; ou bien l'arc issu de z_2 atteint le premier le contour, et le théorème est encore démontré ; ou bien les deux arcs vont atteindre simultanément le contour ; c'est en des points distincts qu'ils doivent l'atteindre, sinon du même point P partiraient deux arcs distincts homologues entre eux, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse initiale $f'(z) \neq 0$. Si la dernière possibilité se produit quels que soient P, z_1 et z_2, à tout point du contour correspond au moins un homologue sur le contour ; je dis qu'à un arc assez petit du contour correspond un arc homologue. Soit en effet P un point du contour, P_1 un point homologue. Il existe un arc du contour ayant une extrémité en P qui a pour homologue un arc ayant une extrémité en P_1. Comme les points P_1 sont en nombre fini, il est possible de trouver un arc A du contour aboutissant en P et ayant des homologues A_1 issus de tous les points P_1. Je vais montrer que l'un au moins des arcs A_1 est tracé sur le contour. Soit en effet une suite infinie de points p situés sur l'arc A et tendant vers P. Si aucun des A_1 n'est tracé sur le contour on peut choisir les p de manière que leurs homologues p_1 sur les A_1 ne soient pas sur le contour C. D'autre part, chaque point p a au moins un homologue p' sur le contour, et les p' ont au moins un point d'accumulation sur C Mais ce point d'accumulation est nécessairement P ou un homologue de P. Ce n'est pas P à cause de l'univalence locale, c'est donc l'un des points P_1. Mais alors on a une suite infinie de p' sur le contour, tendant vers ce P_1, et une suite infinie de p_1 homologues de ces p'_1 sur l'arc A_1 issu de ce P_1, tendant aussi vers P_1. Nous avons supposé la fonction univalente au voisinage de P_1, il y a contradiction. Donc si aucun point du contour n'a d'homologues intérieurs, tout arc du contour a au moins un arc homologue sur le contour.

Nous obtiendrons alors les arcs Γ homologues d'arcs du contour C par le procédé suivant : partons d'un point P du contour qui a un homologue p_1 à l'intérieur du domaine D. Déplaçons-nous sur le contour à partir de P. A partir de p_1 on a un arc homologue de l'arc du contour. Je dis que l'arc issu de p_1 va, si le contour est d'un seul tenant, le rencontrer avant que nous ayons décrit un tour complet. Dans le cas contraire nous aurions un arc complètement homologue à C et intérieur à D. Comme le maximum de $|f(z)|$ est atteint sur C, il serait atteint sur cet arc, c'est-à-dire en un point intérieur à D. Il y a contradiction. Donc les arcs Γ partent d'un point de C pour aboutir en un point de C. Nous énoncerons alors :

THÉORÈME 4 : *Si un contour* C *est d'un seul tenant, les arcs* Γ *homologues d'arcs de* C *à l'intérieur du domaine qu'ils limitent forment au plus une infinité dénombrable; ils partent d'un point de* C *pour aboutir en un point de* C.

On peut réaliser effectivement des domaines D contenant une infinité d'arcs Γ si le contour C n'est pas décomposable en un nombre fini d'arcs élémentaires. Prenons par exemple pour fonction $f(z) = e^z$ et pour domaine D le quadrilatère curviligne limité par l'axe des quantités réelles, les deux droites $x = \pm N$ (N nombre positif arbitraire) et la courbe C :

$$y = 2\pi + (\text{arc tg X}) \sin \frac{1}{X}.$$

L'homologie par $f(z)$ se réduit à une translation $y_1 = y + 2k\pi$, et il est visible que la courbe C admet pour homologue la courbe $y = (\text{arc tg X}) \sin \frac{1}{X}$, donc une infinité d'arcs Γ sont intérieurs au domaine D. En faisant une hypothèse plus restrictive sur C on obtient le résultat suivant :

THÉORÈME 5 : *Si le contour* C *est composé d'un nombre fini d'arcs élémentaires, il n'y a qu'un nombre fini d'arcs* Γ *distincts, et deux arcs* Γ *quelconques n'ont qu'un nombre fini de points communs.*

Montrons d'abord qu'il est impossible d'avoir à l'intérieur du domaine D une infinité d'arcs A dont les extrémités aient une distance supérieure à un nombre donné λ, et tels que chacun d'eux possède un arc homologue A_1 au moins sur le contour C. Nous appliquerons le théorème du n° 18; pour cela supposons choisis sur l'un des arcs A deux points z_0 et z'_0 dont la distance $|z'_0 - z_0|$ soit égale à un nombre donné a, inférieur au plus petit des nombres λ et d. Soit A_1 l'arc homologue de A, il y a sur A_1 deux points z_1 et z'_1 homologues de z_0 et z'_0 respectivement. Ou bien $|z'_1 - z_1| > d$ ou bien $\left|\frac{f(z'_1) - f(z_1)}{z'_1 - z_1}\right| < n$.

Or on a

$$|f(z'_1) - f(z_1)| = |f(z'_0) - f(z_0)| > m\,|z'_0 - z_0| = ma.$$

Donc $|z'_1 - z_1|$ est supérieur au plus petit des deux nombres d et $a\frac{m}{n}$; donc la longueur de l'arc A_1, supérieure à la distance de deux de ses points, est inférieurement bornée. Soit maintenant p la valence de $f(z)$ dans D. S'il y a une infinité d'arcs A distincts, il y a une infinité d'arcs A_1; or la longueur totale de C est finie, donc il y a au moins une portion de C commune à $p+1$ arcs A_1; cette portion aurait $p+1$ homologues dans D, il y a contradiction. En particulier il n'y aura qu'un nombre fini de courbes Γ dont les extrémités auront une distance supérieure à ε, quel que soit ε.

Supposons alors que les extrémités des arcs Γ soient en nombre infini; elles auront un point d'accumulation P sur le contour C. Choisissons une suite infinie d'arcs Γ tels que leurs extrémités tendent vers P. Les deuxièmes extrémités ne peuvent avoir d'autre point d'accumulation que P.

Traçons un cercle γ_1 de centre P, de rayon r, il ne peut rencontrer qu'un nombre fini d'arcs Γ de la suite. En effet dans le cas contraire traçons le cercle γ_2 de rayon $\frac{r}{2}$ et de centre P. Il n'y a qu'un nombre fini d'arcs Γ de la suite qui ne possèdent pas de points intérieurs à γ_2; donc il y en a une infinité qui rencontrent à la fois γ_1 et γ_2. Sur chacun de ceux-ci nous pouvons prendre un arc joignant un point de γ_1 à un point de γ_2, et dont les extrémités sont éloignées de $\frac{r}{2}$ au moins. S'il y a une infinité de tels arcs, nous sommes dans les conditions du cas précédent et il y a contradiction.

Donc il y a une infinité d'arcs Γ entièrement contenus à l'intérieur d'un cercle de centre P si petit soit-il. Les arcs homologues sur C de ces arcs Γ ont au moins un point d'accumulation P_1 sur C. Ce point P_1 est par raison de continuité homologue de P; il est distinct de P à cause de l'univalence locale. Il y a alors correspondance biunivoque entre l'intérieur d'un petit cercle de centre P et d'un petit domaine autour de P_1. Les arcs Γ provenant d'arcs du contour voisins de P_1 sont en nombre infini : il y a une chaîne de tels arcs deux à deux sans partie commune tendant vers P_1. Mais il part de P un arc continu qui correspond à l'arc de contour issu de P_1. Cet arc continu porte donc les arcs Γ, et par suite coupe une infinité de fois le contour C, aux extrémités de ces arcs Γ. Or nous avions supposé initialement que C ne comportait qu'un nombre fini d'arcs élémentaires, les arcs Γ envisagés ne peuvent pas avoir une infinité d'extrémités, puisque deux arcs élémentaires n'ont qu'un nombre fini de points communs; le théorème est démontré.

Remarque : Nous voyons qu'il est nécessaire pour avoir un nombre infini d'arcs Γ que l'on ait sur le contour C deux points P et P_1 homologues entre eux et tels que l'un d'eux au moins n'appartienne pas à un arc élémentaire de C. D'autre part sans faire sur le contour C aucune hypothèse autre que le fait d'avoir une longueur finie, le théorème 1 du n° 18 montre que la longueur totale des arcs Γ est finie.

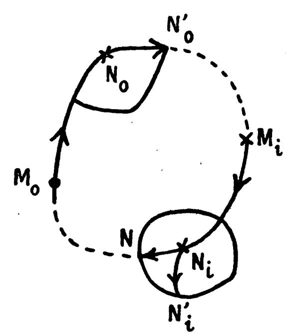
Les arcs Γ décomposent le domaine D en domaines partiels, que nous appellerons des *cellules*. Étant donné la nature des arcs Γ, les cellules sont des domaines simplement connexes. Cette décomposition peut d'ailleurs s'étendre à des domaines et à des fonctions plus générales, mais le vrai caractère de cette extension apparaîtra mieux lorsque nous aurons étudié la répartition des valeurs de $f(z)$ à l'intérieur des cellules dans le cas particulier qui nous occupe. Remarquons que le domaine D est supposé simplement connexe; *avant de décomposer en cellules un domaine multiplement connexe, il faut le rendre simplement connexe par des coupures.*

Si le contour C est composé d'un nombre fini d'arcs élémentaires, il n'y a qu'un nombre fini d'arcs Γ, donc il n'y a qu'un nombre fini de cellules puisque deux arcs Γ n'auront en commun qu'un nombre fini de points.

[**20**] Le lemme suivant peut être considéré comme une extension du théorème de Rolle aux fonctions d'une variable complexe.

THÉORÈME 6 : *Étant donné une fonction $f(z)$ holomorphe dans un domaine D fermé et simplement connexe, si aucun point du contour n'a de point homologue à l'intérieur du domaine, et si tout point du contour a des homologues distincts de lui-même, la dérivée s'annule à l'intérieur du domaine ou sur sa frontière.*

Soit M_0 un point du contour, et soient $M_1, M_2, \ldots M_k$ ses points homologues. Définissons sur le contour un sens positif, et cheminons à partir de M_0 dans le sens positif. De l'un au moins des M_i part un arc du contour homologue à celui que nous parcourons (n° 19); supposons d'abord qu'il parte dans le sens positif. Je dis alors que si nous continuons à cheminer dans le sens positif à partir de M, il y a toujours un point homologue qui chemine sur le contour à partir de M_i. Supposons en effet que, l'arc M_0N_0 ayant pour homologue l'arc M_iN_i, le prolongement de M_iN_i sur le contour ne soit pas homologue du prolongement de M_0N_0. Dans un petit cercle de centre N_i il y a un arc $N_iN'_i$ homologue du prolongement $N_0N'_0$ de M_0N_0. $N_iN'_i$ est nécessairement extérieur à D; sinon les points de $N_0N'_0$ auraient des homologues dans D; mais alors l'arc $M_iN_iN'_i$ sépare dans le petit cercle deux régions, l'une au moins ne contenant que des points homologues du voisinage de N_0 intérieurs au domaine; or comme les sens de parcours sont supposés les mêmes, c'est précisément cette région qui contient l'arc N_iN de contour qui, à partir de N_i, prolonge M_iN_i; il y a contradiction.

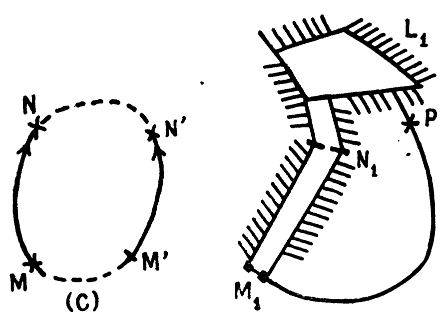


Donc si on a un couple d'arcs homologues parcourus dans le même sens on est sûr que, si un point mobile décrit le contour en partant de M_0 il y a un point homologue qui va décrire le contour en partant de M_i, et par suite le contour sera composé d'un certain nombre $p > 1$ d'arcs consécutifs tous homologues entre eux.

Montrons que tout point M intérieur au domaine a exactement $p-1$ homologues intérieurs. Supposons d'abord qu'il y ait plus de $p-1$ homologues. Joignons le point M considéré à un point P du contour par un arc continu. De chacun des p homologues de M devrait partir un arc homologue; et ces p arcs homologues iraient nécessairement aboutir en p points distincts du contour homologues de P, car le fait qu'ils n'y aboutiraient pas, ou y aboutiraient avant l'arc initial, entraînerait l'existence d'homologues du contour dans le domaine. Or P a $p-1$ homologues seulement. D'où la contradiction. Inversement, supposons que M ait moins de $p-1$ homologues. Joignons MP, de chaque homologue de P il part vers l'intérieur du domaine un arc homologue de PM, qui ne peut avoir pour extrémité qu'un homologue de M intérieur au domaine. D'où la contradiction. Donc M a exactement $p-1$ homologues; si un homologue de M était un zéro d'ordre k de la dérivée il faudrait le compter pour $k+1$ points, car il pourrait partir de ce point $k+1$ arcs homologues d'un arc issu de M.

Je dis que $f'(z)$ a $p-1$ zéros à l'intérieur du domaine. Pour simplifier la démonstration, traçons à l'intérieur du domaine un contour C du même type, à k arcs homologues, mais sans point double, et à tangente continue. C'est toujours possible en vertu des lois de la correspondance dans le voisinage des arcs homologues. Dans ces conditions, au contour C la fonction $f(z)$ fait correspondre un contour C_1 parcouru k fois : au bout d'un tour complet la tangente à C a tourné de 2π, la tangente à C_1 a tourné de $2k\pi$. Or la différence entre les arguments des tangentes à C et à C_1 c'est l'argument de $f'(z)$. Donc au bout d'un tour complet sur C $\arg f'(z)$ a varié de $2(k-1)\pi$ et par suite $f'(z)$ a $k-1$ zéros, distincts ou non, à l'intérieur de C.

Examinons maintenant le cas où, à toute portion du contour correspond une portion homologue parcourue en sens inverse, mais ne correspond aucune portion parcourue dans le même sens. En particulier, aucun arc du contour ne peut avoir deux arcs homologues, sinon deux au moins de ces trois arcs seraient parcourus dans le même sens. Nous allons étudier la forme du contour décrit par le point $Z=f(z)$ quand z décrit le contour C. Soient MN, M'N' deux arcs homologues sur (C), qui ont pour transformés dans le plan des Z deux arcs superposés M_1N_1.



La portion NN' du contour a pour image une courbe L du plan des Z qui part de N_1 et revient en N_1. Je dis que tous les arcs de L sont parcourus deux fois et en sens inverses quand on va sur C de N en N'. Dans le cas contraire L présenterait une boucle L_1 parcourue une seule fois; or cette boucle L_1 détermine un intérieur et un extérieur, et au voisinage de la boucle ce sont les points situés du côté de M_1N_1 qui sont couverts par les valeurs de $f(z)$. Or il y a nécessairement sur MM' des points homologues des points de L_1. Donc il y a un arc autre que M_1N_1 transformé d'une partie de MM' qui joint M_1 à un point de L_1; et qui par suite a des points P voisins de L_1 du côté de M_1. P serait donc à la fois le transformé d'un point du contour C et d'un point intérieur à D, il y a contradiction. Mais dans ces conditions la courbe transformée de C présente nécessairement un point de repliement au moins, c'est-à-dire qu'il y a sur C un point où aboutissent deux arcs du contour homologues entre eux, c'est-à-dire un zéro de la dérivée.

Le théorème est donc complètement démontré. Nous verrons d'ailleurs ultérieurement qu'un domaine du second type sera un domaine complet, c'est-à-dire un domaine où la fonction f prend toute valeur donnée. Le cercle unité est par exemple un domaine du premier type pour la fonction $Z = z^p$, un domaine du second type pour $Z = \frac{z}{(1-z)^2}$.

Nous appellerons *domaine réduit* pour $f(z)$ un domaine ayant les propriétés étudiées.

Ce théorème étant établi, nous démontrerons la propriété fondamentale de la division cellulaire.

THÉORÈME 7 : *Étant donné un domaine* D, *simplement connexe, divisé en cellules :*

1° *A l'intérieur de chaque cellule, la fonction $f(z)$ est univalente.*

2° *Étant donné deux cellules, ou bien toute valeur prise par $f(z)$ à l'intérieur de l'une est prise à l'intérieur de l'autre, ou bien aucune valeur prise dans l'une n'est prise dans l'autre.*

Le lemme précédent montre que, sur le contour de chaque cellule, il y a des points P qui n'ont pas d'homologue sur ce contour; en effet, par construction, le contour d'une cellule n'a pas de point homologue à son intérieur, et d'autre part $f'(z)$ ne s'annule pas dans D.

Supposons alors que dans la cellule il y ait deux points homologues z_0 et z_1; joignons z_0 à P par un arc continu intérieur à la cellule, il va partir de z_1 un arc homologue, qui ne peut aboutir à un homologue de P ni à l'intérieur de la cellule, ni sur le contour, et qui ne peut sortir de la cellule puisque un point intérieur n'a pas d'homologue sur le contour. Il y a contradiction, et par suite $f(z)$ est univalente.

Soient deux cellules d_1 et d_2. Soient M_1 et M'_1 deux points de d_1, et supposons que M_1 ait un homologue M_2 dans d_2, alors que M'_1 n'en aurait pas. Joignons $M_1M'_1$ par un arc continu intérieur à d_1. Il part de M_2 un arc homologue, qui doit forcément sortir de d_2; il y a donc sur $M_1M'_1$ à l'intérieur de d_1, un point homologue du contour de d_2, c'est-à-dire du contour de D. D'où la contradiction. La deuxième partie du théorème est donc démontrée.

Désignons par *cellules homologues* deux cellules telles que toute valeur prise dans l'une soit prise dans l'autre. Nous avons donc obtenu l'énoncé suivant :

THÉORÈME 8 : *La condition nécessaire et suffisante pour que deux cellules soient homologues est que leurs contours soient complètement homologues.*

Cette propriété se rattache au fait que la région couverte par une fonction holomorphe et univalente est déterminée par la courbe transformée de la frontière de son domaine de définition.

Il y a lieu de se demander si un autre procédé de décomposition de D ne pourrait pas fournir des domaines partiels connexes, ayant deux à deux la relation d'homologie complète ou de non homologie, et moins nombreux que les « cellules ». La réponse est négative. Il suffit pour cela de montrer que les arcs homologues d'arcs du contour vont figurer nécessairement parmi les arcs qui feront la décomposition. Supposons qu'il n'en soit pas ainsi, et soit A_1B_1 un arc intérieur à une cellule C_1 de la décomposition, et homologue d'un arc AB du contour. Soit M un point de AB, M_1 le point homologue de A_1B_1. En M et en M_1 la fonction $f(z)$ prend la même valeur Z. M_1 étant intérieur à C_1 il existe un petit cercle de centre M_1, complètement intérieur à la cellule, qui est couvert, tandis qu'il y a au moins une cellule c qui a M pour point frontière; de sorte que certaines valeurs voisines de Z y sont prises, alors que la valeur Z elle-même n'y est prise que sur la frontière, de sorte qu'il n'y aurait pas homologie entre la cellule C_1 et la cellule c.

Par suite, les arcs Γ homologues d'arcs du contour de D figurent tous dans les arcs limitant les domaines partiels; d'autre part ils sont suffisants pour effectuer la décomposition cellulaire. L'apparition de nouveaux arcs distincts des arcs Γ ne peut qu'augmenter le nombre de domaines partiels. D'ailleurs le raisonnement fait plus haut montre que si nous ajoutons aux arcs Γ un nouvel arc Γ_1 nous devrons aussi leur ajouter tous les arcs homologues de Γ_1 et intérieurs à D. D'où l'énoncé :

THÉORÈME 9 : *Une décomposition en domaines ayant les propriétés fondamentales des cellules ne peut être obtenue que par une subdivision des cellules.*

[**21**] Le fait que toutes les cellules d'un domaine D sont homologues entre elles ne fournit pas en général de renseignements sur la position par rapport au domaine D des zéros de la dérivée sphérique ou des singularités de $f(z)$: ce fait peut se réaliser alors même que la dérivée sphérique ne s'annule en aucun point de méromorphie; nous n'avons qu'à prendre $f(z) = e^z$. Soit un rectangle ayant deux côtés parallèles à l'axe réel, distants de 4π. Le seul arc Γ est ici la médiane parallèle à l'axe réel, et le rectangle est partagé en deux cellules homologues.

L'addition de conditions supplémentaires concernant, soit la fonction $f(z)$, soit le domaine, permettra souvent des conclusions plus précises. Par exemple nous avons vu qu'étant donné un domaine multiplement connexe nous devions, avant de procéder à la décomposition cellulaire, le rendre simplement connexe par des coupures. Supposons qu'il soit alors décomposé en cellules toutes homologues entre elles, mais que les arcs Γ soient uniquement homologues des arcs coupures introduits pour assurer la connexion simple, alors que le contour initial n'avait pas d'homologue à l'intérieur du domaine. Dans ces conditions, nous ne pouvons pas avoir dans les trous du domaine un prolongement analytique de $f(z)$ régulier, et sans zéro de la dérivée sphérique. D'une façon plus précise :

Théorème 10 : *Étant donné un domaine multiplement connexe tel que le contour n'ait pas d'homologues à l'intérieur du domaine, et que tout point du contour ait des homologues sur le contour, le prolongement analytique de la fonction à l'intérieur des trous présente soit une singularité essentielle, soit un zéro de la dérivée sphérique.*

Considérons un domaine multiplement connexe limité par le contour extérieur C_0 et par des contours intérieurs $C_1 C_2 \ldots C_n$ tels que tout point de l'un des C ait un homologue sur ce C ou sur un autre, et qu'aucun C n'ait d'homologue à l'intérieur du domaine multiplement connexe ainsi limité. Supposons que le prolongement analytique de $f(z)$ à l'intérieur des contours $C_1 \ldots C_n$ ne présente pas de point singulier, sans quoi le théorème serait démontré. Si les points homologues de C_0 n'ont pas d'homologues sur les arcs $C_1 \ldots C_n$, et n'en ont point aussi à l'intérieur des « trous » qu'ils limitent, le théorème est démontré, car on est ramené au lemme fondamental concernant les domaines réduits, ou plus exactement à son extension aux fonctions méromorphes, qui se démontre de la même manière.

Supposons maintenant qu'à l'intérieur du domaine limité par C_0 il y ait des points homologues de points de C_0, situés soit sur les arcs $C_1 \ldots C_n$, soit à l'intérieur des trous. Soit M un tel point, homologue de M_0 situé sur C_0. Supposons qu'un mobile parte sur C_0 de M_0, il part de M un arc Γ_1 homologue à C_0; mais cet arc Γ_1 ne peut pénétrer dans le domaine D. Donc, comme M_0 n'a par hypothèse qu'un nombre fini d'homologues dans le domaine, l'arc Γ_1 va repasser par M lorsque le mobile aura décrit un certain nombre, fini, de tours de C_0. Nous aurons ainsi mis en évidence un contour fermé Γ'_1 sans point double homologue d'un certain arc de C_0, ou composé d'un certain nombre d'arcs homologues de C_0. Mais alors, dans le domaine limité par Γ'_1 le prolongement analytique de $f(z)$ va prendre les mêmes valeurs que dans le domaine limité par C_0; il y aura donc en particulier un nouveau contour intérieur à Γ'_1 et homologue de Γ'_1, à moins que Γ'_1 ne limite un domaine réduit; donc ou bien nous mettrons en évidence un domaine réduit, et par suite un zéro de la dérivée sphérique, ou bien une suite infinie d'arcs Γ'_1 emboîtés les uns dans les autres et homologues entre eux, ce qui est contradictoire avec le fait que $f(z)$ est régulière dans le domaine fermé limité par C_0. Le théorème est donc démontré.

§ 2. — Cas des fonctions méromorphes dont la dérivée sphérique peut s'annuler.

[22] Les résultats du § 1 de ce chapitre s'étendent immédiatement au cas des fonctions méromorphes à univalence locale, c'est-à-dire telles que $\mathfrak{D}f(z) \neq 0$. On peut baser cette étude sur le théorème suivant :

THÉORÈME II : *Étant donné une fonction méromorphe dans un domaine fermé* D, *il existe, si la condition d'univalence locale est réalisée, trois nombres m, n et d, tels que l'inégalité*

$$|z_1, z_2| \leqslant d$$

entraîne les inégalités

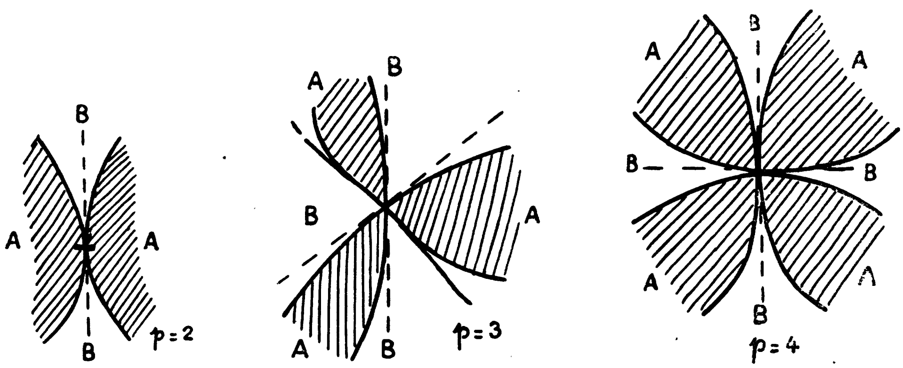
$$m \leqslant \frac{|f(z_1), f(z_2)|}{|z_1, z_2|} \leqslant n.$$

Le résultat peut s'établir par voie analytique, comme nous l'avons fait pour la propriété analogue relative aux fonctions holomorphes. On peut aussi remarquer que la propriété est vraie localement, c'est-à-dire qu'autour de chaque point du domaine on peut trouver un cercle de rayon fini, ayant ce point pour centre, où elle est vraie. Appliquant alors le théorème de Borel-Lebesgue, on en déduit que le domaine envisagé peut être couvert par un nombre fini de tels cercles; le théorème pour l'ensemble du domaine sera alors vérifié en prenant pour nombres d, m et n relatifs au domaine total les plus petits des nombres d, m et le plus grand n respectivement introduits pour chacun de ces cercles.

Nous retrouverons donc sans changement les théorèmes sur la décomposition du domaine initial en cellules, avec la propriété caractéristique des cellules homologues, et le théorème sur l'existence d'un nombre fini de cellules dans le cas où le contour est formé d'un nombre fini d'arcs élémentaires.

[23] Soit maintenant un domaine fermé D et une fonction $f(z)$ méromorphe dans D. Il y aura un certain nombre de points pour lesquels la dérivée sphérique est nulle, et au voisinage de chacun d'eux le théorème de non existence d'arcs homologues infiniment voisins ne s'applique plus. Nous allons mettre d'abord sous une forme qui nous sera commode les résultats de l'étude locale de la théorie classique.

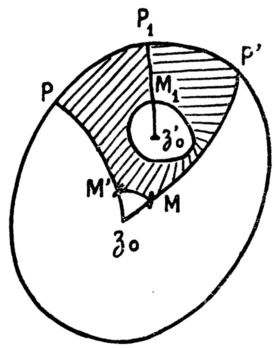
Soit z_0 un zéro de la dérivée sphérique, au voisinage duquel elle se comporte comme $A|z - z_0|^{p-1}$ (p entier > 1). S'il passe par z_0 un arc continu à tangente continue, la partie de cet arc intérieure à un cercle assez petit de centre z_0 aura $p - 1$ homologues dont les tangentes en z_0 formeront une étoile régulière. Au point de vue de l'homologie on peut distinguer deux groupes de régions, chaque groupe comprenant une suite de secteurs pris de deux en deux. Si p est impair, les angles de tous les secteurs sont égaux à $\frac{\pi}{p}$, si p est pair les angles de l'un des groupes valent $\frac{2\pi}{p}$, les autres o. Ainsi, au moyen d'arcs passant par le point z_0 nous découpons le voisinage de ce point en domaines où la fonction $f(z)$ est univalente et où la propriété fondamentale des cellules (homologie complète, ou non homologie) est réalisée. Les figures ci-dessous indiquent dans les cas $p=2$, $p=3$, $p=4$, l'aspect de la décomposition obtenue. Les secteurs blancs forment la première série, les secteurs hachurés la deuxième.



Donnons-nous maintenant un domaine réduit D; il y a au moins un zéro de la dérivée sphérique à son intérieur; supposons d'abord qu'il n'y en ait qu'un, soit z_0. Joignons z_0 à un point P du contour par un arc continu intérieur au domaine. Nous choisirons cet arc de manière à ce qu'il ne comporte aucun couple de points homologues. Pour cela utilisons le transformé D_1 du domaine D par la fonction $f(z)$. Soit Z_0 l'image de z_0. Si nous joignons Z_0 à un point P_1 de la frontière de D_1 par un arc Z_0P_1 sans point double, nous pourrons définir dans D un certain nombre d'arcs partant de z_0, admettant Z_0P_1 pour transformé. L'un quelconque d'entre eux sera un arc z_0P ayant les propriétés demandées.

Il existe des arcs homologues à z_0P partant de z_0 et aboutissant à divers homologues de P. Nous obtenons ainsi des domaines d où $f(z)$ est localement univalente; je dis qu'aucun d'eux ne peut contenir un homologue z'_0 de z_0 distinct de z_0. En effet s'il en était ainsi l'arc z_0P aurait un homologue z'_0P_1, P_1 étant un homologue de P sur le contour du domaine réduit. Soient z_0P et z_0P' les deux arcs qui limitent le domaine d; P_1 est nécessairement sur le contour entre P et P'; car sinon z'_0P_1 rencontrerait soit z_0P soit z_0P'; en un point autre z_0 aboutiraient donc deux arcs homologues entre eux, il y a contradiction avec le fait que z_0 est le seul point de non univalence locale.

Prenons sur z_0P et z_0P' deux points homologues M et M' voisins de z_0; ils ont un homologue commun M_1 sur z'_0P_1, et un petit arc MM' admet un arc fermé homologue passant par M_1, qui, ne pouvant recouper z'_0P_1, entoure z'_0; les propriétés des domaines réduits montrent que l'arc PP_1 a comme homologue P_1P'. Donc le domaine d diminué du triangle z_0MM', du petit domaine isolé autour de z'_0 par l'arc fermé qui passe en M_1, et de la coupure P_1M_1 est un domaine réduit; il y a bivalence sur le contour, et il n'y aurait pas de zéro de la dérivée sphérique à l'intérieur de ce domaine, d'où la contradiction. On raisonnerait de même s'il y avait plusieurs homologues de z_0 dans un domaine d. Mais dans ces conditions les arcs du contour du domaine d n'ont pas d'homologues à son intérieur, et on en conclut, comme pour les cellules définies au paragraphe précédent, que *dans chacun des domaines partiels ainsi déterminés, la fonction est univalente, et telle que toute valeur prise dans le domaine total est prise une fois et une seule dans le domaine partiel.*



Si nous sommes dans le cas d'un domaine réduit à l'intérieur duquel la dérivée sphérique a plusieurs zéros, partons de l'un d'eux z_0, et traçons une coupure qui le joint à un point du contour; nous déterminerons tous les arcs homologues de la coupure, dont certains vont aboutir en z_0, et d'autres aux homologues de z_0 intérieurs au domaine réduit envisagé. Nous recommençons l'opération pour une autre racine de la dérivée sphérique en ayant soin que le deuxième arc ne rencontre pas les premiers. Et ainsi de suite jusqu'à ce que nous ayons épuisé tous les zéros de la dérivée sphérique. Nous avons ainsi tracé des arcs de deux catégories, les uns qui partent des zéros de la dérivée pour aboutir au contour, les autres qui vont d'un point du contour à un point homologue d'un zéro de la dérivée. Les arcs de la première catégorie subdivisent le domaine réduit étudié en domaines partiels à l'intérieur desquels il y a nécessairement univalence, car d'après le raisonnement déjà fait plusieurs fois l'existence de deux points homologues à l'intérieur d'un domaine partiel entraînerait l'existence de coupures nouvelles du type étudié. L'existence d'arcs de la deuxième catégorie introduit une irrégularité dans la correspondance par points homologues entre les domaines partiels. Soit (d') l'un d'eux qui contient un arc a' de la deuxième catégorie, et (d'') un domaine homologue mais où un arc frontière a'' est homologue de a' : tout point de (d') autre que les points de a' a un homologue intérieur à (d''), tout point de a' a deux homologues sur la frontière de (d''). Si nous convenons d'ajouter aux frontières des domaines partiels les coupures formées par les arcs de la deuxième catégorie, les domaines partiels ainsi définis ont les propriétés fondamentales des cellules.

Nous avons ainsi obtenu deux types de décomposition autour d'une racine d'ordre $p-1$ de la dérivée sphérique : ou bien on a une étoile de $2p$ domaines répartis en deux groupes, homologues entre eux dans chaque groupe, mais non d'un groupe à l'autre, ou bien on a p domaines seulement, mais cette fois tous homologues entre eux; la première fournie par les homologues d'un arc qui traverse la racine, la deuxième fournie par les homologues d'un arc qui se termine en ce point; nous aurons ultérieurement à effectuer des groupements de domaines, qui ramènent toujours le premier cas au second.

[24] Ces préliminaires établis, nous pouvons généraliser la notion de décomposition cellulaire d'un domaine. Soit un domaine D, fermé, où $f(z)$ est méromorphe; rendons-le simplement connexe par des coupures appropriées, en utilisant le nombre minimum de ces coupures. Les arcs homologues du contour de D intérieurs à D le décomposent en domaines partiels, que nous appellerons *pseudo-cellules*, jouissant des propriétés suivantes :

THÉORÈME 12 : 1°) *Toute pseudo-cellule est un domaine réduit.*

2°) *Étant données deux pseudo-cellules, ou bien toute valeur prise à l'intérieur de l'une est prise à l'intérieur de l'autre, ou bien aucune valeur prise dans l'une n'est prise dans l'autre.*

3°) *La condition nécessaire et suffisante pour que deux pseudo-cellules soient homologues est que leurs contours soient complètement homologues.*

4°) *Dans le cas où la frontière de* D *est formée d'un nombre fini d'arcs élémentaires il n'y a qu'un nombre fini de pseudo-cellules.*

La première partie du théorème seule diffère de l'énoncé correspondant pour les fonctions à univalence locale. En effet nous n'avons fait intervenir cette hypothèse que pour démontrer qu'il y a univalence à l'intérieur des pseudo-cellules : l'univalence locale est incompatible avec l'existence d'un domaine réduit de valence supérieure à 1. Si tous les points où la dérivée sphérique s'annule ont des homologues sur le contour, la propriété d'univalence va subsister, étant donnés les résultats du numéro précédent. En effet les arcs homologues d'arcs du contour réalisent la décomposition du voisinage des points de non univalence locale, et nous pouvons par extraction de domaines réduits les entourant nous ramener au cas des domaines pour lesquels la fonction est univalente en tout point. En sorte que la propriété d'univalence sera vérifiée aussi bien pour les pseudo-cellules dont le contour ne contient pas de zéro de la dérivée sphérique, que pour celles qui en contiennent.

Au contraire supposons que certains zéros de la dérivée sphérique ne soient pas homologues de points du contour : les domaines qui vont les contenir seront des domaines réduits où la fonction sera effectivement multivalente. Dans ce cas nous pratiquerons à l'intérieur de chacun d'eux une subdivision du type étudié précédemment. Comme ce procédé de subdivision nous donne des domaines d'univalence tels que tout point du domaine réduit ait un homologue à l'intérieur du domaine partiel, nous appellerons *cellule* le résultat de cette dernière décomposition, et nous pourrons énoncer le théorème fondamental.

THÉORÈME 13 : 1) *Dans toute cellule la fonction est univalente.*

2) *Ou bien deux cellules sont complètement homologues, ou bien aucun point de l'une n'a d'homologue dans l'autre.*

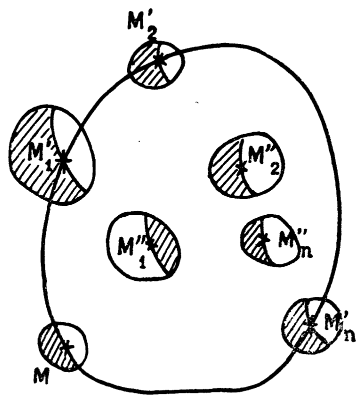
3) *La condition nécessaire et suffisante pour que deux cellules soient homologues est que leurs contours soient complètement homologues.*

[**25**] Étudions les domaines où il y a une valence déterminée, c'est-à-dire où toute valeur prise est prise le même nombre de fois. Deux cas complètement différents sont à distinguer, suivant que nous supposons que l'ordre de multivalence a une valeur déterminée à l'intérieur du domaine fermé, même pour les points ayant des homologues sur le contour, ou que nous avons le cas plus général des domaines où la valence a une certaine valeur à l'intérieur du domaine, pouvant être différente pour les points qui ont des homologues sur le contour.

La première hypothèse entraîne une conséquence remarquable, qui réduit le problème à un cas déjà étudié.

THÉORÈME 14 : *Soit un domaine fermé* D *limité par un contour sans coupures; si toute valeur prise par la fonction* $f(z)$ *à l'intérieur du domaine fermé y est prise exactement* p *fois, aucun point du contour n'a d'homologue intérieur au domaine.*

Soit en effet M un point du contour, qui aurait des homologues M'_1, M'_2, M'_n sur le contour, et $M''_1, M''_2 \dots M''_m$ à l'intérieur du domaine; $1 + m + n = p$.



Traçons autour de M un petit domaine d'univalence d, et les domaines homologues autour des M', d'_i et des M'', d''_j. Dans le cas où, pour quelques-uns des M, la dérivée sphérique s'annulerait, on remplacerait les domaines d'univalence par des domaines réduits; la marche du raisonnement subsisterait à des modifications de langage près.

Traçons dans les d' et les d'' les arcs homologues de l'arc du contour intérieur à d, qui les partagent en deux régions, l'une homologue de la partie de d intérieure à D, l'autre homologue de la partie extérieure, celle-ci étant couverte de hachures sur la figure. S'il existe des d'', un point P intérieur à la région hachurée de d''_1 a $p - 1$ homologues intérieurs à D; or il n'a qu'un homologue dans chaque d' ou d'' et il en a un dans d, mais dans la partie de d extérieure à D. Donc P a au moins un homologue P_1 intérieur à D et qui n'est intérieur ni à d, ni à un d', ni à un d''.

Or « au voisinage » du point M''_1 il ne passe pas d'arc homologue d'arc du contour extérieur à d et aux d'. Donc il existe un point P tel qu'on puisse le joindre à M''_1 à l'intérieur de d''_1 sans rencontrer d'arcs homologues des portions de contour extérieures à d et aux d'.

Dans ces conditions il y a un arc P_1M_1 issu de P_1 et homologue de PM''_1. Ou bien cet arc aboutit à un homologue de M intérieur à D, c'est-à-dire à un M' ou un M'', donc, joignant un point P_1 extérieur à un domaine d à un point intérieur M_1, il rencontre un contour de domaine d. Mais PM' ne rencontre pas d'arc homologue des contours des d. Il y a contradiction. Ou bien l'arc issu de P_1 rencontre le contour, mais ce ne peut être qu'en un point intérieur à d ou à un d', nous retrouvons la même contradiction.

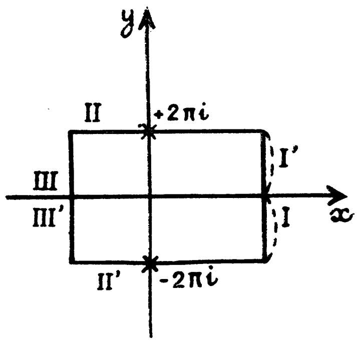
Donc il est impossible qu'il y ait des domaines d'', tous les points homologues de points du contour sont situés sur le contour. Le domaine étudié est bien un domaine réduit.

Examinons les propriétés des domaines où l'on a une valence exacte à l'exclusion peut-être des points qui ont un homologue sur le contour.

Théorème 15 : *Si dans l'intérieur d'un domaine* D *la fonction* $f(z)$ *est exactement p-valente, et si un arc* A *du contour possède* $n \neq 0$ *arcs homologues à l'intérieur du domaine, il possède* $2(p-n)-1$ *arcs homologues situés sur le contour.*

Soit en effet A_1 un arc homologue de A et intérieur à D; prenons de part et d'autre de A_1 un couple de points M_1N_1 tels que l'on puisse joindre M_1N_1 sans rencontrer d'arc homologue du contour différent de A_1. M_1 et N_1 étant intérieurs à D ont chacun $p-1$ homologues intérieurs à D; et il y a des arcs homologues de l'arc M_1N_1 issus de M_i et de N_j. L'arc issu de M_i va être arrêté par un point homologue d'un point du contour, soit M'_i; de même l'arc issu de N_j va être arrêté par un point N'_j. Les M'_i et N'_j sont tous homologues entre eux et homologues du point où M_1N_1 coupe A_1. Tous les M'_i sont distincts, tous les N'_j sont distincts. Car on peut toujours supposer que l'arc M_1N_1 ne passe pas par un point homologue des zéros de la dérivée sphérique. Si un N'_j est confondu avec un M'_i à l'intérieur de D, c'est que l'arc M_iN_j rencontre un arc intérieur au domaine et homologue de A^1. Nous aurons donc n arcs de ce type, il y a ainsi n points M'_i et n points N'_j utilisés. Les autres, au nombre de $2(p-n)$ sont nécessairement sur le contour; donc, sauf pour des points particuliers, un point donné du contour a bien $2(p-n)-1$ homologues. Les cas d'exception correspondent aux zéros de la dérivée sphérique et à leurs homologues. On en conclut comme pour les domaines réduits que tout arc A du contour a $2(p-n)-1$ homologues sur le contour. Nous pourrons dire qu'il y a une valence exacte dans D en adoptant la convention que si une valeur est prise en un point ordinaire z_0 du contour elle est prise $\frac{1}{2}$ fois. Cela se justifie par le fait que les valeurs voisines de $f(z_0)$ sont prises non pas dans le voisinage de z_0 intérieur au domaine. mais dans le voisinage de z_0 et de l'un de ses homologues : à un petit domaine tracé autour d'un homologue de z_0 intérieur au domaine correspond non un domaine connexe tracé autour de z_0 mais un couple de deux domaines s'appuyant sur le contour.

Le raisonnement ne s'applique plus si $n = 0$; dans ce cas on trouve p arcs homologues entre eux.



On peut construire un exemple de cette disposition au moyen de la fonction $y = e^x$ en prenant pour domaine D un rectangle ayant deux côtés parallèles à l'axe réel et distants de 4π. La fonction est bivalente, mais la médiane parallèle à l'axe réel a deux homologues sur le contour $(n = 1)$, et les côtés perpendiculaires forment deux couples de deux segments homologues $(n = 0)$.

[26] Il existe des domaines pour lesquels toutes les cellules sont homologues. Étudions maintenant les conditions auxquelles une cellule sera homologue de toutes les cellules contiguës; nous appelons *cellules contiguës* à une cellule (d) celles dont le contour a au moins un point commun avec (d). Supposons (d) intérieur au domaine fermé D que nous étudions; nous avons la propriété suivante :

THÉORÈME 16 : *Si une cellule, intérieure au domaine fermé* D, *est homologue de toutes les cellules contiguës, la fonction $f(z)$ représente cette cellule sur la sphère toute entière, affectée d'une coupure.*

Supposons en effet qu'il y ait un point P de la sphère non couvert par $f(z)$ quand z est dans d. Joignons-le à un point M couvert, par un arc régulier ne passant par aucun zéro de $f(z)$. Il y a un point Q de l'arc PM tel que tout point de l'arc MQ soit couvert, et que dans tout cercle de centre Q, si petit soit-il, il y ait des points non couverts. Soit z_0 le point de (d) dont Q est tranformé.

z_0 n'est pas intérieur à (d) car il y aurait alors autour de Q un cercle entièrement couvert; z_0 est donc sur la frontière de (d). Mais comme tous les domaines contigus à d lui sont homologues, on peut tracer avec z_0 comme centre un cercle assez petit pour que toute valeur prise dans ce cercle soit prise dans (d). Alors les valeurs prises dans ce cercle couvriraient sur la sphère un cercle de centre Q, et il y a contradiction.

Donc une cellule (d) complètement intérieure à D ne peut être homologue de toutes les cellules contiguës que si les valeurs qu'y prend la fonction couvrent toute la sphère. Cela entraîne que toutes les cellules du domaine D possèdent la même propriété, car une deuxième cellule serait forcément homologue d'une partie de la cellule (d), et par conséquent de la totalité.

Le domaine transformé de la cellule comprend la sphère entière, dont on retranche les transformés de la frontière de (d). Ce théorème a d'ailleurs une portée plus générale : le point essentiel du raisonnement est le fait qu'on peut tracer avec un point quelconque de la frontière de (d) pour centre un cercle tel que toutes les valeurs prises dans ce cercle soient prises dans (d); nous pouvons alors énoncer la propriété suivante :

Théorème 17 : *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction univalente à l'intérieur d'un domaine d couvre la sphère entière est qu'autour de chaque point de la frontière de d on puisse tracer un petit cercle tel que toute valeur prise dans ce cercle soit prise dans d.*

Nous appellerons *domaine complet* un tel domaine (d).

Théorème 18 : *Sauf pour des points isolés, un point du contour d'un domaine complet admet au moins un homologue distinct de lui situé sur le contour.*

Un point du contour d'un domaine d'univalence ne peut pas admettre de point homologue à l'intérieur du domaine. Si maintenant nous supposons qu'un point du contour n'ait pas d'homologue sur le contour du domaine complet, il sera possible de tracer autour de lui un petit cercle tel que les points de ce petit cercle n'ont pas d'homologues sur le contour du domaine (d) ni à l'intérieur; or c'est contradictoire avec l'hypothèse que le domaine est complet, puisque tous les points d'un tel petit cercle extérieurs à d doivent avoir des homologues dans d. Il ne peut y avoir exception que si le point est un zéro de la dérivée sphérique et s'il part de ce point deux arcs homologues entre eux faisant partie du contour.

D'ailleurs, les zéros de la dérivée sphérique étant nécessairement en nombre fini, l'aspect du contour d'un domaine complet est le suivant : de chaque zéro de la dérivée sphérique partent deux arcs homologues; leurs autres extrémités sont des points ayant plus d'un homologue, sauf s'il n'y a que deux zéros de $\mathfrak{D}f$, qui sont alors joints par deux arcs homologues du contour. Leur image sur la sphère $t = f(z)$ sera dans ces conditions une coupure dont les extrémités correspondent aux zéros de la dérivée sphérique, et qui est parcourue deux fois quand on parcourt le contour de d.

Ces propriétés s'étendent à des domaines réduits couvrant p fois la sphère.

Théorème 19 : *Étant donné un domaine réduit où la fonction $f(z)$ a une valence égale à p, la condition nécessaire et suffisante pour que les valeurs prises par f à l'intérieur de ce domaine couvrent la sphère p fois exactement est qu'autour de chaque point de la frontière on puisse tracer un petit cercle tel que tous les points intérieurs à ce petit cercle et extérieurs au domaine aient des homologues à l'intérieur du domaine.*

La démonstration est la même que pour $p = 1$. Remarquons que nous n'avons plus le droit ici de conclure à l'existence de zéros de la dérivée sphérique sur le contour; il suffit pour le voir d'envisager une fonction elliptique à l'intérieur d'un parallélogramme de périodes. C'est là un des points qui distinguent la cellule des domaines réduits qu'introduit initialement la décomposition : si une cellule est un domaine complet on a le droit d'affirmer l'existence sur son contour de zéros de la dérivée sphérique. Dans la suite de cette étude je désignerai par le terme *point d'articulation* du domaine complet un point d'où partent deux arcs du contour homologues entre eux. Nous remarquerons une fois pour toutes qu'un zéro de la dérivée sphérique n'est pas nécessairement point d'articulation. Nous serons amenés ultérieurement, dans l'étude des points singuliers, à introduire des points d'articulation plus généraux.

Les théorèmes que nous venons d'énoncer supposent essentiellement que la fonction est méromorphe dans tout domaine d et prolongeable à l'extérieur de d. Dans le cas contraire leur énoncé n'aurait pas de sens; d'ailleurs il existe des fonctions univalentes dans un domaine (d), couvrant toute la sphère, et telles que la frontière de (d) soit une coupure essentielle; on les obtient par exemple en faisant la représentation conforme de l'intérieur d'un cercle sur la sphère affectée d'une coupure qui serait un arc de courbe de Jordan n'ayant de tangente en aucun point. De telles fonctions échappent évidemment à notre étude.

Soit maintenant un domaine D dont nous avons fait la décomposition cellulaire, et soit (d) une cellule, non complètement intérieure au domaine D mais telle que toutes les cellules contiguës lui soient homologues. Les arcs qui limitent d, vont être homologues entre eux deux à deux, à l'exception peut-être des arcs A qui appartiennent au contour de D; si en effet un arc séparant (d) d'une cellule voisine n'avait pas d'arc homologue, les points voisins de cet arc dans la cellule voisine n'auraient pas d'homologues dans (d), d'où la contradiction.

Ceci posé soit z_0 un point intérieur à (d), et traçons à partir de z_0 un arc α intérieur à D. Tant que nous ne rencontrons pas un arc homologue du contour de (d), nous sommes sûrs que les points obtenus ont un homologue à l'intérieur de (d); en outre si un arc est homologue d'un arc du contour de (d) qui n'est pas un arc A, même après sa traversée les points de l'arc α que nous traçons ont des homologues dans (d). Donc tout point z_1 de D qui peut être joint à un point z_0 de (d) par un arc qui ne rencontre pas d'homologue des A a un homologue à l'intérieur de (d).

Alors ou bien les A et leurs homologues ne découpent pas de domaines distincts dans D et l'on est ramené au cas où toutes les cellules sont homologues entre elles, ou bien les A décomposent D en domaines distincts. Dans ce cas toutes les cellules de celui de ces domaines qui contient (d) sont homologues entre elles. Il pourrait aussi arriver que les arcs A et leurs arcs homologues limitent précisément le seul domaine (d). Dans ce cas (d) constitue un domaine complet. En effet à son intérieur la fonction est univalente; le contour est formé d'arcs homologues entre eux deux à deux, et on a déjà vu que cela équivaut au fait que la partie extérieure à (d) d'un cercle de rayon assez petit ayant pour centre un point quelconque de la frontière de d, a des points homologues à l'intérieur de d. Nous pouvons alors conclure :

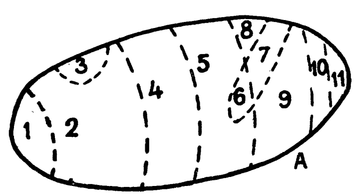
Théorème 20 : *Si une cellule (d) non entièrement intérieure à* D *est homologue de toutes les cellules contiguës, il est possible d'extraire de* D *un domaine limité par des arcs homologues entre eux, et dans lequel il y a multivalence exacte.*

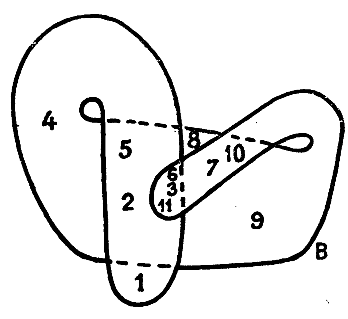
En particulier (d) peut être un domaine complet.

[**27**] Le mode de groupement des cellules que nous allons maintenant définir jouera dans la suite de cette étude un rôle fondamental. Supposons que dans la division de D en cellules il y ait des cellules contiguës non homologues, et soit d_1 l'une d'entre elles. Parcourons alors le contour de d_1 dans un ordre déterminé et adjoignons-lui successivement les divers domaines contigus rencontrés qui ne seront ni homologues de d_1, ni homologues des domaines précédemment choisis. Recommençons de même sur le nouveau domaine, et ainsi de suite. Au bout d'un nombre fini d'opérations le domaine total δ_1 ainsi constitué sera tel que tous les domaines d qui lui seront contigus ont un homologue à l'intérieur de δ_1, ou bien que δ_1 comprend toutes les cellules. Si nous n'avons pas épuisé toutes les cellules, nous recommencerons l'opération sur les cellules restantes, et nous constituerons ainsi un ensemble de domaines $\delta_1 \delta_2 \ldots \delta_n$, tels que :

1°) Toute cellule contiguë à δ_1 a une cellule homologue à l'intérieur de δ_1.

2°) Toute cellule contiguë à δ_i (i quelconque) a un homologue à l'intérieur de δ_i, ou fait partie d'un domaine δ d'indice inférieur à i.





Si le premier domaine constitué δ_1 est entièrement intérieur à D, c'est un do maine complet. On pourrait se demander si le nombre des domaines δ_i que l'on obtient par ce procédé est indépendant de l'ordre des opérations. On peut construire des exemples du contraire. Supposons en effet que le domaine A de la figure ci-contre soit représenté sur le domaine B; nous pouvons réaliser quatre domaines δ de la façon suivante : δ_1 contient les cellules 10, 9, 5, 6, 8, 4

δ_2 contient 2, 1, 3

δ_3 contient 7

δ_4 contient 11

ou trois domaines en prenant pour δ_1 : 11, 10, 9, 4, 5, 8 δ_2 : 1, 2, 3 δ_3 : 6 et 7.

Supposons le domaine D intérieur à un domaine D' dont toutes les cellules soient homologues entre elles, et que le domaine commun à D et à une même cellule de D' soit connexe : il n'est pas possible que deux cellules de D entièrement contenues dans la même cellule de D' soient homologues; en outre si une cellule de D appartient à plusieurs cellules de D', une autre cellule de D homologue à celle-ci appartient au même nombre de cellules de D'; de sorte que nous pouvons énoncer :

Théorème 21 : *Le nombre de domaines δ relatifs à un domaine* D *intérieur à un domaine* D' *où toutes les cellules sont homologues entre elles est inférieur au nombre de cellules de* D' *dans lesquelles* D *a des points, pourvu que toute cellule de* D' *ait en commun avec* D *un domaine connexe.*

Le nombre de domaines δ est d'ailleurs supérieur ou égal à la valence de $f(z)$ dans le domaine D donné. Il serait facile de former (au moyen de l'exemple que nous venons de relever ou de tout autre analogue) des exemples où ce nombre n'est égal à aucune des deux bornes que nous venons de mettre en évidence.

§ 3. — Exemples, applications et extensions.

[**28**] Pour les polynômes l'homologie correspond à des transformations [1] géométriques simples du plan de la variable z. Pour le polynôme du second degré par exemple, on peut toujours écrire

$$P(z) = A(z-a)^2 + B$$

l'homologie est une symétrie par rapport au point a.

D'une façon générale, pour un polynôme de degré n le centre de gravité de p points homologues est fixe. Si le polynôme est de la forme $P = A(z-a)^n + B$, l'homologie est une rotation de $\frac{2m\pi}{n}$ autour du point fixe. Nous profiterons de cette

[1] Ces transformations sont les plus simples des transformations cycliques, dont nous parlerons à propos des fonctions d'automorphie (ch. III, n° 35 et *passim*).

simplicité pour donner un théorème qui limite l'ordre de valence dans certains cercles du plan des z pour des points ayant déjà un homologue connu. Soit un polynôme de degré n :

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$$

un point x_1 étant donné, entre les $n - 1$ homologues de x_1 on a la relation :

$$-\frac{a_{n-1}}{a_n} = x_1 + \sigma_1,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$(-1)^{n-1}\frac{a_1}{a_n} = x_1\sigma_{n-2} + \sigma_{n-1},$$

$$(-1)^n \frac{a_0 - P(x_1)}{a_n} = x_1\sigma_{n-1}$$

en désignant par σ les fonctions symétriques des lettres $x_2 \dots x_n$ d'où

$$\sigma_{n-1} = (-1)^{n-1}\left[\frac{a_1}{a_n} + \frac{a_2 x_1}{a_n} + \dots + x_1^{n-1}\right],$$

$$\sigma_{n-1} = (-1)^{n-1}\frac{P(x_1) - a_0}{a_n x_1}.$$

Soit alors un domaine D à distance finie ne contenant pas l'origine et ne contenant aucun point homologue de l'origine; dans un tel domaine σ_{n-1} sera bornée supérieurement et inférieurement par des constantes M^{n-1} et m^{n-1}. Mais σ_n est le produit des modules des $n - 1$ homologues d'un point de D : l'un au moins est inférieur en module à M, et l'un au moins est supérieur à m. Donc :

THÉORÈME 22 : *Étant donné un domaine* D *dans lequel les inégalités*

$$m^{n-1} \leqslant \left|\frac{P(x_1) - a_0}{a_n x}\right| \leqslant M^{n-1}$$

sont vérifiées, on peut affirmer que tout point de D *a au moins un homologue dans le cercle de centre origine et de rayon* M, *et au moins un à l'extérieur du cercle de rayon* m.

En prenant tous les points homologues de x_1 égaux en module, on peut évidemment obtenir l'égalité pour un point particulier, si m et M expriment des bornes exactes. D'autre part si nous considérons une famille de polynômes de degré n supposée normale dans un domaine D, et telle que tous les polynômes limites soient effectivement du degré n, le calcul précédent donne la limite inférieure exacte du rayon d'un cercle ayant l'origine pour centre et dans lequel tout point de d a nécessairement un homologue.

Considérons maintenant $P_n(x)$ comme le polynôme section de rang n du développement de Taylor d'une fonction entière, et donnons à x une valeur déterminée quelconque, on a toujours

$$\lim_{n=\infty} |a_n x|^{\frac{1}{n-1}} = 0;$$

d'autre part $P_n(x)$ a une valeur limite déterminée que nous supposerons distincte de a_0. On en conclut alors que quel que soit R assigné à l'avance, à partir d'un certain rang les polynômes $P(x)$ reprennent à l'extérieur du cercle de centre origine et de rayon R la valeur qu'ils prennent en un point x donné.

Comme dernière application nous remarquerons que si en deux points distincts quelconques du contour d'un domaine D (simplement connexe) la fonction $f(z)$ ne prend jamais deux valeurs égales et si en outre la dérivée sphérique ne s'annule pas sur le contour, elle est univalente. Si même en un point la dérivée sphérique s'annule comme $|z - z_0|$, et si le contour admet une courbure définie ou même une condition de Lipschitz étendue à la courbure (contour compris entre deux cercles donnés tangents entre eux au point envisagé et ayant des concavités tournées vers l'intérieur du domaine) la fonction reste univalente (au moins localement). Cherchons alors le plus grand rayon d'un cercle ayant son centre à l'origine et où la fonction soit univalente : il y aura sur ce cercle un point où il sera tangent à un arc homologue d'une autre de ses portions, ou un zéro simple de la dérivée sphérique. Soit alors $f(z_1) = f(z_2)$; on a $\frac{dz_2}{dz_1} = \frac{f'(z_1)}{f'(z_2)}$ (sur le cercle et son homologue). Donc la condition de contact s'exprime par la relation

$$\arg z_0 - \arg z_1 = k\pi + \arg \frac{f'(z_1)}{f'(z_2)},$$

ce qui peut encore s'écrire : $\arg \frac{z_2 f'(z_2)}{z_1 f'(z_1)} = k\pi$. Donc :

THÉORÈME 23 : *Le cercle d'univalence maximum dont l'origine est centre, pour une fonction donnée $f(z)$ est tel qu'il existe sur lui soit un couple de points tel que l'on ait $f(z_1) = f(z_2)$ et qu'en outre le rapport $\frac{z_2 f'(z_2)}{z_1 f'(z_1)}$ soit réel; soit un zéro simple de la dérivée sphérique de la fonction.*

[**29**] Dans cette étude nous avons toujours supposé que le domaine où nous faisions la décomposition cellulaire était plan, autrement dit que nous nous occupions de fonctions uniformes. On peut encore étendre la notion de décomposition cellulaire à une fonction algébroïde dans un domaine D, la décomposition en cel-

lules s'appliquant alors à la portion de surface de Riemann sur laquelle la fonction est uniforme.

Une extension plus importante est basée sur le fait que les principaux résultats énoncés dans ce chapitre sont de caractère topologique et par conséquent s'étendent, *mutatis mutandis*, aux transformations continues quelconques. Si la transformation est intérieure au sens de M. Stoïlow [1], c'est-à-dire conserve les continus et transforme les points intérieurs en points intérieurs, le lemme de l'inversion biunivoque sauf en des points isolés subsiste. Dans ces conditions les propriétés de la subdivision cellulaire par arcs homologues du contour subsistent sans modifications pour le cas où il n'y a pas de point de ramification de la transformation inverse. Il est ici impossible d'affirmer que le nombre de cellules est fini, même en faisant des restrictions sur la nature du contour. Cela tient à ce qu'on peut toujours déterminer une transformation intérieure qui représente un domaine d donné sur un autre domaine D donné (de même connexion) quelle que soit la complication de D, alors que la condition d'holomorphie sur le contour limite au contraire la complication du transformé de d.

M. Stoïlow a montré d'autre part dans le Mémoire cité que l'on peut au voisinage d'un point de ramification de la transformation inverse, définir une étoile analogue à celle qui nous a servi à décomposer le voisinage d'un zéro de la dérivée sphérique de $f(z)$. Toutefois la seule chose précise que l'on puisse affirmer sur les rayons de cette étoile est qu'ils sont en nombre fini. Mais leur disposition peut être extrêmement irrégulière.

Ainsi dans le cas des transformations intérieures nous pourrons faire la décomposition cellulaire au moyen des deux types d'arcs qui nous ont servi pour les fonctions analytiques : arcs homologues du contour du domaine étudié, arcs coupures à partir des points correspondant à une ramification de la transformation inverse.

Si nous abandonnons la condition que la transformation soit intérieure nous pouvons encore définir une décomposition ayant toutes les propriétés des décompositions cellulaires en introduisant les lignes de repliement, courbes C telles que de part et d'autre de la courbe, en tout point de cette courbe, on peut trouver deux points infiniment voisins homologues entre eux, et que l'image d'un arc qui traverse C ne traverse pas la courbe image de C. (Cela constitue la singularité « ordinaire » d'une transformation topologique plane). Mais on ne peut même plus affirmer ici *a priori* qu'il n'aboutit pas en un même point une infinité de lignes de repliement. Cette généralisation a donc un intérêt peut-être moins immédiat que la théorie relative aux fonctions analytiques.

---

[1] *Annales de l'É. N. S.*, 1928.

CHAPITRE III

Domaines contenant des points singuliers. Groupes d'automorphie.

§ 1. — Décomposition du domaine d'existence d'une fonction en domaines fondamentaux.

[**30**] La notion de décomposition en feuillets et de polygone fondamental d'une surface de Riemann est classique; elle repose sur une étude *a priori* de la surface de Riemann; je me propose dans ce paragraphe de montrer que les considérations du Chapitre précédent permettent de retrouver directement cette décomposition. Soit une fonction $f(z)$ méromorphe dans un domaine ouvert D (domaine d'existence de $f(z)$). Nous formerons une suite de domaines D_n (domaines d'approximation) jouissant des propriétés suivantes :

1°) Tout point intérieur à un domaine D_n est intérieur au domaine D.

2°) Tout point intérieur à un domaine D_n est intérieur à tout domaine d'indice plus élevé.

3°) Tout point intérieur à D est, à partir d'un certain rang, intérieur aux domaines D_n.

4°) Les domaines D_n sont limités chacun par un nombre fini d'arcs élémentaires.

Décomposons le domaine D_1 en cellules, opérons de même sur les domaines D'_1 différence entre D_1 et D_2, D'_2 différence entre D_2 et D_3, et ainsi de suite. Puis, par la méthode définie plus haut (Ch. II, § 2, n° 27) formons dans D_1 un domaine δ_1 en groupant les cellules de D_1 autour de l'une d'elles. Continuons ensuite à compléter ce domaine en ajoutant des cellules de D'_1, D'_2, etc... ou même plus généralement des fragments de cellule. Le domaine δ_1 ainsi obtenu va toujours en augmentant, donc tend vers un domaine limite, que nous appellerons le domaine δ_1 relatif à la fonction.

S'il y a des cellules de D_1 non incorporées à δ_1 formons un domaine δ_2 en groupant autour d'une cellule libre de D_1 des cellules voisines non homologues, et ainsi de suite jusqu'à ce que δ_2 ait atteint sa forme limite.

Formons de la même manière un domaine δ_3, et ainsi de suite. Nous épuiserons toutes les cellules de D_1, puis toutes celles de D'_1, et ainsi de suite; de sorte que, à la limite, le domaine D se trouvera décomposé en un nombre fini ou infini de domaines δ ayant les propriétés suivantes :

1°) *Dans tout domaine δ la fonction $f(z)$ est univalente.*

2°) *Étant donné deux domaines δ_i et δ_j en contact le long d'un certain arc* A, *les points de celui des deux domaines dont l'indice est le plus élevé qui sont voisins de l'arc* A *ont des homologues dans le domaine d'indice le plus faible.*

Soit maintenant un domaine δ_j bordé par un arc de l'autre côté duquel il y aurait des points voisins et sans homologues dans δ_j. Soit δ_i le domaine contigu correspondant, avec $i<j$. Soit M un point de δ_i sans homologue dans δ_j, N un point de δ_j voisin, et qui par suite a un homologue N' dans δ_i. Joignons N'M par un arc intérieur à δ_i, et procédons au tracé à partir de N dans δ_j de l'arc homologue. Nécessairement, ou bien cet arc homologue va sortir de δ_j par un point de sa frontière où $f(z)$ est régulière, ou bien il va tendre vers un ou plusieurs points singuliers de $f(z)$ lorsque le point courant sur l'arc N'M tendra vers une certaine position limite Q.

Dans le cas où la deuxième hypothèse est réalisée, on obtient une propriété équivalente au fait que la surface de Riemann de la fonction inverse possède sur un feuillet un espace lacunaire. Dans ces conditions nous pourrons énoncer une troisième propriété caractéristique des domaines δ :

3°) *Si dans un domaine δ_i situé au contact de $\delta_j (j>i)$ il y a des points* P *voisins de δ_j qui n'ont pas d'homologues dans δ_j, ou bien δ_j est borné par des points singuliers de $f(z)$ faisant apparaitre une lacune sur la surface de Riemann couverte par les valeurs de f, ou bien il y a au contact de δ_j dans un domaine autre que δ_i et δ_j des points homologues des points* P.

Nous allons maintenant procéder à une *révision* des domaines δ, opération dont le principe est le suivant : supposant qu'une certaine propriété est réalisée dans les domaines δ d'indice inférieur à n, nous montrerons qu'on peut, en changeant les domaines δ auxquels sont attribués certaines cellules, la faire apparaître dans δ_n sans la faire disparaître des domaines d'indice inférieur à n. Il est alors clair que l'on peut par de telles opérations obtenir que tout domaine δ possède la propriété étudiée, à condition bien entendu que si nous révisons une infinité de fois δ_n nous ayons un domaine limite pour les nouveaux δ_n.

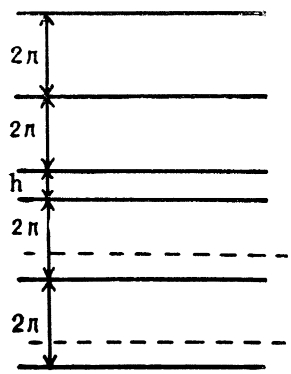
Supposons que nous ayons au contact de δ_j dans un domaine $\delta_k (k<j)$ une cellule qui n'ait pas d'homologue dans δ_j. D'après la propriété 3°) deux hypothèses sont possibles : existence de points singuliers sur la frontière de δ_j, existence d'une cellule homologue dans un $\delta_{k'}$ au contact de δ_j. Nous allons par la révision nous affranchir de cette deuxième circonstance.

Supposons en effet qu'elle ne se présente pour aucun domaine d'indice inférieur à j et qu'elle se présente pour δ_j. Nous ajouterons à δ_j la cellule de $\delta_{k'}$. Si $k' < j$ nous complétons $\delta_{k'}$ au moyen d'une cellule d'un domaine voisin (si $k' > j$ la hiérarchie des domaines δ est respectée sans nouvelle opération) et ainsi de suite; comme l'indice des domaines que nous avons éventuellement à compléter est borné par j il n'y a qu'un nombre fini, et chacun n'étant à compléter qu'une fois la révision n'a demandé qu'un nombre fini d'opérations. Son effet sur la partie de δ_j intérieure à D_n est donc aussi connu au bout d'un nombre fini d'opérations, nous sommes bien dans les conditions pour que les domaines δ aient après révision une forme limite, et nous arrivons au résultat suivant :

Théorème 1 : *Pour une fonction $f(z)$ qui représente le plan sur une surface de Riemann sans espaces lacunaires, il est toujours possible d'amener par révision la décomposition en domaines δ à ne plus comprendre que des domaines complets.*

Nous allons préciser sur un exemple simple le fait qui aurait pu se produire avant la révision; il est toujours possible, par un choix convenable des domaines d'approximation pour la fonction $Z = e^z$, d'obtenir pour domaines δ des bandes limitées par des parallèles à l'axe des quantités réelles, bandes toutes de même largeur 2π, sauf une, de largeur $h < 2\pi$.

Toutes les bandes sauf celle-ci sont des domaines complets; mais nous la compléterons en lui ajoutant une portion de la bande inférieure; et en opérant successivement ainsi sur chacune des bandes nous obtenons la décomposition en bandes toutes de largeur 2π,



D'une façon générale, nous supposerons toujours la décomposition en domaines δ réalisée de telle sorte que les seuls domaines incomplets soient ceux correspondant à un espace lacunaire. *Nous avons alors évidemment une image de la décomposition en feuillets de la surface de Riemann*; remarquons que l'on peut toujours supposer que cette décomposition a été obtenue directement, sans révision, par le procédé de groupement de cellules non homologues; et qu'on peut reconnaître, au moins d'une manière théorique, que cette décomposition est réalisée, sans utiliser la surface de Riemann. Les résultats que nous obtenons ainsi précisent ceux énoncés sous une forme analogue par M. Radoïtchitch (¹).

Si nous supposons $f(z)$ méromorphe dans un domaine D, nous pouvons énoncer :

Théorème 2 : *La fonction $f(z)$ représente un domaine δ sur le plan diminué d'es-*

(¹) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (1929, t. 189, p. 1240 et 1930, t. 190, p. 356).

paces lacunaires en nombre fini ou infini la partie restante étant affectée d'une coupure image des arcs du contour de δ *non singuliers pour* $f(z)$.

Ceci justifie la dénominatiou de *domaines fondamentaux* que nous adopterons désormais pour les domaines δ. Le procédé de construction adopté s'étendrait sans modification aux fonctions multiformes définies sur une surface de Riemann.

[**31**] Je vais maintenant préciser quelques-unes des propriétés de la décomposition en cellules pour une fonction méromorphe dans tout le plan à l'exception d'un point singulier essentiel isolé que je supposerai à l'infini. Alors :

Théorème 3 : *Dans tout cercle ayant l'origine pour centre il ne pénètre qu'un nombre fini de domaines* δ *; il y a une infinité de domaines* δ *qui lui sont extérieurs.*

En effet notre procédé de construction supposant les domaines d'approximation limités par un nombre fini d'arcs analytiques ne peut donner à l'intérieur d'une région fermée sans point singulier qu'un nombre fini de cellules, et *a fortiori* un nombre fini de domaines fondamentaux; si à l'extérieur d'un cercle de centre origine il n'y avait pas une infinité de domaines fondamentaux, la valence de $f(z)$ serait finie et par conséquent il y aurait contradiction avec le théorème de Weierstrass.

Parmi les domaines fondamentaux, certains sont situés entièrement à l'intérieur d'un cercle suffisamment grand ayant l'origine pour centre. D'autres peuvent rencontrer tout cercle dont le rayon dépasse une certaine limite. Par exemple si $f(z)$ est une fonction elliptique telle que $\mathrm{p}z$ ou $\mathrm{sn}\,z$ tous les domaines fondamentaux seront du premier type. Pour la fonction e^z au contraire tous les domaines sont du second type.

Étant donné un domaine δ du second type, considérons tous les chemins qui s'éloignent indéfiniment dans le domaine; on peut toujours supposer qu'ils tendent uniformément vers l'infini (ils peuvent ne pénétrer qu'un nombre fini de fois à l'intérieur de tout cercle donné ayant l'origine pour centre); il correspond à ces chemins sur la sphère transformée du plan des z un « domaine d'indétermination », qui ne peut pas comprendre un ensemble de points partout dense dans un domaine superficiel. Supposons en effet qu'il existe un tel domaine superficiel s, et soit M un de ses points. Traçons un cercle γ de centre M intérieur à s. Il existe à l'intérieur de ce cercle une valeur M′ prise par la fonction f à l'intérieur de δ (puisque M peut être approché arbitrairement par les valeurs de f dans δ). Mais il existe au moins un point M″, distinct de M, du domaine d'indétermination à l'intérieur de γ. Il existe des points M‴ arbitrairement voisins de M″ et couverts par f pour des valeurs intérieures à δ mais arbitrairement voisines du point à l'infini. De sorte qu'une telle valeur M‴ serait prise au moins deux fois par la fonction à l'intérieur de δ (au voisinage du point où f prend la valeur M′ et au voisinage du point à l'infini); il y a contradiction, puisque la fonction est univalente dans un domaine fondamental.

Rien n'empêche *a priori* que l'ensemble des points du domaine d'indétermination soit dense sur des arcs de courbe. Si nous admettions que la surface de Riemann de la fonction inverse d'une fonction méromorphe est illimitée(1), nous en déduirions que cette hypothèse est irréalisable. Nous allons étudier directement le domaine d'indétermination en mettant en évidence les caractères topologiques qu'entraîne la décomposition en cellules.

[**32**] Étant donné un domaine fondamental δ ayant le point à l'infini pour point frontière, nous dirons que deux arcs a_1, a_2 distincts s'éloignant indéfiniment d'une manière uniforme à l'intérieur de δ sont *contigus* s'il existe une suite infinie d'arcs de cercle, de rayons indéfiniment croissants, tels que chacun d'eux ait ses deux extrémités sur a_1 et a_2 respectivement et soit intérieur entièrement à δ. Nous appellerons *pointe* l'ensemble de tous les arcs contigus à un arc donné. L'étude que nous allons faire est basée sur la remarque que, à l'intérieur d'un domaine fondamental, diminué d'un petit domaine à distance finie, la fonction méromorphe donnée est une fonction univalente « à région exceptionnelle », par suite au voisinage d'un point singulier du contour on peut lui appliquer les théorèmes sur les fonctions bornées. En particulier tous les chemins d'une pointe définissent sur le contour un point singulier isolé accessible d'une seule manière. Le domaine d'indétermination relatif à une pointe est un arc de courbe pour lequel un point au plus est accessible(2).

Étudions à quel type réduit on peut ramener l'ensemble des pointes d'un domaine fondamental. Soit un arc du contour s'éloignant indéfiniment. Nous appellerons pointe associée à cet arc l'ensemble des arcs intérieurs au domaine qui lui sont contigus. D'après le procédé de décomposition employé il y a au moins un arc du contour qui a un homologue (après une première révision, bien entendu).

Soit un tel arc PQ; de l'homologue P_1 de P part un arc homologue; alors trois hypothèses sont possibles lorsque Q va à l'infini; ou bien 1° l'arc issu de P a un arc ou une suite d'arcs homologues allant à l'infini; ou bien 2° l'arc $P\infty$ admet une suite d'arcs homologues tendant vers un point Q_1 à distance finie (et composée dans ce cas d'un nombre fini d'arcs élémentaires); ou bien 3° le début PQ de l'arc $P\infty$ admet un arc homologue tendant vers l'infini. Une quatrième hypothèse, à savoir que l'arc issu de P admet une suite d'arcs homologues tendant vers un point à distance finie, est rendue impossible par la révision que nous avons faite : on peut toujours supposer le domaine complété au voisinage du point à distance finie. D'autre part, la

---

(1) Théorème d'IVERSEN, voir p. e. RADOÏTCHITCH, *loc. cit.*

(2) P. MONTEL, *Leçons sur les familles normales*, pages 103 sqq.

troisième hypothèse se ramène immédiatement à la seconde en échangeant les deux arcs homologues; en outre dans ce cas sur l'arc infini il y a une valeur asymptotique.

Montrons qu'une révision convenable de l'ensemble des domaines fondamentaux permet de s'affranchir de l'hypothèse 2°. En effet, supposons qu'on s'en soit affranchi pour tous les domaines d'indice inférieur à n; considérons la pointe associée à un arc infini du type étudié; en ne prenant que la partie de la pointe extérieure à un cercle assez grand, on n'a comme valeurs intérieures à cette partie que les valeurs voisines de la valeur limite; à distance finie il y a donc un petit domaine homologue à la pointe. Nous opérerons donc la révision en remplaçant la pointe par le petit domaine, révision possible puisque nous admettons que dans les domaines d'indice inférieur à n il n'y a pas d'arc du contour sans homologue. Donc par l'achèvement de cette révision on voit que dans tout domaine fondamental il n'y a plus que des pointes bordées par deux arcs ou suites d'arcs homologues entre eux s'éloignant à l'infini : une pointe joue le rôle de ce que nous avons appelé un point d'articulation dans un domaine complet. Mais alors les diverses propriétés que nous avons données pour les domaines complets vont subsister, *mutatis mutandis* : en particulier l'énoncé suivant : toute valeur non prise par la fonction sur le contour sera prise à l'intérieur du domaine deviendra :

Théorème 4 : *Une valeur complexe donnée* Z_0 : *ou bien est prise une fois à l'intérieur du domaine fondamental, ou bien est prise deux fois au moins sur le contour, ou bien fait partie du domaine d'indétermination attaché à l'une des pointes à l'infini du domaine.*

Si en particulier une valeur donnée n'est prise qu'un nombre fini de fois dans tout le plan par la fonction donnée, elle est exceptionnelle dans une infinité de domaines fondamentaux; donc elle fait partie du domaine d'indétermination. Le théorème de M. Iversen cité à la fin du n° 31 montre de plus que toute valeur exceptionnelle d'une fonction méromorphe est valeur asymptotique. Cela ne peut être mis en évidence sur une cellule isolée, toujours représentable sur un domaine qui a des arcs de frontière inaccessible.

Les démonstrations qui précèdent n'ont pas supposé que le point singulier était isolé dans le domaine total d'existence de f, mais seulement sur le contour du domaine fondamental étudié. D'autre part, si le contour d'un domaine fondamental présentait un arc singulier pour la fonction, il serait impossible que le domaine d'indétermination relatif à cet arc se réduise à un point. Par suite en appelant *domaine fondamental lacunaire* un domaine pour lequel le domaine couvert par les valeurs de la fonction comprend un arc, coupure essentielle, nous énoncerons :

Théorème 5 : *Étant donné une fonction* $f(z)$, *pour qu'un de ses domaines fondamentaux ne soit pas lacunaire, il faut que les points singuliers soient isolés sur le contour du domaine fondamental.*

§ 2. — Propriétés générales des groupes d'automorphie.

[33] Étant donnée une fonction $f(z)$ définie et uniforme dans un certain domaine D, si nous avons deux points z_1 et z_2 tels que $f(z_1) = f(z_2)$ nous appellerons *fonction d'automorphie* de la fonction f une fonction analytique $H(z)$ définie au voisinage du point z_1 de la façon suivante : soit $\varphi(u)$ la fonction résultant de l'inversion de f au voisinage de z_2. On aura :

$$H(z) = \varphi[f(z)].$$

La fonction H étant définie au voisinage d'un point sera définie dans le domaine D (ou éventuellement dans une partie seulement de D). Étant données les propriétés connues du prolongement analytique, la fonction H vérifie toujours la propriété :

$$f(z_1) = f[H(z_1)].$$

Au point de vue de la structure de la fonction H, les propriétés caractéristiques essentielles ne changent pas si l'on effectue sur D une représentation conforme quelconque, et si l'on étudie la nouvelle fonction $g(z)$ définie dans le domaine transformé de D de manière que la valeur de g en un point soit égale à la valeur de f au point correspondant de D. Or une telle représentation conforme permet de transformer tout ensemble de points singuliers en un ensemble de l'un des deux types suivants :

a) Point singulier essentiel isolé ;

b) Ensemble de singularités fermé réparti sur le cercle unité.

En général il y aura plusieurs fonctions d'automorphie distinctes formant un groupe c'est-à-dire telles que si $H_1(u)$ et $H_2(u)$ sont deux fonctions du groupe, la fonction $H_3 = H_2\{H_1(u)\}$, fait aussi partie du groupe. Nous allons essayer de préciser dans chacun des deux cas quelques propriétés des fonctions du groupe d'automorphie.

A) Cas du point essentiel isolé.

[34] Pour une fonction méromorphe quelconque, toute fonction d'automorphie est définie dans tout le plan ; en effet le théorème que la surface de Riemann de la fonction inverse est illimitée pouvant encore s'énoncer : il est possible de prolonger analytiquement une branche de la fonction inverse d'une fonction méromorphe le long d'un chemin infiniment voisin d'un chemin arbitrairement donné, une fonction d'automorphie est prolongeable analytiquement sur tout le plan, ou plus exactement sur une surface de Riemann illimitée. Si en un point la fonction prend une valeur qui n'est pas une valeur asymptotique, il est point régulier pour la fonction d'automorphie, ou point critique algébrique, dans le cas où la dérivée sphérique s'annule en un point homologue.

Comme toute valeur non lacunaire est, par définition, prise à distance finie, on a :

Théorème 7 : *Si une fonction n'admet d'autres valeurs asymptotiques que ses valeurs lacunaires, toutes ses fonctions d'automorphie sont algébroïdes en tout point à distance finie, et réciproquement.*

Si une fonction admet une valeur asymptotique, demandons-nous à quelle condition une au moins de ses fonctions d'automorphie sera algébroïde dans tout le plan. Soit un chemin de détermination correspondant à cette valeur asymptotique. Si une fonction d'automorphie algébroïde faisait correspondre ce chemin à un chemin qui tend vers un point fini z_0, la fonction $f(z)$ serait holomorphe au point à l'infini ou y présenterait un point critique algébrique puisqu'il en est de même de $H(z_0)$. Donc :

Théorème 8 : *Si une fonction méromorphe admet une fonction d'automorphie algébroïde en tout point, cette fonction algébroïde est finie en tout point à distance finie.*

Montrons que l'on peut ramener des fonctions méromorphes très générales à des fonctions ayant des groupes d'automorphie très simples. Soit $f(z)$ une fonction n'ayant pas tous les points du plan pour valeur asymptotique. En effectuant sur $f(z)$ une transformation linéaire convenable on peut supposer que zéro n'est pas une valeur asymptotique. Je dis alors que si la fonction $f(z)z$ admet une valeur asymptotique, ce ne peut être que la valeur ∞. Si en effet $zf(z)$ tendait vers une valeur finie a, $f(z)$ tendrait vers 0 sur ce chemin, ce qui n'est pas. Donc :

Théorème 9 : *Si la fonction $f(z)$ n'admet pas la valeur zéro comme valeur asymptotique, les fonctions d'automorphie de $zf(z)$ sont :*

a) *algébroïdes dans tout le plan si $f(z)$ est entière ou admet un pôle simple à l'origine.*

b) *algébroïdes dans tout le plan à l'exception peut-être des pôles de $f(z)$ dans le cas général.*

En général ces fonctions algébroïdes auront une infinité de déterminations; mais dans ce cas elles ne peuvent avoir comme branches limites que la constante infinie. Sinon en effet les homologues d'un même point à distance finie auraient des points d'accumulation à distance finie, ce qui n'est pas.

Supposons que nous soyons dans le cas d'une fonction entière sans valeur asymptotique finie, ou dans le cas d'une fonction entière à valeur exceptionnelle finie mais sans autre valeur asymptotique.

Supposons que l'une des fonctions d'automorphie de $F(z)$ ait un nombre fini ν de déterminations. Elle vérifiera une équation :

$$H^{\nu} + f_1(z) H^{\nu-1} + \ldots + f_{\nu}(z) = 0$$

où les $f_1(z) \ldots f_{\nu}(z)$ sont des fonctions entières de la variable z.

Supposons données les ν fonctions $f_i(z)$, nous saurons d'abord calcùler les valeurs de z pour lesquelles l'équation donnera un point critique pour H : ce sont les zéros d'une certaine fonction entière, combinaison des $f_{\nu}(z)$ donnée par les règles de l'algèbre. Si donc $F(z)$ est la fonction entière étudiée nous connaîtrons déjà certains zéros de $F'(z)$ avec leur ordre. Nous aurons donc l'identité

$$F'(z) = U(z) \times e^{P(z)} \times P'(z)$$

$U(z)$ étant une fonction entière que l'on peut supposer connue, et $P(z)$ une fonction entière à déterminer. Nous connaîtrons encore d'autres zéros de $F'(z)$; ce sont les points pour lesquels on a $H(z) = z$ qui sont aussi les zéros d'une certaine fonction entière

$$G(z) = z^{\nu} + f_1(z) z^{\nu-1} + \ldots + f_{\nu}(z).$$

Or en général l'ordre de cette fonction entière sera égal à l'ordre de celle des fonctions $f_i(z)$ qui a l'ordre le plus élevé; donc l'ordre de $F(z)$ sera au moins égal à l'ordre de cette fonction. Enfin s'il y a d'autres zéros de F' ils sont deux à deux homologues par $H(z_1)$.

Théorème 10 : *Si une fonction entière $F(z)$ sans valeur asymptotique finie non lacunaire admet une fonction d'automorphie H vérifiant l'équation :*

$$H^{\nu} + f_1(z) H^{\nu-1} + \ldots + f_{\nu}(z) = 0$$

la fonction

$$G(z) = \frac{F'(z)}{\Delta[z^{\nu} + f_1(z) z^{\nu-1} + \ldots + f_{\nu}(z)]}$$

où Δ désigne le résultant de l'équation en H et de son équation dérivée est une fonction entière telle que si elle admet un point pour zéro elle admet aussi pour zéros les ν transformés de ce point par la fonction H.

Remarquons d'ailleurs que si la fonction G admet un zéro elle en admet en général une infinité. Enfin la fonction algébroïde considérée si elle n'est pas algébrique admet nécessairement comme domaine d'indétermination au voisinage du point à l'infini tout le plan. Sinon les fonctions entières étudiées admettraient une infinité de combinaisons exceptionnelles ; si une valeur donnée h_0 de H n'était prise qu'un nombre fini de fois l'égalité $h_0^\nu + f_1(z)\, h_0^{\nu-1} + \ldots + f_\nu(z) = 0$ ne serait réalisée qu'un nombre fini de fois.

[**35**] Au contraire nous aurons :

THÉORÈME II : *Si une fonction algébrique est fonction d'automorphie pour une fonction méromorphe toutes ses déterminations sont infinies avec z et elle est finie à distance finie.*

Si en effet on avait $f[H(z)] = f(z)$ et si z tendant vers l'infini H tendait vers une valeur finie a, comme f est méromorphe autour de a et que H est holomorphe ou algébrique autour de $z = \infty$ il en serait de même de la fonction de fonction et le point infini ne serait pas un point singulier essentiel pour f. Une telle fonction algébrique $y(z)$ vérifie donc une équation de la forme :

$$y^n + A_1(z)\, y^{n-1} + \ldots + A_n^{(z)} = 0 .$$

Les fonctions $A_1 A_2 \ldots A_n$ étant des polynômes. Quand z tend vers l'infini, pour avoir les valeurs limites de y il faut égaler à zéro les coefficients du terme de plus haut degré en z. Ce terme ne devant pas contenir y, nous en concluons que $A_n(z)$ est de degré plus élevé que les autres polynômes A. Nous obtiendrons alors la forme implicite suivante pour une fonction algébrique d'automorphie :

$$F(z, y) = a z^h + y^k + P(y, z) = 0 ,$$

P étant un polynôme en y, z de degré en z inférieur à h et de degré en y inférieur à k.

Supposons maintenant que la fonction d'automorphie algébrique étudiée ne soit pas cyclique, c'est-à-dire qu'il y ait des points ayant une infinité d'homologues. Cette fonction algébrique et ses itérées ne doivent admettre aucun point double attractif à distance finie parce qu'il ne peut y avoir une infinité de points homologues entre eux à distance finie.

Envisageons maintenant un point double répulsif : il est point double attractif pour la fonction inverse qui est aussi fonction d'automorphie algébrique. Ce cas est encore impossible. Il reste à étudier ce qui se passe pour un point double indifférent. En ce point la dérivée de la fonction algébrique doit avoir un argument commensurable avec 2π sinon un arc issu du point double et ayant une tangente en ce point aurait une infinité d'homologues distincts issus du point. C'est ce qui se produirait aussi si le point double était point critique algébrique pour la fonction d'automorphie; en faisant des itérations on aurait des étoiles régulières à $a, a^2, \dots, a^n, \dots$ rayons tous homologues entre eux; d'où le premier résultat :

THÉORÈME 12 : *Si la transformation définie par une fonction d'automorphie algébrique admet un point double à distance finie, ce point n'est pas un point critique sur sa branche. La dérivée de la fonction d'automorphie y est égale à :* $e^{2\pi i \frac{m}{n}}$, *m et n étant deux nombres entiers.*

Nous allons donner un énoncé plus précis : par une itération convenable on peut toujours supposer $n = 1$. Soit donc

$$J(y, z) = y^k + az^h + P(y, z) = 0 \tag{1}$$

une équation algébrique telle que P soit de degré en y inférieur à h, et inférieur à k en z. Un point double de la transformation $y \to z$ vérifie l'équation :

$$U(z) = z^k + az^h + P(z, z) = 0. \tag{2}$$

Pour que en ce point $\frac{dy}{dz} = 1$ il faut aussi que

$$kz^{k-1} + ahz^{h-1} + \frac{\partial P}{\partial y}(z, z) + \frac{\partial P}{\partial z}(z, z) = 0 \tag{3}$$

équation dérivée de l'équation (1) où l'on fait $z = 1$ $y' = 1$. Donc toute racine de 2 doit être racine de 3. Or l'équation (3) s'écrit aussi

$$U'(z) = 0 \tag{3'}$$

si donc $U(z)$ dépend effectivement de z les équations (2) et (3) n'ont pas toutes leurs racines communes; donc $U(z)$ ne dépend pas de z; tous les points doubles de la fonction algébrique (1) sont à l'infini; $J(y, z)$ est la somme d'une constante et d'un polynôme divisible par $y - z$.

L'équation générale d'une fonction algébrique d'automorphie non cyclique pour une fonction méromorphe est donc après une itération convenable :

$$(y - z)[G(z, y)] - h = 0.$$

Le polynôme $G(z, y)$ étant de la forme :

$$z^h + y^k + P(y, z) = 0$$

où le degré de P en z est inférieur à h et le degré en y inférieur à k.

La suite des raisonnements faits plus haut montre aussi que toute fonction itérée de la fonction donnée ou de son inverse est de cette forme à moins d'être $y - z = 0$.

Cherchons par exemple si la première itérée peut admettre un point double à distance finie. Il faudrait pour cela avoir à la fois :

$$\begin{cases} (y - z)\,G(z, y) = h, \\ (z - y)\,G(y, z) = h. \end{cases}$$

C'est-à-dire que l'on devrait avoir

$$(y - z)\,G(z, y) = h, \tag{4}$$

et

$$G(y, z) + G(z, y) = 0. \tag{5}$$

Donc tout point commun aux courbes algébriques (4) et (5) doit être un point à l'infini. Cette propriété est réalisée notamment si $G(xy)$ est un polynôme symétrique. Dans ce cas on ne peut pas avoir simultanément

$$\begin{cases} (y - z)\,G(z, y) = h, \\ (z - y)\,G(z, y) = h. \end{cases}$$

[**36**] Supposons qu'une fonction $f(z)$ ait une fonction d'automorphie $y(z)$ vérifiant une équation de la forme :

$$(z - y)\,G(z, y) = h;$$

dans ce cas tous les homologues d'un point donné tendent vers l'infini. Soit z_0 un point donné. Supposons que z_n et z_{n-1} étant deux points homologues consécutifs on n'ait pas :

$$\lim_{n=\infty} \frac{z_n}{z_{n-1}} = 1.$$

Dans ce cas on aura nécessairement

$$\lim G(z_n, z_{n-1}) = 0$$

pour z_{n-1} et z_n tendant vers l'infini. Soit alors m une valeur d'accumulation de $\frac{z_n}{z_{n-1}}$; soit $G_k(z_n, z_{n-1})$ le polynôme des termes de degré le plus élevé de G; si ce polynôme n'est pas nul pour $\frac{z_n}{z_{n-1}} = m$ il va imposer sa croissance à G et tendre vers l'infini. Donc les seules valeurs limites possibles pour le rapport $\frac{z_n}{z_{n-1}}$ sont les racines du polynôme des termes de degré le plus élevé de G. D'où :

THÉORÈME 13 : *Si une fonction $f(z)$ méromorphe en tout point à distance finie admet une fonction d'automorphie $z_n(z_{n-1})$ algébrique de la forme $(z_n - z_{n-1})\,G(z_n, z_{n-1}) = h$ le rapport $\frac{z_n}{z_{n-1}}$ ne peut admettre comme valeur d'accumulation que le nombre 1 et les pentes des directions asymptotiques de la courbe $G(y, x) = 0$.*

Précisons ce résultat et supposons que la fonction d'automorphie soit de la forme :

$$h = \varphi_p(z_n, z_{n-1}) + \varphi_{p-1}(z_n, z_{n-1}) + \varphi_{p-2}(z_n, z_{n-1}) + \dots + \varphi_n(z_n, z_{n-1}) \qquad (1)$$

où les φ sont des polynômes homogènes divisibles par $z_n - z_{n-1}$ dont le d gré est égal à l'indice. Soit :

$$z_n = m z_{n-1}[1 + \lambda(z)]$$

où m est une racine de $\varphi_p(u, 1) = 0$ et λ une fonction supposée tendre vers 0 avec $\frac{1}{z_{n-1}}$. On aura :

$$\varphi_n(y, x) = (y - mx)^a\, \varphi'_{n-a}(y, x)$$

d'où en particulier :

$$\varphi_p\big[m z_{n-1}\big(1 + \lambda(z)\big), z_{n-1}\big] = m^a z_{n-1}^a [\lambda(z)]^a\, \varphi'_{p-a}[m z_{n-1}(1 + \lambda), z_{n-1}]$$

φ'_{p-a} augmente indéfiniment comme z_{n-1}^{p-a} donc φ_p tend vers l'infini comme $\lambda^a z_{n-1}^p$. Donc nécessairement $[\lambda(z)]^a$ tend vers 0 au moins comme $\frac{1}{z}$, sinon la croissance de φ_n l'emporterait encore sur φ_{p-1}.

Si $\varphi_{p-1}(z_n, z_{n-1})$ n'admet pas le facteur $z_n - m z_{n-1}$, $[\lambda(z)]^a$ tend vers 0 exactement comme $\frac{1}{z_{n-1}}$ sinon la croissance de φ_{p-1} l'emporterait et l'identité (1) serait impossible.

Si $\varphi_{p-1}(z_n, z_{n-1})$ admet le facteur $(z_n - m z_{n-1})^b$, φ_p est équivalent à $A z_{n-1}^p \lambda^a$ et φ_{p-1} à $B z_{n-1}^{p-1} \lambda^b$. Si $\frac{\lambda^b}{\lambda^a}$ n'est pas équivalent à z ces deux termes ne peuvent se détruire et par suite λ^a équivaut au moins à z^{-2} et λ^b au moins à z^{-1}, et ainsi de suite....

On peut ainsi dans chaque cas donner une mesure de la convergence de $\frac{z_n}{z_{n-1}}$, mais ces diverses remarques ne donnent que des conditions nécessaires et non des conditions suffisantes pour qu'une fonction algébrique donnée soit fonction d'automorphie d'une fonction méromorphe. Le dernier paragraphe de ce chapitre donnera des conditions suffisantes valables pour des fonctions d'automorphie plus générales. On peut toutefois construire un exemple très simple de fonction méromorphe admettant une fonction d'automorphie algébrique.

Soit $f(z)$ une fonction méromorphe admettant la période h et $P(z)$ un polynôme quelconque, la fonction $f[P(z)]$ admet la fonction d'automorphie définie par :

$$P(z) = P(y) + h$$

qui possède bien les propriétés que nous avons indiquées. D'où :

THÉORÈME 14 : *Toute fonction algébrique $z(y)$ définie par $P(z) - P(y) = h$ est fonction d'automorphie pour une infinité de fonctions méromorphes dans le plan ouvert.*

[37] Cherchons maintenant si une fonction d'automorphie non cyclique de fonction méromorphe peut être un polynôme; nous sommes dans un cas particulier des fonctions d'automorphie algébrique; soit $y = H(z)$ la fonction étudiée, revenons à la forme réduite

$$(y - z)\, G(y, z) = h$$

pour que la fonction soit uniforme G ne doit pas dépendre de y; mais alors comme le coefficient de y ne doit pas dépendre de z, G doit être lui aussi indépendant de z; la fonction d'automorphie considérée c'est $y = z + h$. Nous avons une fonction périodique. D'où :

THÉORÈME 15 : *Si une fonction d'automorphie non cyclique de fonction méromorphe est régulière et uniforme en tout point du plan elle est de la forme $y = z + h$.*

D'où nous tirons immédiatement le corollaire suivant qui distingue les fonctions définies dans le plan ponctué des fonctions définies dans un cercle :

THÉORÈME 16 : *Une fonction méromorphe en tout point à distance finie possède au plus deux fonctions d'automorphie non cycliques, uniformes, et indépendantes.*

Le terme « indépendantes » signifie qu'aucune itérée de l'une des fonctions d'automorphie envisagée n'est combinaison d'itérées des autres. On sait au contraire qu'il y a des fonctions fuchsiennes ayant un nombre quelconque de fonctions d'automorphie uniforme.

B) CAS DES FONCTIONS A CERCLE FONDAMENTAL.

[38] Toute fonction qui n'est pas du type précédent peut se ramener par une représentation conforme convenable à une fonction f définie à l'intérieur du cercle unité, et telle que tout point du cercle unité, ou bien soit singulier, ou bien soit sur un arc admettant un autre arc du cercle unité comme homologue. Les fonctions d'automorphie de f ne sont pas nécessairement définies au voisinage de tout point du cercle unité et peuvent y admettre des lacunes; de même elles peuvent ne pas toujours représenter leur domaine de définition sur tout le cercle unité, mais seulement sur une partie. Je dirai qu'une fonction $f(z)$ est à *automorphie régulière* lorsque toute fonction d'automorphie de $f(z)$ sera définie dans le domaine $|z| < 1$ et le représentera sur le domaine $|z| < 1$; la surface de Riemann couverte par la fonction d'automorphie aura peut-être une infinité de feuillets, mais nous supposerons qu'elle n'aura pas de point frontière dont le module est inférieur à 1. Dans ces conditions les seuls points critiques d'une fonction d'automorphie seront algébriques.

Théorème 17 : *Si une fonction d'automorphie régulière ne présente qu'un nombre fini de points critiques à l'intérieur du cercle fondamental et si elle est continue sur le cercle elle est algébrique dans tout le plan.*

En effet le principe de symétrie permet de définir à l'extérieur du cercle une fonction multiforme, dont les diverses déterminations en un point sont respectivement les imaginaires conjuguées des valeurs de la fonction d'automorphie donnée aux points inverses par rapport au cercle fondamental.

Supposons maintenant que nous ayons pris pour cercle fondamental l'axe réel; le raisonnement employé déjà pour le cas du point essentiel isolé montre que dans le demi-plan que nous étudions, il n'y a pas de point double non indifférent; donc il n'y en a pas dans l'autre demi-plan et :

Théorème 18 : *Une fonction algébrique qui est fonction d'automorphie régulière n'a de point double non indifférent que sur le cercle fondamental.*

Soit $U(y, z) = 0$ l'équation qui définit une telle fonction. Le polynôme $U(z, z)$ a toutes ses racines simples réelles; s'il admet une racine multiple imaginaire il admet aussi la racine imaginaire conjuguée. On peut donc écrire par les règles de l'algèbre des conditions nécessaires pour qu'une fonction algébrique soit fonction d'automorphie. En particulier :

Théorème 19 : *Si une fonction d'automorphie régulière est uniforme dans le cercle fondamental et continue sur la circonférence c'est une fonction rationnelle.*

L'étude d'une fonction admettant une fonction d'automorphie rationnelle donnée est liée intimement à l'étude de l'itération des fractions rationnelles. D'une manière plus précise l'étude de l'itération permet de résoudre le problème de l'existence d'un polygone fondamental au sens de Poincaré. Le problème de savoir s'il existe une fonction correspondant à un groupe d'automorphie donné est d'un autre ordre; nous allons l'aborder maintenant.

§ 3. — Le problème d'existence, invariants différentiels, décomposition cellulaire normale.

[**39**] Dans ce paragraphe nous traiterons simultanément le cas du point singulier essentiel isolé et celui du cercle fondamental : contrairement à ce qui s'est produit dans le paragraphe précédent les deux cas ne diffèrent que par des points de détail.

Soient deux points z_1 et z_2 tels que l'on ait $f(z_1) = f(z_2)$ et soit $z_2 = \mathrm{H}(z_1)$ la fonction d'automorphie correspondante. Nous avons la relation

$$f'(z_1)\,dz_1 = f'(z_2)\,dz_2.$$

De telle sorte que, en considérant que la fonction H définit une transformation plane, cette transformation admet les deux invariants différentiels :

$$\mathrm{I}_1 = |f'(z_1)|\,ds, \qquad \mathrm{I}_2 = |f'(z_1)|^2\,d\omega$$

ds et $d\omega$ étant respectivement un élément d'arc et un élément d'aire.

Nous pouvons alors étendre à un groupe d'automorphie régulier au sens du n° 38 la théorie déjà établie depuis longtemps [1] pour les groupes à fonctions d'automorphie uniforme. Soit z_0 un point donné et l'ensemble de ses homologues z_i. Désignons par « écart » de deux points d'affixe a et b la borne inférieure de l'intégrale $\int_a^b |f'(z_1)|\,ds$. Considérons l'ensemble δ de tous les points du plan ou du cercle fondamental moins « écartés » de z_0 que de chacun de ses homologues. Supposons que dans ce domaine δ il y ait plusieurs points homologues entre eux. Soient M_0 et M_1 deux de ces points ; joignons $\mathrm{M}_0 z_0$ par un arc sur lequel l'intégrale $\int_{z_0}^{\mathrm{M}_0} |f'(z_1)|\,ds$ ne dépasse pas de plus de ε l'écart $\mathrm{M}_0 z_0$; puisque le groupe est régulier la fonction est à surface de Riemann illimitée, ou bien toute valeur asymptotique est exceptionnelle; de sorte que l'arc transformé de $\mathrm{M}_0 z_0$ sur la surface de Riemann engendrée par les valeurs de $f(z)$ est arbitrairement voisin d'un segment de droite ou d'une ligne polygonale bien déterminée par les transformés de z_0 et M_0 ; cet arc est donc le même pour $\mathrm{M}_0 z_0$ et $\mathrm{M}_1 z_0$. Si z_0 n'est pas un zéro de la dérivée sphérique on peut déplacer légèrement M_0 et M_1 pour que ces arcs n'en contiennent pas : il ne peut aboutir en z_0 deux arcs homologues distincts et par suite il est impossible que $f(z)$ soit multivalente dans le domaine ainsi défini à partir d'un point qui n'annule

---

[1] Cf. GIRAUD, *Leçons sur les fonctions automorphes*, Gauthier-Villars, Paris, 1920.

pas $\mathfrak{D}f$. D'autre part étant donné un point quelconque P du plan de la variable z il a nécessairement un homologue dans ce domaine. Soit en effet z_i un homologue de z_0 tel que tout autre homologue de z_0 soit au moins aussi éloigné de P que z_i. Traçons l'arc de courbe z_iP rendant minimum l'intégrale $\int_a^b |f'(z)|\, ds$; il part de z_0 un arc de courbe homologue de z_1P, qui étant donné l'invariance de la distance ne peut évidemment pas sortir du domaine δ, d'où le théorème :

THÉORÈME 20 : *Soit une fonction $f(z)$ admettant un groupe d'automorphie régulier; soit z_0 un point tel que la dérivée sphérique ne s'annule ni en ce point, ni en aucun de ses homologues z_i; soit δ_i le domaine dont tout point* P *est tel que la borne inférieure de $\int_{z_i}^{P} |f'(z)|\, ds$ soit plus petite pour* P *que pour tous ses homologues. L'ensemble des domaines d_i ainsi définis est un système de domaines fondamentaux pour la fonction $f(z)$.*

Nous avons démontré en effet que la fonction est univalente dans un domaine δ_i, et qu'elle y prend toute valeur non lacunaire. Remarquons que nous avons donné une démonstration de l'existence des domaines fondamentaux entièrement distincte de celle qui a été donnée au § 1 de ce chapitre. Mais cette nouvelle démonstration ne s'applique qu'aux fonctions à groupe d'automorphie régulier; et d'ailleurs les domaines ici définis ont une propriété supplémentaire qui résulte aussi du raisonnement fait plus haut : *toute branche de fonction d'automorphie est uniforme dans un domaine δ_i, et le représente sur un autre domaine δ_i.* La frontière de chaque domaine δ_i peut d'ailleurs comprendre des coupures.

Nous appellerons *normale* une telle décomposition; par exemple, pour e^x la décomposition par des parallèles à l'axe réel est normale, et peut être engendrée par le procédé indiqué; de même pour $\sin x$ et $\cos x$, en adjoignant à des parallèles à l'axe imaginaire équidistantes de 2π l'axe réel pour $\cos x$, ou pour $\sin x$ une nouvelle série de parallèles.

Si l'on cherche à étendre le procédé aux groupes d'automorphie non réguliers, mais ne comprenant pas de fonctions lacunaires (c'est notamment le cas pour les fonctions à point essentiel isolé), on est amené à considérer le point à l'infini comme étant la condensation d'une infinité d'homologues du point z_0 irrégulier pour la fonction d'automorphie; et notre raisonnement initial s'étend en remplaçant s'il y a lieu un arc tendant vers z_i par un arc tendant vers l'infini, sur lequel la fonction admet $f(z_0)$ pour valeur asymptotique; une discussion vraisemblablement compliquée serait nécessaire pour définir la séparation des régions correspondant aux divers homologues condensés à l'infini; on peut la simplifier en introduisant comme points frontières des domaines δ ceux d'où il part deux arcs non confondus, tendant vers l'infini, et ayant les propriétés suivantes : sur chacun de ces arcs la fonction f tend vers $f(z_0)$ et tous les deux forment une extrémale de l'intégrale $\int_P^\infty |f'(z)|\,ds$. Si les arcs ainsi définis donnent une décomposition en domaines fondamentaux d'univalence, nous dirons que la valeur asymptotique considérée est *complètement réductible*; il en est ainsi par exemple pour o et ∞ par rapport à e^x; mais je n'ai pu prouver ce fait, qui me semble vraisemblable, que toute valeur asymptotique serait complètement réductible.

[**40**] Je vais maintenant montrer comment on peut étendre à des groupes d'automorphie composés de fonctions non uniformes la méthode des séries « thêta » de Poincaré(¹) pour la résolution du problème d'existence des fonctions relatives à un groupe donné, extension déjà faite dans le cas des fonctions d'automorphie uniforme par M. Fubini et par M. Giraud(²). Supposons un groupe d'automorphie régulier, tel qu'il admette une décomposition en domaines fondamentaux normaux définie comme au paragraphe précédent, par exemple possédant un invariant différentiel uniforme. Soit alors un point z_0 donné, on peut construire autour de z_0 un petit cercle de rayon r, tel que aucun de ses transformés par les diverses fonctions d'automorphie ne le recouvre; font exception toutefois certains points critiques algébriques de fonctions d'automorphie : ceux qui sont points doubles pour la transformation d'automorphie correspondante. Nous énoncerons donc :

THÉORÈME 21 : *Si un point z_0 n'est pas un point critique algébrique de fonction d'automorphie, et si le groupe admet une décomposition en domaines normaux, il existe un cercle de centre z_0 où toutes les fonctions du groupe sont uniformes et univalentes.*

Soit alors un groupe de fonctions $H(z)$ ayant les propriétés suivantes :

1°) La fonction $H(z)$ est définie sur une surface de Riemann étalée sur un domaine plan D pour lequel le point à l'infini n'est pas point frontière.

2°) Toute valeur prise par $H(z)$ en un point intérieur à D est intérieure à D.

3°) La fonction $H(z)$ ne présente d'autres singularités que des points critiques algébriques à l'intérieur de D.

4°) Si $H_1(z)$ et $H_2(z)$ font partie du groupe, $H_1[H_2(z)]$ en fait partie.

5°) Au groupe ainsi défini correspond une décomposition en domaines fondamentaux, au sens donné précédemment à cette expression. Cette dernière condition entraîne que le groupe ne contient qu'une infinité dénombrable de fonctions.

Je dirai qu'un tel groupe est un *groupe de Poincaré*, et j'étudierai les conditions d'existence d'une fonction méromorphe et uniforme dans D, admettant le groupe donné comme groupe d'automorphie. Les points de D sont de trois sortes : ceux

(¹) POINCARÉ, *Œuvres*, tome II.
(²) GIRAUD, *loc. cit.*

qui sont centres d'un cercle où aucune transformation du groupe n'a de points critiques, ceux qui sont centre d'un cercle où un nombre fini de transformations du groupe admet un point critique, ceux qui sont tels que tout cercle les admettant pour centre contient une infinité de points critiques de transformations du groupe. Nous les appellerons respectivement point de 1[re], 2[e] et 3[e] catégorie.

Supposons qu'il y ait des points de la 1[re] catégorie, et soit z_0 l'un d'eux. Je dis que la série $\sum |H'(z_0)|^2$ étendue à toutes les déterminations de toutes les fonctions du groupe au point z_0 est convergente, sauf peut-être si z_0 est homologue d'un point à l'infini. En effet, d'après l'hypothèse de discontinuité, z_0 est le centre d'un cercle de rayon r où toutes les fonctions d'automorphie sont uniformes, univalentes, et transforment le cercle en domaines sans points communs. Puisque le point z_0 n'est pas homologue du point à l'infini, la série formée par les aires des transformés du cercle γ de rayon $\frac{2}{r}$ et de centre z_0 est convergente, c'est-à-dire que les nombres $\iint_\gamma |H'(z)|^2 d\omega$ forment une série convergente.

Or les fonctions H étant univalentes et holomorphes dans le cercle de rayon r vérifient dans γ une inégalité de la forme :

$$|H'(z)| > k\,|H'(z_0)|$$

donc on aura

$$\iint_\gamma |H'(z)|^2 d\omega \geqslant k^2 \iint_\gamma |H'(z_0)|^2 d\omega = k^2\pi\frac{r^2}{4}|H'(z_0)|^2$$

nous montrons bien ainsi que la série $\sum |H'(z_0)|^2$ est convergente; par suite la série $\sum |H'(z_0)|^m$ où $m \geqslant 2$ converge en tout point de première catégorie. En outre le même raisonnement montre qu'elle converge uniformément dans le cercle γ, et par suite dans tout domaine dont les points intérieurs et frontières sont de la 1[re] catégorie. Soit $R(z)$ une fonction bornée dans D sauf peut-être en un nombre fini de pôles, la série

$$\Theta(z) = \sum \{ R[H(z)] \times [H'(z)]^m \}$$

est donc uniformément convergente dans tout domaine intérieur à D composé uniquement de points de la première catégorie sans homologues de pôles. D'où :

Théorème 22 : *Si* $R(z)$ *est une fonction définie dans* D *sauf peut-être en un nombre fini de pôles, la série*

$$\Theta(z) = \sum \{ R[H(z)] \times [H'(z)]^m \}$$

étendue à toutes les déterminations de toutes les fonctions du groupe de Poincaré est uniformément convergente pour tout entier $m \geqslant 2$ *dans tout domaine composé uniquement de points de la première catégorie non homologues du point à l'infini ni de pôles de la fonction* R.

Cette série représente donc une fonction holomorphe dans tout domaine où ses termes sont holomorphes; nous allons nous demander si elle est uniforme, et si elle est régulière aux points exclus.

[**41**] Si z_0 est un homologue du point à l'infini, la série est la somme du terme correspondant à l'infini, qui peut être méromorphe, et d'une série uniformément convergente de fonctions holomorphes. Le point à l'infini, s'il est intérieur à D, et ses homologues peuvent donc être des pôles pour $\Theta(z)$.

Si z_0 est homologue d'un pôle de R, il y a un seul terme irrégulier dans la série, et par suite la fonction sera méromorphe en z_0. Exceptionnellement, si deux pôles étaient homologues, il pourrait arriver que les termes correspondants se détruisent, et la fonction pourrait être régulière.

Si z_0 est point critique algébrique pour un nombre fini de fonctions d'automorphie, la série Θ comprend une portion uniformément convergente, plus des termes en nombre fini correspondant aux déterminations qui se permutent; la dérivée d'une fonction au voisinage d'un point critique algébrique se comporte comme z^k où k est supérieur à -1. Donc les termes correspondants à la fontion d'automorphie seront, si R n'est pas nul pour les valeurs de la variable que les fonctions d'automorphie qui y ont un point critique associent à z_0, soit holomorphes, soit méromorphes d'ordre inférieur à m. Si R est nul pour ces valeurs et y présente un zéro d'ordre m, la série est convergente même en ces points; sinon elle peut y présenter un pôle. Nous appellerons *points critiques polaires* ceux pour lesquels on a $k < 0$. A leur voisinage Θ peut donc n'être pas bornée.

Il reste à examiner les points de la troisième catégorie; dans le cas général ils peuvent être limites d'une infinité de pôles; donc la série Θ y a une singularité essentielle. Nous verrons un peu plus loin comment on peut s'affranchir de cette circonstance.

Remarquons dès maintenant que si la série Θ est convergente dans un domaine connexe d intérieur à D elle y définit une fonction uniforme. Soit en effet un contour fermé C quelconque tracé dans d; partons d'un point A de C et revenons en A après avoir parcouru C. La série qui représente la valeur finale en A est composée des mêmes termes que celle qui représente la valeur initiale, pris peut-être dans un autre ordre. Comme la série est absolument convergente la somme de la série n'a pas changé. Donc la fonction Θ est uniforme.

On peut même dans d grouper les termes de manière à obtenir des termes uniformes. En effet une détermination donnée de fonctions d'automorphie ne se permute dans d qu'avec un nombre fini d'autres; sinon il y aurait dans d un point critique transcendant. En groupant ensemble ces termes on obtient une fonction uniforme. Mais ce groupement pourrait changer avec d.

La fonction Θ vérifie évidemment l'identité fondamentale

$$\Theta[H(z)] = \Theta(z)[H'(z)]^{-m}$$

où $H(z)$ est une fonction d'automorphie quelconque. Il existe d'ailleurs des fonctions Θ non identiquement nulles, car si $R(z)$ a un pôle isolé, Θ aura des pôles isolés.

Supposons maintenant que les points de la troisième catégorie soient isolés, nous avons ainsi démontré que :

THÉORÈME 23 : *Étant donné un groupe de Poincaré tel que l'ensemble* E *dérivé de l'ensemble de ses points critiques algébriques n'ait pas de point limite intérieur au domaine de définition* D, *il existe pour tout exposant* m *entier supérieur à* 1 *une infinité de fonctions méromorphes dans* D *sauf peut-être aux points de* E, *uniformes dans* D *et vérifiant l'identité*

$$\Theta[H(z)] = \Theta(z)[H'(z)]^{-m}$$

pour toute fonction $H(z)$ *du groupe donné.*

Considérons deux fonctions Θ relatives au même exposant m. Leur quotient est une fonction F uniforme, invariante par les transformations du groupe. Cette fonction n'admet pas en général les points critiques comme points singuliers, puisque si $R(z)$ n'est pas choisie d'une manière particulière les points critiques polaires sont des pôles d'ordre déterminé de la fonction Θ. Par contre les points limites de points critiques seront peut-être singuliers essentiels pour F. Je vais donner une condition suffisante pour qu'il y ait des fonctions F sans singularités essentielles.

Supposons que nous ayons une fonction $R_0(z)$ qui s'annule pour toutes les valeurs z_1 que prennent les fonctions du groupe en leurs points critiques polaires respectifs. La fonction $R(z) = R_0^m$ a un zéro d'ordre m au moins en chacun de ces points. Si $R(z)$ est bornée en tous les points frontières de D, la série

$$\Theta(z) = \sum R(z)\,[H'(z)]^m$$

sera convergente en tout point de 1re catégorie, et en tout point critique polaire ou non. Soit maintenant P un point de l'ensemble E que nous supposerons isolé; soit δ un petit domaine auquel P est intérieur; nous pouvons grouper les termes de manière à transformer Θ en une série de fonctions uniformes et holomorphes convergeant uniformément à l'intérieur de δ sauf en P la série est convergente en P; Θ est holomorphe même en P.

Donc pour que nous ayons des fonctions Θ méromorphes en tout point de D il suffit que nous ayons des fonctions $R_0(z)$ bornées sur chaque suite de points homologues entre eux, et nulles en toute valeur prise par une fonction du groupe en un de ses points critiques polaires. Nous dirons alors que le groupe est un groupe *normal*.

Remarquons que la démonstration de convergence en un point de E, faite pour un point isolé, est aussi valable pour un ensemble E′ de points de E situé à distance finie de tout autre point de E et de la frontière de D; nous énoncerons donc :

Théorème 24 : *Si un groupe de Poincaré normal est tel que l'ensemble* E *dérivé de l'ensemble de ses points critiques soit une somme d'ensembles* E′ *tels que chaque* E′ *soit à distance finie de tout autre, et de la frontière de* D, *il existe des fonctions méromorphes dans* D *invariantes par les transformations du groupe.*

Dans le cas où il n'y a pas de points extérieurs à D je ne peux énoncer aucune condition nécessaire simple. Si D est borné et s'il existe une fonction holomorphe invariante le groupe est normal. En effet la dérivée de la fonction donnée constitue précisément une des fonctions R_0 dont l'existence caractérise les groupes normaux; mais en général un groupe D normal n'admet pas de fonctions holomorphes invariantes F; en effet si F possède une valeur exceptionnelle, l'infini par exemple, tous ses domaines fondamentaux ont des pointes sur les points frontières. Une réciproque de cette remarque ne semble pas pouvoir s'établir d'une manière simple; il faudrait en tout cas faire des hypothèses sur les relations entre les pointes des divers domaines fondamentaux.

Pour terminer nous remarquerons que tout groupe d'automorphie de fonctions méromorphes admet un invariant différentiel uniforme(1) et nous énoncerons :

Théorème 25 : *Tout groupe de Poincaré auquel s'applique le théorème 24 peut être considéré comme un groupe de déplacements d'un espace Riemannien convenable.*

---

(1) Voir § 39 de ce mémoire.