ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

JEAN-PIERRE ROBERT

Sur les formules généralisées de médiation et les équations intégrales singulières correspondantes

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 3e série, tome 24 (1932), p. 129-190

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1932_3_24__129_0>

SUR LES

FORMULES GÉNÉRALISÉES DE MÉDIATION

ET LES

ÉQUATIONS INTÉGRALES SINGULIÈRES CORRESPONDANTES

PAR M. JEAN-PIERRE ROBERT,

Agrégé de mathématiques,
Professeur au Collège Chaptal.

INTRODUCTION

1. — Considérons un espace euclidien E_p à p dimensions, rapporté à p axes rectangulaires; nous désignerons par $x_1, x_2, \ldots, x_p$ les coordonnées d'un point P de E_p. Soit R une *région* de E_p, c'est-à-dire la réunion d'un domaine D (ensemble ouvert d'un seul tenant) et de sa frontière F. Soit $u(\mathrm{P}) = u(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ un certain champ scalaire uniforme(1) défini dans cette région R; si cette fonction u admet, en un point P de R, des dérivées secondes, on définit le *laplacien* Δu par :

$$\Delta u_{\mathrm{P}} = \operatorname{div.} \overrightarrow{\operatorname{grad.}}\, u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_p^2},$$

les dérivées étant calculées au point P; nous savons que Δu est un opérateur(2) invariant quant au groupe des déplacements.

Si la fonction u admet, au point P, des dérivées du 4^{me} ordre, nous définirons le 2-laplacien $\Delta^{(2)}u = \Delta(\Delta u)$; et d'une manière générale, si la fonction u admet, au point P, des dérivées d'ordre $2n$, nous définirons, en ce point P, et de proche en proche, le *n-laplacien* (ou laplacien itéré d'ordre n) $\Delta^{(n)}u$ par : $\Delta^{(n)}u = \Delta(\Delta^{(n-1)}u)$. (Nous conviendrons de poser $\Delta^{(0)}u \equiv u$).

---

(1) Toutes les fonctions envisagées dans ce Mémoire sont des fonctions uniformes (il s'agit d'uniformité dans le champ réel).

(2) On peut généraliser cette définition classique du laplacien. Voir, par exemple, G. BOULIGAND, *Memorial des Sciences mathématiques*, fasc. XI, p. 3, 4, 5 et 6. Nous aurons d'ailleurs l'occasion d'y revenir au cours de ce Mémoire.

Dans tout ce qui suit, et pour abréger, nous dirons qu'une fonction $u(\mathrm{P})$ possède un n-laplacien continu dans D quand, en tout point P de ce domaine D, elle admet une dérivée continue d'ordre $2n$ dans toute direction issue de ce point P.

Une fonction $u(\mathrm{P})$ est dite *n-harmonique* dans un certain domaine D (domaine de n-harmonicité) quand, en tout point de ce domaine, elle admet des dérivées continues d'ordre $2n$ (c'est-à-dire un n-laplacien continu, au sens précédent) et qu'elle est solution de $\Delta^{(n)} u = 0$.

Plus généralement, une fonction $u(\mathrm{P})$ est dite *n-métaharmonique* dans un domaine D (domaine de n-métaharmonicité) lorsqu'elle possède un n-laplacien continu en tout point de ce domaine, et qu'elle vérifie l'équation :

$$\mathfrak{D}^{(n)} u \equiv \Delta^{(n)} u + \lambda_1 \Delta^{(n-1)} u + \lambda_2 \Delta^{(n-2)} u + \ldots + \lambda_{n-1} \Delta u + \lambda_n u = 0$$

les λ_i étant des constantes quelconques (réelles ou non); si ces constantes sont nulles, la n-métaharmonicité se réduit à la n-harmonicité.

Le laplacien s'écrit encore, dans l'espace à p dimensions :

$$\Delta u_{\mathrm{P}} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{p-1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \delta_2 u$$

où r désigne la distance du point variable P à un point fixe M_0, et où $\delta_2 u$ désigne le paramètre différentiel du 2^me ordre de Beltrami pour la sphère unitaire (centrée ici en M_0); $\delta_2 u$ est d'ailleurs nul dans le cas (qui sera fréquemment utilisé par la suite) où la fonction $u(\mathrm{P})$ ne dépend que de r (nous dirons alors d'une telle fonction qu'elle est *radiale*). En sorte que, pour une fonction radiale $u(\mathrm{P})$, on a :

$$\Delta u_{\mathrm{P}} = \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{p-1}{r} \frac{du}{dr}.$$

2. — Si l'on considère une fonction linéaire $u(x)$ d'une seule variable x $\left(\text{qui est donc solution de } \frac{d^2 u}{dx^2} = 0\right)$, on sait qu'elle vérifie les 2 relations :

$$\frac{u(x+h) + u(x-h)}{2} = u(x), \tag{1}$$

$$\frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} u(\xi)\, d\xi = u(x) \tag{2}$$

et cela quels que soient x et h. Les opérateurs qui figurent au 1^er membre de l'une ou l'autre des relations (1) et (2) sont des opérateurs de moyenne (nous dirons opérateurs de *médiation*), et ces 2 relations nous montrent l'invariance de toute solution de l'équation $\frac{d^2 u}{dx^2} = 0$ vis-à-vis de ces 2 opérateurs de médiation.

L'extension de ces résultats aux fonctions de plusieurs variables indépendantes est bien connu. Soit $u(P)$ une fonction harmonique dans un domaine D de l'espace E_p à p dimensions; M_0 étant un point quelconque de D, désignons (1) par Σ_ρ l'hypersphère de centre M_0 et de rayon arbitraire ρ mais tel que Σ_ρ soit intérieure à D; m sera le point courant de $\Sigma_\rho(M_0 m = \rho)$, et Ω_ρ le domaine intérieur à Σ_ρ. Soit $S_\rho = S_p \rho^{p-1}$ la surface de Σ_ρ [S_p désignera donc la surface de l'hypersphère de rayon 1], et soit $\mathcal{V}_\rho$ le volume intérieur à Σ_ρ (2). Dans tout ce qui suit, $d\sigma_m$ désignera un élément d'aire de l'hypersphère Σ_ρ entourant le point m de Σ_ρ, et $d\omega_P$ un élément de volume entourant le point P.

Il est bien connu que la fonction harmonique considérée $u(P)$ vérifie la relation de Gauss (3) :

$$\frac{1}{S_\rho}\int_{\Sigma_\rho} u(m)\, d\sigma_m = u(M_0) \tag{1'}$$

généralisée par Zaremba (4) :

$$\frac{1}{\mathcal{V}_\rho}\int_{\Omega_\rho} u(P)\, d\omega_P = u(M_0). \tag{2'}$$

Ces 2 relations (1') et (2') constituent l'extension de (1) et (2) aux fonctions harmoniques de plusieurs variables indépendantes.

La relation (1') — dans laquelle figure une intégrale de surface étendue à l'hypersphère Σ_ρ — montre que toute fonction harmonique est invariante par *médiation périphérique*.

La relation (2') — dans laquelle figure une intégrale de volume étendue au domaine Ω_ρ intérieur à Σ_ρ — montre l'invariance de toute fonction harmonique par *médiation spatiale*.

Insistons sur ce point que ces 2 relations sont vérifiées pour *toute* hypersphère Σ_ρ, à la seule condition qu'elle soit intérieure au domaine d'harmonicité.

3. — La question se pose alors de savoir ce que donnent les opérateurs de médiation figurant au 1er membre de (1') ou (2') quand on les applique à des champs scalaires $u(P)$ quelconques.

---

(1) Ces notations seront conservées dans la suite.

(2) Pour tout ce qui concerne surface et volume des hypersphères, voir, par exemple, Paul Lévy, *Leçons d'Analyse fonctionnelle*, p. 262 à 268. On a : $p\mathcal{V}_\rho = S_p \rho^p$.

(3) Voir E. Goursat, *Cours d'Analyse*, t. III, dans le cas de $p = 2$ (p. 181) et $p = 3$ (p. 253).

(4) G. Bouligand, *Mémorial*, fasc. XI, p. 5.

Si nous nous plaçons sur une dimension, et si $u(x)$ désigne une fonction analytique de x, on a de suite, pourvu que l'on reste dans l'intervalle d'analyticité :

$$(3) \qquad \frac{u(x+h)+u(x-h)}{2} = u(x) + \frac{h^2}{2!}\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{h^4}{4!}\frac{d^4u}{dx^4} + \ldots .$$

Généralisant cette idée et utilisant des développements tayloriens, M. M. Nicolesco [1] a montré que, pour toute fonction analytique plane $u(\mathrm{P})$, on a un développement illimité de la forme :

$$(3') \qquad \frac{1}{2\pi\rho}\int_{\Sigma_\rho} u(m)\, d\sigma_m = u(\mathrm{M}_0) + \alpha_1\rho^2\Delta u(\mathrm{M}_0) + \alpha_2\rho^4\Delta^{(2)}u(\mathrm{M}_0) + \ldots$$

où les α_i sont des coefficients numériques dont nous indiquerons plus loin la valeur, cette relation (3′) étant vérifiée pour toute valeur du rayon ρ ne dépassant pas une certaine limite (afin de rester dans le champ d'analyticité de la fonction). (3′) généralise (3) : c'est une formule de médiation périphérique ; M. M. Nicolesco en a déduit, par une simple intégration, une formule de médiation spatiale.

Mais tous ces résultats — obtenus d'ailleurs pour les seules fonctions de 2 variables — supposent, *a priori*, l'analyticité des fonctions considérées; en particulier, si l'on veut appliquer (3′) aux fonctions n-harmoniques, il faut établir préalablement l'analyticité de ces fonctions.

Il était donc intéressant d'élargir le champ de ces résultats et d'étudier, dans un espace euclidien à un nombre quelconque de dimensions, ce que donnent les opérateurs de médiation figurant au 1er membre des relations (1′) et (2′) quand on les applique à des fonctions pourvues de dérivées jusqu'à un certain ordre. On obtient ainsi des formules limitées de médiation qui rappellent la classique formule de Taylor; ces dernières s'appliquent immédiatement aux fonctions n-harmoniques (d'où le nom de formules de *n-médiation* que nous leur avons donné) : les développements illimités de M. M. Nicolesco s'en déduisent alors aisément en supposant l'analyticité des fonctions envisagées.

Nous avons ensuite généralisé ces formules de manière qu'elles puissent s'appliquer d'une manière immédiate aux fonctions n-métaharmoniques (d'où le nom de *n-métamédiation*).

Nous avons été ainsi conduit à établir que toute fonction n-métaharmonique correspondant à des $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ donnés (et, en particulier, toute fonction n-harmonique) vérifie une certaine équation intégrale linéaire homogène à noyau déterminé en fonction des λ_i, l'intégrale étant étendue à l'intérieur de l'hypersphère Σ_ρ. Cette intégrale définit un opérateur linéaire laissant invariante toute fonction

[1] M. Nicolesco, Thèse, Paris, 1928, p. 72 et suivantes.

n-métaharmonique (pour les valeurs considérées des λ_i). A ce point de vue, notre travail se rattache donc à l'analyse fonctionnelle, puisqu'il est consacré à l'étude systématique d'une classe d'opérations fonctionnelles linéaires englobant la médiation.

Les résultats qui viennent d'être résumés — valables pour toutes les valeurs du rayon ρ ne dépassant pas une certaine limite — sont exposés dans la 1re partie de ce Mémoire.

Au surplus, lorsqu'un champ scalaire déterminé reste invariant par une opération fonctionnelle linéaire du genre précédent, peut-on savoir si ce champ scalaire est n-métaharmonique, peut-on aussi utiliser la propriété d'invariance pour la résolution des problèmes aux limites (se réduisant au problème de Dirichlet lorsque l'opération considérée est la médiation)? C'est l'objet de la 2me partie de ce Mémoire.

Ici, il y a deux points de vue possibles selon que l'on considère toutes les valeurs du rayon ρ (ne dépassant pas une certaine limite), ou une valeur déterminée du rayon ρ attachée à chaque point M_0. Dans le premier cas, on est conduit à établir les réciproques de formules d'invariance obtenues dans la 1re partie de ce Mémoire. Dans le second cas, nous avons obtenu des résultats très intéressants concernant la solution du problème de Riquier en connexion, d'une part avec les travaux de M. H. Lebesgue relatifs au problème de Dirichlet, et d'autre part avec les résultats de la 1re partie de ce Mémoire; à ce sujet, nous avons été amené à faire l'étude complète d'une classe étendue d'équations intégrales linéaires et singulières.

4. — La 1re partie de ce Mémoire (où nous sommes constamment placé dans l'espace à p dimensions), comprend deux chapitres.

— Dans le chapitre I, nous étudions la n-médiation périphérique et spatiale, et en indiquons quelques applications.

— Dans le chapitre II, étendant les résultats du chapitre I, nous indiquons les formules de n-métamédiation périphérique et spatiale. L'étude systématique des solutions radiales n-métaharmoniques a été réduite à ses points indispensables, et présentée sans faire d'emprunt à la théorie des fonctions de Bessel dont l'affiliation n'est que signalée. A ce sujet, nous avons englobé dans une méthode unique et sans restriction tous les cas possibles, malgré des difficultés provenant principalement de l'existence possible de racines multiples pour une certaine équation algébrique (21). A ces résultats, nous rattachons l'analyticité et l'autonomie du domaine réel (au sens de M. G. Bouligand) pour les fonctions n-métaharmoniques. A la fin de ce chapitre II, nous formons une relation intégrale linéaire et homogène vérifiée par toute fonction n-métaharmonique, relation qui est valable pour toute hypersphère Σ_ρ intérieure au domaine de n-métaharmonicité.

La 2me partie de ce Mémoire se limite au plan ($p = 2$), mais nos résultats s'étendent immédiatement au cas de l'espace E_p. Cette 2[me] partie comprend deux chapitres (III et IV).

— Dans le chapitre III, nous montrons que toute fonction qui, *pour tout* ρ inférieur à une certaine limite, vérifie, dans un domaine D, la relation intégrale homogène obtenue à la fin du chapitre II, est n-métaharmonique dans D. On en déduit alors certaines réciproques de résultats obtenus précédemment. Dès à présent, nous insistons sur ce fait que cette relation intégrale homogène, *où ne figurent que les valeurs de la fonction*, est caractéristique de la n-métaharmonicité dans les conditions indiquées. C'est la substitution du point de vue intégral au point de vue local, ce qui permet la résolution de certains problèmes en réduisant le plus possible le nombre des hypothèses, en conformité des tendances actuelles de l'analyse mathématique.

— Au chapitre IV, nous supposons qu'une fonction $u(P)$ vérifie une certaine formule de médiation (obtenue aux chapitres I et II) pour tout point M_0 d'un domaine D de H. Lebesgue, et pour *une valeur déterminée de* ρ attachée à ce point M_0 (nous avons pris, pour cette valeur de ρ, la plus courte distance du point M_0 à la frontière F du domaine D). Nous démontrons alors que la fonction considérée est n-harmonique dans D, ou n-métaharmonique dans D [1] (ceci dans un champ fonctionnel plus restreint que nous définirons en temps opportun). Ces méthodes nous donnent en même temps la solution du problème de Riquier et de problèmes voisins plus généraux. Nous n'avons pas eu ici la prétention d'utiliser complétement les résultats de la 1[re] partie de ce Mémoire, mais bien de montrer comment ces résultats peuvent être exploités en vue de la solution de ces problèmes, cela par une méthode ne faisant aucun appel aux dérivées normales le long de la frontière F du domaine D; on n'est donc pas obligé de supposer l'existence d'une variété linéaire tangente en chaque point de F, et l'on n'a pas à se soucier de l'existence effective de ces dérivées normales. Une note récente de M. M. Nicolesco [2] (postérieure à nos résultats), relative au problème de Riquier, n'atteint pas ce degré de généralité.

Quelques notes récentes de M. Ghermanesco [3] sur les fonctions n-métaharmoniques témoignent aussi de l'intérêt que suscitent ces fonctions.

Le présent travail s'efforce de donner la synthèse précise de résultats rigoureusement établis et dont l'apparition aux *Comptes rendus* a devancé les publications citées (voir les références en cours de texte).

Nous devons signaler ici, et ce fut pour nous un bien précieux encouragement, l'accueil si bienveillant que M. E. Goursat a fait à nos recherches et la sollicitude de notre vénéré Maître pour présenter nos résultats à l'Académie des Sciences. Nous

(1) En fait, nous avons été amené à considérer un système de n relations où chacune d'elles est une formule de médiation écrite pour la seule valeur considérée du rayon ρ.

(2) M. Nicolesco, *Comptes rendus*, t. 194, 1932, p. 682.

(3) Ghermanesco, *Comptes rendus*, t. 193, 1931, p. 107, 477, 638, 918.

lui renouvelons l'expression de toute notre reconnaissance et nos plus vifs remerciements pour le grand honneur qu'il nous a fait de présider le Jury de notre thèse.

Il serait bien difficile d'exprimer toute notre reconnaissance à M. G. Bouligand, notre Maître d'hier et d'aujourd'hui; non seulement il nous a dirigé dès le début, mais il nous a prodigué ses conseils et ses encouragements; c'est enfin dans ses travaux que nous avons puisé les idées directives de nos recherches (1); qu'il nous permette de lui redire ici tous nos plus vifs et nos plus sincères remerciements.

Nous n'aurons garde d'oublier M. Garnier (dont nous avons été l'élève) et M. Valiron qui, en acceptant de faire partie du Jury de notre thèse, ont bien voulu s'intéresser à nos modestes travaux; nous leur en témoignons toute notre reconnaissance.

---

(1) Je rappelle à cette occasion un exemple de fonction constamment égale à sa moyenne périphérique sur une sphère de rayon 1 ($p = 3$), donné par M. Bouligand en 1928 au séminaire de M. Hadamard. En cherchant une telle fonction $u(z)$ dépendant de la cote z seule, on se ramène à l'équation fonctionnelle :

$$2\,U'(z) = U(z+1) - U(z-1)$$

la fonction cherchée $u(z)$ étant la dérivée de $U(z)$. En appelant α une valeur réelle ou complexe, $e^{\alpha z}$ sera solution si $\alpha = sh\,\alpha$. Cela conduit à des solutions de la forme $e^{\lambda z}\cos(\mu z + \nu)$ qui ne sont pas harmoniques. Plus généralement, à l'occasion de ce problème qu'on pourrait assimiler, avec nos notations, à une équation métaharmonique d'ordre infini, M. Bouligand avait noté l'existence de solutions se rattachant à des équations $\Delta u = \lambda u$ pour des valeurs convenables de λ.

PREMIÈRE PARTIE

CHAPITRE PREMIER

La n-médiation [1].

5. — Désignons par M_0 un point fixe de l'espace E_p, par Σ_ρ l'hypersphère de centre M_0 et de rayon arbitraire ρ, enfermant un domaine Ω_ρ, Soit P un point variable de Ω_ρ. Nous poserons $M_0P = r < \rho$. Considérons la fonction radiale du point P :

$$G_1(P) = G_1(r) = r^{2-p} - \rho^{2-p} \text{ (Si } p = 2, \text{ nous prendrons } \log\rho - \log r).$$

Cette fonction G_1 satisfait à l'équation différentielle $\dfrac{d^2G_1}{dr^2} + \dfrac{p-1}{r}\dfrac{dG_1}{dr} = 0$, c'est-à-dire $\Delta G_1 = 0$; elle est singulière en M_0 et s'annule sur Σ_ρ. Cette fonction G_1 n'est donc autre que la fonction de Green ordinaire (c'est-à-dire d'ordre 1), de l'hypersphère Σ_ρ pour le point P et le centre M_0.

Nous définirons ensuite, de proche en proche, les fonctions radiales G_2, G_3, ..., $G_n(r) = G_n(P)$, ... par :

$$\frac{d^2G_n}{dr^2} + \frac{p-1}{r}\frac{dG_n}{dr} = G_{n-1}; \qquad [G_n(r)]_{r=\rho} = 0; \qquad \left[\frac{dG_n}{dr}\right]_{r=\rho} = 0.$$

$$(n = 2, 3, 4, \ldots, +\infty)$$

On peut donc dire que, pour $n \geqslant 2$, la fonction radiale $G_n(r) = G_n(P)$ est définie par $\Delta G_n(P) = G_{n-1}(P)$, $G_n(P)$ s'annulant sur Σ_ρ ainsi que sa dérivée normale [2].

Cette fonction G_n se détermine aisément si l'on observe que l'équation différentielle qui la détermine s'écrit :

$$\frac{d}{dr}\left[r^{p-1}\frac{dG_n}{dr}\right] = r^{p-1}G_{n-1}$$

---

(1) Les résultats de ce chapitre ont été publiés dans une note aux *C. R.* 1930, t. 191, p. 193.

(2) Ces deux conditions au contour sont ici compatibles, eu égard à la forme radiale des fonctions avec la présence d'une singularité unique au centre et à la forme sphérique du domaine considéré. Ajoutons que pour $n \geqslant 2$, G_n n'est pas une fonction de Green d'ordre n, au sens classique.

d'où G_n par 2 quadratures. Par exemple, dans l'espace ordinaire ($p=3$), nous avons trouvé :

$$G_n(r) = \frac{1}{(2n-1)!}\left[\frac{\rho^{2n-2}}{r} - \frac{r^{2n-2}}{\rho} + C^1_{2n-1} r^{2n-3} - C^2_{2n-1} r^{2n-4}\rho + C^3_{2n-1} r^{2n-5}\rho^2 - \ldots - C^{2n-2}_{2n-1}\rho^{2n-3}\right]$$

où C^p_n désigne le symbole usuel de la théorie des combinaisons.

Nous n'insisterons pas sur l'expression formelle des fonctions G_n, n'en ayant nul besoin par la suite.

6. — Voici quelques propriétés de la fonction G_n. On vérifie immédiatement que $\Delta^{(n)} G_n = 0$, donc $G_n(P)$ est n-harmonique dans Ω_ρ, sauf en M_0, car cette fonction G_n est singulière en M_0 : l'équation différentielle linéaire d'ordre $2n$ qu'elle vérifie admet en effet la solution r^{2-p}. On pourra donc poser[1]

$$G_n(r) = K_n r^{2-p} + \varphi_n(r) \qquad \left(\text{pour } p=2, \text{ remplacer } r^{2-p} \text{ par } \log\frac{1}{r}\right).$$

K_n étant un certain coefficient positif dont la valeur résultera de notre analyse même, et $\varphi_n(r)$ étant telle que $r^{p-2}\,.\,\varphi_n(r)$ tende vers 0 avec r. Le terme $K_n\,.\,r^{2-p}$ est donc prépondérant dans G_n pour r petit; il intervient seul dans l'application de la formule de Green; pour cette raison, le terme $K_n\,.\,r^{2-p}$ sera appelé la *singularité fondamentale de* G_n.

Par dérivation, on établit que la fonction G_n s'annule sur Σ_ρ ainsi que ses $2n-2$ premières dérivées normales, la dérivée d'ordre $2n-1$ de G_n étant égale, pour $r=\rho$, à $(2-p)\,\rho^{1-p}$ $\left(-\frac{1}{\rho} \text{ pour } p=2\right)$.

Les fonctions G que nous venons de définir décroissent de $+\infty$ à 0 quand r croît de 0 à ρ. Cela est évident pour G_1; supposons que ce soit vrai pour G_{n-1} : alors ce sera encore vrai pour G_n si l'on a recours aux deux quadratures qui déterminent G_n à partir de G_{n-1}.

Retenons, pour la suite, que ces fonctions G sont positives dans le domaine Ω_ρ intérieur à Σ_ρ.

Désignons, maintenant, par I_n l'intégrale de G_n étendue au domaine Ω_ρ :

$$I_n = \int_{\Omega_\rho} G_n(P)\, d\omega_P = S_p \int_0^\rho G_n(r)\, r^{p-1}\, dr.$$

---

[1] Il est en effet facile d'écrire les $2n$ solutions linéairement distinctes de cette équation différentielle, laquelle est du type d'Euler.

Si l'on pose, d'une manière générale :

$$A_\beta^\alpha = \int_0^\rho G_\beta(r) \,.\, r^\alpha dr$$

où β et α sont des entiers respectivement supérieurs à 1 et $p-2$, on en déduit, avec deux intégrations par parties et tenant compte des propriétés des fonctions G :

$$(\alpha+1)(\alpha-p+3)\,A_\beta^\alpha = A_{\beta-1}^{\alpha+2}. \qquad \begin{cases} \beta > 1 \\ \alpha > p-2 \end{cases}$$

Dans cette relation faisons $\alpha = p-1+2K$, $\beta = n-K$ et donnons successivement à l'entier K les valeurs $0, 1, 2, 3, \ldots, n-2$; multipliant membre à membre les égalités précédentes, on trouve :

$$(4) \qquad \begin{cases} \text{Si } p > 2, & I_n = (p-2)\,S_p B_n^p \rho^{2n}, \\ \text{Si } p = 2, & I_n = 2\pi B_n^2 \rho^{2n}, \end{cases}$$

en posant :

$$(5) \qquad B_n^p = \frac{1}{2.4.6\ldots 2n.p.(p+2)(p+4)\ldots(p+2n-2)}. \qquad (B_0^p = 1)$$

Or, nous avons posé précédemment $G_n(r) = K_n r^{2-p} + \varphi_n(r)$. La valeur obtenue pour l'intégrale I_n va nous permettre de calculer le coefficient K_n. Pour cela, considérons une hypersphère σ évanescente, de centre M_0, enfermant un domaine ω. Appliquons la formule de Green à la fonction G_n pour le domaine $\Omega_\rho - \omega$; la dérivée normale de G_n étant nulle sur $\Sigma_\rho\,(n \geqslant 2)$, on a :

$$\int_{\Omega_\rho - \omega} G_{n-1}(P)\,d\omega_P + \int_\sigma \frac{dG_n}{dr}\,d\sigma_m = 0.$$

Il reste à la limite :

$$I_{n-1} = (p-2)\,S_p \,.\, K_n.$$

D'où

$$(6) \qquad K_n = B_{n-1}^p \rho^{2n-2}$$

valable pour $p = 2, 3, 4, \ldots$, et pour $n \geqslant 2$; remarquons qu'elle est encore valable pour $n = 1$, à condition de poser $B_0^p = 1$, comme nous l'avons fait ci-dessus. Le coefficient K_n est donc déterminé : on peut d'ailleurs vérifier ce résultat pour $p = 3$ à l'aide du développement de G_n écrit précédemment.

7. — Soit $u(\mathrm{P})$ une fonction réelle[1] et uniforme dans un domaine D de l'espace E_p. Nous demanderons d'abord à cette fonction $u(\mathrm{P})$ d'avoir un laplacien continu en tout point de D; Σ_ρ désignera une hypersphère *quelconque* (centre M_0, rayon ρ) intérieure à D, Ω_ρ le domaine intérieur à Σ_ρ.

Considérons la fonction radiale $\mathrm{G}_1(r) = \mathrm{G}_1(\mathrm{P})$, $(\mathrm{M}_0\mathrm{P} = r)$, définie précédemment. La formule de Green appliquée aux deux fonctions $u(\mathrm{P})$ et $\mathrm{G}_1(\mathrm{P})$ pour le domaine compris entre Σ_ρ et une hypersphère concentrique évanescente donne, en tenant compte des propriétés de la fonction G_1 :

$$\frac{1}{\mathrm{S}_\rho}\int_{\Sigma_\rho} u(m)\,d\sigma_m = u(\mathrm{M}_0) + \frac{1}{(p-2)\,\mathrm{S}_p}\int_{\Omega_\rho} \mathrm{G}_1(\mathrm{P})\,.\,\Delta u_{\mathrm{P}}\,.\,d\omega_{\mathrm{P}}, \tag{7}$$

l'intégrale au 1$^{\text{er}}$ membre étant étendue à Σ_ρ, celle au 2$^{\text{me}}$ membre portant sur le domaine Ω_ρ intérieur à Σ_ρ [pour $p=2$, on remplacera $(p-2)\mathrm{S}_p$ par 2π, comme dans tout ce qui suit].

8. — Supposons maintenant que la fonction considérée $u(\mathrm{P})$ ait un n-laplacien continu dans D. La formule de Green appliquée au même domaine que précédemment, pour les deux fonctions $\Delta^{(q)}u(\mathrm{P})$ et $\mathrm{G}_{q+1}(\mathrm{P})$ $(1 \leqslant q \leqslant n-1)$ donne, en vertu des propriétés de la fonction $\mathrm{G}_{q+1}(\mathrm{P})$:

$$\int_{\Omega_\rho} [\mathrm{G}_{q+1}(\mathrm{P})\,.\,\Delta^{(q+1)}u(\mathrm{P}) - \mathrm{G}_q(\mathrm{P})\,.\,\Delta^{(q)}u(\mathrm{P})]\,d\omega_{\mathrm{P}} = -\,\mathrm{I}_q\Delta^{(q)}u(\mathrm{M}_0) \tag{8}$$

où I_q désigne, suivant la notation du § 6, l'intégrale de $\mathrm{G}_q(\mathrm{P})$ étendue au domaine Ω_ρ, et dont on a indiqué la valeur.

Faisons successivement, dans l'égalité (8), $q = 1, 2, 3, \ldots, n-1$ et ajoutons membre à membre les $n-1$ égalités obtenues; nous aurons finalement, en tenant compte de (7) :

$$\frac{1}{\mathrm{S}_\rho}\int_{\Sigma_\rho} u(m)\,d\sigma_m = u(\mathrm{M}_0) + \mathrm{B}_1^p\rho^2\Delta u(\mathrm{M}_0) + \mathrm{B}_2^p\rho^4\Delta^{(2)}u(\mathrm{M}_0) + \ldots + \mathrm{B}_{n-1}^p\rho^{2n-2}\Delta^{(n-1)}u(\mathrm{M}_0) + \frac{1}{(p-2)\,\mathrm{S}_p}\int_{\Omega_\rho}\mathrm{G}_n(\mathrm{P})\,.\,\Delta^{(n)}u(\mathrm{P})\,d\omega_{\mathrm{P}}. \tag{9}$$

La formule (9), celle dont il s'agit, sera dite une formule de *n-médiation périphérique* : elle est applicable à toute fonction $u(\mathrm{P})$ pourvue d'un n-laplacien continu dans un domaine D, et pour *toute* hypersphère Σ_ρ intérieure à ce domaine.

---

(1) Il n'y a aucune perte de généralité à supposer que $u(\mathrm{P})$ est réelle; car une fonction complexe du point réel P peut se mettre sous la forme $u_1(\mathrm{P}) + iu_2(\mathrm{P})$ et il suffirait d'appliquer les résultats séparément à u_1 et à u_2.

Le dernier terme au 2^{me} membre de la formule (9) s'appellera le *reste* R de cette formule. Or, la fonction $G_n(P)$, nous l'avons vu au § 6, est positive dans Ω_ρ : on peut donc appliquer la formule de la moyenne à l'intégrale qui définit le reste, lequel s'écrit alors :

$$R = \Delta^{(n)} u(Q) \cdot \frac{1}{(p-2) S_p} \int_{\Omega_\rho} G_n(P)\, d\omega_P,$$
$$R = B_n^p \rho^{2n} \Delta^{(n)} u(Q),$$

Q étant un certain point intérieur à Σ_ρ [puisque $\Delta^{(n)} u$ y est continue]. En définitive, la formule (9) s'écrit :

$$\text{(9')} \qquad \frac{1}{S_\rho} \int_{\Sigma_\rho} u(m)\, d\sigma_m = \sum_{K=0}^{n-1} B_K^p \rho^{2K} \Delta^{(K)} u(M_0) + B_n^p \rho^{2n} \Delta^{(n)} u(Q)$$

en convenant de poser $\Delta^{(0)} u \equiv u$.

9. — On peut déduire de (9') une formule de *n-médiation spatiale*. En effet, soit r une longueur inférieure au rayon ρ et soit Σ_r l'hypersphère de centre M_0 et de rayon r. La formule (9') appliquée à Σ_r s'écrit :

$$\frac{1}{S_p r^{p-1}} \int_{\Sigma_r} u(m)\, d\sigma_m = \sum_{K=0}^{n-1} B_K^p r^{2K} \Delta^{(K)} u(M_0) + \mu B_n^p r^{2n}$$

μ étant compris entre le minimum et le maximum de $\Delta^{(n)} u(P)$ dans Σ_r; donc μ est compris entre le minimum M_1 et le maximum M_2 de $\Delta^{(n)} u(P)$ dans Ω_ρ (domaine intérieur à Σ_ρ). Multiplions les deux membres de la relation précédente par $S_p r^{p-1} dr$ et intégrons en r entre 0 et ρ; nous aurons ainsi la formule de *n-médiation spatiale* :

$$\text{(10)} \quad \frac{1}{\mathcal{V}_\rho} \int_{\Omega_\rho} u(P)\, d\omega_P = \sum_{K=0}^{n-1} \frac{p}{p+2K} B_K^p \rho^{2K} \Delta^{(K)} u(M_0) + \frac{p}{p+2n} B_n^p \rho^{2n} \Delta^{(n)} u(Q_1)$$

où Q_1 désigne un certain point intérieur à Σ_ρ. Rappelons que cette dernière relation est applicable à toute fonction $u(P)$ pourvue d'un n-laplacien continu dans un domaine D et pour *toute* hypersphère intérieure à ce domaine.

10. — Voici une manière légèrement différente d'écrire les résultats qui précèdent, et qui nous sera utile pour ρ suffisamment petit.

Le n-laplacien étant continu dans Σ_ρ, le reste (dernier terme) de la formule (9') peut s'écrire : $B_n^p \rho^{2n}[\Delta^{(n)} u(M_0) + \varepsilon_\rho]$ où ε_ρ tend vers o avec ρ [même remarque pour le dernier terme de la formule (10)].

Si, de plus, on est assuré que la fonction u possède un $(n+1)$-laplacien continu dans D, on peut écrire les formules (9) et (10) en remplaçant n par $n+1$; d'où il résulte immédiatement que le ε_ρ qui vient d'être défini est infiniment petit avec ρ, de l'ordre de ρ^2.

Autrement dit, quand la fonction u admet un $(n+1)$-laplacien continu dans D, le dernier terme de l'une ou l'autre des formules (9) ou (10) s'écrit :

pour (9) ou (9') : $$B_n^p \rho^{2n}\left[\Delta^{(n)} u(M_0) + \lambda \rho^2\right]$$

pour (10) : $$\frac{p}{p+2n} B_n^p \rho^{2n} \Delta\left[^{(n)} u(M_0) + \mu \rho^2\right]$$

où λ et μ restent bornés quand ρ tend vers o.

Ces résultats, établis pour une fonction réelle u, subsistent évidemment pour une fonction complexe du point réel P, puisqu'une telle fonction peut s'écrire $u_1 + iu_2$, et que l'on peut appliquer les résultats précédents à u_1 et u_2.

11. — Notons enfin que ces formules de médiation(1) sont valables pour une dimension : bornons-nous à les indiquer. Soit, sur un axe $x'ox$, un point fixe M_0 d'abscisse x_0, et deux points A et B symétriques par rapport à X_0, d'abscisses respectives $x_0 - \rho$ et $x_0 + \rho$. Soit $u(x)$ une fonction pourvue d'une dérivée d'ordre $2n$ continue sur AB. La n-médiation périphérique s'écrit ici :

$$\frac{u(x_0+\rho)+u(x_0-\rho)}{2} = u(x_0) + \frac{\rho^2}{2!} u''(x_0) + \dots + \frac{\rho^{2n-2}}{(2n-2)!} u^{(2n-2)}(x_0) + \frac{1}{2}\int_{x_0-\rho}^{x_0+\rho} \frac{u^{(2n)}(\xi)[\rho - |\xi - x_0|]^{2n-1}}{(2n-1)!} d\xi$$

ou encore, en appliquant la formule de la moyenne à l'intégrale qui figure au 2me membre :

$$\frac{u(x_0+\rho)+u(x_0-\rho)}{2} = \sum_{K=0}^{n-1} B_K^1 \rho^{2K} u^{(2K)}(x_0) + B_n^1 \rho^{2n} u^{(2n)}(x_0 + \theta\rho)$$
$$[-1 < \theta < +1]$$

ce qui est précisément la formule (9') écrite pour $p = 1$.

(1) Une analyse toute pareille à la précédente peut se faire sur la surface d'une sphère, le laplacien étant remplacé par le paramètre différentiel du 2me ordre de Beltrami relatif à cette sphère.

Quant à la n-médiation du type spatial, elle s'écrit ici :

$$\frac{1}{2\rho}\int_{x_0-\rho}^{x_0+\rho} u(\xi)\,d\xi = \sum_{K=0}^{n-1} \frac{1}{2K+1} B'_K \rho^{2K} u^{(2K)}(x_0) + \frac{1}{2n+1} B'_n \rho^{2n} u^{(2n)}(x_0 + \theta'\rho)$$

$$[-1 < \theta' < +1]$$

qui n'est autre que (10) écrite pour $p = 1$.

12. — Voici maintenant quelques applications des résultats précédents. Soit $u(P)$ une fonction uniforme d'un point P du domaine D, et que nous prenons réelle sans nuire à la généralité (comme nous l'avons déjà indiqué). Nous supposons que cette fonction $u(P)$ admette un laplacien continu en tout point de D. Nos formules précédentes s'écrivent alors (en faisant $n = 1$), et pour toute hypersphère Σ_ρ intérieure à D :

$$\frac{1}{S_\rho}\int_{\Sigma_\rho} u(m)\,d\sigma_m = u(M_0) + \frac{\rho^2}{2p}\Delta u(Q), \qquad \text{(périphérique)}$$

$$\frac{1}{\mathfrak{V}_\rho}\int_{\Omega_\rho} u(P)\,d\omega_P = u(M_0) + \frac{\rho^2}{2(p+2)}\Delta u(Q_1), \qquad \text{(spatiale)}$$

où Q et Q_1 sont certains points intérieurs à Σ_ρ.

Faisons tendre ρ vers 0; on en déduit, à la faveur de la continuité du laplacien :

$$(11) \qquad \Delta u(M_0) = \lim_{\rho=0} \left\{ \frac{2p}{\rho^2 S_\rho} \int_{\Sigma_\rho} [u(m) - u(M_0)]\,d\sigma_m \right\}$$

et

$$(12) \qquad \Delta u(M_0) = \lim_{\rho=0} \left\{ \frac{2(p+2)}{\rho^2 \mathfrak{V}_\rho} \int_{\Omega_\rho} [u(P) - u(M_0)]\,d\omega_P \right\}.$$

L'égalité (11), ou (12), permet donc de donner une nouvelle définition du laplacien d'une fonction u, définition qui ne fait intervenir que les valeurs de cette fonction, et qui ne met en jeu aucun système d'axes de coordonnées. Un tel laplacien ainsi défini — nous dirons un *laplacien généralisé* que nous indiquerons par $\Delta_g u$ —, coïncide donc avec le laplacien ordinaire dans le champ des fonctions u douées de dérivées continues du 2^{me} ordre; mais il est bien évident qu'une telle définition du laplacien est beaucoup plus générale que la définition classique et peut même s'appliquer à des fonctions discontinues.

Signalons[1] que M. G. Bouligand a indiqué cette définition du laplacien généralisé à partir de (11).

---

[1] G. Bouligand. *Mémorial*, p. 6 et 13 (*loc. cit.*). Dans sa thèse (Paris, 1931), M. M. Brelot introduit une classe étendue de laplaciens généralisés, tous identiques entre eux, englobant, comme l'auteur nous l'a fait remarquer, le laplacien désigné ci-dessus par Δ_g; on peut donc définir ce dernier indifféremment par (11) ou (12), comme le prouverait d'ailleurs un

Par un procédé analogue, on définirait de proche en proche le n-laplacien généralisé[1], que l'on pourra représenter par $\Delta_g^{(n)} u = \Delta_g\left[\Delta_g^{(n-1)} u\right]$.

13. — Si la fonction considérée $u(P)$ est n-harmonique dans D, le dernier terme de (9), ou (10), est nul. On en déduit que si une fonction $u(P)$ est n-harmonique dans un domaine D, elle vérifie, pour *toute* hypersphère Σ_ρ intérieure au domaine D, les deux relations suivantes :

$$(13)\qquad \frac{1}{S_\rho}\int_{\Sigma_\rho} u(m)\, d\sigma_m = \sum_{K=0}^{n-1} B_K^p \rho^{2K} \Delta^{(K)} u(M_0),$$

$$(14)\qquad \frac{1}{\mathcal{V}_\rho}\int_{\Omega_\rho} u(P)\, d\omega_P = \sum_{K=0}^{n-1} \frac{p}{p+2K} . B_K^p \rho^{2K} \Delta^{(K)} u(M_0),$$

qui généralisent les formules de Gauss et de Zaremba relatives aux fonctions harmoniques. Les réciproques seront envisagées dans la 2^{me} partie de ce Mémoire.

14. — Revenons aux hypothèses des §§ 8 et 9, et désignons par $\overrightarrow{L}$ une direction issue de M_0 qui coupe Σ_ρ en m. La fonction u ayant des dérivées continues jusqu'à l'ordre $2n$, et dans toute direction issue de M_0, nous aurons, quelle que soit cette direction $\overrightarrow{L}$, le developpement de Taylor :

$$(15)\qquad u(m) = u(M_0) + \rho\left(\frac{du}{dL}\right)_0 + \frac{\rho^2}{2!}\left(\frac{d^2u}{dL^2}\right)_0 + \ldots + \frac{\rho^{2n}}{(2n)!}\frac{d^{(2n)}u(Q)}{dL^{2n}},$$

où toutes les dérivées sont calculées en M_0, sauf la dernière qui est calculée en un certain point Q du vecteur $\overrightarrow{mM_0}$.

Soit Σ_1 l'hypersphère de centre M_0 et de rayon 1 ; la direction $\overrightarrow{L}$ coupe Σ_1 en M. A ce point M, on associera les fonctions $\left(\frac{d^q u}{dL^q}\right)_0$, dérivées calculées en M_0 suivant la direction $\overrightarrow{L}$.

---

raisonnement direct facile à faire. En conséquence, nous pourrons utiliser les résultats de M. Brelot. Tout cela suppose la continuité de la fonction et de son laplacien généralisé.

[1] Si une fonction continue $u(P)$ vérifie, en tout point P d'un domaine D, la relation $\Delta_g u(P) = \varphi(P)$, où $\varphi(P)$ est continue, cette $u(P)$ possède des dérivées premières continues dans D (M. Brelot, Thèse, Paris, 1931, page 12). Si $\varphi(P)$ possède des dérivées premières continues, Δ_g se réduit au laplacien ordinaire. Il en résulte que si $u(P)$ possède un n-laplacien généralisé continu dans D, tous les laplaciens généralisés de $u(P)$, jusqu'à l'ordre $n-1$ compris, supposés continus, sont des laplaciens ordinaires; seul, $\varphi(P)$ est le laplacien généralisé du $(n-1)$ — laplacien classique $\Delta^{(n-1)} u$.

Si l'on remplace, dans le 1[er] membre de la relation (9'), $u(m)$ par le développement taylorien précédent et si l'on observe que cette relation a lieu quel que soit ρ inférieur à une longueur fixe, on en déduit :

$$\Delta^{(\mathrm{K})}u(\mathrm{M}_0) = \frac{1}{(2\mathrm{K})!\,\mathrm{B}^p_{\mathrm{K}}\mathrm{S}_p}\int_{\Sigma_1}\left(\frac{d^{2\mathrm{K}}u}{d\mathrm{L}^{2\mathrm{K}}}\right)_0 d\sigma_{\mathrm{M}} \tag{16}$$

ce qui donne une nouvelle expression du K- laplacien d'une fonction.

Si la fonction u considérée admet un n- laplacien continu, on pourra faire, dans (16), $\mathrm{K} = 0, 1, 2, 3, \ldots, n-1$. Si la fonction u est indéfiniment dérivable, on pourra donner à K une valeur entière quelconque dans (16).

En particulier, si la fonction $u(\mathrm{P})$ est analytique dans le domaine D, on peut écrire un développement de Taylor (15) illimité, pour toute direction $\overrightarrow{\mathrm{L}}$ issue de M_0, et pour tout ρ suffisamment petit. En intégrant le long de Σ_ρ et tenant compte des relations (16), on en déduit que toute fonction analytique $u(\mathrm{P})$ satisfait aux deux relations :

$$\frac{1}{\mathrm{S}_\rho}\int_{\Sigma_\rho} u(m)\,d\sigma_m = \sum_{\mathrm{K}=0}^{+\infty} \mathrm{B}^p_{\mathrm{K}}\rho^{2\mathrm{K}}\Delta^{(\mathrm{K})}u(\mathrm{M}_0),$$

$$\frac{1}{\mathcal{V}_\rho}\int_{\Omega_\rho} u(\mathrm{P})\,d\omega_{\mathrm{P}} = \sum_{\mathrm{K}=0}^{+\infty} \frac{p}{p+2\mathrm{K}}\mathrm{B}^p_{\mathrm{K}}\rho^{2\mathrm{K}}\Delta^{(\mathrm{K})}u(\mathrm{M}_0),$$

valables pour tout ρ suffisamment petit de manière à rester dans le champ d'analyticité. Ce sont des développements illimités de cette sorte que M. M. Nicolesco avait obtenus dans sa thèse, pour $p = 2$ [1].

---

[1] Les formules de médiation des chapitres I et II de ce Mémoire ont été établies par l'emploi judicieux de la formule de Green qui s'écrit, dans le cas de deux dimensions :

$$\iint_{\mathrm{D}} (\varphi\Delta\psi - \psi\Delta\varphi)\,d\omega + \int_{\mathrm{S}}\left(\varphi\frac{d\psi}{dn} - \psi\frac{d\varphi}{dn}\right)d\sigma = 0$$

pour un domaine D limité par une surface S.

M. M. Brelot a montré dans sa thèse (Paris, 1931, p. 10) que cette classique formule de Green reste valable pourvu que les fonctions φ et ψ soient continues et qu'elles possèdent chacune un laplacien généralisé continu dans tout domaine D_1 comprenant D à son intérieur. Donc, les formules (9), (9') et (10) sont valables dans l'hypothèse plus générale où la fonction considérée $u(\mathrm{P})$ possède un n-laplacien généralisé continu en tout point P du domaine envisagé. Il en sera de même pour (35), (37) et (38) du chapitre II, avec les hypothèses précédentes. Dans ce cas, pour toutes les formules de médiation que nous venons de rappeler, d'après une remarque précédente (voir note du § 12), tous les laplaciens qui y figurent, jusqu'à l'ordre $n-1$ compris, sont des laplaciens ordinaires. [Il reste entendu que la fonction considérée et tous ses laplaciens généralisés successifs, jusqu'à l'ordre n, sont supposés continus].

CHAPITRE II

La n-métamédiation[1].

15. — Dans l'espace euclidien E_p à p dimensions, désignons par M_0 un point fixe, par P un point variable; posons $M_0P = r$. Considérons l'équation $\Delta v + \lambda^2 v = 0$, où λ est une constante quelconque, réelle ou non; nous porterons notre attention sur les solutions radiales de cette équation (c'est-à-dire les solutions fonctions de r seul) : ce sont les deux solutions distinctes de l'équation différentielle bien connue :

$$(17) \qquad \frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{p-1}{r}\frac{dv}{dr} + \lambda^2 v = 0;$$

on vérifie immédiatement que si $v(r)$ en est une solution, la fonction $W = \frac{1}{r}\frac{dv}{dr}$ est solution de l'équation analogue à (17) où p est remplacé par $p+2$ (Hadamard). Il suffit donc de connaître les solutions radiales dans le cas de $p=1$ et de $p=2$ pour en déduire celles appartenant à l'espace E_p.

Pour $p=1$, les solutions radiales de (17) sont $\sin \lambda r$ et $\cos \lambda r$.

Pour $p=2$, les solutions radiales de (17) sont les fonctions de Bessel d'ordre O qui s'écrivent, avec les notations de l'Encyclopédie :

$$J_0(\lambda r) = 1 - B_1^2(\lambda r)^2 + B_2^2(\lambda r)^4 - \ldots + (-1)^n B_n^2(\lambda r)^{2n} + \ldots,$$

$$Y_0(\lambda r) = J_0(\lambda r) \log \frac{1}{r} + \text{fonction entière de } r^2,$$

où le coefficient B_n^p a été défini précédemment par l'égalité (5).

Partant de ces deux cas ($p=1$ et $p=2$) et utilisant la remarque ci-dessus qui permet de passer de p à $p+2$, on reconnaît aisément que l'équation (17) admet les deux solutions linéairement distinctes :

1° *Une solution holomorphe pour* $r=0$, et qui se réduit à 1 pour $r=0$; c'est une fonction entière de r^2 que nous désignerons par $H(\lambda r)$:

$$(18) \qquad H(\lambda r) = 1 - B_1^p(\lambda r)^2 + B_2^p(\lambda r)^4 - \ldots + (-1)^n B_n^p(\lambda r)^{2n} + \ldots.$$

2° *Une solution non holomorphe pour* $r = 0 (p \geqslant 2)$. C'est cette dernière solution

---

[1] Les résultats de ce chapitre ont été résumés dans deux notes aux *C. R.*, 1931, t. 192, p. 326 et p. 1146.

qu'on appelle, avec M. Hadamard, *solution élémentaire* de (17). Nous la désignerons par $S(\lambda r)$. Nous pourrons donc poser :

$$S(\lambda r) = r^{2-p} + \Psi(\lambda r) \tag{19}$$

où $r^{p-2}\Psi(r)$ tend vers o avec r. $\left(\text{pour } p = 2, \text{ remplacer } r^{2-p} \text{ par } \log\frac{1}{r}\right)$.

Nous dirons que r^{2-p} est *la singularité fondamentale de* $S(\lambda r)$. A vrai dire, cette fonction $S(\lambda r)$ n'est pas complètement définie, car on peut lui ajouter $K.H(\lambda r)$, K désignant une constante quelconque : ce fait n'aura aucune importance dans la suite, car nous n'utiliserons que la singularité fondamentale de $S(\lambda r)$. Rappelons enfin que, pour $p = 3$, ces solutions radiales sont :

$$H(\lambda r) = \frac{\sin\lambda r}{\lambda r} \quad \text{et} \quad S(\lambda r) = \frac{\cos\lambda r}{r}.$$

16. — Les λ_i étant des constantes quelconques, réelles ou non, considérons maintenant, toujours dans l'espace E_p, l'équation :

$$\mathfrak{D}^{(n)}u \equiv \Delta^{(n)}u + \lambda_1\Delta^{(n-1)}u + \lambda_2\Delta^{(n-2)}u + \ldots + \lambda_{n-1}\Delta u + \lambda_n u = 0. \tag{20}$$

Désignons par $-\alpha_1^2, -\alpha_2^2, \ldots, -\alpha_n^2$ les n racines (distinctes ou non, réelles ou complexes) de l'équation en X :

$$X^n + \lambda_1 X^{n-1} + \lambda_2 X^{n-2} + \ldots + \lambda_{n-1}X + \lambda_n = 0. \tag{21}$$

Nous dirons *que* (21) *est l'équation caractéristique de* (20). On vérifie que toute solution de $\Delta u + \alpha_i^2 u = 0$ est solution de (20), si $-\alpha_i^2$ est une racine de (21).

Cherchons alors les solutions radiales de (20), lesquelles sont au nombre de $2n$, puisque, dans ce cas, (20) est une équation différentielle linéaire[1] d'ordre $2n$. D'après ce que nous venons de remarquer, ces $2n$ solutions radiales sont :

$$\begin{array}{llll} H(\alpha_1 r), & H(\alpha_2 r), & \ldots, & H(\alpha_n r) \qquad \text{(holomorphes pour } r = 0\text{)}, \\ S(\alpha_1 r), & S(\alpha_2 r), & \ldots, & S(\alpha_n r) \qquad \text{(non holomorphes pour } r = 0\text{)}, \end{array}$$

lesquelles sont évidemment distinctes si les racines de l'équation caractéristique (20) sont elles-mêmes distinctes. Pour éviter cette restriction, nous allons utiliser des combinaisons linéaires des solutions précédentes de manière à obtenir $2n$ solu-

[1] Cette équation est du type de Fuchs pour $r = 0$; il est facile d'écrire les racines de l'équation fondamentale déterminante qui lui correspond : la plus grande de ces racines est $2n - 2$.

tions radiales linéairement distinctes de (20), et valables quelles que soient les racines (réelles ou non, simples ou multiples) de l'équation caractéristique (21).

A cet effet, posons : (les nombres α^2_i étant, pour l'instant, supposés distincts.)

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1^2 & \alpha^2 & \alpha_3^2 & \dots & \alpha_n^2 \\ \alpha_1^4 & \alpha_2^4 & \alpha_3^4 & \dots & \alpha_n^4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1^{2n-2} & \alpha_2^{2n-2} & \alpha_3^{2n-2} & \dots & \alpha_n^{2n-2} \end{vmatrix}.$$

Désignons ensuite par $\delta_i(r)\,(i = 1, 2, 3, \dots, n)$ le déterminant d'ordre n obtenu en remplaçant, dans δ, les termes de la $i^{\text{ème}}$ ligne respectivement par $H(\alpha_1 r)$, $H(\alpha_2 r)$, $\dots$, $H(\alpha_n r)$. Ces n fonctions $\delta_i(r)$ sont des solutions radiales de (20) puisque chacune d'elles est une combinaison linéaire à coefficients constants des $H(\alpha_i r)$.

Nous définirons ensuite les n fonctions $\Phi_n^{\kappa}(r)$ de la manière suivante :

$$\Phi_n^{\kappa}(r) = \frac{(-1)^{\kappa-1}}{\delta}\,\delta_{\kappa}(r). \qquad [\mathrm{K} = 1, 2, 3, \dots, n] \tag{22}$$

Ces n fonctions Φ sont n solutions radiales de (20), holomorphes pour $r = 0$. Nous vérifierons plus loin qu'elles sont linéairement distinctes et qu'elles sont valables même si plusieurs des nombres α^2_i sont égaux.

Désignons par $\gamma_i(r)\,(i = 1, 2, 3, \dots, n)$ le déterminant d'ordre n obtenu en remplaçant, dans δ, les termes de la $i^{\text{ème}}$ ligne respectivement par $S(\alpha_1 r)$, $S(\alpha_2 r)$, $\dots$, $S(\alpha_n r)$, et nous définirons ensuite les n fonctions $\Psi_n^{\kappa}(r)$ de la manière suivante :

$$\Psi_n^{\kappa}(r) = \frac{(-1)^{\kappa-1}}{\delta}\,\gamma_{\kappa}(r). \qquad [\mathrm{K} = 1, 2, 3, \dots, n] \tag{23}$$

Les n fonctions Ψ ainsi définies sont n solutions radiales de (20), non holomorphes pour $r = 0$ (donc n solutions élémentaires au sens de M. Hadamard).

Les $2n$ solutions Φ et Ψ définies par (22) et (23) sont $2n$ solutions radiales de (20), celles dont il s'agit.

17. — Voici quelques propriétés de ces $2n$ fonctions radiales, en premier lieu, des fonctions Φ sur lesquelles nous insisterons davantage en vue des applications qui vont suivre.

La fonction $\Phi_n^n(r)$ s'écrit d'après (22) :

$$\Phi_n^n(r) = \mathrm{S}\,\frac{\mathrm{H}(\alpha_1 r)}{(\alpha_2^2-\alpha_1^2)(\alpha_3^2-\alpha_1^2)\ldots(\alpha_n^2-\alpha_1^2)}$$

le 2me membre étant une sommation de n termes dont chacun se déduit du précédent par permutation circulaire des indices $1, 2, 3, \ldots, n$.

D'autre part, remplaçons, dans $\delta_n(r)$, chaque terme $\mathrm{H}(\alpha_i r)$ par son développement (18); $\delta_n(r)$ se présente alors comme la somme d'une série infinie de déterminants dont les $n-1$ premiers sont nuls comme ayant deux lignes formées d'éléments proportionnels; le $n^{\text{ème}}$ est égal à $(-1)^{n-1}\mathrm{B}^p_{n-1}\,.\,\delta\,.\,r^{2n-2}$ donc le 1er terme de $\Phi_n^n(r)$ est $\mathrm{B}^p_{n-2}\,r^{2n-2}$; on reconnaît ensuite que tous les déterminants qui suivent sont divisibles par δ. Les coefficients de $r^{2n}, r^{2n+2}, r^{2n+4}, \ldots$ dans Φ_n^n sont donc des polynomes symétriques par rapport aux α^2_i; *donc ils s'expriment rationnellement et sous forme entière à l'aide des coefficients* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ de l'équation caractéristique (21).

En raisonnant de même pour les autres fonctions Φ, on trouve que $\Phi_n^{\mathrm{K}}(r)$ est une fonction entière de r^2 dont le 1er terme est $\mathrm{B}^p_{\mathrm{K}-1}\,r^{2\mathrm{K}-2}$, les coefficients des termes suivants étant *des polynomes formés avec les* λ_i.

On trouve finalement :

$$\Phi_n^{\mathrm{K}}(r) = \mathrm{B}^p_{\mathrm{K}-1}\,r^{2\mathrm{K}-2} - \lambda_{n-\mathrm{K}+1}\,\mathrm{B}^p_n\,r^{2n} + \ldots . \tag{24}$$

$$(\mathrm{K} = 1, 2, 3, \ldots, n);\ (\mathrm{B}^p_0 = 1).$$

On constate donc ce fait important que les n fonctions Φ ainsi définies (qui sont des fonctions entières de r^2) ont pour coefficients des polynomes en $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Donc ces n fonctions Φ subsistent dans l'hypothèse de racines multiples de l'équation caractéristique (21).

D'autre part, si l'on utilise les relations (22), on trouve que les fonctions Φ satisfont au système différentiel :

$$\left\{\begin{array}{l} \Delta\Phi_n^n + \lambda_1\,\Phi_n^n = \Phi_n^{n-1}, \\ \Delta\Phi_n^{n-1} + \lambda_2\,\Phi_n^n = \Phi_n^{n-2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Delta\Phi_n^2 + \lambda_{n-1}\Phi_n^n = \Phi_n^1, \\ \Delta\Phi_n^1 + \lambda_n\,\Phi_n^n = 0. \end{array}\right. \qquad \left[\Delta \equiv \frac{d^2}{dr^2} + \frac{p-1}{r}\frac{d}{dr}\right]. \tag{25}$$

On reconnaît d'ailleurs que si n fonctions vérifient un système tel que (25), en tout point d'un domaine D, ces n fonctions sont n-métaharmoniques dans D.

18. — Ayant vu que les fonctions Φ s'exprimaient uniquement à l'aide des λ_i, nous avons cherché à les obtenir d'une manière directe, sans recours aux racines $-\alpha^2_i$ de l'équation caractéristique (21). A cet effet, démontrons le théorème suivant :

Les n fonctions Φ (fonctions entières de r^2) sont déterminées par le système différentiel (25), *avec la condition supplémentaire que le premier terme de Φ^n_n soit $B^p_{n-1} r^{2n-2}$.*

Écrivons en effet que la fonction :

$$\Phi^n_n(r) = B^p_{n-1} r^{2n-2} + \mu_0 B^p_n r^{2n} + \mu_1 B^p_{n+1} r^{2n+2} + \dots$$

est solution formelle de (20), en remarquant que $\Delta\left(B^p_K r^{2K}\right) = B^p_{K-1} r^{2K-2}$; on en déduit, d'une manière *unique*, les coefficients $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \dots$. Observons que l'équation (20) est dans ce cas (puisqu'il s'agit d'une solution radiale) une équation différentielle linéaire d'ordre $2n$, du type de Fuchs pour $r = 0$. Comme il est classique[1] on sait que la fonction Φ^n_n ainsi obtenue d'une manière formelle est convergente au voisinage de $r = 0$; c'est même une fonction entière de r^2 puisque $r = 0$ est la seule singularité des coefficients de (20). Ce que l'on peut vérifier d'une manière directe : Si Λ est une borne supérieure des λ_i, on trouve aisément que $|\mu_K| < (\Lambda + 1)^{K+1}$, quel que soit l'entier positif K; d'où les conséquences signalées.

Le système (25) permet alors (Φ^n_n ayant été déterminée comme il vient d'être dit) de trouver de proche en proche, par différentiation, les autres fonctions $\Phi^K_n(r)$, et cela sans utiliser l'équation caractéristique (21). Cette méthode directe permet donc d'éviter les complications (apparentes, comme on l'avait déjà vu) relatives à l'hypothèse de racines multiples de l'équation caractéristique (21).

Les n fonctions Φ que nous avons définies sont donc valables dans tous les cas et sont toujours n solutions radiales de (20). D'autre part, les relations (24) montrent qu'elles sont linéairemeni distinctes.

Signalons — ce qui résulte des relations (25) — que, si l'on a $\lambda_n = \lambda_{n-1} = \dots = \lambda_{n-K+1} = 0$ et $\lambda_{n-K} \neq 0$, les n fonctions $\Phi^1_n, \Phi^2_n, \dots, \Phi^K_n$ se réduisent à leur premier terme. En particulier, les coefficients de Φ^1_n, à partir du 2^me^, contiennent λ_n en facteur.

Notons enfin que si tous les λ_i sont nuls (auquel cas la n- métaharmonicité devient la n-harmonicité), les n fonctions $\Phi^K_n(r)$ se réduisent toutes à leur premier terme.

---

[1] E. GOURSAT : *Traité d'Analyse*, tome II, p. 465. D'autre part (voir note du § 16), $2n - 2$ est la plus grande racine de l'équation fondamentale déterminante de cette équation de Fuchs, ce qui entraîne l'existence de la solution cherchée.

19. — Nous avons défini, au § 16, les n fonctions Ψ. Ces n fonctions Ψ vérifient un système différentiel analogue à (25) :

$$
(26)\qquad \left\{
\begin{aligned}
&\Delta \Psi_n^{n} \quad + \lambda_1 \quad \Psi_n^{n} = \Psi_n^{n-1},\\
&\Delta \Psi_n^{n-1} + \lambda_2 \quad \Psi_n^{n} = \Psi_n^{n-2},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\Delta \Psi_n^{2} \quad + \lambda_{n-1} \Psi_n^{n} = \Psi_n^{1},\\
&\Delta \Psi_n^{1} \quad + \lambda_n \quad \Psi_n^{n} = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

En utilisant la définition de ces fonctions Ψ, on observe que la singularité fondamentale de $\Psi_n^{1}(r)$ est $r^{2-p}\left(\log \frac{1}{r} \text{ pour } p = 2\right)$; autrement dit $r^{p-2} . \Psi_n^{1}(r)$ tend vers 1 quand r tend vers 0. Au contraire, $r^{p-2}\Psi_n^{K}(r)$ tend vers 0 avec $r(K = 2, 3, \ldots, n)$.

Comme pour les fonctions Φ, l'hypothèse de racines multiples de l'équation caractéristique (21) n'introduit ni restriction ni difficulté supplémentaire (car on pourrait exprimer les n fonctions Ψ à l'aide des λ_i).

20. — Les n fonctions Φ définies précédemment seront utilisées pour la médiation périphérique. En vue de la médiation spatiale, nous allons définir ici d'autres fonctions entières de r^2.

Soit Σ_r l'hypersphère de centre fixe M_0 et de rayon quelconque r enfermant le domaine Ω_r. Soit $M(MM_0 = \xi)$ un point quelconque intérieur à Σ_r,

$H(\lambda r)$ étant la fonction définie au § 15, nous désignerons par $\theta(\lambda r)$ la moyenne spatiale de $H(\lambda\xi)$ dans Ω_r. Autrement dit, nous poserons, en désignant par $\mathcal{V}_r$ le volume de Σ_r :

$$\theta(\lambda r) = \frac{1}{\mathcal{V}_r}\int_{\Omega_r} H(\lambda\xi)\, d\omega_M .$$

On trouve aisément :

$$\theta(\lambda r) = 1 - \frac{p}{p+2} B_1^p(\lambda r)^2 + \frac{p}{p+4} B_2^p(\lambda r)^4 - \ldots + (-1)^n \frac{p}{p+2n} B_n^p(\lambda r)^{2n} + \ldots .$$

Désignons par $\omega_K(r)$ le déterminant d'ordre n obtenu en remplaçant dans δ (voir § 16) les termes de la K$^{\text{ème}}$ ligne respectivement par $\theta(\alpha_1 r), \theta(\alpha_2 r), \ldots, \theta(\alpha_n r)$, et posons :

$$(27)\qquad \Theta_n^{K}(r) = \frac{(-1)^{K-1}}{\delta}\,\omega_K(r). \qquad [K = 1, 2, 3, \ldots, n]$$

Si l'on compare cette définition avec celle de Φ_n^{κ} donnée au § 16, on tire immédiatement :

$$(27') \qquad \Theta_n^{\kappa}(r) = \frac{1}{\mathfrak{V}_r} \int_{\Omega_r} \Phi_n^{\kappa}(\xi)\, d\omega_{\mathrm{M}}. \qquad [\mathrm{K} = 1, 2, 3, \ldots, n]$$

D'où, en tenant compte des relations (24) :

$$(28) \qquad \Theta_n^{\kappa}(r) = \frac{p}{p + 2\mathrm{K} - 2} \mathrm{B}_{\kappa-1}^{p} r^{2\kappa-2} - \lambda_{n-\kappa+1} \cdot \frac{p}{2n + p} \cdot \mathrm{B}_n^p r^{2n} + \ldots.$$
$$(\mathrm{K} = 1, 2, 3, \ldots, n) \ (\mathrm{B}_0^p = 1).$$

Utilisons la remarque faite à la fin du § 18. Si :

$$\lambda_n = \lambda_{n-1} = \ldots = \lambda_{n-\kappa+1} = 0, \qquad \lambda_{n-\kappa} \neq 0$$

les K fonctions $\Theta_n^1, \Theta_n^2, \ldots, \Theta_n^{\kappa}$ se réduisent à leur premier terme, en particulier si $\mathrm{K} = n$ (résultat que nous appliquerons à l'étude de la n-harmonicité).

21. — Désignons par M_0 *un point fixe* de l'espace E_p, par Σ_ρ *l'hypersphère fixe* de centre M_0 et de rayon arbitraire ρ, par m un point de Σ_ρ, par Ω_ρ le domaine intérieur à Σ_ρ, P un point *variable* de $\Omega_\rho (\mathrm{M}_0\mathrm{P} = r < \rho)$.

$\mathrm{H}(\lambda r)$ et $\mathrm{S}(\lambda r)$ ayant été définies précédemment comme solutions radiales de $\Delta \mathrm{V} + \lambda^2 \mathrm{V} = 0$, posons :

$$(29) \qquad \mathcal{G}(\lambda r) = \mathrm{S}(\lambda r)\,\mathrm{H}(\lambda\rho) - \mathrm{H}(\lambda r)\,.\,\mathrm{S}(\lambda\rho).$$

où, d'après ce qui précède, r est la variable et ρ une constante. C'est une fonction du point P qui est solution de $\Delta\mathcal{G} + \lambda^2\mathcal{G} = 0$; elle est singulière en M_0, la singularité fondamentale étant $\frac{\mathrm{H}(\lambda\rho)}{r^{p-2}}$ $\left(\text{pour } p = 2, \text{ on remplacera } \frac{1}{r^{p-2}} \text{ par } \log \frac{1}{r}\right)$. Elle s'annule manifestement quand P vient sur Σ_ρ.

Étudions maintenant la dérivée normale de $\mathcal{G}(\lambda r)$ sur Σ_ρ. Pour cela, appliquons la formule de Green aux deux fonctions $\mathrm{H}(\lambda r)$ et $\mathrm{S}(\lambda r)$ pour le domaine compris entre Σ_ρ et une hypersphère concentrique évanescente. On trouve finalement :

$$(30) \qquad \left[\frac{d}{dr}\mathcal{G}(\lambda r)\right]_{r=\rho} = \frac{2-p}{\rho^{p-1}}. \qquad \left(-\frac{1}{\rho} \text{ si } p = 2\right)$$

22. — Soit toujours δ le déterminant défini au § 16. Suivant un processus déjà mis en œuvre, appelons $\zeta_i(r)$ le déterminant d'ordre n obtenu en remplaçant, dans δ, les termes de la $i^{\text{ème}}$ ligne respectivement par $\mathcal{G}(\alpha_1 r)$, $\mathcal{G}(\alpha_2 r)$, $\ldots$, $\mathcal{G}(\alpha_n r)$;

[$-\alpha_1^2, \ldots, -\alpha_n^2$ désignant toujours les n racines réelles ou complexes, simples ou multiples de l'équation caractéristique (21)]; puis posons :

$$\mathcal{G}_n^{\kappa}(r) = \frac{(-1)^{\kappa-1}}{\delta}\zeta_{\kappa}(r). \qquad [K = 1, 2, 3, \ldots, n] \tag{31}$$

En particulier [1]

$$\mathcal{G}_n^{n}(r) = \mathrm{S}\frac{\mathcal{G}(\alpha_1 r)}{(\alpha_2^2-\alpha_1^2)(\alpha_3^2-\alpha_1^2)\ldots(\alpha_n^2-\alpha_1^2)}.$$

Les n fonctions $\mathcal{G}_n^{\kappa}(r)$ vérifient le système différentiel suivant [qui est l'analogue des systèmes (25) et (26)] :

$$\left\{\begin{array}{ll} \Delta\mathcal{G}_n^{\kappa+1}(r) + \lambda_{n-\kappa}\mathcal{G}_n^{n} = \mathcal{G}_n^{\kappa}, & [K = 1, 2, 3, \ldots, n-1] \\ \Delta\mathcal{G}_n^{1} \qquad + \lambda_n \quad \mathcal{G}_n^{n} = 0. & \end{array}\right. \tag{32}$$

Ces n fonctions $\mathcal{G}$ s'annulent pour $r = \rho$. Utilisant les relations (30) et (31), on reconnaît que ces fonctions $\mathcal{G}_n^{\kappa}(r)$ ont leur dérivée première nulle sur Σ_ρ, excepté $\mathcal{G}_n^{1}(r)$ dont la dérivée première par rapport à r est égale à $(2-p)\rho^{1-p}$ pour $r = \rho$, $\left(-\frac{1}{\rho}\right.$ pour $\left.p = 2\right)$. Plus généralement, la fonction $\mathcal{G}_n^{\kappa}(r)$ s'annule sur Σ_ρ ainsi que ses $2K-2$ premières dérivées, la dérivée d'ordre $2K-1$ étant égale à $(2-p)\rho^{1-p}$ pour $r = \rho$.

D'autre part, si l'on utilise les déterminants qui définissent les fonctions $\mathcal{G}$, on reconnaît que la singularité fondamentale de $\mathcal{G}_n^{\kappa}(r)$ est $\frac{1}{r^{p-2}}\Phi_n^{\kappa}(\rho)$; $\left(\text{pour } p = 2\right.$ on remplacera $\frac{1}{r^{p-2}}$ par $\left.\log\frac{1}{r}\right)$.

A vrai dire, nous avons supposé implicitement que les n nombres α_i^2 étaient distincts, mais, comme nous l'avons fait pour les fonctions Φ, on montrerait que les fonctions $\mathcal{G}$ subsistent dans tous les cas : on pourrait d'ailleurs les exprimer uniquement à l'aide des λ_i. Il n'apparaît donc, pour les diverses fonctions radiales considérées, aucune difficulté supplémentaire du fait que l'équation caractéristique (21) aurait des racines multiples.

---

(1) L'exposition adoptée ici est légèrement différente de celle de notre note aux *Comptes rendus* (séance du 9 février 1931) déjà citée; la fonction $\mathcal{G}_n^{n}$ définie ci-dessus coïncide avec la fonction $\mathcal{G}_n$ utilisée dans cette note.

23. — Supposons ici que tous les coefficients $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ soient réels. Dans ce cas, nos fonctions radiales sont évidemment réelles.

A ce sujet, rappelons les résultats suivants que nous avons obtenus et dont nous indiquerons ailleurs la démonstration :

1° Si l'équation caractéristique (21) admet toutes ses racines réelles et $\geqslant 0$ (certaines d'entre elles pouvant être multiples), $\Phi_n^n(r)$ est une fonction croissante de r, donc positive quel que soit r.

Dans la même hypothèse, la fonction $\mathcal{G}_n^n(r)$ décroît de $+\infty$ à 0 quand r croît de 0 à ρ; donc elle est positive à l'intérieur de l'hypersphère Σ_ρ.

En particulier si $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$, la fonction $\mathcal{G}_n^n(r)$ se réduit à la fonction $G_n(r)$ définie au chapitre I, et l'on a vu que cette dernière possédait bien la propriété précédente.

2° Toujours dans le cas où tous les λ_i sont réels et dans l'hypothèse où l'équation caractéristique (21) n'a plus toutes ses racines réelles $\geqslant 0$ (soit qu'elle admette des racines négatives, soit des racines deux à deux imaginaires conjuguées), nous avons encore démontré que la fonction $\mathcal{G}_n^n(r)$ décroît de $+\infty$ à 0 quand r croît de 0 à ρ, mais seulement pour ρ suffisamment petit. (Donc $\mathcal{G}_n^n(r)$ est positive dans les hypothèses en question).

24. — Soient D un domaine de l'espace E_p à p dimensions, $u(P)$ une fonction uniforme (réelle ou non), du point variable réel P de D. Nous demanderons à cette fonction $u(P)$ de posséder un n-laplacien continu en tout point de D.

Soient M_0 un point fixe arbitraire de D, Σ_ρ l'hypersphère de centre M_0 et de rayon quelconque ρ, mais intérieure à D; Ω_ρ sera le domaine intérieur à Σ_ρ. Nous désignerons par m un point sur $\Sigma_\rho(M_0 m = \rho)$, et par P un point quelconque de $\Omega_\rho(M_0 P = r < \rho)$.

La formule de Green appliquée aux deux fonctions $u(P)$ et $\mathcal{G}_n^1(r) = \mathcal{G}_n^1(P)$ pour le domaine compris entre Σ_ρ et une hypersphère concentrique évanescente donne, en tenant compte des propriétés de $\mathcal{G}_n^1$ et remplaçant $\Delta\mathcal{G}_n^1$ par $-\lambda_n \mathcal{G}_n^n$ [dernière équation (32)] :

$$(33) \quad -\int_{\Omega_\rho}\left[\lambda_n . u(P) . \mathcal{G}_n^n(P) + \mathcal{G}_n^1(P) . \Delta u(P)\right] d\omega_P + \frac{p-2}{\rho^{p-1}} \int_{\Sigma_\rho} u(m)\, d\sigma_m = (p-2) S_p \Phi_n^1(\rho)\, u(M_0).$$

Appliquons maintenant la formule de Green, pour le même domaine que ci-dessus, aux deux fonctions

$$\Delta^{(q)} u(P) \quad \text{et} \quad \mathcal{G}_n^{q+1}(P) = \mathcal{G}_n^{q+1}(r). \qquad (1 \leqslant q \leqslant n-1).$$

En observant, d'après les relations (32), que :

$$\Delta \mathcal{G}_n^{q+1} = \mathcal{G}_n^q - \lambda_{n-q} \mathcal{G}_n^n$$

que la fonction $\mathcal{G}_n^{q+1}(\mathrm{P})$ s'annule sur Σ_ρ ainsi que sa dérivée première, et tenant compte enfin que la singularité fondamentale de $\mathcal{G}_n^{q+1}$ est $\frac{1}{r^{p-2}} \Phi_n^{q+1}(\rho)$, il vient :

$$(34) \quad \int_{\Omega_\rho} \left[\Delta^{(q)} u_{\mathrm{P}} \left(\mathcal{G}_n^q - \lambda_{n-q} \mathcal{G}_n^n\right) - \Delta^{(q+1)} u_{\mathrm{P}} \cdot \mathcal{G}_n^{q+1}\right] d\omega_{\mathrm{P}} = (p-2) \mathrm{S}_p \Phi_n^{q+1}(\rho) \Delta^{(q)} u(\mathrm{M}_0).$$

Faisons successivement, dans (34), $q = 1, 2, 3, \ldots, n-1$ et ajoutons membre à membre les $n-1$ égalités obtenues à (33), nous obtiendrons en posant :

$$\mathfrak{D}^{(n)} u \equiv \Delta^{(n)} u + \lambda_1 \Delta^{(n-1)} u + \ldots + \lambda_{n-1} \Delta u + \lambda_n u.$$

$$(35) \quad \frac{1}{\mathrm{S}_\rho} \int_{\Sigma_\rho} u(m)\, d\sigma_m = \Phi_n^1(\rho) \cdot u(\mathrm{M}_0) + \Phi_n^2(\rho) \cdot \Delta u(\mathrm{M}_0) + \ldots + \Phi_n^n(\rho) \cdot \Delta^{n-1} u(\mathrm{M}_0)$$
$$+ \frac{1}{(p-2)\mathrm{S}_p} \int_{\Omega_\rho} \mathcal{G}_n^n(\mathrm{P}) \cdot \mathfrak{D}^{(n)} u(\mathrm{P})\, d\omega_{\mathrm{P}},$$

dans laquelle $\mathrm{S}_\rho = \rho^{p-1} \mathrm{S}_p$ désigne la surface de l'hypersphère Σ_ρ. (Si $p = 2$, remplacer S_ρ par $2\pi\rho$ et $(p-2)\mathrm{S}_p$ par 2π).

La formule (35) est de caractère périphérique : elle est applicable, en particulier, comme nous allons le rappeler dans ce qui suit, aux fonctions n-métaharmoniques. Nous dirons que (35) est une formule de *n-métamédiation périphérique*.

Le dernier terme au second membre de la formule (35) sera appelé son *reste* R.

25. — Voici une autre forme de ce reste R. La fonction considérée $u(\mathrm{P})$ ayant un n-laplacien continu, nous pouvons lui appliquer la formule (9) de n-médiation périphérique obtenue au chapitre I avec la forme du reste indiquée au § 10, laquelle est valable si $u(\mathrm{P})$ est réelle ou complexe (comme nous l'avons noté en temps opportun) :

$$(36) \quad \frac{1}{\mathrm{S}_\rho} \int_{\Sigma_\rho} u(m)\, d\sigma_m = u(\mathrm{M}_0) + \mathrm{B}_1^p \rho^2 \Delta u(\mathrm{M}_0) + \ldots + \mathrm{B}_{n-1}^p \rho^{2n-2} \Delta^{(n-1)} u(\mathrm{M}_0) + \mathrm{B}_n^p \rho^{2n} \left[\Delta^{(n)} u(\mathrm{M}_0) + \varepsilon_\rho\right]$$

où ε_ρ tend vers o avec ρ; ε_ρ étant de l'ordre ρ^2 si $u(\mathrm{P})$ admet un $(n+1)$ — laplacien continu au voisinage de M_0 (§ 10).

D'autre part, les relations (24), écrites pour $r = \rho$, donnent :

$$1 = \Phi_n^1(\rho) + \lambda_n \quad B_n^p \rho^{2n} + \ldots,$$

$$B_1^p \rho^2 = \Phi_n^2(\rho) + \lambda_{n-1} B_n^p \rho^{2n} + \ldots,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$B_{n-1}^p \rho^{2n-2} = \Phi_n^n(\rho) + \lambda_1 \quad B_n^p \rho^{2n} + \ldots.$$

Remplaçant les premiers membres de ces relations par leurs valeurs précédentes dans (36), cette dernière s'écrit :

$$(37) \quad \frac{1}{S_\rho}\int_{\Sigma_\rho} u(m)\,d\sigma_m = \Phi_n^1(\rho)\,.\,u(M_0) + \Phi_n^2(\rho)\,.\,\Delta u(M_0) + \ldots + \Phi_n^n(\rho)\,.\,\Delta^{(n-1)} u(M_0) + B_n^p \rho^{2n}\left[\mathfrak{D}^{(n)} u(M_0) + \eta(\rho)\right]$$

où $\eta(\rho)$ tend vers o avec ρ; $\eta(\rho)$ est d'ailleurs de l'ordre de ρ^2 si la fonction $u(P)$ admet un $(n+1)$ — laplacien continu au voisinage de M_0.

Le dernier terme de la formule (37) constitue une autre expression du reste R de (35).

26. — On peut déduire de ce qui précède *une formule de n-métamédiation spatiale.* A cet effet, on peut procéder de deux manières distinctes : soit en écrivant la formule (37) en remplaçant ρ par r et intégrant ensuite en r de o à ρ comme nous l'avons déjà montré plusieurs fois, soit en utilisant la formule (10) de n-médiation spatiale et adoptant le raisonnement du § 25 à la faveur des relations (28).

On trouve finalement :

$$(38) \quad \frac{1}{\mathfrak{V}_\rho}\int_{\Omega_\rho} u(P)\,.\,d\omega_P = \Theta_n^1(\rho)\,.\,u(M_0) + \Theta_n^2(\rho)\,.\,\Delta u(M_0) + \ldots + \Theta_n^n(\rho)\,.\,\Delta^{(n-1)} u(M_0)$$
$$+ \frac{p}{p+2n} B_n^p \rho^{2n}\left[\mathfrak{D}^{(n)} u(M_0) + \zeta(\rho)\right]$$

où $\zeta(\rho)$ tend vers o avec ρ; $\zeta(\rho)$ étant un infiniment petit de l'ordre de ρ^2 si $u(P)$ admet un $(n+1)$ — laplacien continu au voisinage de M_0.

27. — Les formules précédentes s'appliquent immédiatement aux fonctions n-métaharmoniques; dans ce cas le reste R est nul, puisque $\mathfrak{D}^{(n)} u(P) = 0$ en tout point P.

Par suite, si une fonction $u(\mathrm{P})$ est n-métaharmonique dans un domaine D, elle vérifie, pour *toute* hypersphère Σ_ρ intérieure à D, les deux relations :

$$(39)\quad \frac{1}{S_\rho}\int_{\Sigma_\rho} u(m)\,d\sigma_m = \Phi_n^1(\rho).\,u(\mathrm{M}_0) + \Phi_n^2(\rho).\,\Delta u(\mathrm{M}_0) + \ldots + \Phi_n^n(\rho).\,\Delta^{(n-1)}u(\mathrm{M}_0).$$

$$(40)\quad \frac{1}{\mathfrak{V}_\rho}\int_{\Omega_\rho} u(\mathrm{P})\,d\omega_{\mathrm{P}} = \Theta_n^1(\rho).\,u(\mathrm{M}_0) + \Theta_n^2(\rho).\,\Delta u(\mathrm{M}_0) + \ldots + \Theta_n^n(\rho).\,\Delta^{(n-1)}u(\mathrm{M}_0),$$

où S_ρ et $\mathfrak{V}_\rho$ désignent respectivement la surface et le volume de l'hypersphère Σ_ρ.

28. — Faisons, dans la formule (35), $u(\mathrm{P}) \equiv 1$.
Donc

$$\mathfrak{D}^{(n)}u(\mathrm{P}) \equiv \lambda_n.$$

Alors :

$$1 = \Phi_n^1(\rho) + \frac{\lambda_n}{(p-2)\,S_p}\int_{\Omega_\rho} \mathcal{G}_n^n(\mathrm{P})\,d\omega_{\mathrm{P}},$$

relation qui nous donne l'intégrale de $\mathcal{G}_n^n(\mathrm{P})$ étendue au domaine Ω_ρ intérieur à Σ_ρ :

$$(41)\qquad \frac{1}{(p-2)\,S_p}\int_{\Omega_\rho} \mathcal{G}_n^n(\mathrm{P})\,d\omega_{\mathrm{P}} = \frac{1-\Phi_n^1(\rho)}{\lambda_n} = \mathrm{B}_n^p\rho^{2n} + \rho^{2n+2}[\ldots].$$

A vrai dire, cela suppose $\lambda_n \neq 0$, mais le résultat subsiste évidemment pour $\lambda_n = 0$, puisqu'on a vu précédemment (§ 18) que tous les coefficients de Φ_n^1, à partir du deuxième, contiennent λ_n en facteur. On pourrait d'ailleurs en donner une démonstration directe, en supposant par exemple $\lambda_n = 0$ mais $\lambda_{n-1} \neq 0$ et appliquant la formule (35) à la fonction $u(\mathrm{P}) = \mathrm{B}_1^p r^2$, etc....

Signalons enfin que toutes ces formules de n-métamédiation se réduisent à celles obtenues au chapitre I en faisant $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$. Dans ce dernier cas, le premier membre de la formule (41) se réduit à $\mathrm{B}_n^p\rho^{2n}$ [formule (4) dn § 6].

29. — Nous allons examiner ici le cas où tous les coefficients $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sont réels, la fonction $u(\mathrm{P})$ étant supposée réelle, et donner d'autres expressions des restes des formules (35) et (38).

Comme nous l'avons fait au § 23, nous distinguerons deux cas :

1^{er} cas : l'équation caractéristique (21) a toutes ses racines réelles et $\geqslant 0$. Dans ce cas, nous l'avons affirmé au § 23, la fonction $\mathcal{G}_n^n(\mathrm{P})$ est positive dans Σ_ρ. On peut donc appliquer à l'intégrale qui figure au dernier terme de (35) la formule de la moyenne en observant que $\mathfrak{D}^{(n)}u(P)$ est continue dans Σ_ρ; ce qui donne pour expression du reste R de cette formule (35) :

$$R = \frac{1}{(p-2)S_p}\mathfrak{D}^{(n)}u(Q)\int_{\Omega_\rho}\mathcal{G}_n^n(P)\,.\,d\omega_P$$

Q étant un certain point intérieur à Σ_ρ; ou encore, à la faveur de (41) :

(42)
$$R = \frac{1-\Phi_n^1(\rho)}{\lambda_n}\mathfrak{D}^{(n)}u(Q)$$

qui se réduit à $B_n^p\rho^{2n}\Delta^{(n)}u(Q)$ si tous les λ_i sont nuls (§ 8).

Par intégration, on en déduit que le reste de la formule (38) est

(43)
$$\frac{1-\Theta_n^1(\rho)}{\lambda_n}\mathfrak{D}^{(n)}u(Q_1)$$

où Q_1 est un certain point intérieur à Σ_ρ, et

$$\frac{1-\Theta_n^1(\rho)}{\lambda_n} = \frac{p}{p+2n}B_n^p\rho^{2n} + \rho^{2n+2}[\ldots],$$

valable même si $\lambda_n = 0$, résultat qui coïncide avec le reste de la formule (10) de n-médiation spatiale dans le cas où tous les λ_i sont nuls (§ 9).

2ᵉ *cas :* les λ_i sont encore supposés réels, mais l'équation caractéristique (21) admet, ou bien des racines négatives, ou bien des racines deux à deux imaginaires conjuguées. Dans ce cas, nous avons affirmé précédemment (§ 23) que $\mathcal{G}_n^n(r)$ est positive si ρ est suffisamment petit : alors les raisonnements du 1ᵉʳ cas subsistent.

On en déduit que l'on peut encore appliquer les restes des formules (35) et (38), sous les formes (42) et (43), pourvu que ρ soit suffisamment petit.

On voit donc que l'hypothèse telle que l'équation caractéristique ait toutes ses racines réelles et $\geqslant 0$ n'introduit ici aucune restriction de grandeur pour ρ, pourvu, bien entendu, que Σ_ρ reste inférieure au domaine D.

30. — Nous indiquerons, dans ce qui suit, des systèmes de formules de n-méta-médiation pour les fonctions n-métaharmoniques, en vue du chapitre IV de ce Mémoire.

Soit $u(P)$ une fonction qui est n-métaharmonique dans un domaine D. Soient M_0 un point fixe de D, Σ_r de surface S_r l'hypersphère de centre M_0 et de rayon quelconque r, mais intérieure à D. Nous pouvons écrire la formule (39) où ρ est remplacé par r. Or la fonction $u(P)$ est n-métaharmonique dans D, donc elle y est analytique comme nous le verrons ci-après; elle est par suite pourvue de dérivées de tous les ordres; il est alors évident que $\Delta u(P)$, $\Delta^{(2)}u(P)$, ... sont n-métaharmoniques dans D. On peut donc, dans cette formule (39) où r a été substitué à ρ, remplacer u

par Δu, $\Delta^{(2)} u, \ldots$. On en déduit sans peine, en utilisant l'équation aux dérivées partielles $\mathcal{D}^{(n)} u = 0$, que la fonction n-métaharmonique $u(\mathrm{P})$ vérifie le système infini suivant pour toute hypersphère Σ_r intérieure au domaine D de n-métaharmonicité :

$$(44)\quad \frac{1}{\mathrm{S}_r}\int_{\Sigma_r} \Delta^{(\mathrm{K})} u(m)\,d\sigma_m = u(\mathrm{M}_0).\Delta^{(\mathrm{K})}\Phi^1_n(r) + \Delta u(\mathrm{M}_0).\Delta^{(\mathrm{K})}\Phi^2_n(r) + \ldots + \Delta^{(n-1)} u(\mathrm{M}_0).\Delta^{(\mathrm{K})}\Phi^n_n(r)$$
$$(\mathrm{K} = 0, 1, 2, 3, \ldots, +\infty)$$

avec la convention $\Delta^{(0)}\mathrm{V} \equiv \mathrm{V}$ (pour $\mathrm{K} = 0$, c'est la formule 39).

Supposons, en particulier, que $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$, donc la fonction $u(\mathrm{P})$ est n-harmonique dans D. Le système (44) est alors limité à n équations. On en déduit que si une fonction $u(\mathrm{P})$ est n-harmonique dans un domaine D, elle vérifie le système suivant : (pour toute hypersphère Σ_r intérieure au domaine de n-harmonicité) :

$$(45)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{\mathrm{S}_r}\int_{\Sigma_r} u(m)\,d\sigma_m = u(\mathrm{M}_0) + \mathrm{B}^p_1 r^2.\,\Delta u(\mathrm{M}_0) + \ldots + \mathrm{B}^p_{n-1} r^{2n-2}\Delta^{(n-1)} u(\mathrm{M}_0),\\
&\frac{1}{\mathrm{S}_r}\int_{\Sigma_r} \Delta u(m)\,d\sigma_m = \Delta u(\mathrm{M}_0) + \mathrm{B}^p_1 r^2.\Delta^{(2)} u(\mathrm{M}_0) + \ldots + \mathrm{B}^p_{n-2} r^{2n-4}\Delta^{(n-1)} u(\mathrm{M}_0),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{1}{\mathrm{S}_r}\int_{\Sigma_r} \Delta^{(n-2)} u(m)\,d\sigma_m = \Delta^{(n-2)} u(\mathrm{M}_0) + \mathrm{B}^p_1 r^2\Delta^{(n-1)} u(\mathrm{M}_0),\\
&\frac{1}{\mathrm{S}_r}\int_{\Sigma_r} \Delta^{(n-1)} u(m)\,d\sigma_m = \Delta^{(n-1)} u(\mathrm{M}_0),
\end{aligned}\right.$$

relations que l'on aurait pu écrire directement, à partir de la première d'entre elles.

Les systèmes (44) et (45) sont de médiation périphérique. On en déduirait sans peine, par intégration, des systèmes de médiation spatiale. En particulier, si une fonction $u(\mathrm{P})$ est n-harmonique dans un domaine D, elle vérifie le système suivant, et cela pour toute hypersphère Σ_ρ (centre M_0, rayon ρ) intérieure à D :

$$(46)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{\mathcal{V}_\rho}\int_{\Omega_\rho} u(\mathrm{P})\,d\omega_{\mathrm{P}} = u(\mathrm{M}_0) + \frac{p}{p+2}\mathrm{B}^p_1\rho^2\,\Delta u(\mathrm{M}_0) + \ldots + \frac{p}{p+2n-2}\mathrm{B}^p_{n-1}\rho^{2n-2}\Delta^{(n-1)} u(\mathrm{M}_0),\\
&\frac{1}{\mathcal{V}_\rho}\int_{\Omega_\rho} \Delta u(\mathrm{P})\,d\omega_{\mathrm{P}} = \Delta u(\mathrm{M}_0) + \frac{p}{p+2}\mathrm{B}^p_1\rho^2\Delta^{(2)} u(\mathrm{M}_0) + \ldots + \frac{p}{p+2n-4}\mathrm{B}^p_{n-2}\rho^{2n-4}\Delta^{(n-1)} u(\mathrm{M}_0),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{1}{\mathcal{V}_\rho}\int_{\Omega_\rho} \Delta^{(n-2)} u(\mathrm{P})\,d\omega_{\mathrm{P}} = \Delta^{(n-2)} u(\mathrm{M}_0) + \frac{p}{p+2}\mathrm{B}^p_1\rho^2\Delta^{(n-1)} u(\mathrm{M}_0),\\
&\frac{1}{\mathcal{V}_\rho}\int_{\Omega_\rho} \Delta^{(n-1)} u(\mathrm{P})\,d\omega_{\mathrm{P}} = \Delta^{(n-1)} u(\mathrm{M}_0),
\end{aligned}\right.$$

relations que l'on aurait pu déduire directement de la première d'entre elles.

Nous indiquerons, au chapitre IV (§ 45), un autre système de formules de n- métamédiation mettant en évidence les racines de l'équation caractéristique (21).

31. — Nous allons maintenant montrer comment les considérations qui précèdent entraînent l'analyticité(¹) et l'autonomie du domaine réel pour les fonctions n- métaharmoniques.

Soit D un certain domaine de l'espace E_p à p dimensions, limité par une surface S; cette frontière S est supposée admettre une multiplicité linéaire tangente bien déterminée et continue en chacun de ses points. Désignons par M_0 un point fixe quelconque de D, par P un point variable de D, et par m un point quelconque de S. Nous poserons $M_0P = r$.

Soit $u(P)$ une fonction n- métaharmonique dans la région $D + S$. Appliquons la formule de Green à cette fonction $u(P)$ et à la fonction $\Psi^1_n(r)$ (laquelle a été définie précédemment au § 16), pour le domaine D amputé d'une hypersphère évanescente de centre M_0; nous trouvons, en remplaçant $\Delta\Psi^1_n$ par $-\lambda_n\Psi^n_n$ [relations (26)] :

$$(47)\quad -\int_D \left[\lambda_n . u_P . \Psi^n_n + \Psi^1_n . \Delta u_P\right] d\omega_P + \int_S \left[u_m . \frac{d}{dn}\Psi^1_n - \Psi^1_n . \frac{du}{dn}\right] d\sigma_m = (p-2) . S_p . u(M_0),$$

[comme il a déjà été indiqué plusieurs fois, si $p = 2$, on remplacera $(p-2)S_p$ par 2π].

Appliquons ensuite la formule de Green, pour le même domaine que ci-dessus, aux deux fonctions $\Delta^{(q)}u_P$ et $\Psi^{q+1}_n(r)$ $(1 \leqslant q \leqslant n-1)$.

Utilisant les propriétés des fonctions Ψ signalées au § 19, et remplaçant (26) $\Delta\Psi^{q+1}_n$ par $\Psi^q_n - \lambda_{n-q}\Psi^n_n$ on a :

$$(48)\quad \int_D \left[\Delta^{(q)}u_P\left(\Psi^q_n - \lambda_{n-q}\Psi^n_n\right) - \Psi^{q+1}_n\Delta^{(q+1)}u_P\right] d\omega_P + \int_S \left[\Delta^{(q)}u_m \frac{d}{dn}\Psi^{q+1}_n - \Psi^{q+1}_n(m) . \frac{d}{dn}\left(\Delta^{(q)}u\right)\right] d\sigma_m = 0.$$

Dans cette formule (48), faisons successivement $q = 1, 2, 3, \ldots, n-1$ et ajoutons les $n-1$ égalités obtenues à (47); nous obtenons finalement, en tenant compte de l'hypothèse de n- métaharmonicité pour la fonction u :

$$(49)\quad u(M_0) = \frac{1}{(p-2)S_p} \sum_{\kappa=1}^{n} \int_S \left[\Delta^{(k-1)}u_m \frac{d}{dn}\Psi^\kappa_n(m) - \Psi^\kappa_n(m)\frac{d}{dn}\left(\Delta^{\kappa-1}u\right)\right] d\sigma_m,$$

(¹) Ce fait a déjà été signalé, au moins dans des cas particuliers étendus (voir, par ex., HADAMARD, *Plaques élastiques encastrées*, p. 23 et suivantes), mais il était intéressant de le rattacher à l'ordre d'idées précédent.

les dérivées étant prises suivant la $\frac{1}{2}$ normale intérieure à S au point m. [Si $p=2$, remplace $(p-2)S_p$ par 2π].

La formule (49) généralise des formules bien connues relatives aux fonctions harmoniques(1) $\left(\text{alors } n=1 \text{ et } \Psi_1^1(r)=r^{2-p} \text{ ou } \log\frac{1}{r} \text{ si } p=2\right)$.

32. — La formule (49) est importante. D'abord, elle nous permet d'y rattacher l'analyticité des fonctions n- métaharmoniques. En effet, soient $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_p^0$ les coordonnées cartésiennes du point M_0; les fonctions Ψ sont des fonctions analytiques de ces coordonnées $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_p^0$; donc, de (49), on en déduit l'analyticité de la fonction $u(P)$. *Il est ainsi prouvé que toute fonction n- métaharmonique dans un domaine, y est analytique.* Ce résultat est valable en particulier pour les fonctions n- harmoniques et généralise ainsi une propriété connue des fonctions harmoniques(2).

Il y a plus : les fonctions n- métaharmoniques (donc en particulier les fonctions n- harmoniques), sont à domaine réel autonome. A cet effet, nous aurons recours à certains résultats récents de M. G. Bouligand et que l'Auteur a exposés dans un très remarquable Mémoire(3).

M. G. Bouligand appelle fonction à champ réel autonome « toute fonction uniforme $u(P)$ qui, autour d'un point M_0 régulier quelconque du champ réel, se développe en une série de polynomes homogènes par rapport aux composantes de $\overrightarrow{M_0P}$, cette série étant absolument convergente dans la sphère de centre M_0 et passant par le point singulier réel le plus rapproché de M_0. »

La fonction $u(P)$ étant n- métaharmonique dans D, prenons pour surface S, dans (49), la plus grande sphère centrée en M_0 et ne contenant pas de point singulier réel de la fonction u (à sa surface ou à son intérieur) : l'autonomie du domaine réel en découle à la faveur des résultats de M. G. Bouligand. Appliquant alors le théorème D du Mémoire cité, nous pouvons énoncer ce qui suit. Désignons toujours par $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_p^0$ les coordonnées cartésiennes de M_0; soit R le rayon de la plus grande hypersphère de centre M_0 à l'intérieur de laquelle la fonction u est n- métaharmonique. Alors le développement taylorien de la fonction $u(P)$ autour du

(1) Voir, par ex., E Goursat, *Cours d'Analyse*, tome III, p. 181 et 253.

(2) E. Goursat, *Cours d'Analyse*, t. III, p. 170 et 253.

(3) G. Bouligand, *Sur un problème de la théorie des fonctions analytiques de plusieurs variables et sur divers points de la théorie des fonctions harmoniques* (Journal de Mathématiques, tome 9, 1930, fascicule IV).

point réel M_0 converge absolument pour tout point $x_1 + iy_1, \ldots, x_p + iy_p$ tel que l'on ait :

$$|x_1 + iy_1 - x_1^0| < \eta_1$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$|x_p + iy_p - x_p^0| < \eta_p$$

pour tout système de nombres positifs $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_p$ tels que l'on ait :

$$\eta_1^2 + \eta_2^2 + \ldots + \eta_p^2 = \frac{R^2}{2}.$$

En particulier, si une fonction $u(P)$ est n- métaharmonique partout à distance finie dans E_p, elle est fonction entière des coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_p$ du point P.

33. — Nous terminerons ce chapitre par une relation intégrale vérifiée par toute fonction n- métaharmonique.

Soit donc, toujours dans l'espace euclidien E_p à p dimensions, une fonction $u(P)$ n- métaharmonique dans un domaine D. Désignons par Σ_ρ (centre M_0, rayon ρ, enfermant le domaine Ω_ρ) une hypersphère quelconque intérieure à D. Soit $\Sigma_r(M_0 m = r < \rho)$ une hypersphère concentrique à Σ_ρ et de rayon $r < \rho$. Nous désignerons toujours par S_ρ et $\mathcal{V}_\rho$ la surface et le volume de Σ_ρ.

Nous pouvons écrire (39) :

$$(50) \quad \frac{1}{S_r}\int_{\Sigma_r} u(m)\, d\sigma_m = \Phi_n^1(r) \,.\, u(M_0) + \Phi_n^2(r) \,.\, \Delta u(M_0) + \ldots + \Phi_n^n(r) \,.\, \Delta^{(n-1)} u(M_0).$$

Soit $f(r, \rho)$ une fonction sommable de r et satisfaisant aux n conditions suivantes :

$$(51) \quad \begin{cases} \dfrac{1}{\mathcal{V}_\rho}\displaystyle\int_{\Omega_\rho} \Phi_n^1(r) \,.\, f(r, \rho) \,.\, d\omega_m = 1, \\ \dfrac{1}{\mathcal{V}_\rho}\displaystyle\int_{\Omega_\rho} \Phi_n^K(r) \,.\, f(r, \rho) \,.\, d\omega_m = 0. \qquad [K = 2, 3, \ldots, n] \end{cases}$$

Par intégration, (50) nous donnera, grâce à (51) :

$$(52) \qquad \frac{1}{\mathcal{V}_\rho}\int_{\Omega_\rho} f(r, \rho) \,.\, u(m) \,.\, d\omega_m = u(M_0), \qquad [M_0 m = r]$$

laquelle est valable pour toute fonction $u(P)$ n- métaharmonique dans un domaine D, et pour toute hypersphère Σ_ρ intérieure à ce domaine D. La relation (52) généralise la formule de Gauss-Zaremba relative aux fonctions harmoniques (auquel cas il convient de prendre $f(r, \rho) \equiv 1$),

C'est la relation (52) que nous voulions établir : remarquons qu'elle ne met en jeu que les valeurs de la fonction $u(P)$, sans faire appel aux dérivées de cette fonction. Cette relation intégrale peut d'ailleurs être transformée en équation intégrale (au sens classique), en associant, à chaque point M_0 de D, une valeur particulière de ρ (point de vue adopté au chapitre IV). Cette équation intégrale exprimera l'invariance de u par un certain opérateur fonctionnel linéaire.

Pour que la relation (52) présente un certain intérêt, il est nécessaire de montrer qu'elle est caractéristique des fonctions n- métaharmoniques, ce que nous ferons au chapitre III.

34. — Il existe un champ étendu[1] de fonctions $f(r, \rho)$ satisfaisant aux conditions (51). Nous montrerons comment on peut déterminer l'une d'entre elles, ce qui nous suffira pratiquement.

A cet effet, nous prendrons :

$$f(r, \rho) = a_0 + a_1 \frac{r^2}{\rho^2} + a_2 \frac{r^4}{\rho^4} + \dots + a_n \frac{r^{3n}}{\rho^{2n}}, \tag{53}$$

où les coefficients a_i sont, en général, des fonctions de ρ. Nous déterminerons alors ces $n+1$ coefficients a_i en écrivant que cette $f(r, \rho)$ vérifie les n relations (51), ainsi que :

$$\frac{1}{\mathfrak{V}_\rho} \int_{\Omega_\rho} f(r, \rho) \, . \, r^{2n} \, . \, d\omega_m = \rho^{2n}. \tag{51'}$$

[L'opportunité de cette dernière condition apparaîtra (§ 36) au chapitre III]. On obtient ainsi un système linéaire de Cramer de rang $n+1$ pour tout ρ inférieur à une certaine limite ρ_0. La question ne présentant aucune difficulté, nous n'indiquerons que les résultats. On trouve que pour tout $\rho < \rho_0$[2], les coefficients a_i de (53) sont des fonctions holomorphes de ρ, et par suite la fonction $f(r, \rho)$, de la forme indiquée, est bien définie pour tout $\rho < \rho_0$. Observons d'ailleurs que, dans le cas de la n- harmonicité, les coefficients a_i se réduisent à des constantes ; dans ce der-

---

[1] En effet, ayant obtenu l'une d'elles, on peut toujours lui ajouter une combinaison linéaire de fonctions orthogonales aux Φ_n^K [$K = 1, 2, 3, \dots, n$] dans l'hypersphère de rayon ρ, et à coefficients fonctions arbitraires de ρ.

[2] ρ_0 désigne, quand elle existe, la plus petite racine positive de l'équation en ρ obtenue en égalant à zéro le déterminant du système de Cramer considéré.

nier cas, ρ n'est limité supérieurement que par la condition initialement imposée à Σ_ρ d'être intérieure au domaine D.

De l'holomorphie, par rapport à $\rho < \rho_0$, des coefficients a_i, il résulte que l'on peut écrire, pour cette fonction $f(r, \rho)$:

$$\frac{1}{\mathcal{V}_\rho}\int_{\Omega_\rho} f(r, \rho) \,.\, r^{2n+2K}\, d\omega_m = \lambda \rho^{2n+2K} \tag{54}$$

pour tout $\rho < \rho_0$, et où λ demeure borné quand ρ tend vers o.

DEUXIÈME PARTIE

Comme nous l'avons dit, pour simplifier l'exposition, nous raisonnerons dorénavant dans le plan ($p = 2$), sans nuire à la généralité.

CHAPITRE III

35. — Considérons une fonction uniforme (réelle ou complexe) $u(\mathrm{P})$ définie t bornée dans un domaine plan D. Soit M_0 un point fixe arbitraire de D, Σ_ρ le cercle de centre M_0 et de rayon quelconque ρ, ce cercle Σ_ρ étant intérieur à D; désignons par Ω_ρ le domaine intérieur à Σ_ρ et par $m(\mathrm{M}_0 m = r < \rho)$ un point variable intérieur à Σ_ρ.

Soit $\varphi(r, \rho)$ une fonction continue de r et de ρ, définie pour tout ρ inférieur à une certaine limite ρ_0, et pour tout $r \leqslant \rho$. Nous supposerons en outre que $\varphi(r, \rho)$ admet une dérivée $\dfrac{\partial \varphi}{\partial r}$ pour toutes les valeurs permises de r, et telle que $\left|\dfrac{\partial \varphi}{\partial r}\right| < \dfrac{\mathrm{K}}{\rho}$ pour tout $r \leqslant \rho$ et tout $\rho < \rho_0$, K étant une constante. Nous appellerons *conditions* A les conditions précédentes imposées à $\varphi(r, \rho)$. La fonction $f(r, \rho)$ définie par l'égalité (53) satisfait évidemment aux conditions A.

Cela étant, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Si la fonction sommable $u(\mathrm{P})$ *vérifie, pour tout point* M_0 *de* D, *et pour tout cercle* Σ_ρ *intérieur à* $\mathrm{D}(\rho < \rho_0)$, *la relation :*

$$(55) \qquad u(\mathrm{M}_0) = \frac{1}{\pi \rho^2} \iint_{\Omega_\rho} \varphi(r, \rho) \,.\, u(m)\, d\sigma_m$$

la fonction $\varphi(r, \rho)$ *satisfaisant aux conditions* A, *cette fonction* $u(\mathrm{P})$ *est indéfiniment dérivable dans* D.

Nous indiquerons à grands traits les idées directrices qui président à la démonstration de ce théorème, les développements ne présentant aucune difficulté.

D'adord, la fonction considérée $u(\mathrm{P})$ est continue dans D : il suffit de considérer deux cercles de même rayon arbitraire $\rho < \rho_0$, intérieurs à D, et centrés en deux points voisins M_0 et M_1. Si l'on écrit (55) pour ces deux points, on reconnaît immédiatement que la différence $u(\mathrm{M}_1) - u(\mathrm{M}_0)$ peut être rendue arbitrairement petite en choisissant M_1 suffisamment voisin de M_0, ce qui entraîne la continuité de la fonction $u(P)$.

Désignons par $\overrightarrow{L}$ la direction $\overrightarrow{M_0M_1}$ et formons le rapport $\dfrac{u(M_1)-u(M_0)}{M_0M_1}$ dans les mêmes conditions que ci-dessus; quand M_1 tend vers M_0 sur cette direction $\overrightarrow{L}$, on reconnaît aisément que le rapport précédent tend vers une limite qui est :

$$\frac{du(M_0)}{dL} = \frac{\varphi(\rho, \rho)}{\pi\rho^2}\int_{\Sigma_\rho} u(Q) \cdot \cos\theta \cdot d\sigma_Q - \frac{1}{\pi\rho^2}\int\int_{\Omega_\rho} u(m) \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial r} \cdot \cos\psi \cdot d\omega_m$$

où Q est le point variable de la circonférence Σ_ρ et où l'on a posé :

$$\theta = (\overrightarrow{L}, \overrightarrow{M_0Q}), \qquad \psi = (\overrightarrow{L}, \overrightarrow{M_0m}).$$

La fonction $u(P)$ possède donc une dérivée en tout point de D suivant toute direction; un raisonnement très simple montre que cette dérivée première vérifie la relation :

$$\frac{du(M_0)}{dL} = \frac{1}{\pi\rho^2}\int\int_{\Omega_\rho} \varphi(r, \rho) \cdot \frac{du(m)}{dL} d\sigma_m \tag{55'}$$

qui n'est autre que (55) où u est remplacée par $\dfrac{du}{dL}$.

De cette dernière remarque, nous allons déduire que la fonction considérée $u(P)$ est indéfiniment dérivable; il suffit de prouver qu'elle admet des dérivées d'ordre n, quel que soit l'entier n. A cet effet, M_0 étant un point fixe arbitraire de D, traçons le cercle Σ_R (centre M_0. rayon R) intérieur à D, puis le cercle concentrique $\Sigma_{R'}$ (centre M_0, rayon $R' < R$) intérieur au précédent. Soient $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_{n-1}$ les $n-1$ cercles de centre M_0 et de rayons respectifs $R - \dfrac{R-R'}{n}$, $R - \dfrac{2(R-R')}{n}$, ..., $R - \dfrac{(n-1)(R-R')}{n}$. Désignons enfin par ρ la plus petite des quantités ρ_0 et $\dfrac{R-R'}{n}$. Le raisonnement ci-dessus, fait pour cette valeur de ρ, prouve que $u(P)$ admet une dérivée première dans toute direction, en tout point intérieur à Σ_1. Cette dérivée première satisfait dès lors à (55') en tout point M_0 intérieur à Σ_1; le même raisonnement appliqué à cette dérivée première prouve que $u(P)$ admet des dérivées secondes en tout point M_0 intérieur à Σ_2, et que toute dérivée seconde satisfait à (55), où u est remplacée par $\dfrac{d^2u}{dL \cdot dL'}$ etc....

On en déduit de proche en proche que la fonction $u(P)$ admet des dérivées d'ordre n en tout point intérieur à $\Sigma_{R'}$, ce qui démontre la proposition[1]. (On pourrait aller plus loin et démontrer l'analyticité de la fonction u, mais nous n'utiliserons pas ce fait).

36. — Considérons maintenant la fonction $f(r, \rho)$ définie par la relation (53) et satisfaisant aux $n - 1$ conditions (51) et (51').

Nous allons démontrer le théorème suivant :

Si une fonction sommable $u(\mathrm{P})$, *définie et bornée*[2] *dans un domaine* D, *vérifie, en tout point* M_0 *de* D *et pour* TOUT *cercle* Σ_ρ *(centre* M_0, *rayon* $\rho < \rho_0$*) intérieur à* D. *la relation :*

$$u(\mathrm{M}_0) = \frac{1}{\pi\rho^2}\int\int_{\Omega_\rho} u(m) \,.\, f(r, \rho) \,.\, d\omega_m$$

($\mathrm{M}_0 m = r < \rho$, $\Omega_\rho =$ domaine intérieur à Σ_ρ), *cette fonction* $u(\mathrm{P})$ *est* n*- métaharmonique dans* D.

Puisque la fonction considérée $f(r, \rho)$ satisfait aux conditions (A) du § 35, on peut affirmer, en conséquence du théorème précédent, que cette $u(\mathrm{P})$ est indéfiniment dérivable dans D ; en particulier, elle possède un $(n+1)$ — laplacien continu en chaque point de D.

Si l'on pose, comme précédemment :

$$\mathfrak{D}^{(n)} u \equiv \Delta^{(n)} u + \lambda_1 \Delta^{(n-1)} u + \ldots + \lambda_{n-1} \Delta u + \lambda_n u,$$

il suffit donc de montrer que $\mathfrak{D}^{(n)} u(\mathrm{M}_0) = 0$ pour tout point arbitraire M_0 de D.

Soit Σ_r le cercle de centre M_0 et de rayon $r \leqslant \rho$. Nous pouvons alors écrire la formule (37) de n- métamédiation périphérique :

$$\frac{1}{2\pi r}\int_{\Sigma_r} u(m) d\sigma_m = \Phi^1_n(r) \,.\, u(\mathrm{M}_0) + \ldots + \Phi^n_n(r) \,.\, \Delta^{(n-1)} u(\mathrm{M}_0) + \mathrm{B}^2_n r^{2n}[\mathfrak{D}^{(n)} u(\mathrm{M}_0) + \lambda r^2]$$

où λ est une fonction de r qui reste finie quand r tend vers 0, à la faveur de la remarque faite à la fin du § 25, puisque la fonction considérée $u(\mathrm{P})$ admet un $(n+1)$ — laplacien continu dans D.

Multiplions les deux membres de la relation précédente par $2\pi r f(r, \rho)$ et intégrons en r entre 0 et ρ. En tenant compte des relations (51), on a :

$$\frac{1}{\pi\rho^2}\int\int_{\Omega_\rho} u(m) \,.\, f(r, \rho) \,.\, d\omega_m = u(\mathrm{M}_0) + \frac{2\mathrm{B}^2_n}{\rho^2}\int_0^\rho r^{2n+1} \,.\, f(r, \rho)\,[\mathfrak{D}^{(n)} u(\mathrm{M}_0) + \lambda r^2]\, dr.$$

---

[1] Remarquons que le théorème subsiste encore dans l'hypothèse moins restrictive où la relation (55) est vérifiée par une infinité de valeurs de ρ ayant O pour point d'accumulation.

[2] Nous disons sommable et bornée, donc mesurable.

En vertu de l'hypothèse, il reste :

$$\int_0^\rho r^{2n+1} \cdot f(r, \rho) \cdot [\mathfrak{D}^{(n)} u(\mathrm{M}_0) + \lambda r^2]\, dr = 0$$

qui s'écrit encore :

$$\iint_{\Omega_\rho} r^{2n} \cdot f(r, \rho)\, [\mathfrak{D}^{(n)} u(\mathrm{M}_0) + \lambda r^2]\, d\omega_m = 0$$

et ceci est vrai, par hypothèse, pour *tout* ρ suffisamment petit. On peut encore écrire, après division par $\pi\rho^2$:

$$\frac{\mathfrak{D}^{(n)} u(\mathrm{M}_0)}{\pi\rho^2} \iint_{\Omega_\rho} r^{2n} \cdot f(r, \rho)\, d\omega_m + \frac{1}{\pi\rho^2} \iint_{\Omega_\rho} \lambda r^{2n+2} f(r, \rho)\, d\omega_m = 0.$$

La première de ces intégrales, d'après (51'), est égale à $\pi\rho^{2n+2}$. [C'est ici que se justifie l'opportunité de la condition supplémentaire (51') que nous avons imposée à $f(r, \rho)$]. La deuxième de ces intégrales, d'après (54), est infiniment petite par rapport à ρ de l'ordre $2n + 4$. Après division par ρ^{2n}, il reste une relation de la forme

$$\mathfrak{D}^{(n)} u(\mathrm{M}_0) + \mu\rho^2 = 0$$

laquelle est vérifiée pour tout ρ suffisamment petit, μ restant borné quand ρ tend vers 0. On en déduit $\mathfrak{D}^{(n)} u(\mathrm{M}_0) = 0$. Or M_0 est un point arbitraire du domaine D; donc la fonction considérée $u(\mathrm{P})$ est bien n- métaharmonique dans D.

37. — Nous allons indiquer quelques conséquences du théorème précédent. Nous avons vu précédemment que si une fonction $u(\mathrm{P})$ est n-métaharmonique dans un domaine D, elle vérifie l'une et l'autre des formules (39 et (40) pour tout cercle Σ_ρ (centre M_0, rayon ρ), intérieur au domaine D de n- métaharmonicité. Ces deux formules étant vraies pour *tout* ρ (ne dépassant pas une certaine limite), ne sont pas distinctes, comme nous l'avons d'ailleurs indiqué; par exemple, on passe de (39) à (40) par une simple intégration. Il nous suffira donc de considérer l'une d'elles. Ce sont les réciproques correspondantes que nous voulons envisager ici. Par exemple, nous énoncerons le théorème suivant, qui est une réciproque de (39) :

Si une fonction sommable et bornée $u(\mathrm{P})$ *vérifie, en tout point* M_0 *d'un domaine* D *et pour* TOUT *cercle* Σ_ρ (*centre* M_0, *rayon* ρ) *intérieur à* D, *la relation :*

$$\frac{1}{2\pi\rho} \int_{\Sigma_\rho} u(m)\, d\sigma_m = \Phi_n^1(\rho) \cdot u(\mathrm{M}_0) + \Phi_n^2(\rho) \mathrm{V}_1(\mathrm{M}_0) + \ldots + \Phi_n^n(\rho) \mathrm{V}_{n-1}(\mathrm{M}_0),$$

les fonctions V_i *étant supposées bornées dans* D, *cette fonction* $u(P)$ *est* n- *métaharmonique dans* D; *alors* $V_i(M_0)$ *est identique à* $\Delta^{(i)}u(M_0)$. $[i = 1, 2, 3, \ldots, n-1]$

La démonstration est immédiate : il suffit d'écrire la relation de l'énoncé pour tout $r < \rho < \rho_0$, de multiplier ensuite par $2\pi r . f(r, \rho)$ (1) et d'intégrer entre o et ρ; en tenant compte des relations (51) il reste :

$$u(M_0) = \frac{1}{\pi \rho^2} \int\int_{\Omega_\rho} u(m) . f(r, \rho) . d\omega_m,$$

vérifiée en tout point M_0 de D et pour tout ρ suffisamment petit. On est donc dans les conditions d'application du théorème du § 36; la n- métaharmonicité de la fonction $u(P)$ en résulte. Si l'on écrit (39) pour cette fonction $u(P)$, et si on la compare à la relation de l'énoncé, on en déduit que :

$$V_i(M_0) = \Delta^{(i)} u(M_0). \qquad [i = 1, 2, 3, \ldots, n-1]$$

Le théorème est donc démontré.

On énoncerait un théorème analogue, et qui serait la réciproque de (40).

Enfin, nous observerons que tous ces résultats sont applicables à la n- harmonicité, en faisant $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$; on sait que, dans ce cas, les n fonctions $\Phi_n^{\kappa}(r)$ se réduisent à leur premier terme.

---

(1) Il s'agit de la fonction $f(r, \rho)$ utilisée au § 36.

CHAPITRE IV

Le problème de Riquier et ses généralisations(¹).

38. — Dans tout ce chapitre, et pour simplifier, nous continuerons à raisonner dans le plan, mais les méthodes employées et les résultats obtenus restent valables dans un espace à un nombre quelconque de dimensions. Nous ne mettrons en jeu que des fonctions réelles, les coefficients des équations aux dérivées partielles que nous considérerons étant eux-mêmes réels; on peut d'ailleurs faire cette hypothèse sans nuire à la généralité puisque le cas complexe se ramène au cas réel.

Soit, dans le plan, une région R formée d'un domaine borné D et de sa frontière F. Nous supposerons, avec M. H. Lebesgue, que D est l'un de ces domaines pour lesquels on peut affirmer l'existence de la solution du problème de Dirichlet harmonique quelle que soit la suite continue des valeurs données sur F(²). (Par abréviation, nous dirons d'un tel domaine que c'est un *domaine de H. Lebesgue*).

Soit une fonction $u(\mathrm{P})$, n- métaharmonique dans D, donc solution de :

$$\mathfrak{D}^{(n)} u(\mathrm{P}) = 0 .$$

[Plus généralement, on pourrait considérer une fonction $u(\mathrm{P})$ solution de $\mathfrak{D}^{(n)} u = \varphi(\mathrm{P})$ en tout point P de D, où la fonction donnée $\varphi(\mathrm{P})$ est supposée continue]. Nous avons établi, dans les chapitres I et II de ce Mémoire, des formules de médiation vérifiées par cette fonction $u(\mathrm{P})$, en tout point M_0 de D, et cela pour toutes les valeurs du rayon r (à condition, bien entendu, que le cerle de centre M_0 et de rayon r soit intérieur au domaine D).

Réciproquement, au chapitre III, il a été établi, qu'une fonction était n- métaharmonique dans un domaine D, si, en tout point de ce domaine, elle vérifiait l'une ou l'autre des formules de médiation rappelées ci-dessus, et cela pour *toutes les valeurs du rayon* r ne dépassant pas une certaine limite.

Mais on peut envisager d'autres réciproques, de forme moins restrictive; par exemple, on peut attacher, à chaque point M_0 de D, *une seule valeur du rayon du cercle* centré en ce point M_0. Pour préciser, et à l'exemple de M. H. Lebesgue, prenons pour valeur unique du rayon ρ du cercle centré en M_0, la plus courte

---

(¹) Ce chapitre est le développement de deux notes aux *Comptes Rendus*, 1932, tome 194, p. 242 et 428.

(²) Dans le plan, si le domaine a sa frontière composée d'un nombre fini de continus, dont aucun ne se réduit à un point, cela a lieu automatiquement (H. Lebesgue, 1907, *Rendiconti di Palermo*). Dans l'espace, nos hypothèses excluent la présence, sur la frontière, de points dénommés irréguliers.

distance de ce point M_0 à la frontière F de D. Si une fonction $u(P)$ est n- harmonique dans D, et si l'on pose : $\Delta^{(k)}u = U_k$, on peut écrire, pour tout point M_0 de D et pour la valeur correspondante de ρ, le système (S) analogue à (46) où l'on a fait $p = 2$. On obtient ainsi un système (S) de n équations intégrales linéaires; (S) étant obtenu à partir de $\Delta^{(n)}u = 0$ nous dirons que $\Delta^{(n)}u = 0$ est l'équation aux dérivées partielles *génératrice* de ce système (S). Or, contrairement au point de vue adopté au chapitre III, chaque équation intégrale du système (S) est prise pour une valeur déterminée du rayon, et il n'est pas évident *à priori* que ses solutions continuent à vérifier l'équation aux dérivées partielles génératrice : c'est précisément cette étude que nous allons faire dans ce chapitre en nous limitant à certains types de médiation spatiale : la réponse à la question posée est alors affirmative.

Nous aurons recours à la méthode des approximations successives que M. H. Lebesgue a employée(1) avec tant de succès pour la résolution du problème de Dirichlet harmonique.

Dans un remarquable Mémoire(2) M. Riquier a étudié le problème suivant : trouver une fonction n- harmonique dans D, connaissant les valeurs prises par cette fonction et par ses $n-1$ premiers laplaciens sur la frontière F de D. Ce problème sera désigné, par abréviation, sous le nom de *problème de Riquier*; nous appellerons *conditions de Riquier* les conditions imposées à la fonction sur la frontière F (valeurs prises par cette fonction et par ses $n-1$ premiers laplaciens).

Ce chapitre est divisé en trois parties :

— Dans la partie A, nous étudions une classe d'équations intégrales linéaires et singulières, en vue de la résolution des problèmes qui suivent; elles généralisent l'équation intégrale homogène que M. H. Lebesgue a utilisée pour résoudre le problème de Dirichlet, laquelle est fournie par le théorème de Gauss-Zaremba. Ce point de vue apparaît naturel, puisque nos formules de médiation généralisent la formule de Gauss-Zaremba.

— Dans la partie B, nous étudions le problème de Riquier pour $\Delta^{(n)}u = 0$. La méthode employée donne, avec la solution du problème de Riquier, la preuve de la n- harmonicité de la solution dans les conditions indiquées; ainsi, à notre point de vue, ces deux questions nous apparaissent comme intimement liées. Nous étudions en outre le problème de Riquier pour l'équation $\Delta^{(n)}u = \varphi(P)$, où la fonction donnée $\varphi(P)$ est supposée, sans plus, continue dans le domaine D, ce qui nous conduira aux laplaciens généralisés de M. Bouligand.

— Dans la partie C, nous étudions le problème de Riquier pour l'équation :

$$\mathfrak{D}^{(n)}u \equiv \Delta^{(n)}u + \lambda_1\Delta^{(n-1)}u + \ldots + \lambda_{n-1}\Delta u + \lambda_n u = 0$$

---

(1) H. Lebesgue, *Comptes Rendus*, tome 154, 1912, p. 335.

(2) Riquier, *Journal de Math.*, tome V, 1926, p. 297.

[et plus généralement pour $\mathfrak{D}^{(n)} u = \varphi(\mathrm{P})$] dans le cas où l'équation caractéristique correspondante :

$$X^n + \lambda_1 X^{n-1} + \ldots + \lambda_{n-1} X + \lambda_n = 0$$

a toutes ses racines réelles et $\geqslant 0$. Comme dans la partie B, la méthode employée donne, avec la solution du problème de Riquier, la preuve de la n-métaharmonicité de la solution d'un système de n équations intégrales où chacune d'elles est une formule de médiation écrite pour une seule valeur du rayon ρ.

Nous attirons l'attention sur le degré de généralité des méthodes employées, lesquelles n'utilisent aucune fonction de Green ou assimilée, ce qui supprime les difficultés inhérentes à leur emploi.

A. — *Sur des généralisations d'une équation intégrale singulière de M. H. Lebesgue.*

39. — Soit P un point quelconque du domaine D. Désignons par ρ la plus courte distance de ce point P à la frontière F de D; soit C_P le cercle de centre P et de rayon ρ; ce cercle C_P ne déborde donc pas de la région D + F considérée.

Soit $f_0(\mathrm{P})$ une fonction continue dans D + F. En chaque point P de D, considérons la fonction $f_1(\mathrm{P})$ définie par :

$$f_1(\mathrm{P}) = \frac{1}{\pi\rho^2} \int\int_{C_P} f_0(m) \,.\, d\omega_m. \tag{56}$$

Nous dirons, avec M. Bouligand, que la fonction $f_1(\mathrm{P})$ est la *médiante* de la fonction $f_0(\mathrm{P})$ (il s'agit ici d'une médiante spatiale). Rappelons que si $f_0(\mathrm{P})$ est harmonique dans D, la fonction $f_1(\mathrm{P})$ est identique à $f_0(\mathrm{P})$.

On démontre aisément que la fonction $f_1(\mathrm{P})$ est continue dans D + F. Il est d'ailleurs évident, d'après sa définition même, que la fonction $f_1(\mathrm{P})$ prend les mêmes valeurs que la fonction $f_0(\mathrm{P})$ sur la frontière F. Il y a plus : M. Bouligand nous a fait remarquer que, si aux environs d'un point Q de F, la frontière F est à courbure bornée, et si $f_0(\mathrm{P})$ possède une dérivée normale en ce point Q, la fonction $f_1(\mathrm{P})$ possède la même dérivée normale en ce point Q. Dans les conditions indiquées on peut donc dire que la fonction $f_0(\mathrm{P})$ présente sur le bord, avec sa médiante $f_1(\mathrm{P})$ un voisinage d'ordre 1 (au sens de M. Hadamard).

Nous définirons ensuite, de proche en proche, les médiantes successives de $f_0(\mathrm{P})$, c'est-à-dire les fonctions $f_1(\mathrm{P}), f_2(\mathrm{P}), \ldots, f_n(\mathrm{P}), \ldots$ par :

$$f_n(\mathrm{P}) = \frac{1}{\pi\rho^2} \int\int_{C_P} f_{n-1}(m) \,.\, d\omega_m. \qquad [n = 1, 2, 3, \ldots, +\infty] \tag{56'}$$

Toutes ces médiantes sont continues dans $D + F$, et pronnent les mêmes valeurs que f_0 sur le bord.

D'après M. H. Lebesgue (Cf. note déjà citée) toutes ces médiantes successives tendent uniformément vers une fonction unique $f(P)$ continue dans $D + F$ et qui est solution de :

$$f(P) = \frac{1}{\pi\rho^2}\int\int_{C_P} f(m)\, d\sigma_m \tag{57}$$

en tout point P de D ; c'est-à-dire que cette fonction $f(P)$ est invariante par médiation. D'autre part, les médiantes successives, et par suite $f(P)$, prennent les mêmes valeurs que $f_0(P)$ sur la frontière F. Il en résulte que $f(P)$ est harmonique dans D, et qu'elle est précisément la solution du problème de Dirichlet pour le domaine D et pour la suite continue des valeurs $f_0(Q)$ sur le contour. En particulier, si la fonction f_0 cst nulle en tout point Q de F, la fonction $f(P)$ est nulle en tout point P de D ; ce qui arrive, par exemple, si l'on prend $f_0(P) = \rho^2$.

La méthode que nous venons de rappeler est celle qu'a suivie M. H. Lebesgue pour résoudre le problème de Dirichlet ; (57) est l'équation intégrale singulière que l'Auteur a envisagée.

D'après la remarque de M. G. Bouligand, rappelée ci-dessus, les médiantes successives ont non seulement les mêmes valeurs périphériques, mais aussi (dans les meilleurs cas), les mêmes dérivées normales, donc elles présentent entre elles, sur le bord, un voisinage d'ordre 1 ; mais chaque médiante ne présente qu'un voisinage d'ordre zéro avec la solution du problème de Dirichlet.

40. — Soit D un domaine fini de H. Lebesgue ; désignons par F sa frontière ; P étant un point quelconque de D, nous continuerons à désigner par ρ la plus courte distance de ce point P à la frontière F et par C_P le cercle de centre P et de rayon ρ.

Nous allons d'abord démontrer le théorème suivant :

$V(P)$ *étant une fonction donnée, définie et bornée dans* $D + F$, *il existe une fonction* $u(P)$ *et une seule continue dans* $D + F$ *qui, en tout point* P *de* D, *vérifie l'équation intégrale singulière :*

$$\frac{1}{\pi\rho^2}\int\int_{C_P} u(m)\,.\,d\omega_m = u(P) + \rho^2\,.\,V(P) \tag{58}$$

et qui prend, en outre, une suite continue donnée de valeurs sur la frontière F.

L'équation (58) est une équation intégrale linéaire au sens classique ; il suffit, en effet, de prendre un noyau $K(M, P)$ défini comme suit :

$$K(M, P) = \frac{1}{\pi\rho^2} \quad \text{si } M \text{ intérieur au cercle } C_P,$$

$$K(M, P) = 0 \quad \text{si } M \text{ extérieur au cercle } C_P$$

pour que (58) s'écrive :

$$\iint_{\mathrm{D}} \mathrm{K}(\mathrm{M}, \mathrm{P}) \,.\, u(\mathrm{M}) \,.\, d\omega_{\mathrm{M}} = u(\mathrm{P}) + \rho^2 \mathrm{V}(\mathrm{P}) .$$

Cette dernière équation est d'ailleurs singulière, puisque le noyau ne reste pas borné quand P s'approche de la frontière, même après un nombre fini d'itérations; les méthodes de Fredholm ne peuvent donc s'appliquer ici.

L'équation intégrale (58) généralise l'équation (57) considérée par M. H. Lebesgue : il suffit de prendre $\mathrm{V}(\mathrm{P}) \equiv 0$ dans D pour que (58) se réduise à (57).

Remarquons d'abord qu'il n'existe qu'une solution de (58) prenant les valeurs requises sur le bord, car, s'il en existait deux, leur différence, nulle sur le bord, vérifierait l'équation homogène (57); cette différence est donc identiquement nulle dans $\mathrm{D} + \mathrm{F}$.

Pour résoudre le problème posé, nous emploierons la méthode des approximations successives. Pour cela, construisons une fonction $u_0(\mathrm{P})$, continue dans $\mathrm{D}+\mathrm{F}$, et prenant sur le bord les valeurs convenues. En tout point P de D, nous calculerons de proche en proche les fonctions $u_1(\mathrm{P})$, $u_2(\mathrm{P})$, ..., $u_n(\mathrm{P})$, ... par :

$$(59) \qquad \frac{1}{\pi\rho^2} \iint_{\mathrm{C_P}} u_{n-1}(m) . d\omega_m = u_n(\mathrm{P}) + \rho^2 . \mathrm{V}(\mathrm{P}). \qquad [n = 1, 2, 3, \ldots, +\infty]$$

Toutes ces fonctions $u_n(\mathrm{P})$ sont continues dans $\mathrm{D}+\mathrm{F}$, et prennent, sur le bord, les mêmes valeurs que $u_0(\mathrm{P})$. Nous allons prouver que ces $u_n(\mathrm{P})$ tendent uniformément, dans $\mathrm{D}+\mathrm{F}$, vers une fonction $u(\mathrm{P})$ (de ce fait continue), qui sera par suite solution de (58), laquelle $u(\mathrm{P})$ prendra les valeurs requises sur le bord; notre théorème sera dès lors établi et nous aurons effectivement la solution unique.

A cet effet posons $\eta_0(\mathrm{P}) = \rho^2 \mathrm{V}(\mathrm{P})$, et soient $\eta_1(\mathrm{P})$, $\eta_2(\mathrm{P})$, ..., $\eta_n(\mathrm{P})$, ... les médiantes successives de $\eta_0(\mathrm{P})$.

Désignons de même par $\mathrm{U}_1(\mathrm{P})$, $\mathrm{U}_2(\mathrm{P})$, ..., $\mathrm{U}_n(\mathrm{P})$, ... les médiantes successives de $u_0(\mathrm{P})$.

Les relations (59) donnent :

$$u_{n+1}(\mathrm{P}) = \mathrm{U}_{n+1}(\mathrm{P}) - \mathrm{I}_n(\mathrm{P})$$

en posant :

$$\mathrm{I}_n(\mathrm{P}) = \eta_0(\mathrm{P}) + \eta_1(\mathrm{P}) + \ldots + \eta_n(\mathrm{P}).$$

Or, $\mathrm{U}_{n+1}(\mathrm{P})$ tend uniformément, dans $\mathrm{D}+\mathrm{F}$, vers une fonction harmonique $\mathrm{U}(\mathrm{P})$ prenant les valeurs données sur le bord (H. Lebesgue). Il reste à prouver que $\mathrm{I}_n(\mathrm{P})$ tend uniformément, dans la région $\mathrm{D}+\mathrm{F}$, vers une fonction $\mathrm{I}(\mathrm{P})$ (donc continue), nulle sur F.

Moyennant la convergence uniforme de la série des médiantes successives de $\eta_0(P) = \rho^2 V(P)$, soit :

(60) $$\eta_0(P) + \eta_1(P) + \eta_2(P) + \ldots + \eta_n(P) + \ldots$$

notre proposition sera donc démontrée.

Pour établir la convergence uniforme de la série (60) et son annulation sur le bord, nous distinguerons trois cas :

a) Supposons d'abord $V(P) \equiv 1$; donc $\eta_0(P) = \rho^2$ en tout point P de la région considérée.

Désignons par O un point fixe du plan, et considérons la fonction auxiliaire :

$$\varphi_0(P) = \overline{OP}^2 .$$

Cette fonction du point P est, dans tout le plan, solution de $\Delta\varphi_0 = 4$. On peut appliquer à cette fonction $\varphi_0(P)$ notre formule de 2- médiation spatiale, pour le cerle C_P :

$$\frac{1}{\pi\rho^2}\int\int_{C_P} \varphi_0(m)\, d\omega_m = \varphi_0(P) + \frac{1}{2} B_1^2 \rho^2 \Delta\varphi_0(P)$$

ou :

(61) $$\frac{1}{\pi\rho^2}\int\int_{C_P} \varphi_0(m)\, d\omega_m = \varphi_0(P) + \frac{1}{2}\rho^2 = \varphi_0(P) + \frac{1}{2}\eta_0(P) .$$

Désignons par $\varphi_1(P), \varphi_2(P), \ldots, \varphi_n(P), \ldots$ les médiantes successives de $\varphi_0(P)$; $[\eta_1(P), \eta_2(P), \ldots, \eta_n(P), \ldots$ étant toujours les médiantes successives de $\eta_0(P) = \rho^2]$.

On tire de (61) :

$$\varphi_0(P) = \varphi_1(P) - \frac{1}{2}\eta_0(P) .$$

Donc si l'on remplace φ_0 par sa valeur précédente dans le premier membre de (61) on a :

$$\varphi_0(P) = \varphi_2(P) - \frac{1}{2}[\eta_0(P) + \eta_1(P)] .$$

Remplaçant φ_0 par cette valeur dans le premier membre de (61) on a encore :

$$\varphi_0(P) = \varphi_3(P) - \frac{1}{2}[\eta_0(P) + \eta_1(P) + \eta_2(P)]$$

etc... finalement :

$$\varphi_0(P) = \varphi_{n+1}(P) - \frac{1}{2}[\eta_0(P) + \eta_1(P) + \eta_2(P) + \ldots + \eta_n(P)]$$

c'est-à-dire :

$$I_n(P) = \eta_0(P) + \eta_1(P) + \dots + \eta_n(P) = 2[\varphi_{n+1}(P) - \varphi_0(P)].$$

Or, $\varphi_{n+1}(P)$ tend uniformément, dans la région $D + F$, vers la fonction harmonique $\varphi(P)$ prenant les mêmes valeurs que φ_0 sur le bord (H. Lebesgue). Donc $I_n(P)$ tend uniformément, dans $D + F$, vers une fonction $I(P)$ nulle sur le bord, et définie par :

$$I(P) = 2[\varphi(P) - \varphi_0(P)].$$

Donc la proposition est démontrée, dans ce cas particulier où nous avons pris $V(P) \equiv 1$.

(Remarquons que $\Delta I = -2\Delta\varphi_0 = -8$, puisque φ est harmonique et que $\Delta\varphi_0 = 4$).

Plus généralement, cette proposition subsiste si l'on prend $\eta_0(P) = M\rho^2$, où M désigne une constante quelconque.

b) Prenons maintenant $\eta_0(P) = \rho^2 V(P)$, où la fonction $V(P)$, bornée dans $D + F$, y est supposée $\geqslant 0$. Soit M la borne supérieure de $V(P)$ dans cette région $D + F$. Si l'on remplace $\rho^2 V(P)$ par $M\rho^2$, on majore chaque terme de la série (60) dont tous les termes sont positifs. On en déduit, à la faveur du cas précédent a), que la série (60) converge encore uniformément, dans $D + F$, vers une fonction $I(P)$, nulle sur le bord.

c) Prenons enfin le cas le plus général $\eta_0(P) = \rho^2 V(P)$ où la fonction bornée $V(P)$ a un signe quelconque. On pourra toujours poser :

$$V(P) = V_1(P) - V_2(P)$$

où V_1 et V_2 sont deux autres fonctions bornées et $\geqslant 0$ dans $D + F$.

Appliquant alors le raisonnement précédent, aux fonctions V_1 et V_2, on en déduit encore, à la faveur du cas b), que (60) est uniformément convergente dans $D + F$, et nulle sur la frontière.

Notre théorème est donc démontré.

41. — Le théorème précédent peut être généralisé. Les notations restant les mêmes que précédemment (on appelle ρ la plus courte distance du point P à la frontière F, et C_P le cercle de centre P et de rayon ρ), nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Soient $V(P)$ *une fonction donnée définie et bornée dans la région* $D + F$, *et* $f(\rho)$ *une fonction continue de* ρ, *qui se réduit à* 1 *pour* $\rho = 0$, *et telle que* $f(\rho) \geqslant 1$ *(tout au moins pour les valeurs considérées de* ρ*). Alors, il existe une fonction* $u(P)$, *et une* *seule, continue dans* $D+F$, *prenant une suite continue de valeurs données sur* F *et vérifiant, en tout point* P *de* D, *l'équation intégrale singulière :*

$$\frac{1}{\pi\rho^2}\int\int_{C_P} u(m)\,.\,d\omega_m = u(P)\,.\,f(\rho) + \rho^2 V(P). \tag{62}$$

Remarquons d'abord qu'il ne peut exister deux solutions distinctes de (62) prenant les valeurs requises sur le bord, car leur différence, nulle sur F, vérifierait l'équation homogène correspondant à (62); par suite cette différence est identiquement nulle, puisque $f(\rho) \geqslant 1$ pour les valeurs considérées de ρ.

Il reste à examiner la question de l'existence effective de la solution. A cet effet, nous distinguerons deux cas :

1er cas. — La fonction donnée $V(P)$ est $\leqslant 0$ dans $D+F$, et la suite continue des valeurs données sur F est $\geqslant 0$.

On peut ainsi former une fonction continue $u_0(P) \geqslant 0$ dans $D+F$, et prenant les valeurs requises sur le bord. Appliquant toujours la méthode des approximations successives, nous calculerons de proche en proche les fonctions $u_1(P)$, $u_2(P)$, ..., $u_n(P)$, ... par

$$u_n(P)\,.\,f(\rho) = \frac{1}{\pi\rho^2}\int\int_{C_P} u_{n-1}(m)\,.\,d\omega_m - \rho^2 V(P). \tag{63}$$

$$(n = 1, 2, 3, \ldots, +\infty)$$

Ces fonctions successives $u_n(P)$ prennent évidemment les mêmes valeurs que $u_0(P)$ sur le bord, puisque $f(\rho)$ tend vers 1 quand ρ tend vers 0. Il reste à prouver que $u_n(P)$ tend uniformément, dans $D+F$, vers une fonction $u(P)$ [qui sera donc continue et solution de (62)]. A cet effet, nous remarquerons en premier lieu que toutes ces fonctions $u_n(P)$ sont $\geqslant 0$ dans $D+F$ à la faveur de nos hypothèses. Désignons alors par $\mathfrak{U}_0(P)$, $\mathfrak{U}_1(P)$, ..., $\mathfrak{U}_n(P)$, ... les fonctions (qui sont $\geqslant 0$) analogues aux précédentes, et obtenues par (63), où l'on aurait pris $f(\rho) = 1$. [Nous prendrons $\mathfrak{U}_0(P) = u_0(P)$ dans la région $D+F$ envisagée]; c'est-à-dire que ces nouvelles fonctions sont définies comme suit :

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{U}_1(P) &= \frac{1}{\pi\rho^2}\int\int_{C_P} u_0(m)\,.\,d\omega_m - \rho^2\,.\,V(P), \\ \mathfrak{U}_n(P) &= \frac{1}{\pi\rho^2}\int\int_{C_P} \mathfrak{U}_{n-1}(m)\,d\omega_m - \rho^2 V(P). \end{aligned}\right. \tag{63'}$$

$$[n = 2, 3, 4, \ldots, +\infty]$$

Nous sommes alors dans les conditions d'application du théorème précédent (§ 40); donc $\mathfrak{U}_n(P)$ tend uniformément vers une fonction continue $\mathfrak{U}(P)$. D'autre part, en vertu de l'hypothèse $f(\rho) \geqslant 1$, on a manifestement, quel que soit n :

$$u_n(P) \leqslant \mathfrak{U}_n(P)$$

et par suite $u_n(P)$ tend uniformément, dans $D+F$, vers une fonction $u(P)$ prenant sur le bord, nous l'avons vu, les valeurs requises.

2^{me} *cas.* — Prenons maintenant le cas général : $V(P)$ et les valeurs données sur F ont un signe quelconque. Nous construirons d'abord une fonction $u_0(P)$ continue dans $D+F$, et prenant les valeurs requises sur le bord. Nous pourrons ensuite envisager cette fonction $u_0(P)$ comme la différence de deux fonctions continues et $\geqslant 0$ dans $D+F$; de même pour $V(P)$. Nous pourrons donc poser :

$$u_0(P) \equiv \xi_0(P) - \zeta_0(P),$$
$$V(P) \equiv V_1(P) - V_2(P),$$

où les quatre fonctions ξ_0, ζ_0, V_1, V_2 sont $\geqslant 0$ dans $D+F$, les deux premières étant, en outre, continues dans cette région.

D'après le 1^{er} cas précédent, nous pourrons déterminer deux fonctions $\xi(P)$ et $\zeta(P)$ prenant respectivement les mêmes valeurs que $\xi_0(P)$ et $\zeta_0(P)$ sur le bord, et qui sont solutions de :

$$\frac{1}{\pi\rho^2}\int\int_{C_P} \xi(m)\, d\omega_m = \xi(P)\,.f(\rho) - \rho^2 V_2(P),$$
$$\frac{1}{\pi\rho^2}\int\int_{C_P} \zeta(m)\, d\omega_m = \zeta(P)\,.f(\rho) - \rho^2 V_1(P),$$

la première de ces équations se résolvant par approximations successives en partant de $\xi_0(P)$; de même pour la deuxième, en partant de $\zeta_0(P)$. Si l'on pose :

$$u(P) = \xi(P) - \zeta(P),$$

cette fonction $u(P)$ vérifiera donc l'équation :

$$\frac{1}{\pi\rho^2}\int\int_{C_P} u(m)\, d\omega_m = u(P)\,.f(\rho) + \rho^2 V(P)$$

et prendra les valeurs convenues sur le bord.

Notre proposition est donc démontrée. Il en résulte que, quels que soient le signe de $V(P)$ et celui des valeurs données sur le bord, la méthode des approximations successives définie par (63) nous conduira uniformément à la solution $u(P)$.

B. — *Le problème de Riquier pour* $\Delta^{(n)} u = 0$ *et, plus généralement, pour* $\Delta^{(n)} u = \varphi(P)$.

42. — Nous nous proposons (problème de Riquier), de déterminer une fonction $u(P)$, n- harmonique dans un domaine D, connaissant les valeurs (continues) prises sur la frontière F de ce domaine D par cette fonction et par ses $n-1$ premiers laplaciens. (Nous supposons toujours que le domaine D considéré est un domaine borné de H. Lebesgue). Nous appellerons $\varphi_0(Q)$, $\varphi_1(Q)$, ..., $\varphi_{n-1}(Q)$, les valeurs (continues) prises, sur la frontière F, par cette fonction $u(P)$ et par ses $n-1$ premiers laplaciens.

A cet effet, posons :

$$\Delta^{(k)} u = U_k. \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots, n-1).$$

L'équation $\Delta^{(n)} u = 0$ peut être remplacée par le système suivant :

$$\Delta U_{n-1} = 0; \qquad \Delta U_{n-2} = U_{n-1}; \qquad \ldots; \qquad \Delta U_1 = U_2; \qquad \Delta u = U_1;$$

chacune de ces dernières équations est d'un type classique, d'où l'on déduit l'existence et l'unicité du problème de Riquier.

Or, nous pouvons remplacer ce système différentiel par un système de n équations intégrales. A cet effet, nous désignerons toujours par ρ la plus courte distance du point P à la frontière F du domaine D, et par C_P le cercle de centre P et de rayon ρ. Nous pouvons écrire nos formules de n- médiation, en tout point P de D, pour *cette seule valeur* du rayon ρ. [C'est le système (46), où l'on fait $p = 2$]; ce qui nous donne :

$$(64)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{\pi\rho^2}\int\int_{C_P} U_{n-1}(m)\, d\omega_m = U_{n-1}(P),\\
&\frac{1}{\pi\rho^2}\int\int_{C_P} U_{n-2}(m)\, d\omega_m = U_{n-2}(P) + \frac{1}{2}B_1^2\rho^2 U_{n-1}(P),\\
&\frac{1}{\pi\rho^2}\int\int_{C_P} U_{n-3}(m)\, d\omega_m = U_{n-3}(P) + \frac{1}{2}B_1^2\rho^2 U_{n-2}(P) + \frac{1}{3}B_2^2\rho^4 U_{n-1}(P),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{1}{\pi\rho^2}\int\int_{C_P} u(m)\, d\omega_m = u(P) + \frac{1}{2}B_1^2\rho^2 U_1(P) + \frac{1}{3}B_2^2\rho^4 U_2(P) + \ldots + \frac{1}{n}B_{n-1}^2\rho^{2n-2}U_{n-1}(P).
\end{aligned}\right.$$

On obtient ainsi un système de n équations intégrales singulières, linéaires, à n fonctions inconnues $u, U_1, U_2, \ldots, U_{n-1}$. Or, on peut considérer ce système (64) en lui-même, indépendamment de l'équation aux dérivées partielles génératrice $\Delta^{(n)} u = 0$.

Chacune des équations (64) est d'un type précédemment étudié.

— La première équation (64) donne $U_{n-1}(P)$, puisque l'on connaît les valeurs $\varphi_{n-1}(Q)$ qu'elle prend sur F.

— $U_{n-1}(P)$ étant ainsi déterminée, la deuxième équation (64) donne $U_{n-2}(P)$, puisque, d'une part, elle est d'un type que nous savons résoudre (voir § 40), et que, d'autre part, on connaît les valeurs $\varphi_{n-2}(Q)$ qu'elle prend sur le bord.

— On détermine ainsi, de proche en proche, toutes les fonctions U_{n-1}, U_{n-2}, U_{n-3}, ..., $u(P)$, et cela *d'une manière unique.*

Puisque ce système (64) admet une solution et une seule dans les conditions indiquées, cette solution coincide avec celle du problème de Riquier.

Ainsi, la méthode employée nous prouve deux faits : 1° Chaque équation du systéme (64) est une formule de médiation (spatiale) écrite, en tout point P de D, pour une seule valeur du rayon. On peut alors affirmer la n- harmonicité de la solution $u(\mathrm{P})$. 2° Cette fonction $u(\mathrm{P})$ est la solution du problème de Riquier.

Ainsi, ces deux points de vue nous apparaissent bien comme intimement liés.

43. — *Le problème de Dirichlet pour* $\Delta u(\mathrm{P}) = \varphi(\mathrm{P})$.

$\varphi(\mathrm{P})$ étant une fonction donnée, supposée continue dans la région $\mathrm{D}+\mathrm{F}$, il s'agit de déterminer une fonction $u(\mathrm{P})$, solution de $\Delta u(\mathrm{P}) = \varphi(\mathrm{P})$ en tout point P du domaine D, connaissant en outre la suite continue de valeurs qu'elle prend sur le bord. Il ne peut exister deux solutions distinctes satisfaisant à ces conditions, car leur différence, harmonique dans D et nulle sur le bord, est identiquement nulle dans $\mathrm{D}+\mathrm{F}$.

Ce problème est étudié dans les traités classiques [1] pour le cas où la fonction $\varphi(\mathrm{P})$ possède des dérivées premières continues dans D. *Nous supposons ici que* $\varphi(\mathrm{P})$ *est continue, sans plus, dans* $\mathrm{D}+\mathrm{F}$. Nous admettrons d'abord qu'il existe une fonction $u(\mathrm{P})$ satisfaisant aux conditions indiquées; nous allons montrer qu'elle vérifie une équation intégrale singulière d'un type précédent (§ 40). Nous aurons donc à rechercher ensuite si la solution unique fournie par cette équation intégrale possède un laplacien dans D, et si ce laplacien est égal à $\varphi(\mathrm{P})$.

P étant un point arbitraire de D, nous désignerons toujours par ρ la plus courte distance de ce point P à la frontière F de D, et par $\mathrm{C_P}$ le cercle de centre P et de rayon ρ.

Soit Σ_r un cercle de centre P et de rayon quelconque $r \leqslant \rho$, enfermant le domaine Ω_r. Nous pouvons écrire, pour la fonction considérée $u(\mathrm{P})$ (c'est-à-dire la solution, que l'on suppose exister, du problème posé), la formule de 1- médiation périphérique [§ 8, formule (9) en faisant $n=1$] :

$$\frac{1}{2\pi r}\int_{\Sigma_r} u(m)\,d\sigma_m = u(\mathrm{P}) + \frac{1}{2\pi}\int\int_{\Omega_r} \mathrm{G}_1(\mathrm{M}).\Delta u(\mathrm{M}).d\omega_{\mathrm{M}}, \tag{65}$$

où M désigne le point courant intérieur à Σ_r et G_1 la fonction définie au chapitre I de ce Mémoire :

$$\mathrm{G}_1(\mathrm{M}) = \log\frac{1}{\mathrm{PM}} - \log\frac{1}{\mathrm{P}m}. \qquad (\mathrm{P}m = r)$$

[1] E. Goursat, *Traité d'Analyse*, t. III, p. 524.

Posant :

$$\mathrm{I}(\mathrm{P}, r) = \frac{1}{2\pi} \int\int_{\Omega_r} \mathrm{G}_1(\mathrm{M}) \cdot \varphi(\mathrm{M}) \cdot d\omega_{\mathrm{M}}$$

la formule (65) s'écrit alors, puisque $\Delta u(\mathrm{M}) = \varphi(\mathrm{M})$:

$$(65') \qquad \frac{1}{2\pi r} \int_{\Sigma_r} u(m)\, d\sigma_m = u(\mathrm{P}) + \mathrm{I}(\mathrm{P}, r).$$

Faisons quelques remarques relatives à cette fonction $\mathrm{I}(\mathrm{P}, r)$: c'est une fonction continue de P et de r; puisque G_1 est $\geqslant 0$ dans Ω_r, la formule de la moyenne donne :

$$\begin{aligned} \mathrm{I}(\mathrm{P}, r) &= \varphi(\mathrm{Q}_1) \cdot \frac{1}{2\pi} \int\int_{\Omega_r} \mathrm{G}_1(\mathrm{M})\, d\omega_{\mathrm{M}} && \text{(formule (4) du § 6)}, \\ &= \mathrm{B}_1^2 r^2 \varphi(\mathrm{Q}_1) && \text{(voir chapitre I, § 8)}, \end{aligned}$$

Q_1 étant un certain point intérieur à Ω_r. Donc $\mathrm{I}(\mathrm{P}, r)$ est infiniment petit par rapport à r, de l'ordre de r^2.

Multiplions (65') par $2\pi r$ et intégrons en r entre 0 et ρ; nous aurons, après division par $\pi\rho^2$:

$$\frac{1}{\pi\rho^2} \int\int_{\mathrm{C}_\mathrm{P}} u(m)\, d\omega_m = u(\mathrm{P}) + \frac{2}{\rho^2} \int_0^\rho r \cdot \mathrm{I}(\mathrm{P}, r)\, dr.$$

Comme $\mathrm{I}(\mathrm{P}, r)$ est de l'ordre de r^2, le dernier terme de cette égalité est de l'ordre de ρ^2. On peut donc poser (comparer avec le § 10) :

$$\frac{2}{\rho^2} \int_{\mathrm{C}_{0_\mathrm{P}}}^{\rho} r \cdot \mathrm{I}(\mathrm{P}, r)\, dr = \rho^2 \cdot \mathrm{V}(\mathrm{P}, \rho),$$

où $\mathrm{V}(\mathrm{P}, \rho)$ est une fonction continue de P et de ρ, et qui reste bornée quels que soient le point P et les valeurs considérées de ρ, même pour $\rho = 0$ (ce dernier cas se produisant quand P s'approche de la frontière F du domaine D).

Or cette fonction $\mathrm{V}(\mathrm{P}, \rho)$ est connue, puisque $\varphi(\mathrm{P})$ est donnée.

Nous pouvons donc énoncer le résultat suivant :

Toute solution (si elle existe) *de* $\Delta u(\mathrm{P}) = \varphi(\mathrm{P})$, *où* $\varphi(\mathrm{P})$ *est continue dans* D + F, *vérifie l'équation intégrale singulière :*

$$(66) \qquad \frac{1}{\pi\rho^2} \int\int_{\mathrm{C}_\mathrm{P}} u(m)\, d\omega_m = u(\mathrm{P}) + \rho^2 \cdot \mathrm{V}(\mathrm{P}, \rho),$$

où $\mathrm{V}(\mathrm{P}, \rho)$ *est une fonction connue, bornée dans* D + F.

Or, (66) est précisément l'équation intégrale singulière que nous avons étudiée au § 40. On peut donc déterminer d'une manière unique, par approximations successives, la solution de (66) prenant les valeurs convenues sur le bord; le problème de Dirichlet est résolu. Mais nous avons admis l'existence de la solution; nous devons alors résoudre le problème suivant :

La fonction $u(\mathrm{P})$ *ainsi obtenue* [*comme solution de* (66) *prenant les valeurs requises sur le bord*], *possède-t-elle un laplacien*(¹) *en tout point de* D, *et peut-on affirmer alors que ce laplacien* $\Delta u(\mathrm{P})$ *coïncide avec* $\varphi(\mathrm{P})$?

La réponse est affirmative, c'est classique, quand $\varphi(\mathrm{P})$ possède des dérivées premières continues en tout point de D; mais nous avons supposé ici que $\varphi(\mathrm{P})$ était, sans plus, continue dans $\mathrm{D}+\mathrm{F}$. *Nous allons montrer que la fonction* $u(\mathrm{P})$ *ainsi obtenue* [*à l'aide de* (66)] *possède un laplacien généralisé en tout point de* D, *et que ce laplacien est précisément* $\varphi(\mathrm{P})$.

A cet effet, donnons-nous un nombre positif ε, arbitrairement petit. La fonction $\varphi(\mathrm{P})$ étant continue dans $\mathrm{D}+\mathrm{F}$, on peut trouver une longueur l telle que, si P et P′ sont deux points quelconques de la région $\mathrm{D}+\mathrm{F}$, on ait :

$$|\varphi(\mathrm{P})-\varphi(\mathrm{P}')|<\varepsilon$$

pourvu que $\mathrm{PP}'<l$.

ε et l étant choisis, posons $\varepsilon'=\varepsilon l^2$.

On sait, d'après Weierstrass, que l'on peut approcher de $\varphi(\mathrm{P})$, dans $\mathrm{D}+\mathrm{F}$, par un polynome $\varphi_1(\mathrm{P})$ tel qu'en tout point P de $\mathrm{D}+\mathrm{F}$ on ait :

$$|\varphi_1(\mathrm{P})-\varphi(\mathrm{P})|<\varepsilon'.$$

$\varphi_1(\mathrm{P})$ étant un polynome, admet des dérivées premières continues dans D. Il existe donc — c'est le cas classique — une fonction $u_1(\mathrm{P})$ solution de $\Delta u_1(\mathrm{P})=\varphi_1(\mathrm{P})$ dans D et prenant sur F les valeurs données [les mêmes que $u(\mathrm{P})$]. Pour trouver cette solution, nous pouvons appliquer la méthode précédente. En posant successivement :

$$\mathrm{I}_1(\mathrm{P},r)=\frac{1}{2\pi}\int\!\!\int_{\Omega_r}\mathrm{G}_1(\mathrm{M})\,.\,\varphi_1(\mathrm{M})\,d\omega_{\mathrm{M}},$$

$$\rho^2\mathrm{V}_1(\mathrm{P},\rho)=\frac{2}{\rho^2}\int_0^{\rho}r\,.\,\mathrm{I}_1(\mathrm{P},r)\,dr;$$

(¹) Cette question a été traitée par M. Bouligand [*Mémorial*, fasc. XI, p. 13] et par M. Brelot (Thèse, Paris, 1931), mais en utilisant la fonction de Green du domaine D. La méthode actuelle a l'intérêt de supprimer le recours à cette fonction de Green.

on trouve que cette fonction $u_1(P)$, que l'on sait exister, est la solution de l'équation intégrale singulière :

$$(66') \qquad \frac{1}{\pi\rho^2}\int\int_{C_P} u_1(m)\, d\omega_m = u_1(P) + \rho^2 \,.\, V_1(P, \rho)$$

prenant les valeurs convenues sur la frontière F.

L'équation (66') est analogue à (66), mais elle est établie à partir de $\varphi_1(P)$, au lieu de $\varphi(P)$.

Posons :

$$\theta(P) = u(P) - u_1(P)$$

où $u(P)$ et $u_1(P)$ désignent respectivement les solutions de (66) et (66') prenant les valeurs requises sur F. Cette fonction $\theta(P)$ est donc nulle sur F. Nous allons chercher une limite supérieure de $|\theta(P)|$ dans D. Pour cela, remarquons que :

$$|I(P, r) - I_1(P, r)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int\int_{\Omega_r} G_1(M)\,|\varphi(M) - \varphi_1(M)|\, d\omega_M$$

$$< \varepsilon' \,.\, \frac{1}{2\pi}\int\int_{\Omega_r} G_1(M)\,.\, d\omega_M = \varepsilon' B_1^2 r^2 \qquad \text{[formule (4) du § 6]}$$

d'où l'on déduit :

$$|V(P, \rho) - V_1(P, \rho)| < \frac{B_1^2\varepsilon'}{2} = \frac{\varepsilon'}{8}.$$

En retranchant (66') de (66), on trouve que $\theta(P)$, nulle sur F, est solution de l'équation intégrale singulière :

$$(67) \qquad \frac{1}{\pi\rho^2}\int\int_{C_P} \theta(m)\, d\omega_m = \theta(P) + \rho^2[V(P, \rho) - V_1(P, \rho)]$$

qui est encore de la forme considérée au § 40. C'est de (67) que nous allons tirer une limite supérieure de $|\theta(P)|$. Pour cela, résolvons (67) par la méthode des approximations successives. Nous partirons d'une fonction $\theta_0(P)$ continue dans D + F et nulle sur F [on prendra $\theta_0(P) \equiv 0$], puis nous calculerons de proche en proche, $\theta_1(P), \theta_2(P), \ldots, \theta_n(P), \ldots,$ par :

$$(68) \qquad \frac{1}{\pi\rho^2}\int\int_{C_P} \theta_{n-1}(m)\, d\omega_m = \theta_n(P) + \rho^2[V(P, \rho - V_1(P, \rho)].$$

$$(n = 1, 2, 3, \ldots, +\infty).$$

On sait que $\theta_n(P)$ tend uniformément, dans D + F, vers $\theta(P)$.

Si l'on pose, comme au § 40, $\eta_0(P) = \rho^2$, si l'on appelle $\eta_1(P), \eta_2(P), \ldots, \eta_n(P), \ldots$

les médiantes successives de $\eta_0(P)$, et si l'on tient compte de $|V(P, \rho) - V_1(P, \rho)| < \frac{\varepsilon'}{8}$, on trouve que :

$$|\theta_{n+1}(P)| < \frac{\varepsilon'}{8}[\eta_0(P) + \eta_1(P) + \ldots + \eta_n(P)].$$

Or, on a vu, au § 40, que la série des médiantes successives établies à partir de $\eta_0(P) = \rho^2$ était convergente : elle définit une fonction positive $I(P)$, nulle sur F, et solution dans D de $\Delta I = -8$. Soit A la borne supérieure de cette fonction. On a donc finalement :

$$|\theta(P)| < \frac{A\varepsilon'}{8}.$$

Donc, entre la solution $u(P)$ de (66) et celle $u_1(P)$ de (66') prenant les mêmes valeurs requises sur F, il existe un voisinage qui, en tout point P de la région D + F est défini par :

$$|u_1(P) - u(P)| < \frac{A\varepsilon'}{8}.$$

Plaçons-nous maintenant en un point P de D tel que son ρ (plus courte distance de P à F) soit $\geqslant l$, l étant choisi comme il a été dit précédemment. Soit Σ_l le cercle de centre P et de rayon l. Puisque le laplacien de $u_1(P)$ est $\varphi_1(P)$, nous pouvons écrire la formule suivante de 1-médiation :

$$\frac{1}{\pi l^2}\int\int_{\Sigma_l} u_1(m)\,.\,d\omega_m = u_1(P) + \frac{l^2}{8}\varphi_1(Q_2) \qquad \text{[formule (10) du § 9, pour } n = 1]$$

Q_2 étant un certain point intérieur à Σ_l.
ce que l'on écrit :

$$\varphi_1(Q_2) = \frac{\dfrac{1}{\pi l^2}\displaystyle\int\int_{\Sigma_l} u_1(m)\,d\omega_m - u_1(P)}{\dfrac{l^2}{8}}.$$

Pour la fonction $u(P)$ solution de (66), posons :

$$\chi(l) = \frac{\dfrac{1}{\pi l^2}\displaystyle\int\int_{\Sigma_l} u(m)\,d\omega_m - u(P)}{\dfrac{l^2}{8}}.$$

D'où, par soustraction, on tire immédiatement à la faveur du voisinage de $u(P)$ et $u_1(P)$:

$$|\varphi_1(Q_2) - \chi(l)| < \frac{2A\varepsilon'}{l^2} = 2A\varepsilon.$$

Or, on peut écrire :

$$|\varphi(P)-\chi(l)| \leqslant |\varphi_1(Q_2)-\chi(l)| + |\varphi(Q_2)-\varphi_1(Q_2)| + |\varphi(P)-\varphi(Q_2)|$$

c'est-à-dire :

$$|\varphi(P)-\chi(l)| < 2A\varepsilon + \varepsilon l^2 + \varepsilon$$

ce qui montre que $\chi(l)$ tend vers $\varphi(P)$ quand l tend vers o.

On peut donc écrire :

$$\varphi(P) = \lim_{l=0} \left\{ \frac{8}{\pi l^4} \int\int_{\Sigma_l} [u(m)-u(P)]\, d\omega_m \right\}$$

ce qui montre [égalité (12) du § 12], que la fonction $u(P)$ possède un laplacien généralisé égal à $\varphi(P)$ en tout point P du domaine D; c'est un laplacien généralisé, au sens de M. Bouligand, mais établi à partir d'une médiation spatiale [1].

Notre proposition est donc démontrée.

44. — *Le problème de Riquier pour* $\Delta^{(n)}u = \varphi(P)$.

$\varphi(P)$ étant une fonction supposée continue, sans plus, dans D + F, il s'agit de déterminer une fonction $u(P)$ solution de $\Delta^{(n)}u(P) = \varphi(P)$ en tout point P de D, connaissant en outre les valeurs continues prises par cette fonction et par ses n-1 premiers laplaciens sur la frontière F du domaine D. Il est encore évident que ce problème ne peut admettre plus d'une solution, d'après ce qui précède (§ 42). Admettons l'existence de cette solution $u(P)$, et posons :

$$\Delta u = U_1; \qquad \Delta^{(2)}u = U_2; \qquad \ldots; \qquad \Delta^{(n-1)} = U_{n-1},$$

on aura donc :

$$\begin{cases} \Delta U_{n-1} = \varphi(P), \\ \Delta U_{n-2} = U_{n-1}, \\ \Delta U_{n-3} = U_{n-2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Delta U_1 = U_2, \\ \Delta u = U_1. \end{cases}$$

[1] On démontrerait tout pareillement que $\varphi(P)$ est le laplacien généralisé de $u(P)$, laplacien généralisé établi à partir d'une médiation périphérique (voir égalité 11 du § 12); voir d'ailleurs la thèse de M. Brelot (chapitre I), et la première note du § 12.

Ce système, eu égard aux données frontières, permet de déterminer, de proche en proche, les fonctions U_{n-1}, U_{n-2}, $\ldots$, U_1, u, puisque chacune de ces équations est du type examiné au § 43. Mais la fonction $u(P)$ ainsi obtenue est-elle solution du problème de Riquier? La réponse est aisée, à la faveur des résultats du § 43 : $U_{n-1}(P)$ possède un laplacien généralisé égal à $\varphi(P)$ en tout point P de D, etc... De proche en proche, on en déduit que la solution $u(P)$ ainsi obtenue[1] possède un n- laplacien généralisé égal à $\varphi(P)$ en tout point P du domaine D. Il va sans dire que ce n- laplacien généralisé se réduit du n- laplacien ordinaire dans le cas classique où $\varphi(P)$ possède des dérivées premières continues dans D.

Signalons qne cette dernière méthode permettrait de résoudre aussi le problème de Riquier pour $\Delta^{(n)} u = 0$, en prenant $\varphi(P) \equiv 0$.

C. — *Le problème de Riquier pour une classe de fonctions n- métaharmoniques.*

45. — On peut généraliser ce qui précède. A cet effet, nous considérons l'équation ;

$$\mathfrak{D}^{(n)} u \equiv \Delta^{(n)} u + \lambda_1 \Delta^{(n-1)} u + \ldots + \lambda_{n-1} \Delta u + \lambda_n u = 0$$

où les constantes λ_i sont supposées réelles.

Dans tout ce qui suit, nous nous limiterons au cas où l'équation caractéristique correspondante :

$$X^n + \lambda_1 X^{n-1} + \ldots + \lambda_{n-1} X + \lambda_n = 0$$

est telle que *toutes ses racines, supposées connues, sont reelles et* $\geqslant 0$; malgré cela $-\alpha_1^2$, $-\alpha_2^2$, $\ldots$, $-\alpha_n^2$ désigneront, comme précédemment, les racines, simples ou multiples, de cette équation caractéristique[2]. (Si toutes ces racines sont nulles, les λ_i sont tous nuls, et l'on est ramené au problème de Riquier pour l'équation $\Delta^{(n)} u = 0$).

On reconnaît de suite que l'équation $\mathfrak{D}^{(n)} u = 0$ est équivalente au système suivant :

$$(69) \qquad \left\{\begin{array}{l} \Delta u + \alpha_n^2 u \quad = U_1, \\ \Delta U_1 + \alpha_{n-1}^2 U_1 = U_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Delta U_{n-2} + \alpha_2^2 U_{n-2} = U_{n-1}, \\ \Delta U_{n-1} + \alpha_1^2 U_{n-1} = 0. \end{array}\right.$$

La fonction $u(P)$ étant supposée n- métaharmonique dans un domaine D, tra-

[1] Voir la deuxième note du § 12.

[2] L'opportunité du signe — se justifie en remarquant que son absence nécessiterait, dans un certain nombre de formules de ce Mémoire, les signes $(-1)^K$.

çons d'un point P arbitraire pris comme centre, un cercle Σ_r de rayon arbitraire r, de manière que Σ_r soit intérieur à D.

On peut alors écrire notre formule (39) de n-métamédiation périphérique obtenue au § 27 : $(r = Pm)$.

$$(70)\quad \frac{1}{2\pi r}\int_{\Sigma_r} u(m)\,d\sigma_m = u(P)\,.\,\Phi_n^1(r) + \Delta u(P)\,.\,\Phi_n^2(r) + \ldots + \Delta^{(n-1)}u(P)\,.\,\Phi_n^n(r)\,.$$

Le 2^{me} membre de cette formule (70) peut s'écrire autrement; à cet effet, utilisons le système (69) :

Δu s'exprime linéairement à l'aide de u et U_1,
$\Delta^{(2)} u$ » » » u, U_1 et U_2,
....
$\Delta^{(n-1)} u$ » » » u, U_1, U_2, ..., U_{n-1}.

Donc la formule (70) s'écrit encore comme suit :

$$(70')\quad \frac{1}{2\pi r}\int_{\Sigma_r} u(m)\,d\sigma_m = u(P)\,.\,\xi_1(r) + U_1(P)\,.\,\xi_2(r) + \ldots + U_{n-1}(P)\,.\,\xi_n(r)\,,$$

où les $\xi_K(r)$ sont des fonctions entières de r^2 que nous allons déterminer. A cet effet, nous remarquerons que $H(\alpha_n r) = \Phi_1^1(\alpha_n r)$, laquelle a été définie au début du chapitre II, est n-métaharmonique dans D. Donc (70') est vérifiée quand on remplace $u(m)$ par $H(\alpha_n r)$. D'autre part, pour cette fonction $u = H(\alpha_n r)$ (69) montre que $U_1 = U_2 = \ldots = U_{n-1} = 0$. Donc :

$$\xi_1(r) = H(\alpha_n r) = \Phi_1^1(\alpha_n r)$$

puisque $H(0) = 1$.

Pour déterminer $\xi_2(r)$, nous remplacerons $u(m)$ par $\Phi_2^2(\alpha_{n-1} r, \alpha_n r)$ laquelle n'est autre que $\Phi_2^2(r)$ pour l'équation :

$$\Delta^{(2)} V + (\alpha_{n-1}^2 + \alpha_n^2)\,\Delta V + \alpha_{n-1}^2\,.\,\alpha_n^2 V = 0\,.$$

Utilisant (69) et (70'), et remarquant que $\Delta\Phi_2^2(0) = 1$, on en déduit :

$$\xi_2(r) = \Phi_2^2(\alpha_{n-1} r, \alpha_n r)\,.$$

On emploiera la même méthode pour déterminer $\xi_3(r)$, ..., $\xi_n(r)$.

Finalement, on peut écrire :

$$(71)\quad \frac{1}{2\pi r}\int_{\Sigma_r} u(m)\,d\sigma_m = u(P)\,.\,\Phi_1^1(\alpha_n r) + U_1(P)\,.\,\Phi_2^2(\alpha_{n-1} r, \alpha_{n-2} r) + U_2(P)\,.\,\Phi_3^3(\alpha_{n-2} r, \alpha_{n-1} r, \alpha_n r)$$
$$+ \ldots + U_{n-1}(P)\Phi_n^n(\alpha_1 r, \alpha_2 r, \ldots, \alpha_n r)$$

en convenant de poser :

$$\Phi_{K}^{K}[\alpha_{i+1}r, \alpha_{i+2}r, \ldots, \alpha_{i+K}r] \equiv \Phi_{K}^{K}(r)$$

pour les fonctions K- métaharmoniques dont l'équation caractéristique :

$$X^{K} + \mu_1 X^{K-1} + \ldots + \mu_{K-1}X + \mu_K = 0$$

a pour racines $-\alpha_{i+1}^2, -\alpha_{i+2}^2, \ldots, -\alpha_{i+K}^2$.

Posons enfin :

$$\Theta_{K}^{K}[\alpha_{i+1}\rho, \alpha_{i+2}\rho, \ldots, \alpha_{i+K}\rho] = \frac{2}{\rho^2}\int_0^\rho r \cdot \Phi_{K}^{K}(\alpha_{i+1}r, \alpha_{i+2}r, \ldots, \alpha_{i+K}r)\, dr$$

qui n'est autre que $\Theta_{K}^{K}(\rho)$ pour l'équation K- métaharmonique rappelée ci-dessus.

Multipliant (70′) par $2\pi r$ et intégrant en r entre o et ρ, on en déduit :

$$(72) \qquad \frac{1}{\pi\rho^2}\iint_{C_P} u(m) \cdot d\omega_m = u(P) \cdot \Theta_1^1(\alpha_n\rho) + U_1(P) \cdot \Theta_2^2(\alpha_{n-1}\rho, \alpha_n\rho) + \ldots + U_{n-1}(P)\,\Theta_n^n(\alpha_1\rho, \alpha_2\rho, \ldots, \alpha_n\rho)$$

où (voir § 20)

$$\Theta_1^1(\alpha\rho) = \theta(\alpha\rho) = 1 - \frac{1}{2}B_1^2(\alpha\rho)^2 + \frac{1}{3}B_2^2(\alpha\rho)^4 - \ldots + (-1)^n\frac{1}{n+1}B_n^2(\alpha\rho)^{2n} + \ldots.$$

On pourrait opérer de même avec les fonctions $U_1, U_2, \ldots, U_{n-1}$.

En définitive, si l'on désigne toujours par ρ la plus courte distance du point P à la frontière F du domaine D et par C_P le cercle de centre P et de rayon ρ, les n fonctions $u, U_1, U_2, \ldots, U_{n-1}$ vérifient le système suivant de n équations intégrales singulières :

$$(73)\left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{\pi\rho^2}\iint_{C_P} U_{n-1}(m)\, d\omega_m = U_{n-1}(P) \cdot \Theta_1^1(\alpha_1\rho),\\
&\frac{1}{\pi\rho^2}\iint_{C_P} U_{n-2}(m)\, d\omega_m = U_{n-2}(P) \cdot \Theta_1^1(\alpha_2\rho) + U_{n-1}(P) \cdot \Theta_2^2(\alpha_1\rho, \alpha_2\rho),\\
&\frac{1}{\pi\rho^2}\iint_{C_P} U_{n-3}(m)\, d\omega_m = U_{n-3}(P) \cdot \Theta_1^1(\alpha_3\rho) + U_{n-2}(P) \cdot \Theta_2^2(\alpha_2\rho, \alpha_3\rho) + U_{n-1}(P) \cdot \Theta_3^3(\alpha_1\rho, \alpha_2\rho, \alpha_3\rho),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{1}{\pi\rho^2}\iint_{C_P} u(m)\, d\omega_m = u(P) \cdot \Theta_1^1(\alpha_n\rho) + U_1(P) \cdot \Theta^2(\alpha_{n-1}\rho, \alpha_n\rho) + \ldots + U_{n-1}(P) \cdot \Theta_n^n(\alpha_1\rho, \alpha_2\rho, \ldots, \alpha_n\rho),
\end{aligned}\right.$$

qui se réduit au système (64) quand tous les α_i^2 sont nuls.

46. — Passons maintenant à la résolution du problème de Riquier pour l'équation considérée $\mathfrak{D}^{(n)}u = 0$. Puisque l'on connaît les valeurs continues prises sur la frontière F par la fonction u et par ses $n-1$ premiers laplaciens, (69) montre que l'on connaît par cela même les valeurs prises par u, $U_1, \ldots, U_{n-1}$ sur F. Comme tous les $-\alpha_i^2$ sont $\geqslant 0$, (69) montre que le problème de Riquier ainsi posé admet une solution et une seule, laquelle vérifie (73).

Or, on peut considérer le système (73) en lui-même, indépendamment de l'équation aux dérivées partielles génératrice $\mathfrak{D}^{(n)}u = 0$. Puisque $-\alpha_i^2 \geqslant 0$, $\Theta_1^1(\alpha_i\rho)$ est une fonction croissante de ρ, qui se réduit à 1 pour $\rho = 0$ [il suffit de se reporter au développement de $\Theta_1^1(\alpha\rho)$ écrit ci-dessus]. Chacune des équations du système (73) est donc du type examiné au § 41. Par approximations successives, on en déduit de proche en proche, d'une manière unique, les fonctions U_{n-1}, $U_{n-2}, \ldots, u(P)$, puisque l'on connaît les valeurs qu'elles prennent sur la frontière F. La solution u du système (73) étant unique, elle coïncide avec la solution du problème de Riquier proposé.

Ainsi il est encore prouvé que la solution $u(P)$ fournie par le système (73), où chaque équation est une formule de métamédiation *écrite pour une seule valeur de* ρ, est n- métaharmonique dans les conditions indiquées. On aperçoit, ici encore, combien cette preuve est intimement liée à la résolution du problème de Riquier correspondant.

47. — *Le problème de Dirichlet pour* $\Delta u + \alpha^2 u = \varphi(P)$, *où* α^2 *est une constante* $\leqslant 0$(1).

Il s'agit de déterminer une fonction $u(P)$, solution de $\Delta u_P + \alpha^2 u_P = \varphi(P)$ en tout point P d'un domaine D, connaissant en outre la suite continue des valeurs que prend cette fonction $u(P)$ sur la frontière F de D; on supposera que α^2 est une constante $\leqslant 0$ (en vue de l'unicité), et que la fonction donnée $\varphi(P)$ est continue, sans plus, dans D + F(2). La question de l'unicité de la solution étant classique, nous nous bornerons à la recherche de la solution que nous supposerons exister; il sera donc nécessaire, après coup, de vérifier si la solution obtenue par la méthode employée répond aux conditions imposées. Nous suivrons en cela une méthode identique à celle du § 43.

Σ_r désignant un cercle de centre P et de rayon arbitraire $r < \rho$ intérieur au

---

(1) Contrairement à l'habitude.

(2) Cette équation est étudiée dans les traités classiques, en supposant que la fonction $\varphi(P)$ possède des dérivées du 1er ordre continues dans le domaine envisagé. Voir par ex., E. Goursat, *Traité d'Analyse*, tome III, p. 526.

domaine D, nous pouvons écrire que la fonction cherchée $u(\mathrm{P})$ vérifie notre formule (25) de 1-métamédiation périphérique où l'on a fait $n = 1$:

$$\frac{1}{2\pi r}\int_{\Sigma_r} u(m)\, d\sigma_m = u(\mathrm{P})\,.\,\mathrm{H}(\alpha r) + \frac{1}{2\pi}\int\!\!\int_{\Sigma_r} \mathcal{G}_1^1(\mathrm{M})\left[\Delta u_\mathrm{M} + \alpha^2 u_\mathrm{M}\right] d\omega_\mathrm{M}\,.$$

Remplaçant $\Delta u_\mathrm{M} + \alpha^2 u_\mathrm{M}$ par $\varphi(\mathrm{M})$, et intégrant la relation précédente de o à ρ, on obtient, par un processus identique à celui du § 43 :

$$\frac{1}{\pi\rho^2}\int\!\!\int_{\mathrm{C_P}} u(m)\,.\,d\omega_m = u(\mathrm{P})\,.\,\theta(\alpha\rho) + \rho^2\,.\,\mathrm{W}(\mathrm{P}, \rho) \tag{74}$$

où $\mathrm{W}(\mathrm{P}, \rho)$ reste bornée, quel que soit P, même ponr $\rho = 0$, et où $\theta(\alpha\rho)$ est la fonction définie au § 20 : comme α^2 est $\leqslant 0$, $\theta(\alpha\rho)$ est une fonction non décroissante de ρ, qui se réduit à 1 pour $\rho = 0$.

Or (74) est l'équation intégrale envisagée au § 41. On sait qu'elle admet une solution et une seule prenant sur F les valeurs convenues.

On montrerait alors — comme nous l'avons expliqué au § 43 — que la solution de (74) prenant les valeurs convenues sur le bord, possède un laplacien généralisé $\Delta_g u$ tel que $\Delta_g u_\mathrm{P} + \alpha^2 u_\mathrm{P}$ soit égal à $\varphi(\mathrm{P})$ en tout point P du domaine D[1]. Ce laplacien généralisé coincide d'ailleurs avec le laplacien ordinaire dans le cas où $\varphi(\mathrm{P})$ possède des dérivées premières continues en tout point de D.

48. — *Le problème de Riquier pour* $\mathfrak{D}^{(n)} u = \varphi(\mathrm{P})$.

Nous supposons toujours que les n racines $-\alpha_i^2$ de l'équation caractéristique :

$$\mathrm{X}^n + \lambda_1 \mathrm{X}^{n-1} + \ldots + \lambda_{n-1}\mathrm{X} + \lambda_n = 0$$

sont réelles et $\geqslant 0$.

Nous nous proposons de déterminer une fonction $u(\mathrm{P})$ qui, en tout point P de D, vérifie $\mathfrak{D}^{(n)} u(\mathrm{P}) = \varphi(\mathrm{P})$, où $\varphi(\mathrm{P})$ est supposée continue dans D + F, connaissant en outre les valeurs prises par cette fonction et par ses n- 1 premiers laplaciens sur la frontière F de D.

Pour cela, nous remarquons que l'équation donnée est équivalente au système :

$$\left\{\begin{array}{l} \Delta u + \alpha_n^2 u \quad = \mathrm{U}_1, \\ \Delta \mathrm{U}_1 + \alpha_{n-1}^2 \mathrm{U}_1 = \mathrm{U}_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Delta \mathrm{U}_{n-2} + \alpha_2^2 \mathrm{U}_{n-2} = \mathrm{U}_{n-1}, \\ \Delta \mathrm{U}_{n-1} + \alpha_1^2 \mathrm{U}_{n-1} = \varphi(\mathrm{P}). \end{array}\right. \tag{75}$$

---

[1] M. BRELOT (*Thèse*, § 3, p. 12).

Puisque l'on connaît les valeurs prises sur le bord par la fonction u et par ses n-1 premiers laplaciens, on connaît par cela même les valeurs de u, U_1, U_2, ..., U_{n-1} sur la frontière F.

Or, chaque équation (75) est du type examiné au paragraphe précédent, puisque les α_i^2 sont $\leqslant 0$.

La dernière équation (75) permet de déterminer U_{n-1}; puis, de proche en proche, on détermine U_{n-2}, ..., U_1 et u.

La fonction $u(P)$ ainsi obtenue est bien la solution du problème de Riquier dans le cas où $\varphi(P)$ possède des dérivées premières continues dans D. Mais si $\varphi(P)$ est supposée, sans plus, continue dans D, la fonction $u(P)$ ainsi obtenue possède des laplaciens généralisés d'ordre 1, 2, 3, ..., n, en sorte que son n- métalaplacien généralisé $\mathfrak{D}^{(n)}u(P)$ est égal à $\varphi(P)$, en tout point P du domaine D (voir les notes du § 12).

Signalons enfin que cette dernière méthode permet aussi de résoudre le problème de Riquier pour $\mathfrak{D}^{(n)}u = 0$ en prenant $\varphi(P) \equiv 0$.

ERRATA

Page 26, avant-dernière ligne, *au lieu de :* (20), *lire :* (21).
Page 28, 9^e ligne, *au lieu de :* $B_{n-2}^p r^{2n-2}$, *lire :* $B_{n-1}^p r^{2n-2}$.
Page 29, 16^e ligne, *au lieu de :* λ_i, *lire :* $|\lambda_i|$.
Page 52, 5^e ligne du n° 40, *au lieu de :* définie et bornée, *lire :* continue.
Page 55, 14^e, 20^e et 23^e lignes, *au lieu de :* bornée, *lire :* continue.
Page 55, 5^e ligne du n° 41, *au lieu de :* définie et bornée, *lire :* continue.
Page 57, 10^e ligne, *au lieu de :* les deux premières, *lire :* ces 4 fonctions.
Page 60, 17^e ligne, *au lieu de :* $\int_{C_{0P}}^{\rho}$, *lire :* $\int_{0}^{\rho}$.