ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

N. ABRAMESCO

Les polynômes orthogonaux

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 3e série, tome 24 (1932), p. 67-87
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1932_3_24__67_0>

LES POLYNOMES ORTHOGONAUX

Par N. ABRAMESCO (Cluj, Roumanie).

Les polynomes orthogonaux ayant une grande importance dans la représentation des fonctions par des séries de polynomes, nous exposerons leurs principales propriétés (*).

1. Considérons une fonction $\varphi(x)$ positive et intégrable dans l'intervalle (a, b). Les polynomes $P_0(x)$, $P_1(x)$, ... $P_n(x)$, ... de degré égal à l'indice, qui vérifient les relations d'orthogonalité

$$(1) \qquad \begin{aligned} &\int_a^b \varphi(x)\, P_m(x)\, P_n(x)\, dx = 0, \qquad m \lessgtr n, \\ &\int_a^b \varphi(x)\, P_n^2(x)\, dx = I_n = \text{const.}, \end{aligned}$$

s'appellent *polynomes orthogonaux*.

Pour déterminer le polynome

$$P_n(x) = c_{n,n}x^n + c_{n,n-1}x^{n-1} + \dots + c_{n,0},$$

(*) Voir, pour la bibliographie :

(1) JACOBI, *Journal de Crelle*, t. 56.

(2) TCHEBICHEF, *Œuvres*, t. II, p. 61.

(3) CHRISTOFFEL, *Sur une classe particulière de fonctions entières et de fractions continues* (*Annali di Matematica pura ed applicata*, 1877, p. 1-10).

(4) HEINE, *Handbuch der Kugelfunktionem* (2e édition, Berlin, 1878).

(5) DARBOUX, *Mémoire sur l'approximation des fonctions de très grands nombres et sur une classe étendue de développements en séries* (*Journal de Math. pures et appliquées*, t. IV, 1878, p. 411).

(6) STIELTJES, *Quelques recherches sur la théorie des quadratures mécaniques* (*Annales scientifiques de l'École normale supérieure*, 1884, p. 409).

(7) PICARD, *Cours d'Analyse supérieure fait à la Sorbonne* en 1912, 1918.

(8) SZEGÖ, *A Hankel-féle formákrol* (*Les formes de Hankel*) (*Mathematikai és Természettudományi Ertesitö*, 1918, p. 497); *Ueber die Entwickelungen einer analytischen Funktion nach den Polynomen eines Orthogonalsystems* (*Math. Annalen*, Bd. 82, p. 188).

(10) A. ANGELESCO, *Sur les polynomes généralisant les polynomes de Legendre et d'Hermite*, Thèse, 1916.

(11) N. ABRAMESCO, *Sulle serie di polinomi di una variabile complessa. Le serie di Darboux* (*Annali di Matematica*, Serie III, t. XXXI, 1922, p. 207); *Résumé des principales propriétés des polynomes orthogonaux* (*Nouvelles Annales de Math.*, 5e série, t. II, février 1924); *Nou-*

on voit que, étant donné un polynome $\prod_m(x)$, de degré $m < n$, on peut déterminer les coefficients $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_m$, tels que

$$\prod_m(x) = \alpha_0 P_0(x) + \alpha_1 P_1(x) + \ldots + \alpha_m P_m(x).$$

Multipliant cette relation par $\varphi(x) P_n(x) dx$, intégrant, en vertu de (1) on a

$$(2) \qquad \int_a^b \varphi(x) \prod_m(x) P_n(x) dx = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i \int_a^b \varphi(x) P_i(x) P_n(x) dx = 0.$$

Supposant $\prod_k(x) = x^k$, on a *la propriété fondamentale de ces polynomes orthogonaux*

$$(3) \qquad \int_a^b \varphi(x) x^k P_n(x) dx = 0, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Posant

$$g_s = \int_a^b \varphi(x) x^s dx,$$

les n équations linéaires (3) peuvent s'écrire

$$(4) \qquad \begin{array}{l} c_{n,0} g_0 + c_{n,1} g_1 + \ldots + c_{n,n} g_n = 0 \\ c_{n,0} g_1 + c_{n,1} g_2 + \ldots + c_{n,n} g_{n+1} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_{n,0} g_{n-1} + c_{n,1} g_n + \ldots + c_{n,n} g_{2n-1} = 0, \end{array}$$

d'où l'on peut déduire des valeurs proportionnelles pour $c_{n,0}, c_{n,1}, \ldots c_{n,n}$. Le polynome $P_n(x)$ est complètement défini, à un facteur près, dont la valeur est donnée par la seconde des relations (1).

---

velle méthode pour l'étude des régions de convergence des séries de polynomes orthogonaux (*Bulletin des sciences math.*, t. LIV, novembre 1930); *Sur la détermination des fonctions holomorphes dans des domaines donnés* [*Comptes Rendus*, t. 194 (1932), p. 163].

([12]) C. Possé, *Sur quelques applications des fractions continues*, St. Petersburg, 1886.

([13]) J. Chokhate, *Sur le développement... et sur les polynomes de Tchebichef* (*Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo*, 1923, p. 25); *On a general formula in the theory of Tchebichef polynomials and its applications* (*Transactions of the American mat. Society*, vol. 29, July 1923); *On the polynomial...* (*Math. Annalen*, Bd. 102, Heft. 1); *On some properties of polynomials* (*Math. Zeitschrift*, Bd. 29, Heft. 5); *On Stieltjes continued fractions* (*American Journal of Mat.*, vol. LIV, 1932, p. 79); J. Chokhate (*Shohat*) et J. Sherman, *On the numerators of the continued fraction* (*Proceedings of the American Academy of Sciences*, vol. 18, 1932, p. 283).

([14]) S. Bernstein, *Sur les polynomes orthogonaux relatifs à un segment fini* (*Journal de Math. pures et appliquées*, 9e série, t. X, 1931, p. 219).

([15]) O. Perron, *Die Lehre von den Kettenbrüchen*, 2e éd. 1929.

2. *Le polynome* $P_n(x)$ *est unique*[1], car si, des relations (4) on aurait deux polynomes $P_n(x)$ et $P'_n(x)$, en les multipliant par les facteurs λ et λ', convenablement choisis, tels que les coefficients de x^n dans $\lambda P_n(x)$ et $\lambda' P'_n(x)$ soient égaux à 1, de la relation (2) on aurait

$$\lambda \int_a^b \varphi(x) \prod_m (x) P_n(x)\, dx = 0,$$

$$\lambda' \int_a^b \varphi(x) \prod_m (x) P'_n(x)\, dx = 0, \qquad m < n,$$

$$\int_a^b \varphi(x) \prod_m (x) [\lambda P_n(x) - \lambda' P'_n(x)]\, dx = 0,$$

(5) $$\int_a^b \varphi(x) \prod_m (x) Q_{n-1}(x)\, dx = 0,$$

où $Q_{n-1}(x) = \lambda P_n(x) - \lambda' P'_n(x)$ est un polynome de degré $(n-1)$. Prenant pour $\prod_m (x) = Q_{n-1}(x)$, de la relation (5) on déduirait

$$\int_a^b \varphi(x) Q_{n-1}^2(x)\, dx = 0,$$

qui est impossible, car $\varphi(x) > 0$ dans l'intervalle (a, b). On retrouve donc le théorème connu que le polynome $P_n(x)$ est unique.

Le polynome $P_n(x)$ est bien déterminé, car le déterminant Δ du système (4) est formé d'une série de termes, dont chacun est un produit de n intégrales de la forme $\int_a^b \varphi(x) x^k\, dx$. En écrivant un tel produit sous la forme d'une intégrale multiple d'ordre n, on trouve pour Δ

$$\Delta = \int_a^b \int_a^b \cdots \int_a^b \varphi(x_1)\varphi(x_2)\cdots\varphi(x_n) \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \dots & x_2^n \\ x_3^2 & x_3^3 & x_3^4 & \dots & x_3^{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n^{n-1} & x_n^n & x_n^{n+1} & \dots & x_n^{2n-2} \end{vmatrix} dx_1 \dots dx_n,$$

$$\Delta = \int_a^b \int_a^b \cdots \int_a^b \varphi(x_1)\varphi(x_2)\cdots\varphi(x_n)\, x_2 x_3^2 \dots x_n^{n-1} \prod dx_1\, dx_2 \dots dx_n,$$

$$\prod = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

La notation des variables étant indifférente, on peut permuter dans cette expression de toutes les manières les indices $1, 2, \ldots n$ et seulement $\prod$ change ou non de signe. En ajoutant toutes les relations qu'on obtient, on trouve

$$n!\,\Delta = \int_a^b \int_a^b \cdots \int_a^b \varphi(x_1)\ldots\varphi(x_n) \sum (\pm x_2 x_3 \ldots x_n^{n-1}) \prod dx_1 dx_2 \ldots dx_n.$$

Or $\prod$ est le déterminant de Vandermonde,

$$\prod = \sum (\pm x_2 x_3^2 \ldots x_n^{n-1}),$$

donc

$$n!\,\Delta = \int_a^b \int_a^b \cdots \int_a^b \varphi(x_1)\ldots\varphi(x_n) \prod{}^2 dx_1 dx_2 \ldots dx_n.$$

Mais $\varphi(x_i) > 0$ dans l'intervalle (a, b), d'où il résulte que Δ a une valeur positive, différente de zéro et dont le système (4) est bien déterminé.

3. *Le polynome $P_n(x)$ peut se mettre sous la forme d'un quotient de deux déterminants d'ordre n*[11]. Prenant le coefficient $c_{n,n} = 1$, le polynome

(6) $$P_n(x) = x^n + c_{n,n-1} x^{n-1} + \ldots + c_{n,0}, \qquad (c_{n,n} = 1),$$

vérifie les relations (4) et

$$\int_a^b \varphi(t) P_n^2(t)\, dt = I_n,$$

qui donne I_n. Cette expression peut s'écrire

$$\int_a^b \varphi(t)(t^n + c_{n,n-1} t^{n-1} + \ldots + c_{n,0})(t^n + c_{n,n-1} t^{n-1} + \ldots + c_{n,0})\, dt,$$

et observant (4) elle devient

(7) $$c_{n,0} g_n + c_{n,1} g_{n+1} + \ldots + c_{n,n-1} g_{2n-1} + g_{2n} = I_n.$$

Éliminant $c_{n,0}$, $c_{n,1}$, ... $c_{n,n-1}$ ($c_{n,n} = 1$) entre les relations (4) et (7), on trouve

$$\begin{vmatrix} g_0 & g_1 & \cdots & g_{n-1} & g_n \\ g_1 & g_2 & \cdots & g_n & g_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{n-1} & g_n & \cdots & g_{2n-2} & g_{2n-1} \\ g_n & g_{n+1} & \cdots & g_{2n-1} & g_{2n} - I_n \end{vmatrix} = 0,$$

(8) $$I_n = \frac{D_n(\varphi)}{D_{n-1}(\varphi)}, \qquad D_n(\varphi) = \begin{vmatrix} g_0 & g_1 & \cdots & g_n \\ g_1 & g_2 & \cdots & g_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_n & g_{n+1} & \cdots & g_{2n} \end{vmatrix}.$$

Éliminant $c_{n,0}$, $c_{n,1}$, ... $c_{n,n-1}$ entre les équations (4) et (6), on trouve ($c_{n,n} = 1$)

$$P_n(x) = \frac{1}{D_{n-1}(\varphi)} \begin{vmatrix} g_0 & g_1 & g_2 & \cdots & g_n \\ g_1 & g_2 & g_3 & \cdots & g_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{n-1} & g_n & g_{n+1} & \cdots & g_{2n-1} \\ 1 & x & x^2 & \cdots & x^n \end{vmatrix}.$$

$$P_n(x) = \frac{1}{D_{n-1}(\varphi)} \begin{vmatrix} xg_0 - g_1 & xg_1 - g_2 & \cdots & xg_{n-1} - g_n \\ xg_1 - g_2 & xg_2 - g_3 & \cdots & xg_n - g_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ xg_{n-1} - g_n & xg_n - g_{n+1} & \cdots & xg_{2n-2} - g_{2n-1} \end{vmatrix}.$$

Et, comme

$$D_{n-1}(\varphi) = \begin{vmatrix} g_0 & g_1 & \cdots & g_{n-1} \\ g_1 & g_2 & \cdots & g_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{n-1} & g_n & \cdots & g_{2n-2} \end{vmatrix}, \qquad g_s = \int_a^b \varphi(t)\, t^s\, dt,$$

on voit de même

$$D = \begin{vmatrix} xg_0 - g_1 & \cdots & xg_{n-1} - g_n \\ \dots & \dots & \dots \\ xg_{n-1} - g_n & \cdots & xg_{2n-2} - g_{2n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \int_a^b (x-t)\varphi(t)\, dt & \cdots \int_a^b (x-t)\varphi(t)\, t^{n-1}\, dt \\ \dots & \dots \\ \int_a^b (x-t)\varphi(t)\, t^{n-1}\, dt \ldots & \int_a^b (x-t)\varphi(t)\, t^{2n-2}\, dt \end{vmatrix},$$

$$D = D_{n-1}(F), \qquad F = (x-t)\,\varphi(t),$$

et donc le polynome $P_n(x)$ peut se mettre sous la forme (*)

$$(9) \qquad P_n(x) = \frac{D_{n-1}(F)}{D_{n-1}(\varphi)}.$$

On voit que $D_{n-1}(F)$ et $D_{n-1}(\varphi)$ sont les déterminants des formes quadratiques

$$(10) \qquad \int_a^b (x-t)\varphi(t)(y_0 + y_1 t + \ldots + y_{n-1}t^{n-1})^2\, dt = \sum_p \sum_q (x g_{p+q} - g_{p+q+1}) y_p y_q,$$

$$(11) \qquad \int_a^b \varphi(t)(y_0 + y_1 t + \ldots + y_{n-1}t^{n-1})^2\, dt = \sum_p \sum_q g_{p+q} y_p y_q,$$

$$p, q = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

4. *Le polynome* $P_n(x)$ *peut se mettre sous la forme* (¹¹)

$$P_n(x) = \frac{1}{(b-a)^n n!} \frac{1}{\varphi(x)} \frac{d^n}{dx^n} [(x-a)^n (x-b)^n \psi_n(x)],$$

$\psi_n(x)$ *étant une fonction finie pour* $x = a$ et $x = b$. En effet, on a la relation

$$(12) \qquad \int_a^b \varphi(x) Q(x) P_n(x)\, dx = 0, \qquad Q(x) = 1, x, \ldots, x^{n-1}.$$

On peut supposer que $\varphi(x) P_n(x)$ est la dérivée d'ordre n d'une fonction $U(x)$, telle que $U(x)$ et ses $(n-1)$ premières dérivées soient nulles pour $x = a$, c'est-à-dire

$$(13) \qquad U(a) = 0, \qquad U'(a) = 0, \qquad \ldots, \qquad U^{(n-1)}(a) = 0.$$

La relation (12) devient

$$\int_a^b Q \frac{d^n U(x)}{dx^n}\, dx = 0.$$

Intégrant par parties, on déduit

$$\int_a^b Q \frac{d^n U}{dx^n}\, dx = [Q(x) U^{(n-1)}(x) - Q'(x) U^{(n-2)}(x) + \ldots + (-1)^{n-1} Q^{(n-1)} U]_a^b = 0.$$

En vertu des relations (13), on a

$$(14) \qquad Q(b) U^{(n-1)}(b) - Q'(b) U^{(n-2)}(b) + \ldots + (-1)^{n-1} Q^{(n-1)}(b) U(b) = 0.$$

(*) Cette expression a été trouvée par une autre voie par M. *Szegö* [Voir (8)].

Faisant $Q(x)$ égal à $1, x, \dots x^{n-1}$, de la relation (14) on a successivement $U(b)=0$, $U'(b)=0$, $\dots U^{(n-1)}(b)=0$.

Donc, la fonction $U(x)$ et ses $(n-1)$ premières dérivées s'annulent pour $x=a$, $x=b$, c'est-à-dire

$$U(x)=k(x-a)^n(x-b)^n\psi_n(x),$$

$\psi_n(x)$ étant finie pour $x=a$, $x=b$. Par conséquent

$$\varphi(x)P_n(x)=\frac{d^n}{dx^n}[k(x-a)^n(x-b)^n\psi_n(x)],$$

et, sans diminuer la généralité, on peut prendre k tel que l'on ait

$$\text{(15)}\qquad P_n(x)=\frac{1}{(b-a)^n n!}\frac{1}{\varphi(x)}\frac{d^n}{dx^n}[(x-a)^n(x-b)^n\psi_n(x)].$$

Détermination de la fonction ψ_n. De (15) il résulte

$$\psi_n(x)=\frac{(b-a)^n n!}{(x-a)^n(x-b)^n}\int_a^x dx\dots\int_a^x\varphi(x)P_n(x)\,dx,$$

$P_n(x)$ étant le polynome obtenu avec les relations (4). Sachant que

$$\int_a^x dx\dots\int_a^x f(x)\,dx=\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x(x-z)^{n-1}f(z)\,dz,$$

on voit que la fonction $\psi_n(x)$ est donnée par l'intégrale simple

$$\text{(16)}\qquad \psi_n(x)=\frac{(b-a)^n n}{(x-a)^n(x-b)^n}\int_a^x(x-z)^{n-1}\varphi(z)P_n(z)\,dz.$$

Considérant la fonction

$$h(x)=\int_a^x(x-z)^{n-1}\varphi(z)P_n(z)\,dz,$$

on voit que cette fonction et ses $(n-1)$ premières dérivées par rapport à x, sont nulles pour $x=a$, donc $h(x)$ se divise par $(x-a)^n$. De même, $h(x)$ et ses $(n-1)$ dérivées par rapport à x, sont égales à une somme d'intégrales de la forme

$$\int_a^x\varphi(z)z^kP_n(z)\,dz,\qquad k<n,$$

qui, en vertu des relations (3), sont nulles pour $x = b$. Donc $h(x)$ se divise par $(x-b)^n$; ainsi la fonction $\psi_n(x)$, définie par la relation (16), est bien finie pour $x = a$, $x = b$, le polynome $P_n(x)$ étant obtenu avec les relations (4).

Si $\varphi(x) = (x-a)^\lambda R(x)$, $\lambda + 1 > 0$, tel que l'intégrale ait un sens, alors il existe une fonction qui contient en facteur $(x-a)^{\lambda+1}$ et dont la dérivée soit égale à $\varphi(x) P_n(x)$. Donc, l'intégrale d'ordre n de la fonction $\varphi(x) P_n(x)$ contient en facteur $(x-a)^{\lambda+n}$ et donc, de la relation (16), on voit que $\psi_n(x)$ contient le facteur $(x-a)^\lambda$. De (15) on voit que dans la formule (16) on peut prendre comme limites x et b au lieu de a et x, et donc, de même, on voit que, si $\varphi(x)$ contient le facteur $(x-b)^\mu$, $\mu + 1 > 0$, alors $\psi_n(x)$ contient aussi le facteur $(a-b)^\mu$. Donc, si $\varphi(x) = (x-a)^\lambda (x-b)^\mu$, $\lambda + 1 > 0$, $\mu + 1 > 0$, alors $\psi_n(x) = (x-a)^\lambda (x-b)^\mu$.

5. *L'équation* $P_n(x) = 0$ *a toutes ses racines réelles, distinctes et comprises dans l'intervalle* (a, b). En effet, l'expression $U(x) = (x-a)^n (x-b)^n \psi_n(x)$ s'annule pour $x = a$, $x = b$, donc sa dérivée $U'(x)$ s'annule pour $x = a_1$, comprise entre a et b. $U'(x)$ s'annulant pour $x = a$, a_1, b, sa dérivée, $U''(x)$, s'annule pour les valeurs a_2 et b_2 comprises respectivement entre a et a_1, a_1 et b. Et, ainsi de suite, la dérivée d'ordre n, $U^{(n)}(x)$, s'annule pour n valeurs comprises dans l'intervalle (a, b) et $\varphi(x)$ étant positive dans cet intervalle, il résulte que $P_n(x)$ s'annule pour n valeurs distinctes et comprises dans l'intervalle (a, b), c'est-à-dire que l'équation $P_n(x) = 0$, de degré n, a toutes ses racines réelles, distinctes et comprises dans l'intervalle (a, b), obtenant ainsi une nouvelle démonstration de ce théorème connu [11].

6. *Supposons que* $\psi_n(x)$ *reste le même pour tous les polynomes* $P_n(x)$ *et soit* $\psi(x)$ *sa valeur.* $P_n(x)$ *est le coeffieient de* t^n *dans le développement en série de* t *de l'expression* $\dfrac{\psi(z)}{\varphi(z)} \dfrac{\partial z}{\partial x}$, *z étant la racine de l'équation*

$$z = x + t\frac{(z-a)(z-b)}{b-a}, \qquad z = x, \qquad t = 0,$$

qui peut se développer avec la formule de Lagrange. Cette expression est une fonction génératrice pour les polynomes $P_n(x)$ [11]. En effet, on a la formule de Lagrange

$$(17) \quad F(z) = F(x) + \frac{t}{1}[F'(x) f(x)] + \ldots + \frac{t^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} [F'(x) f^n(x)] + \ldots, \quad F' = \frac{dF}{dx},$$

z étant la racine de l'équation

$$(18) \qquad z = x + t f(z),$$

qui tend vers x pour $t \to 0$, et $f(z)$ et $F(z)$ deux fonctions analytiques (qui se développent en série suivant les puissances de $z - x$).

Prenant la dérivée par rapport à x de l'expression (17), on a

$$(19)\quad F'(z)\frac{\partial z}{\partial x} = F'(x) + \frac{t}{1}\frac{d}{dx}[F'(x)f(x)] + \ldots + \frac{t^n}{n!}\frac{d^n}{dx^n}[F'(x)f^n(x)] + \ldots,$$

où $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ est donné par

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1 + tf'(z)\frac{\partial z}{\partial x},$$

qu'on obtient en prenant la dérivée par rapport à x de l'expression (18).

En remplaçant, en (19), $F'(z)$ par $\psi(z)$ et faisant

$$f(z) = \frac{(z-a)(z-b)}{b-a},$$

et divisant après par $\varphi(x)$, on a

$$(20)\quad \frac{\psi(z)}{\varphi(x)}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} + \frac{t}{1}\frac{1}{b-a}\frac{1}{\varphi(x)}\frac{d}{dx}[(x-a)(x-b)\psi(x)] + \ldots$$
$$+ \frac{t^n}{n!}\frac{1}{(b-a)^n}\frac{1}{\varphi(x)}\frac{d^n}{dx^n}[(x-a)^n(x-b)^n\psi(x)] + \ldots.$$

Cette relation prouve que le polynome $P_n(x)$ est le coefficient de t^n dans le développement en série de t de la fonction $\dfrac{\psi(z)}{\varphi(x)}\dfrac{\partial x}{\partial z}$, z étant la racine de l'équation

$$z = x + t\frac{(z-a)(z-b)}{b-a},$$

qui peut se développer avec la formule de Lagrange. Résulte de la relation (20) que cette expression $\dfrac{\psi(z)}{\varphi(x)}\dfrac{\partial z}{\partial x}$ est une fonction génératrice des polynomes $P_n(x)$.

Cas particuliers. 1° $\varphi(x) = \psi_n(x) = 1$, $a = -1$, $b = 1$;

$$z = x + t\frac{z^2-1}{2}, \qquad z = x, \qquad t = 0; \qquad z = \frac{1-\sqrt{1-2tx+t^2}}{t},$$

$$\frac{\psi(z)}{\varphi(x)}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = \sum t^n P_n(x),$$

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n],$$

$$P_n(x) = \frac{2n(2n-1)\ldots(n+1)}{2^n.n!}\left[x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2(2n-1)(2n-3)}x^{n-4} - \ldots\right]$$

et $P_n(x)$ est le polynome de Legendre.

2° $\varphi(x)=\psi_n(x)=(1-x)^\lambda(1+x)^\mu$, $\lambda+1>0$, $\mu+1>0$, $a=-1$, $b=1$;

$$z=x+\frac{t}{2}(1-z^2),\qquad z=\frac{1}{t}\left(-1+\sqrt{1+2tx+t^2}\right),\qquad \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{1+2tx+t^2}},$$

$$\frac{\psi(z)}{\varphi(x)}\frac{\partial z}{\partial x}=2^{\lambda+\mu}\left(1+t+\sqrt{1+2tx+t^2}\right)^{-\lambda}\times\left(1-t+\sqrt{1+2tx+t^2}\right)^{-\mu}\times(1+2tx+t^2)^{-\frac{1}{2}},$$

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}(1-x)^{-\lambda}(1+x)^{-\mu}\frac{d^n}{dx^n}\left[(1-x)^{n+\lambda}(1+x)^{n+\mu}\right],$$

$P_n(x)$ étant le polynome de Jacobi et l'on a, observant (1),

$$\int_{-1}^{+1}(1-x)^\lambda(1+x)^\mu P_m(x)P_n(x)\,dx=0,\qquad (m\lesseqgtr n).$$

3° $\varphi(x)=\psi_n(x)=x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}$, $\gamma>0$, $\alpha-\gamma+1>0$, $a=0$, $b=1$;

$$z=x+tz(1-z),\qquad z=\frac{t-1+\sqrt{(t-1)^2+4tx}}{2t},$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{(t-1)^2+4tx}},$$

$$z=\frac{2x}{1-t+\sqrt{(t-1)^2+4tx}},\qquad 1-z=\frac{2(1-x)}{1+t+\sqrt{(t-1)^2+4tx}},$$

$$\frac{\psi(z)}{\varphi(x)}\frac{\partial z}{\partial x}=2^{\alpha-1}\frac{\left[1-t+\sqrt{(t-1)^2+4tx}\right]^{1-\gamma}\left[1+t+\sqrt{(t-1)^2+4tx}\right]^{\gamma-\alpha}}{\sqrt{(t-1)^2+4tx}},$$

$$P_n(x)=\frac{1}{n!}x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha}\frac{d^n}{dx^n}\left[x^{n+\gamma-1}(1-x)^{n+\alpha-\gamma}\right],$$

$P_n(x)$ étant le polynome qui résulte de la série hypergéométrique, considéré par Darboux [3].

7. *Si* $\varphi(x)=\psi_n(x)=(x-a)^\lambda(x-b)^\mu$, $\lambda+1>0$, $\mu+1>0$, *le polynome* $P_n(x)$ *de Jacobi vérifie l'équation différentielle* [4]

$$(x-a)(x-b)\frac{d^2y}{dx^2}+\left[(2+\lambda+\mu)x-a(\mu+1)-b(\lambda+1)\right]\frac{dy}{dx}-n(n+1+\lambda+\mu)y=0,\tag{21}$$

dont l'autre solution est

$$\frac{1}{n!\,(b-a)^n}(x-a)^{-\lambda}(x-b)^{-\mu}\times\int_a^b (t-a)^{n+\lambda}(t-b)^{n+\mu}(t-x)^{-n-1}\,dt.$$

En effet, on a

$$P_n(x)=\frac{1}{(b-a)^n\,n!}(x-a)^{-\lambda}(x-b)^{-\mu}\frac{d^n}{dx^n}[(x-a)^{n+\lambda}(x-b)^{n+\mu}]. \tag{22}$$

Posant $U=(x-a)^{n+\lambda}(x-b)^{n+\mu}$, on a

$$\frac{U'}{U}=\frac{n+\lambda}{x-a}+\frac{n+\mu}{x-b},$$

ou

$$(x-a)(x-b)\,U'=[x(2n+\lambda+\mu)-(n+\lambda)b-(n+\mu)a]\,U.$$

Prenant la dérivée d'ordre $(n+1)$ avec la formule de Leibnitz, on a

$$(x-a)(x-b)\frac{d^{n+2}U}{dx^{n+2}}+[(2-\lambda-\mu)x+(\lambda-1)b+(\mu-1)a]\frac{d^{n+1}U}{dx^{n+1}}$$
$$-(n+1)(n+\lambda+\mu)\frac{d^nU}{dx^n}=0,$$

et posant $\dfrac{d^nU}{dx^n}=z$, on obtient

$$(x-a)(x-b)\frac{d^2z}{dx^2}+[(2-\lambda-\mu)x+(\lambda-1)b+(\mu-1)a]\frac{dz}{dx}$$
$$-(n+1)(n+\lambda+\mu)z=0. \tag{23}$$

Observant (22), on déduit

$$y=P_n(x)=\frac{1}{(b-a)^n\,n!}(x-a)^{-\lambda}(x-b)^{-\mu}z, \tag{24}$$

ainsi que, après cette transformation, l'équation (23) devient l'équation (21), à laquelle satisfait le polynome $P_n(x)$.

L'équation (21) est complètement intégrable, car ses solutions sont données par la relation (24), z étant donné par l'équation différentielle (23), qui en dehors de sa solution

$$z=\frac{d^n}{dx^n}[(x-a)^{n+\lambda}(x-b)^{n+\mu}], \tag{25}$$

admet aussi la solution

$$u = \int_a^b (t-a)^{n+\lambda}(t-b)^{n+\mu}(t-x)^{n-1}\,dt. \tag{26}$$

Pour cela, nous allons montrer que u satisfait l'équation (23). On a [16]

$$\begin{aligned} &d[(t-a)^{n+\lambda+1}(t-b)^{n+\mu+1}(t-x)^{-n-2}] \\ &= v[(n+\lambda+1)(t-b)(t-x)+(n+\mu+1)(t-a)(t-x)-(n-2)(t-a)(t-b)], \end{aligned}$$

où

$$v = (t-a)^{n+\lambda}(t-b)^{n+\mu}(t-x)^{-n-3}\,dt.$$

Intégrant entre a et b, on a en multipliant par $-(n+1)$,

$$0 = \int_a^b (n+1)v[-(n+\lambda+1)(t-b)(t-x)-(n+\mu+1)(t-a)(t-x)+(n+2)(t-a)(t-b)],$$

et ordonnant d'après les puissances de $(t-x)$, on obtient

$$\begin{aligned} 0 = \int_a^b (n+1)v\{(n+2)(x-a)(x-b)+(t-x)[(2-\lambda-\mu)x+b(\lambda-1)+a(\mu-1)] \\ -(n+\lambda+\mu)(t-x)^2\}. \end{aligned} \tag{27}$$

Or, de (26) on a

$$u = \int_a^b v(t-x)^2, \quad \frac{du}{dx} = (n+1)\int_a^b v(t-x), \quad \frac{d^2u}{dx^2} = (n+1)(n+2)\int_a^b v,$$

et donc l'expression (27) devient

$$\begin{aligned} 0 = (x-a)(x-b)\frac{d^2u}{dx^2} + [(2-\lambda-\mu)x+b(\lambda-1)+a(\mu-1)]\frac{du}{dx} \\ -(n+1)(n+\lambda+\mu)u, \end{aligned}$$

qui est l'équation (23). Donc cette équation admet les solutions (25) et (26), et avec la relation (24), on obtient celles de l'équation différentielle (21), c'est-à-dire

$$P_n(x), \qquad \frac{1}{(b-a)^n n!}(x-a)^{-\lambda}(x-b)^{-\mu}\int_a^b (t-a)^{n+\lambda}(t-b)^{n+\mu}(t-x)^{-n-1}\,dt.$$

---

(16) En suivant le procédé de M. Picard, *Traité d'Analyse*, t. VIII, *Intégrales hypergéométriques*, p. 319.

Cas particuliers. 1° $\varphi(x) = \psi_n(x) = 1$, $a = -1$, $b = 1$; le polynome $P_n(x)$ de Legendre vérifie l'équation différentielle

$$(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + n(n+1)y = 0.$$

2° $\varphi(x) = \psi_n(x) = (x^2 - a^2)^l$, $\qquad l + 1 > 0$; le polynome

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n\, n!}(x^2 - a^2)^{-l}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2 - a^2)^{n+l}]$$

vérifie l'équation différentielle

$$(x^2 - a^2)\frac{d^2y}{dx^2} + 2x(1 + l)\frac{dy}{dx} - n(n + 1 + 2l)y = 0.$$

8. *Les polynomes orthogonaux* $P_n(x)$ *vérifient une relation de récurrence* (11). En désignant par $c_{n,n}$ le coefficient de x^n du polynome $P_n(x)$, on peut déterminer les constantes $\alpha_0, \alpha_1, \dots \alpha_n$, telles que l'on ait

$$(28) \qquad xP_n(x) = \frac{c_{n,n}}{c_{n+1,n+1}}P_{n+1}(x) + \alpha_n P_n(x) + \alpha_{n-1}P_{n-1}(x) + \dots + \alpha_0 P_0(x).$$

Multipliant par $\varphi(x)P_{n-q}(x)\,dx$, intégrant et observant (1), on a

$$(29) \qquad \int_a^b x\varphi(x)P_n(x)P_{n-q}(x)\,dx = \alpha_{n-q}\int_a^b \varphi(x)P_{n-q}^2(x)\,dx = \alpha_{n-q}I_{n-q}.$$

Mais, si $q \geqq 2$, xP_{n-q} est au plus de degré $(n - 1)$ et, en vertu des relations (3), le premier membre est nul. Donc, $\alpha_{n-q} = 0$, $q \geqq 2$. La relation (28) est donc de la forme

$$(30) \qquad xP_n = \frac{c_{n,n}}{c_{n+1,n+1}}P_{n+1} + \alpha_n P_n + \alpha_{n-1}P_{n-1}.$$

On a de même

$$(31) \qquad xP_{n-1} = \frac{c_{n-1,n-1}}{c_{n,n}}P_n + \beta_{n-1}P_{n-1} + \beta_{n-2}P_{n-2}.$$

Faisant en (29) $q = 1$, on obtient

$$\int_a^b x\varphi(x)P_{n-1}P_n\,dx = \alpha_{n-1}I_{n-1},$$

où, en remplaçant $x\mathrm{P}_{n-1}$ par sa valeur de (31), on déduit

$$\int_a^b \varphi \mathrm{P}_n\left(\frac{c_{n-1,\,n-1}}{c_{n,\,n}}\mathrm{P}_n + \beta_{n-1}\mathrm{P}_{n-1} + \beta_{n-2}\mathrm{P}_{n-2}\right)dx = \alpha_{n-1}\mathrm{I}_{n-1},$$

$$\frac{c_{n-1,\,n-1}}{c_{n,\,n}}\mathrm{I}_n = \alpha_{n-1}\mathrm{I}_{n-1}, \qquad \alpha_{n-1} = \frac{c_{n-1,\,n-1}\mathrm{I}_n}{c_{n,\,n}\mathrm{I}_{n-1}}.$$

En remplaçant en (30), on obtient la relation de récurrence (*)

$$(32) \qquad \frac{c_{n,\,n}}{c_{n+1,\,n+1}}\mathrm{P}_{n+1} - (x-\alpha_n)\mathrm{P}_n + \frac{c_{n-1,\,n-1}\mathrm{I}_n}{c_{n,\,n}\mathrm{I}_{n-1}}\mathrm{P}_{n-1} = 0$$

entre trois polynomes orthogonaux consécutifs.

Pour trouver la valeur de α_n, multiplions en (32) par $\varphi(x)\mathrm{P}_n(x)\,dx$, et observant (1), on a

$$\int_a^b (\alpha_n - x)\,\varphi(x)\,\mathrm{P}_n^2(x)\,dx = 0, \qquad \alpha_n\mathrm{I}_n = \int_a^b \varphi(x)\,x\,\mathrm{P}_n^2(x)\,dx,$$

ou, en égalant en (32) le coefficient de x^n à zéro, on obtient

$$(33) \qquad \frac{c_{n,\,n}}{c_{n+1,\,n+1}}c_{n+1,\,n} - c_{n,\,n-1} + \alpha_n c_{n,\,n} = 0, \qquad \alpha_n = \frac{c_{n,\,n-1}}{c_{n,\,n}} - \frac{c_{n+1,\,n}}{c_{n+1,\,n+1}}.$$

Cas particuliers. 1° $\varphi(x) = \psi_n(x) = 1$, $a = -1$, $b = 1$; les polynomes de Legendre vérifient la relation

$$(n+1)\mathrm{P}_{n+1} - x(2n+1)\mathrm{P}_n + n\mathrm{P}_{n-1} = 0.$$

2° $\varphi(x) = \psi_n(x) = (x-a)^\lambda(x-b)^\mu$;

$$\mathrm{I}_n = \frac{(-1)^n c_{n,\,n}}{(b-a)^n}\int_a^b (x-a)^n(x-b)^n\varphi(x)\,dx.$$

Dans le cas des polynomes (5) qui naissent de la série hypergéométrique,

$$\mathrm{P}_n = \frac{1}{n!}x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha}\frac{d^n}{dx^n}[x^{n+\gamma-1}(1-x)^{n+\alpha-\gamma}],$$

(*) Obtenue par DARBOUX, Voir (3) Voir, aussi, le *Cours d'Analyse supérieure*, fait à la *Sorbonne*, par M. E. PICARD, en 1918; Voir (7).

on a

$$\frac{(n+\alpha)(n+1)}{(2n+\alpha+1)(2n+\alpha)}P_{n+1}+\left[x-\frac{2n^2+2\alpha n+\alpha\gamma-\gamma}{(2n+\alpha-1)(2n+\alpha+1)}\right]P_n$$
$$+\frac{(n+\gamma-1)(n+\alpha-\gamma)}{(2n+\alpha)(2n+\alpha-1)}P_{n-1}=0.$$

9. *La limite de* $\sqrt[n]{P_n(x)}$ *pour* $n\to\infty$ *est*

$$e^{\int_0^1 \log\left(x-\frac{b-a}{2}\cos\pi\theta-\frac{a+b}{2}\right)d\theta}$$

et $\sqrt[n]{|P_n(x)|}\to\frac{b-a}{4}|z|$, *$z$ étant la racine de plus grand module de l'équation*

$$z^2-\frac{4}{b-a}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)z+1=0.$$

De (9) on a

$$\sqrt[n]{P_n(x)}=\frac{\sqrt[n]{D_{n-1}(F)}}{\sqrt[n]{D_{n-1}(\varphi)}}, \tag{34}$$

$D_{n-1}(F)$ et $D_{n-1}(\varphi)$ étant respectivement les déterminants des formes quadratiques (10) et (11)

$$\int_a^b (x-t)\varphi(t)(y_0+y_1t+\ldots+y_{n-1}t^{n-1})^2\,dt=\sum_p\sum_q(xg_{p+q}-g_{p+q+1})y_py_q, \tag{10}$$

$$\int_a^b \varphi(t)(y_0+y_1t+\ldots+y_{n-1}t^{n-1})^2\,dt=\sum_p\sum_q g_{p+q}y_py_q, \tag{11}$$

$$p,q=0,1,\ldots,n-1.$$

Faisons le changement de variable

$$t=\frac{1}{2}[(b-a)\cos\pi\theta+b+a].$$

Il résulte $F(t)=(x-t)\varphi(t)=g(\pi\theta)$, $\varphi(t)=h(\pi\theta)$ et $y_0+y_1t+\ldots+y_{n-1}t^{n-1}$ devient une fonction R_{n-1} qui dépend de $y_0, y_1, \ldots y_{n-1}$ et $\cos\pi\theta, \ldots, \cos(n-1)\pi\theta$(*),

$$R_{n-1}(\pi\theta)=u_0+u_1\cos\pi\theta+\ldots+u_{n-1}\cos(n-1)\pi\theta.$$

(*) Car on peut remplacer $\cos^q\pi\theta$ en fonction de multiples de l'arc $\pi\theta$.

Faisons sur les quantités $y_0, y_1, \dots y_{n-1}$ la transformation linéaire

$$y_i = l_{i,0} u_0 + \dots + l_{i,n-1} u_{n-1}, \qquad i = 0, 1, \dots n-1,$$

de déterminant $\delta_{n-1} \neq 0$, telle que l'on ait identiquement

$$y_0 + y_1 t + \dots + y_{n-1} t^{n-1} = u_0 + u_1 \cos \pi\theta + \dots + u_{n-1} \cos (n-1)\pi\theta.$$

Les formes (10) et (11) deviennent, après avoir supprimé le facteur $\dfrac{b-a}{2}\pi$,

$$(35) \quad \int_0^1 \Psi(\pi\theta)[u_0 + u_1 \cos \pi\theta + \dots + u_{n-1} \cos (n-1)\pi\theta]^2 \, d\theta = \sum_{p,\, q = 0, 1, \dots, n-1} \sum d_{p,q} u_p u_q,$$

$$\Psi(\pi\theta) = g(\pi\theta) \sin \pi\theta, \qquad d_{p,q} = \int_0^1 \Psi(\pi\theta) \cos p\pi\theta \cos q\pi\theta \, d\theta,$$

$$(36) \quad \int_0^1 \psi(\pi\theta)[u_0 + u_1 \cos \pi\theta + \dots + u_{n-1} \cos (n-1)\pi\theta]^2 \, d\theta = \sum_p \sum_q e_{p,q} u_p u_q,$$

$$\psi(\pi\theta) = h(\pi\theta) \sin \pi\theta, \qquad e_{p,q} = \int_0^1 \psi(\pi\theta) \cos p\pi\theta \cos q\pi\theta \, d\theta.$$

Désignant par

$$\left(\frac{b-a}{2}\pi\right)^n \Delta_{n-1}(\Psi), \qquad \left(\frac{b-a}{2}\pi\right)^n \Delta_{n-1}(\psi)$$

les déterminants des formes quadratiques (35) et (36), multipliées par $\dfrac{b-a}{2}\pi$,

$$(37) \quad \Delta_{n-1}(\Psi) = \begin{vmatrix} d_{0,0} & d_{0,1} & \dots & d_{0,n-1} \\ d_{1,0} & d_{1,1} & \dots & d_{1,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n-1,0} & d_{n-1,1} & \dots & d_{n-1,n-1} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{n-1}(\psi) = \begin{vmatrix} e_{0,0} & e_{0,1} & \dots & e_{0,n-1} \\ e_{1,0} & e_{1,1} & \dots & e_{1,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e_{n-1,0} & e_{n-1,1} & \dots & e_{n-1,n-1} \end{vmatrix},$$

d'après la théorie des formes quadratiques, on sait

$$\left(\frac{b-a}{2}\pi\right)^n \Delta_{n-1}(\Psi) = \delta_{n-1}^2 D_{n-1}(F),$$

$$\left(\frac{b-a}{2}\pi\right)^n \Delta_{n-1}(\psi) = \delta^2 D_{n-1}(\varphi),$$

d'où

$$\frac{D_{n-1}(F)}{D_{n-1}(\varphi)} = \frac{\Delta_{n-1}(\Psi)}{\Delta_{n-1}(\psi)},$$

et donc, observant (34),

$$\sqrt[n]{P_n(x)} = \frac{\sqrt[n]{\Delta_{n-1}(\Psi)}}{\sqrt[n]{\Delta_{n-1}(\psi)}}. \tag{38}$$

Nous sommes conduits de chercher la limite de la racine n-ème des déterminants (37). Considérons, par ex.,

$$\Delta_{n-1}(\Psi) = \begin{vmatrix} d_{0,0} & d_{0,1} & \dots & d_{0,n-1} \\ d_{1,0} & d_{1,1} & \dots & d_{1,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n-1,0} & d_{n-1,1} & \dots & d_{n-1,n-1} \end{vmatrix}, \quad d_{p,q} = \int_0^1 \Psi(\pi\theta)\cos p\pi\theta \cos q\pi\theta \, d\theta,$$

qui est le déterminant de la forme (35). On sait[17], que pour cette forme, on peut effectuer sur les quantités $u_0, u_1, \dots u_{n-1}$, une transformation homogène linéaire,

$$X_i = m_{i,0}u_0 + m_{i,1}u_1 + \dots + m_{i,n-1}u_{n-1}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1, \tag{39}$$

telle que la forme quadratique (35) devient une somme de carrés

$$\lambda_0 X_0^2 + \lambda_1 X_1^2 + \dots + \lambda_{n-1} X_{n-1}^2. \tag{40}$$

Les quantités $\lambda_0, \lambda_1, \dots \lambda_{n-1}$ s'appellent valeurs spécifiques, qu'on déduit en identifiant les formes (40) et (35) après la transformation (39) et sont les racines de l'équation caractéristique

$$\Delta_{n-1}(\Psi - \lambda) = \begin{vmatrix} d_{0,0} - \lambda & d_{0,1} & \dots & d_{0,n-1} \\ d_{1,0} & d_{1,1} - \lambda & \dots & d_{1,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n-1,0} & d_{n-1,1} & \dots & d_{n-1,n-1} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{41}$$

En effet, ce déterminant est celui de la forme

$$\int_0^1 (\Psi - \lambda)[u_0 + u_1 \cos \pi\theta + \dots + u_{n-1}\cos(n-1)\pi\theta]^2 \, d\theta,$$

---

(17) Helge von Koch, *Sur un théorème de M. Hilbert* (*Math. Annalen*, Bd. 69, 1910, p. 216); Toeplitz, *Zur Theorie der quadratischen Formen von unendlich vielen Veränderlichen* (*Nachrichten Göttingen*, 1910, p. 489-506).

qui peut s'écrire

$$\int_0^1 \Psi\,[u_0 + u_1 \cos \pi\theta + \ldots + u_{n-1} \cos (n-1)\,\pi\theta]^2\, d\theta$$
$$- \lambda \int_0^1 [u_0 + u_1 \cos \pi\theta + \ldots + u_{n-1} \cos (n-1)\,\pi\theta]^2\, d\theta,$$
$$\int_0^1 \cos^2 p\pi\theta\, d\theta = 1, \qquad \int_0^1 \cos p\pi\theta \cos q\pi\theta\, d\theta = 0,$$

et qui, après la transformation orthogonale (39), devient

$$\sum_{s=0}^{n-1} \lambda_s X_s^2 - \sum_{s=0}^{n-1} \lambda X_s^2 = \sum_{s=0}^{n-1} (\lambda_s - \lambda) X_s^2.$$

Le déterminant de cette forme est

$$\Delta_{n-1}(\Psi - \lambda) = \begin{vmatrix} \lambda_0 - \lambda & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_1 - \lambda & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_{n-1} - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda_0 - \lambda) \ldots (\lambda_{n-1} - \lambda),$$

et on voit que $\lambda_0, \lambda_1, \ldots \lambda_{n-1}$ sont les racines de l'équation (41). Faisant $\lambda = 0$, il résulte

$$\Delta_{n-1}(\Psi) = \lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{n-1},$$

et donc

$$\sqrt[n]{\Delta_{n-1}(\Psi)} = \sqrt[n]{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{n-1}}.$$

Mais cette limite est connue et égale[18] à

$$e^{\int_0^1 \log \Psi(\pi\theta)\, d\theta}.$$

---

[18] Proposée comme problème dans l'*Intermédiaire des Math.*, 21 (1914), question 4340, par M. Polya, et dont la solution a été donnée par M. Szegö, *Ein Grenzwertsatz über die Toeplitzschen Determinanten*... (*Math. Annalen*, Bd. 76, 1915, p. 490).

L'expression de cette limite a été trouvée autrement par M. Szegö, *A Hankel féle formakrol*... (*Les formes de Hankel*) (*Mathematikai es Termeszettudomanyi Ertesitö*, 1918, p. 492), Voir (8).

Donc

$$\sqrt[n]{\Delta_{n-1}(\Psi)} \to e^{\int_0^1 \log \Psi \, d\theta},$$

$$\Psi = (x-t)\,\varphi(t) \sin \pi\theta, \qquad t = \frac{1}{2}[(b-a)\cos \pi\theta + b + a].$$

De même,

$$\sqrt[n]{\Delta_{n-1}(\psi)} \to e^{\int^1 \log \psi \, d\theta}. \qquad \psi = \varphi(t) \sin \pi\theta,$$

et donc de (38)

$$(42) \qquad \sqrt[n]{P_n(x)} \to e^{\int_0^1 \log(x-t)\, d\theta}, \qquad t = \frac{1}{2}[(b-a)\cos \pi\theta + a + b],$$

ou

$$\sqrt[n]{P_n(x)} \to e^{\frac{1}{\pi}\int_0^1 \log(x-t) \frac{dt}{\sqrt{(t-a)(b-t)}}}.$$

Faisant en (42) $\pi\theta = \omega$, on a

$$(43) \qquad \sqrt[n]{|P_n(x)|} \to e^{\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \log |M + N \cos \omega| \, d\omega},$$
$$M = x - \frac{a+b}{2}, \qquad N = \frac{a-b}{2} \neq 0.$$

Mais

$$|M + N\cos\omega| = \left|\frac{N}{2}z^2 + Mz + \frac{N}{2}\right|_{z=e^{i\omega}} = \frac{|N|}{2}|z-z_1|\,|z-z_2|_{z=e^{i\omega}},$$

où $z_1 . z_2 = 1$, z_1 et z_2 étant les racines de l'équation

$$\frac{N}{2}z^2 + Mz + \frac{N}{2} = 0, \qquad z^2 - \frac{4}{b-a}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)z + 1 = 0.$$

Considérant l'intégrale

$$I = \int_0^\pi \log |z - \xi| \, d\omega, \qquad z = e^{i\omega}, \qquad \xi = \rho e^{i\alpha}, \qquad (\rho = |\xi|),$$

on a

$$\mathrm{I} = \int_0^\pi \log \sqrt{1 - 2\rho\cos(\omega - \alpha) + \rho^2}\, d\omega,$$

qui est une intégrale de Poisson, dont la valeur est égale à zéro si $\rho < 1$ et à $\pi \log \rho$ si $\rho > 1$.

Or, $|z_1| \cdot |z_2| = 1$, et supposant que $|z_1| > 1$, on a

$$\int_0^\pi \log|z - z_1|\, d\omega = \pi \log |z_1|, \qquad \int_0^\pi \log|z - z_2|\, d\omega = 0.$$

Donc

$$\int_0^\pi \log|\mathrm{M} + \mathrm{N}\cos\omega|\, d\omega = \int_0^\pi \log\frac{|\mathrm{N}|}{2}\,|z - z_1|\,|z - z_2|\, d\omega = \pi \log \frac{|\mathrm{N}|}{2}\,|z_1|,$$

et observant (43), on trouve

$$\sqrt{|\mathrm{P}_n(x)|} \to \frac{b-a}{4}\,|z|, \tag{44}$$

z étant la racine de plus grand module de l'équation

$$z^2 - \frac{4}{b-a}\left(x - \frac{a+b}{2}\right) z + 1 = 0. \tag{45}$$

Supposant que $\lim \sqrt[n]{|\mathrm{P}_n(x)|} = l$, donc $\dfrac{b-a}{4}|z| = l$, on a de (45)

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{4}\left(z + \frac{1}{z}\right), \qquad |z| = \frac{4l}{b-a} = \rho, \qquad z = \rho e^{i\alpha},$$

et donc

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{4}\left(\rho e^{i\alpha} + \frac{1}{\rho} e^{-i\alpha}\right),$$

enfin posant $x = x_1 + iy_1$, on a

$$x_1 = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{4}\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)\cos\alpha, \qquad y_1 = \frac{b-a}{4}\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)\sin\alpha,$$

ce qui prouve que le point x décrit une ellipse de centre $\dfrac{a+b}{2}$ et de foyers a et b.

10. *Les polynomes orthogonaux* $P_n(x)$ *sont les dénominateurs des réduites d'ordre n du développement de la fonction*

$$\int_a^b \frac{\varphi(y)}{y-x}\,dy,$$

en fraction continue [12] [13].

11. *Les polynomes* $P_n(x)$ *interviennent dans la théorie des quadratures mécaniques*. La valeur approchée de l'intégrale

$$\int_a^b \varphi(x) f(x)\,dx$$

est [19]

$$\int_a^b \varphi(x)\,P_{n-1}^2(x)\,dx \left[\sum \frac{f(x_i)}{P'_n(x_i)\,P_{n-1}(x_i)}\right],$$

x_1, x_2, ... x_n étant les racines du polynome $P_n(x)$.

---

[19] Voir, aussi, A. Angelesco, *Sur les quadratures mécaniques* (*Bulletin de la Section scientifique de l'Académie Roumaine*, vol. VI, 1920, p. 81).