ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

G. PFEIFFER

Sur les invariants intégraux d'ordre $n-1$

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 3e série, tome 25 (1933), p. 257-266
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1933_3_25__257_0>

SUR LES
INVARIANTS INTÉGRAUX D'ORDRE $n-1$.

PAR M. G. PFEIFFER (Kiew).

En dix ans trois des plus grands mathématiciens Ed. Goursat(¹), E. Cartan(²) et Th. De Donder(³) ont publié des monographies, liées, la première en partie, les secondes en totalité, à la théorie des invariants intégraux. Ce fait n'est pas resté sans influence sur l'évolution ultérieure du domaine. En disposant des monographies indiquées, les personnes, qui s'intéressent à la théorie des invariants intégraux, ont la possibilité, avec un profit élevé et une très grande certitude, de prolonger de telles recherches.

Appelons l'attention sur la circonstance suivante.

La construction de l'opérateur général, permutant les solutions de l'équation linéaire homogène :

$$\xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0, \tag{1}$$

de même que la construction du système général des fonctions contravariantes 1-uples et d'invariant intégral général d'ordre $n-1$ du système :

$$\frac{dx_1}{\xi_1} = \frac{dx_2}{\xi_2} = \ldots = \frac{dx_n}{\xi_n} = dt, \tag{2}$$

sont des questions étroitement liées. Les ξ_i sont des fonctions, qui ne contiennent pas le temps t.

La résolution de la première question, dans une série de travaux(⁴) dus à nous-même, est menée jusqu'à achèvement.

(¹) E. GOURSAT, — *Leçons sur le problème de Pfaff* (Paris, 1922).

(²) E. CARTAN, — *Leçons sur les invariants intégraux* (Paris, 1922).

(³) TH. DE DONDER, — *Théorie des invariants intégraux* (Paris, 1927).

(⁴) G. PFEIFFER, — *Théorèmes, expliquant une série de questions dans le problème de la permutation des solutions d'une équation linéaire aux dérivées partielles du premier ordre* (Comptes rendus de l'Acad. des Sc. de l'U. R. S. S., 1929, pp. 177-182). — *Sur la permutation des solutions d'une équation linéaire aux dérivées partielles du premier ordre* (Bull. des Sc. math., S. 2, t. LII, octobre 1928). — *Quelques additions au problème de M. A. Buhl* (Atti del Congr. Intern., Bologna, 1928, t. III, pp. 45-46). — *Construction de l'opérateur général, per-*

Il est naturel qu'il nous soit venu le désir de parvenir, en utilisant les idées relatives à la résolution de la première question, à la solution complète de la seconde et de la troisième questions.

Ce Mémoire procède à la construction du système le plus général des fonctions contravariantes 1-uples et de l'invariant intégral le plus général d'ordre $n-1$.

Posons

$$X(f) = \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n}. \tag{3}$$

$$Y(f) = \eta_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \eta_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + \eta_n \frac{\partial f}{\partial x_n}. \tag{4}$$

D'après les recherches de S. Lie(1) les opérateurs :

$$Y(f) = \sum_{i=1}^{n} \eta_i \frac{\partial f}{\partial x_i}. \tag{5}$$

qui permutent les solutions :

$$\varphi_1, \quad \varphi_2, \quad \ldots, \quad \varphi_{n-1} \tag{6}$$

de l'équation :

$$X(f) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0, \tag{7}$$

se définissent par la relation :

$$XY(f) - YX(f) \equiv \lambda X(f). \text{ (2)} \tag{8}$$

Nous avons montré(3), que si r satisfait à

$$X(r) \equiv \lambda, \tag{9}$$

---

mutant les intégrales d'une équation linéaire et homogène aux dérivées partielles du premier ordre (Comptes rendus, 1931, t. 192, pp. 660-662). — *Sur la permutation des intégrales d'une équation linéaire et homogène aux dérivées partielles du premier ordre* (Ann. de Toulouse, 1931, S. 3, t. XXIII, pp. 139-181). — *Résolution de la relation de S. Lie, définissant des opérateurs d'une équation linéaire homogène aux dérivées partielles du premier ordre* (Bull. des Sc. math., S. 2, t. LVI, février 1932).

(1) S. Lie et Fr. Engel, — *Theorie der Transformationsgruppen* (Leipzig, 1888, B. I., pp. 138-143).

(2) E. Cartan, — *Leçons sur les invariants intégraux* (Paris, 1922, pp. 95-96).

(3) G. Pfeiffer, — *Sur la permutation des intégrales d'une équation linéaire homogène* (Ann. de Toulouse, 1931, S. 3, t. XXIII, pp. 156-174). — *Résolution de la relation de S. Lie* (Bull. des Sc. math., S. 2, t. LVI, février 1932).

la substitution :

$$Y(f) = Z(f) + rX(f), \tag{10}$$

$$Z(f) = z_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + z_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + z_n \frac{\partial f}{\partial x_n}, \tag{11}$$

$$\eta_i = z_i + r\xi_i, \tag{12}$$

$$i = 1, 2, \dots, n,$$

réduit la relation (8) à l'identité

$$XZ(f) - ZX(f) \equiv 0. \tag{13}$$

Les coefficients :

$$z_1, \quad z_2, \quad \dots, \quad z_n \tag{14}$$

de la solution générale de (13) donnent le plus général système de fonctions contravariantes 1-uples du système (2). [1]

La condition nécessaire et suffisante, pour que l'intégrale :

$$\int \omega_{n-1}, \tag{15}$$

où ω_{n-1} est une forme symbolique du degré $n - 1$:

$$\omega_{n-1} = \eta_1 dx_2 \dots dx_{n-1} dx_n \pm \eta_2 dx_3 \dots dx_n dx_1 + \dots + (\pm)^{n-1} \eta_n dx_1 \dots dx_{n-2} dx_{n-1}, \tag{16}$$

avec des signes $+$, si n est impair, et alternativement $+, -$, si n est pair, soit un invariant intégral d'ordre $n - 1$ du système (2), consiste en l'identité :

$$XY(f) - YX(f) \equiv \mu Y(f), \text{ [2]} \tag{17}$$

$$\mu = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_i}. \tag{18}$$

Il est établi par nous [3], que si $\mu \neq 0$ et si la transformation infinitésimale $Y(f)$ est remplacée par la transformation infinitésimale $Z(f)$ d'après l'égalité :

---

(1) Th. De Donder, — *Théorie des invariants intégraux* (Paris, 1927, pp. 91-92).

(2) Ed. Goursat, — *Leçons sur le problème de Pfaff* (Paris, 1922, p. 223).

G. Koenigs, — *Sur les invariants intégraux* (Comptes rendus, t. 122, 1896, pp. 25-27).

(3) G. Pfeiffer, — *Théorèmes, expliquant une série de questions dans le problème de la permutation des solutions d'une équation linéaire* (Comptes rendus de l'Acad. des Sc. de l'U. R. S. S., 1929, p. 180).

$$Z(f) = \sigma Y(f), \tag{19}$$

$$Z(f) = z_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + z_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + z_n \frac{\partial f}{\partial x_n}, \tag{20}$$

$$z_i = \sigma \eta_i, \tag{21}$$

$$i = 1, 2, \ldots, n$$

où σ satisfait à

$$X(\log \sigma) = -\mu, \qquad X(\sigma) = \sigma \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_i} \tag{22}$$

et, par conséquent, définit une quantité, réciproque du multiplicateur w du système (2) :

$$w = \frac{1}{\sigma}, \qquad X(w) + w \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_i} = 0, \tag{23}$$

$$Y(f) = wZ(f), \tag{24}$$

la relation (17) se convertit en l'identité :

$$XZ(f) - ZX(f) \equiv 0. \tag{25}$$

Quand $\mu = 0$, la relation (17) est l'identité (25) elle-même.

L'identité (25) a été déduite de l'identité (17) par G. Kœnigs[1], mais cela n'a pas été le résultat d'une théorie générale des transformations des équations

$$X(f) = 0, \qquad Y(f) = 0,$$

possédant la propriété :

$$XY(f) - YX(f) \equiv pX(f) + qY(f).$$

Nous voyons ainsi, que les recherches des opérateurs de l'équation (1) et des fonctions contravariantes 1-uples et des invariants intégraux d'ordre $n-1$ du système (2) exigent l'étude de la même identité (25).

Les coefficients de la solution $Z(f)$ de la relation (25) donnent le système des fonctions contravariantes 1-uples du système (2). Si à la solution $Z(f)$ de la relation

---

(1) G. Kœnigs, — *Sur les invariants intégraux* (Comptes rendus, t. 122, 1896, pp. 25-27).

(25) on ajoute l'expression $r\mathrm{X}(f)$, on trouve l'opérateur $\mathrm{Y}(f)$ de l'équation (1). Si on multiplie la solution $\mathrm{Z}(f)$ de la relation (25) par le multiplicateur w du système (2), alors on obtient la transformation infinitésimale $\mathrm{Y}(f)$, déterminant la forme symbolique (16), pour laquelle l'intégrale (15) est l'invariant intégral d'ordre $n-1$ du système (2).

La résolution de la relation (25) exige l'intégration du système jacobien d'équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre à plusieurs fonctions inconnues :

$$\begin{gathered}
\xi_1 \frac{\partial z_1}{\partial x_1} + \ldots + \xi_n \frac{\partial z_1}{\partial x_n} = z_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + \ldots + z_n \frac{\partial \xi_1}{\partial x_n}, \\
\xi_1 \frac{\partial z_2}{\partial x_1} + \ldots + \xi_n \frac{\partial z_2}{\partial x_n} = z_1 \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} + \ldots + z_n \frac{\partial \xi_2}{\partial x_n}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\xi_1 \frac{\partial z_n}{\partial x_1} + \ldots + \xi_n \frac{\partial z_n}{\partial x_n} = z_1 \frac{\partial \xi_n}{\partial x_1} + \ldots + z_n \frac{\partial \xi_n}{\partial x_n}.
\end{gathered} \tag{26}$$

Cette intégration demande la recherche des intégrales du système d'équations différentielles ordinaires :

$$\frac{dx_1}{\xi_1} = \ldots = \frac{dx_n}{\xi_n} = \frac{dz_1}{\sum z_i \frac{\partial \xi_1}{\partial x_i}} = \ldots = \frac{dz_n}{\sum z_i \frac{\partial \xi_n}{\partial x_i}}, \tag{27}$$

qui se scinde en le système :

$$\frac{dx_1}{\xi_1} = \frac{dx_2}{\xi_2} = \ldots = \frac{dx_n}{\xi_n} \tag{28}$$

aux intégrales (6) et en le système d'équations ordinaires linéaires :

$$\begin{gathered}
[\xi_n] \frac{d[z_1]}{dx_n} = [z_1] \left[\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1}\right] + \ldots + [z_n] \left[\frac{\partial \xi_1}{\partial x_n}\right], \\
[\xi_n] \frac{d[z_2]}{dx_n} = [z_1] \left[\frac{\partial \xi_2}{\partial x_1}\right] + \ldots + [z_n] \left[\frac{\partial \xi_2}{\partial x_n}\right], \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
[\xi_n] \frac{d[z_n]}{dx_n} = [z_1] \left[\frac{\partial \xi_n}{\partial x_1}\right] + \ldots + [z_n] \left[\frac{\partial \xi_n}{\partial x_n}\right],
\end{gathered} \tag{29}$$

où les crochets indiquent que les variables $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ sont remplacées par leurs expressions, tirées des équations ;

$$\varphi_1 = c_1, \quad \varphi_2 = c_2, \quad \ldots, \quad \varphi_{n-1} = c_{n-1}. \tag{30}$$

La forme générale de la transformation infinitésimale $Z(f)$ satisfaisant la relation (25) est

$$Z(f) = \sum_{j=1}^{n-1} \Psi_j Z_j(f) + \Psi_n X(f). \tag{31}$$

où Ψ sont des fonctions arbitraires des intégrales (6). Les $Z_j(f)$ sont des cas particuliers de la transformation infinitésimale $Z(f)$(1).

Il est clair, que les transformations infinitésimales :

$$Z_1(f), \quad Z_2(f), \quad \ldots, \quad Z_{n-1}(f), \quad X(f) \tag{32}$$

ne doivent pas satisfaire à une relation ou à une série de relations

$$\Theta_1 Z_1(f) + \Theta_2 Z_2(f) + \ldots + \Theta_{n-1} Z_{n-1}(f) + \Theta_0 X(f) \equiv 0, \tag{33}$$

où Θ sont des fonctions déterminées des intégrales (6).

Remarque. — Si les solutions (32) de la relation (25) sont liées par des relations

$$Z_m(f) \equiv \pi_1 Z_1(f) + \ldots + \pi_{m-1} Z_{m-1}(f), \tag{34}$$

$$X(f) \equiv \rho_1 Z_1(f) + \ldots + \rho_{m-1} Z_{m-1}(f), \tag{35}$$

π, ρ étant des fonctions des variables indépendantes et les

$$Z_1(f), \quad Z_2(f), \quad \ldots, \quad Z_{m-1}(f), \quad X(f)$$

étant indépendantes, les identités (34), (35) sont du même type que l'identité (33)(2).

En effet, d'après (25) :

$$\begin{gathered} \sum_{k=1}^{m-1} X(\pi_k) Z_k(f) \equiv 0, \qquad \sum_{k=1}^{m-1} X(\rho_k) Z_k(f) \equiv 0; \\ X(\pi_k) \equiv 0, \qquad X(\rho_k) \equiv 0; \\ \pi_k = \theta_k(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}), \qquad \rho_k = \vartheta_k(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}), \\ k = 1, 2, \ldots, m-1. \end{gathered} \tag{36}$$

Passons à la construction de la solution générale (31) de la relation (25).

---

(1) G. Pfeiffer, — *Sur la permutation des intégrales d'une équation linéaire et homogène* (Ann. de Toulouse, S. 3, t. XXIII, 1931, pp. 154-158). — *Résolution de la relation de S. Lie* (Bull. des Sc. math., S. 2, t. LVI, février 1932).

(2) G. Pfeiffer, — *Sur la permutation des intégrales d'une équation linéaire et homogène* (Ann. de Toulouse, S. 3, t. XXIII, 1931, pp. 142-146).

Il est établi par nous[1] que les expressions :

$$Y_1(f) = \frac{L_1(f)}{\omega^{(1)}}, \qquad Y_2(f) = \frac{L_2(f)}{\omega^{(2)}}, \qquad \dots, \qquad Y_{n-1}(f) = \frac{L_{n-1}(f)}{\omega^{(n-1)}}, \tag{37}$$

$$\begin{aligned} L_1(f) &= \frac{D(f, v_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-2}, \varphi_{n-1})}{D(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)}, \\ L_2(f) &= \frac{D(f, \varphi_1, v_2, \dots, \varphi_{n-2}, \varphi_{n-1})}{D(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)}, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ L_{n-1}(f) &= \frac{D(f, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}, v_{n-1})}{D(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)}, \end{aligned} \tag{38}$$

$$\omega^{(i)} = \frac{D(\varphi_{n-1}, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-2}, v_i)}{D(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)}, \tag{39}$$

$$i = 1, 2, \dots, n-1,$$

indépendantes, aux fonctions arbitraires

$$v_1, \quad v_2, \quad \dots, \quad v_{n-1}, \tag{40}$$

entre elles et la transformation infinitésimale $X(f)$, satisfont aux identités :

$$XY_j(f) - Y_jX(f) \equiv \lambda_j X(f), \tag{41}$$

$$\lambda_j = Y_j\left(\log \frac{M}{\omega^{(j)}}\right), \tag{42}$$

$$j = 1, 2, \dots, n-1,$$

où M est le multiplicateur jacobien de l'équation (1), correspondant aux intégrales (6).

Les expressions :

$$Y_1(f), \quad Y_2(f), \quad \dots, \quad Y_{n-1}(f), \quad X(f) \tag{43}$$

sont des opérateurs indépendants de l'équation (1); elles conduisent à l'opérateur général :

$$Y(f) = \sum_{j=1}^{n-1} \Psi_j Y_j(f) + \rho X(f), \tag{44}$$

où ρ est une fonction arbitraire des variables indépendantes[2].

---

[1] G. Pfeiffer, — *Sur la permutation des intégrales d'une équation linéaire et homogène* (Ann. de Toulouse, S. 3, t. XXIII, 1931, pp. 169-178).

[2] *Ibid.*, p. 158.

L'opérateur (44) satisfait à l'identité :

$$XY(f) - YX(f) \equiv \lambda X(f), \tag{45}$$

dans laquelle :

$$\lambda = \sum_{j=1}^{n-1} \Psi_j \lambda_j + X(\rho) \tag{46}$$

est une fonction arbitraire des variables indépendantes, liée à la fonction arbitraire ρ par l'égalité (46).

Ayant trouvé les solutions particulières $r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}$ des équations :

$$X(r_1) = \lambda_1, \quad X(r_2) = \lambda_2, \quad \ldots, \quad X(r_{n-1}) = \lambda_{n-1}, \tag{47}$$

faisons les substitutions (10), (11), (12) :

$$Z_j(f) = Y_j(f) - r_j X(f). \tag{48}$$
$$j = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Nous recevrons les transformations infinitésimales :

$$Z_1(f), \quad Z_2(f), \quad \ldots, \quad Z_{n-1}(f), \quad X(f), \tag{49}$$

qui sont des solutions particulières de la relation (25). Elles ne sont pas liées par des dépendances (33) et donnent la possibilité de construire la solution générale (31) de la relation (25) :

$$\begin{aligned} Z(f) &= \sum_{j=1}^{n-1} \Psi_j Z_j(f) + \Psi_n X(f) \\ &= \sum_{=1}^{n-1} \Psi_j Y_j(f) - \left(\sum_{j=1}^{n-1} \Psi_j r_j - \Psi_n \right) X(f), \end{aligned} \tag{50}$$

$$Y_\nu(f) = \frac{L_\nu(f)}{\omega^{(\nu)}} = \frac{1}{\omega^{(\nu)}} \sum_{k=1}^{n} \beta_k^{(\nu)} \frac{\partial f}{\partial x_k}, \tag{51}$$

$$\beta_k^{(\nu)} = (-1)^{k-1} \frac{D(\varphi_1, \ldots, \varphi_{\nu-1}, v_\nu, \varphi_{\nu+1}, \ldots, \varphi_{n-1})}{D(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n)}, \tag{52}$$
$$\nu = 1, 2, \ldots, n-1.$$

A la même expression (50) nous parviendrons par la recherche de la solution :

$$r = \sum_{j=1}^{n-1} \Psi_j r_j + \rho - \Psi_n \tag{53}$$

de l'équation :

$$X(r)=\lambda,\quad X(r)=\sum_{j=1}^{n-1}\Psi_j\lambda_j+X(\rho) \tag{54}$$
$$=\sum_{j=1}^{n-1}\Psi_j X(r_j)+X(\rho)$$

en effectuant la substitution (10), (11), (12)

$$Z(f)=Y(f)-rX(f). \tag{55}$$

Ajoutant :

$$rX(f)=\left(\sum_{j=1}^{n-1}\Psi_j r_j-\Psi_n+\rho\right)X(f) \tag{56}$$

à (50), nous obtiendrons l'opérateur (44) de l'équation (1). Multipliant (50) par un multiplicateur w du système (2), on trouve la transformation infinitésimale :

$$Y(f)=w\left\{\sum_{j=1}^{n-1}\Psi_j Z_j(f)+\Psi_n X(f)\right\}, \tag{57}$$

assignant la forme symbolique (16) de l'invariant intégral (15) du système (2).

Quelques mots sur l'invariant intégral, le plus général, d'ordre $n-1$, attaché aux trajectoires (2).

La condition, imposée à la forme (16) par cette autre condition, que l'intégrale (15) soit l'invariant intégral, attaché aux trajectoires (2) (¹), s'énonce par

$$\frac{\eta_1}{\xi_1}=\frac{\eta_2}{\xi_2}=\ldots\frac{\eta_n}{\xi_n}=\omega, \tag{58}$$

les ω étant des fonctions des variables indépendantes.

Les transformations infinitésimales (4), (3) se distinguent par le multiplicateur ω :

$$Y(f)=\omega X(f). \tag{59}$$

(¹) Ed. Goursat. — *Leçons sur le problème de Pfaff* (Paris, 1922, pp. 236-238).

De là résulte, que l'expression (57) donnera le plus général invariant intégral d'ordre $n-1$, attaché aux trajectoires (2), si :

$$w\left\{\sum_{j=1}^{n-1}\Psi_j Z_j(f)+\Psi_n X(f)\right\}=\omega X(f), \tag{60}$$

$$\sum_{j=1}^{n-1}\Psi_j Z_j(f)=\left(\frac{\omega}{w}-\Psi_n\right)X(f), \tag{61}$$

$$\sum_{j=1}^{n-1}\Psi_j Y_j(f)=\left(\frac{\omega}{w}-\Psi_n+\sum_{j=1}^{n-1}\Psi_j r_j\right)X(f). \tag{62}$$

Grâce à ce que les transformations infinitésimales (43) sont indépendantes, on a :

$$\Psi_1=\Psi_2=\ldots=\Psi_{n-1}=0, \qquad \omega=w\Psi_n, \tag{63}$$

$$Y(f)=w\Psi_n X(f). \tag{64}$$