

LOUIS ROY

Sur la déformation d'une ligne élastique autour d'un de ses points

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 3^e série, tome 27 (1935), p. 171-199

http://www.numdam.org/item?id=AFST_1935_3_27__171_0

© Université Paul Sabatier, 1935, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LA DÉFORMATION D'UNE LIGNE ÉLASTIQUE

AUTOUR D'UN DE SES POINTS

Par M. Louis ROY

INTRODUCTION

Dans deux Mémoires antérieurs⁽¹⁾, nous avons vu que le calcul des composantes U , V , W du déplacement élastique, dans le voisinage d'un point M de l'axe longitudinal d'une ligne élastique, fait intervenir, par intégration immédiate de certaines formules dues à Kirchhoff, trois fonctions \mathcal{U} , \mathcal{V} , \mathcal{W} qui, dans le cas particulier d'une ligne à quatre paramètres, représentent les composantes du déplacement élastique en un point de la section droite relative au point M . Comme nous avons alors principalement en vue l'expression du potentiel thermodynamique interne de la ligne, qui ne fait pas intervenir directement les fonctions \mathcal{V} , \mathcal{W} , nous n'avons rien dit de leur calcul effectif. D'autre part, en ce qui concerne la détermination de la fonction \mathcal{U} , ainsi que des dilatations transversales et du glissement transversal, qui font intervenir les dérivées de \mathcal{V} , \mathcal{W} , nous avons implicitement supposé la continuité des coefficients d'élasticité dans toute l'étendue de chaque profil. Or cette hypothèse est évidemment en défaut pour une ligne constituée à la manière d'une poutre en béton armé. Nous avons donc, dans ce nouveau travail, repris et complété la question dans l'hypothèse de la discontinuité possible des coefficients d'élasticité le long de certaines courbes tracées dans chaque profil.

Nous terminons par une application à un problème d'équilibre, auquel nous

⁽¹⁾ L. Roy, *Sur les équations générales des lignes élastiques et la propagation des ondes*, Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 3^e série, t. XVIII, 1926, p. 117 à 195. — *Sur les bases théoriques de la Résistance des matériaux*, Journal de l'École Polytechnique, 2^e série, 30^e cahier, 1932, p. 153 à 190.

avons été récemment conduit à propos de la construction d'un étalon de self-inductance destiné à une nouvelle détermination de l'ohm.

Les numéros de formules ou de pages entre crochets, auxquels nous renvoyons quelquefois, sont ceux de notre précédent Mémoire *Sur les bases théoriques de la Résistance des matériaux*.

Ce Mémoire a été résumé en une Note insérée sous le même titre aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (séance du 18 février 1935).

1. Préliminaires. — On sait que la configuration d'une ligne élastique, à l'instant t , est considérée comme suffisamment définie par la connaissance d'une suite continue de trièdres trirectangles $Muvw$, dont le lieu des sommets M est l'axe longitudinal M_1M_2 et dont l'un des plans de coordonnées, uMv par exemple, est tangent en M à un feuillet matériel arbitrairement choisi passant par ce point, l'un des deux axes correspondants, Mu par exemple, restant en outre tangent en M à l'une des fibres de ce feuillet. Si l'on choisit un feuillet passant par l'axe longitudinal, dont l'élément en M devient ainsi une fibre de ce feuillet, et si l'on prend l'axe Mu tangent en M à cette fibre, c'est-à-dire à l'axe longitudinal, l'orientation du trièdre $Muvw$ ou, pour abrégé, du trièdre (M) autour de M ne dépend plus alors que d'un seul paramètre φ , de sorte que la configuration géométrique de la ligne élastique par rapport à un trièdre fixe trirectangle $Oxyz$ se trouve complètement définie analytiquement par les quatre paramètres x, y, z, φ , les trois premiers étant les coordonnées de M . Ces quatre paramètres doivent être regardés comme des fonctions continues du temps t et d'une variable géométrique, qui est l'arc $\widehat{m_1m} = \omega$ de l'axe longitudinal dans son *état primitif*, correspondant à l'arc $\widehat{M_1M} = s$ de l'axe longitudinal dans son *état actuel*. Comme état primitif, nous conviendrons de prendre l'état naturel, c'est-à-dire l'état d'équilibre que prend la ligne quand elle n'est soumise à aucune force extérieure et quand tous ses points sont portés à une même température absolue T_0 .

La ligne élastique, telle qu'elle vient d'être définie, est ce que nous avons appelé *une ligne à quatre paramètres*, pour la distinguer de la *ligne à six paramètres*, dans laquelle l'orientation du feuillet matériel autour de M est quelconque et dépend, en conséquence, de trois paramètres θ, φ, ψ au lieu d'un seul φ .

A l'élément $mm' = d\omega$, compté sur l'axe longitudinal primitif, correspond

l'élément $MM' = ds$ compté sur l'état actuel, de sorte que la dilatation en M de l'axe longitudinal à partir de l'état primitif est

$$(1) \quad \lambda = \frac{ds}{d\omega} - 1.$$

Considérons à l'instant t , sur une ligne à quatre paramètres, les deux trièdres infiniment voisins (M) et (M'). On peut amener (M) en coïncidence avec (M') par la translation $ds = (1 + \lambda)d\omega$ dirigée suivant Mu et par une certaine rotation autour de M, dont nous désignerons par $(p, q, r)d\omega$ les composantes suivant les axes mobiles $Muvw$ et l'on a

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} p = \alpha_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial \omega} + \beta_2 \frac{\partial \beta_1}{\partial \omega} + \gamma_2 \frac{\partial \gamma_1}{\partial \omega}, \\ q = \alpha \frac{\partial \alpha_2}{\partial \omega} + \beta \frac{\partial \beta_2}{\partial \omega} + \gamma \frac{\partial \gamma_2}{\partial \omega}, \\ r = \alpha_1 \frac{\partial \alpha}{\partial \omega} + \beta_1 \frac{\partial \beta}{\partial \omega} + \gamma_1 \frac{\partial \gamma}{\partial \omega}, \end{array} \right.$$

$\alpha, \beta, \gamma; \alpha_1, \beta_1, \gamma_1; \alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ désignant les cosinus directeurs des axes Mu, Mv, Mw par rapport aux axes fixes $Oxyz$. De même, dans l'état primitif, on peut amener le trièdre (m) en coïncidence avec le trièdre infiniment voisin (m') par la translation $d\omega$ dirigée suivant mu et par une certaine rotation, dont nous désignerons par $(p_0, q_0, r_0)d\omega$ les composantes suivant les axes mobiles primitifs $muvw$.

On reconnaît alors que la déformation en M de la ligne élastique dans son état actuel par rapport à son état primitif est caractérisée par les quatre fonctions

$$(3) \quad \lambda; \quad p - p_0, \quad q - q_0, \quad r - r_0$$

de ω, t et que le potentiel thermodynamique interne f du tronçon de ligne qui, dans l'état primitif, a pour hauteur $mm' = d\omega$ et pour bases les deux profils en m et m' , est une fonction des quatre déformations (3), ainsi que de ω et de la température θ au point M comptée à partir de la température primitive T_0 . En outre, l'effort longitudinal d'extension ou de compression \mathcal{R}_u au point M, le couple de torsion \mathcal{C}_u et les composantes $\mathcal{C}_v, \mathcal{C}_w$ suivant Mv, Mw du moment fléchissant au même point sont données par les formules

$$(4) \quad \mathcal{R}_u = -f'_\lambda, \quad \mathcal{C}_u = -f'_p, \quad \mathcal{C}_v = -f'_q, \quad \mathcal{C}_w = -f'_r$$

et l'on a :

I. En chaque point M de l'axe longitudinal, de longueur primitive $\widehat{m_1 m_2} = l$, c'est-à-dire pour $0 \leq \omega \leq l$, les six équations indéfinies

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathcal{R}_u}{\partial \omega} - r \mathcal{R}_v + q \mathcal{R}_w = \mathcal{X}_e + \mathcal{X}_i, \\ \frac{\partial \mathcal{R}_v}{\partial \omega} - p \mathcal{R}_w + r \mathcal{R}_u = \mathcal{Y}_e + \mathcal{Y}_i, \\ \frac{\partial \mathcal{R}_w}{\partial \omega} - q \mathcal{R}_u + p \mathcal{R}_v = \mathcal{Z}_e + \mathcal{Z}_i; \\ \frac{\partial \mathcal{C}_u}{\partial \omega} - r \mathcal{C}_v + q \mathcal{C}_w = \mathcal{L}_e + \mathcal{L}_i, \\ \frac{\partial \mathcal{C}_v}{\partial \omega} - p \mathcal{C}_w + r \mathcal{C}_u - (1 + \nu) \mathcal{R}_w = \mathcal{A}_e + \mathcal{A}_i, \\ \frac{\partial \mathcal{C}_w}{\partial \omega} - q \mathcal{C}_u + p \mathcal{C}_v + (1 + \nu) \mathcal{R}_v = \mathcal{B}_e + \mathcal{B}_i, \end{array} \right.$$

$\mathcal{X}_e, \mathcal{Y}_e, \mathcal{Z}_e; \mathcal{L}_e, \mathcal{A}_e, \mathcal{B}_e$ désignant les composantes suivant les axes $Muvw$, et par unité de longueur comptée sur l'axe longitudinal primitif, de la force et du couple extérieurs au point M , c'est-à-dire provenant de la réduction par rapport à M des forces extérieures appliquées au tronçon relatif à l'élément ds ; $\mathcal{X}_i, \mathcal{Y}_i, \mathcal{Z}_i; \mathcal{L}_i, \mathcal{A}_i, \mathcal{B}_i$ les éléments analogues relatifs aux forces d'inertie; $\mathcal{R}_v, \mathcal{R}_w$ deux paramètres auxiliaires qui représentent les composantes suivant Mv, Mw de l'effort tranchant au point M ;

II. A l'origine M_1 de l'axe longitudinal, c'est-à-dire pour $\omega = 0$, les six conditions aux limites

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{X}_1 - \mathcal{R}_{u1} = 0, \quad \mathcal{Y}_1 - \mathcal{R}_{v1} = 0, \quad \mathcal{Z}_1 - \mathcal{R}_{w1} = 0, \\ \mathcal{L}_1 - \mathcal{C}_{u1} = 0, \quad \mathcal{A}_1 - \mathcal{C}_{v1} = 0, \quad \mathcal{B}_1 - \mathcal{C}_{w1} = 0, \end{array} \right.$$

$\mathcal{X}_1, \mathcal{Y}_1, \dots, \mathcal{B}_1$ étant les composantes suivant les axes M_1uvw de la force et du couple extérieurs appliqués à l'origine M_1 de la ligne et provenant de la réduction par rapport à M_1 des forces extérieures appliquées à la base correspondante;

III. A l'extrémité M_2 de l'axe longitudinal, c'est-à-dire pour $\omega = l$, les six conditions aux limites

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{X}_2 + \mathcal{R}_{u2} = 0, \quad \mathcal{Y}_2 + \mathcal{R}_{v2} = 0, \quad \mathcal{Z}_2 + \mathcal{R}_{w2} = 0, \\ \mathcal{L}_2 + \mathcal{C}_{u2} = 0, \quad \mathcal{A}_2 + \mathcal{C}_{v2} = 0, \quad \mathcal{B}_2 + \mathcal{C}_{w2} = 0, \end{array} \right.$$

$\mathcal{X}_2, \mathcal{Y}_2, \dots, \mathcal{B}_2$ étant les éléments analogues aux précédents $\mathcal{X}_1, \mathcal{Y}_1, \dots, \mathcal{B}_1$,

mais relatifs à l'extrémité M_2 . En outre, dans les conditions (6) et (7), $\mathcal{R}_u, \dots; \mathcal{R}_{u_2}, \dots$ représentent les valeurs de \mathcal{R}_u, \dots en M_1 et M_2 .

Dans toutes ces équations, tant indéfinies qu'aux limites, les quantités $\mathcal{R}_u, \mathcal{C}_u, \mathcal{C}_v, \mathcal{C}_w$ doivent recevoir leurs valeurs (4); on a ainsi six équations indéfinies (5) entre les sept fonctions

$$x, \quad y, \quad z, \quad \varphi, \quad \theta, \quad \mathcal{R}_v, \quad \mathcal{R}_w$$

de ω, t . Pour achever la mise en équations du problème, il faut adjoindre aux précédentes la relation supplémentaire et les deux conditions aux limites correspondantes (*).

Les équations indéfinies (5) et les conditions aux limites (6) et (7) sont générales, en ce sens qu'elles s'appliquent aussi bien à une ligne affectée de viscosité qu'à une ligne dénuée de viscosité. Au contraire, les expressions (4) supposent essentiellement la ligne dénuée de viscosité; car, dans l'hypothèse contraire, les seconds membres de ces formules doivent être complétés par les actions correspondantes de viscosité (**). Toutefois les expressions (4) restent générales dans le cas de l'équilibre, puisqu'alors les actions de viscosité sont nulles.

Les développements qui vont suivre resteront donc entièrement généraux, sauf dans l'application des formules (4), qui nous fourniront les expressions (42) et (57), valables seulement à l'équilibre ou pour une ligne dénuée de viscosité.

2. Composantes de la déformation autour d'un point. — Par suite de la déformation élastique de chaque tronçon de ligne, le point (u, v, w) rapporté au trièdre primitif $muvw$ est venu, à l'instant t , au point $(u + U, v + V, w + W)$ rapporté au trièdre actuel $Muvw$, les composantes U, V, W de la déformation élastique au point considéré vérifiant les formules de Kirchhoff (**)

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U}{\partial u} = \varrho + (q - q_0)w - (r - r_0)v, \\ \frac{\partial V}{\partial u} = (r - r_0)u - (p - p_0)w, \\ \frac{\partial W}{\partial u} = (p - p_0)v - (q - q_0)u, \end{array} \right.$$

(*) L. ROY, *Sur les équations générales des lignes élastiques et la propagation des ondes*, p. 175.

(**) L. ROY, *loc. cit.*, p. 171.

(***) L. ROY, *loc. cit.*, p. 175.

d'où l'on tire en intégrant

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} U = \lambda u + (q - q_0)wu - (r - r_0)wv + \mathcal{U}(v, w; \omega, t), \\ V = (r - r_0)\frac{u^2}{2} - (p - p_0)wu + \mathcal{V}(v, w; \omega, t), \\ W = (p - p_0)wv - (q - q_0)\frac{u^2}{2} + \mathcal{W}(v, w; \omega, t), \end{array} \right.$$

\mathcal{U} , \mathcal{V} , \mathcal{W} désignant trois fonctions indépendantes de u , mais pouvant dépendre de v , w ; ω , t , qui représentent les composantes du déplacement élastique en un point (v, w) du plan mvw , c'est-à-dire de la section droite primitive de la ligne. La connaissance de ces trois fonctions détermine donc la configuration d'une section droite déformée.

Tout d'abord, les fonctions \mathcal{U} , \mathcal{V} , \mathcal{W} satisfont à certaines conditions à l'origine résultant du choix du trièdre mobile. En effet, le point M étant lié à la matière, le déplacement (U, V, W) doit s'annuler pour $(u, v, w) = 0$. D'autre part, le point $(du, 0, 0)$ infiniment voisin de m reste après déformation sur Mu , puisque cet axe est mené tangentiellement à l'axe longitudinal et, comme le plan uMv reste tangent en M à un même feuillet matériel, le point $(du, dv, 0)$ infiniment voisin de m reste après déformation dans le plan uMv ; d'où

$$V(du, 0, 0) = 0, \quad W(du, 0, 0) = 0, \quad W(du, dv, 0) = 0,$$

de sorte qu'on doit avoir, pour $(u, v, w) = 0$,

$$\left(U, V, W; \frac{\partial V}{\partial u}, \frac{\partial W}{\partial u}, \frac{\partial W}{\partial v} \right) = 0.$$

Les quatrième et cinquième de ces conditions sont vérifiées d'elles-mêmes. d'après les deux dernières (8) et les quatre autres se réduisent, d'après (9), à

$$(10) \quad \left(\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}, \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial v} \right) = 0, \quad \text{pour } (v, w) = 0.$$

Les trois dilatations et glissements $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3; g_1, g_2, g_3$ en un point (u, v, w) du tronçon sont enfin, d'après (9),

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = \frac{\partial U}{\partial u} = \lambda + (q - q_0)w - (r - r_0)v, \\ \lambda_2 = \frac{\partial V}{\partial v} = \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial v}, \\ \lambda_3 = \frac{\partial W}{\partial w} = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial w}, \\ g_1 = \frac{\partial W}{\partial v} + \frac{\partial V}{\partial w} = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial v} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial w}, \\ g_2 = \frac{\partial U}{\partial w} + \frac{\partial W}{\partial u} = (p - p_0)v + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial w}, \\ g_3 = \frac{\partial V}{\partial u} + \frac{\partial U}{\partial v} = -(p - p_0)w + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial v}. \end{array} \right.$$

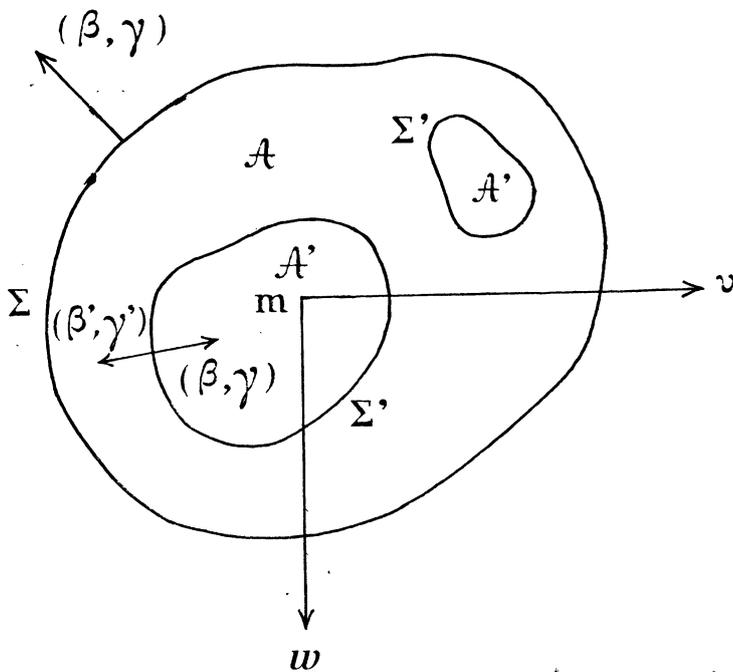


FIG. 1.

Cela posé, nous allons déterminer les fonctions $\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}$ qui, d'après (9) et (11), achèvent de faire connaître le déplacement et les déformations élastiques, en supposant que chaque section droite est un plan de symétrie de contexture et, en

outre, que la ligne élastique considérée peut résulter de la juxtaposition de plusieurs lignes de substances différentes latéralement accolées. Pour ne pas compliquer inutilement les formules et nous placer dans un cas analogue à celui des pièces en béton armé, nous nous limiterons au cas de deux substances enrobées l'une dans l'autre. Le profil primitif S sera ainsi supposé limité par une courbe fermée Σ tracée dans le plan mvw , à l'intérieur de laquelle sont tracées d'autres courbes fermées Σ' ; l'une des substances correspondra à l'aire intérieure \mathcal{A} à Σ et extérieure aux courbes Σ' , l'autre substance, aux aires \mathcal{A}' intérieures aux courbes Σ' . Dans ces conditions, les coefficients d'élasticité \mathcal{A}_{ij} seront, dans chaque profil, des fonctions continues de v, w , sauf à la traversée des courbes Σ' où ils pourront être discontinus. Nous affecterons d'un accent les quantités relatives aux aires \mathcal{A}' et nous désignerons par β, γ les cosinus directeurs de la demi-normale extérieure au contour $\Sigma + \Sigma'$ de l'aire \mathcal{A} , par β', γ' ceux de la demi-normale extérieure aux contours Σ' des aires \mathcal{A}' (*fig. 1*).

3. Détermination de la fonction $\mathcal{U}(v, w; \omega, t)$. — La fonction \mathcal{U} est déterminée par la première des équations [27] et [28] (*) dans $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ et sur Σ et par deux des conditions qui expriment la continuité de la pression et du déplacement à la traversée des courbes Σ' , soit

Dans \mathcal{A} et \mathcal{A}' :

$$\frac{\partial T_3}{\partial v} + \frac{\partial T_2}{\partial w} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial T'_3}{\partial v} + \frac{\partial T'_2}{\partial w} = 0,$$

Sur Σ :

$$\beta T_3 + \gamma T_2 = 0,$$

Sur Σ' :

$$\beta T_3 + \gamma T_2 + \beta' T'_3 + \gamma' T'_2 = 0, \quad \mathcal{U} = \mathcal{U}'.$$

Ces équations deviennent d'après les expressions de T_2, T_3

$$T_2 = \mathcal{A}_{55} g_2 + \mathcal{A}_{56} g_3, \quad T_3 = \mathcal{A}_{56} g_2 + \mathcal{A}_{66} g_3$$

résultant de l'hypothèse que chaque section droite est un plan de symétrie de contexture, d'après les deux dernières (11) et en posant

$$(12) \quad \mathcal{U} = (p - p_0) \mathcal{F},$$

(*) Nous rappelons que les numéros entre crochets se rapportent à notre Mémoire *Sur les bases théoriques de la Résistance des matériaux*.

Dans \mathcal{A} :

$$(13) \quad \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial v} \left[\mathcal{A}_{vs} \left(v + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial w} \right) + \mathcal{A}_{ss} \left(-w + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v} \right) \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial w} \left[\mathcal{A}_{vs} \left(v + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial w} \right) + \mathcal{A}_{ss} \left(-w + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v} \right) \right] = 0, \end{aligned}$$

Dans \mathcal{A}' :

$$(14) \quad \frac{\partial}{\partial v} \left[\mathcal{A}'_{vs} \left(v + \frac{\partial \mathcal{F}'}{\partial w} \right) + \dots \right] + \frac{\partial}{\partial w} \left[\mathcal{A}'_{vs} \left(v + \frac{\partial \mathcal{F}'}{\partial w} \right) + \dots \right] = 0,$$

Sur Σ :

$$(15) \quad \begin{aligned} & \beta \left[\mathcal{A}_{vs} \left(v + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial w} \right) + \mathcal{A}_{ss} \left(-w + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v} \right) \right] \\ & + \gamma \left[\mathcal{A}_{vs} \left(v + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial w} \right) + \mathcal{A}_{ss} \left(-w + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v} \right) \right] = 0, \end{aligned}$$

Sur Σ' :

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} & \beta \left[\mathcal{A}_{vs} \left(v + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial w} \right) + \mathcal{A}_{ss} \left(-w + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v} \right) \right] \\ & + \gamma \left[\mathcal{A}_{vs} \left(v + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial w} \right) + \mathcal{A}_{ss} \left(-w + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v} \right) \right] \\ & + \beta' \left[\mathcal{A}'_{vs} \left(v + \frac{\partial \mathcal{F}'}{\partial w} \right) + \mathcal{A}'_{ss} \left(-w + \frac{\partial \mathcal{F}'}{\partial v} \right) \right] \\ & + \gamma' \left[\mathcal{A}'_{vs} \left(v + \frac{\partial \mathcal{F}'}{\partial w} \right) + \mathcal{A}'_{ss} \left(-w + \frac{\partial \mathcal{F}'}{\partial v} \right) \right] = 0, \end{aligned} \right. \\ \mathcal{F} = \mathcal{F}'.$$

Les équations de (13) à (16) déterminent les fonctions \mathcal{F} , \mathcal{F}' sans ambiguïté. Pour le démontrer, il suffit d'établir que si \mathcal{F}_0 et \mathcal{F}'_0 sont une solution et si l'on pose

$$(17) \quad \mathcal{F} = \mathcal{F}_0 + \mathcal{F}_1, \quad \mathcal{F}' = \mathcal{F}'_0 + \mathcal{F}'_1,$$

les fonctions \mathcal{F}_1 , \mathcal{F}'_1 sont nécessairement nulles.

En effet, si l'on effectue la substitution (17) dans ces équations et si l'on tient compte de ce que \mathcal{F}_0 et \mathcal{F}'_0 en sont une solution, il vient

Dans \mathcal{A} :

$$(18) \quad \frac{\partial}{\partial v} \left(\mathcal{A}_{56} \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial w} + \mathcal{A}_{66} \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left(\mathcal{A}_{55} \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial w} + \mathcal{A}_{56} \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial v} \right) = 0,$$

Dans \mathcal{A}' :

$$(19) \quad \frac{\partial}{\partial v} \left(\mathcal{A}'_{56} \frac{\partial \mathcal{F}'_1}{\partial w} + \mathcal{A}'_{66} \frac{\partial \mathcal{F}'_1}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left(\mathcal{A}'_{55} \frac{\partial \mathcal{F}'_1}{\partial w} + \mathcal{A}'_{56} \frac{\partial \mathcal{F}'_1}{\partial v} \right) = 0,$$

Sur Σ :

$$(20) \quad \beta \left(\mathcal{A}_{56} \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial w} + \mathcal{A}_{66} \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial v} \right) + \gamma \left(\mathcal{A}_{55} \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial w} + \mathcal{A}_{56} \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial v} \right) = 0,$$

Sur Σ' :

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} \beta \left(\mathcal{A}_{56} \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial w} + \mathcal{A}_{66} \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial v} \right) + \gamma \left(\mathcal{A}_{55} \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial w} + \mathcal{A}_{56} \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial v} \right) \\ + \beta' \left(\mathcal{A}'_{56} \frac{\partial \mathcal{F}'_1}{\partial w} + \mathcal{A}'_{66} \frac{\partial \mathcal{F}'_1}{\partial v} \right) + \gamma' \left(\mathcal{A}'_{55} \frac{\partial \mathcal{F}'_1}{\partial w} + \mathcal{A}'_{56} \frac{\partial \mathcal{F}'_1}{\partial v} \right) = 0, \\ \mathcal{F}_1 = \mathcal{F}'_1. \end{array} \right.$$

Multiplions alors (18) et (19) respectivement par \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}'_1 , puis ajoutons membre à membre; le résultat s'écrit

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial v} \left[\mathcal{F}_1 \left(\mathcal{A}_{56} \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial w} + \mathcal{A}_{66} \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial v} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial w} \left[\mathcal{F}_1 \left(\mathcal{A}_{55} \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial w} + \mathcal{A}_{56} \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial v} \right) \right] \\ & - \left(\mathcal{A}_{56} \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial w} + \mathcal{A}_{66} \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial v} \right) \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial v} - \left(\mathcal{A}_{55} \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial w} + \mathcal{A}_{56} \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial v} \right) \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial w} + \dots = 0, \end{aligned}$$

les points représentant deux lignes analogues qui se déduisent des deux premières en y accentuant \mathcal{F}_1 et les \mathcal{A}_{ij} . Multiplions ensuite par dS et intégrons dans toute l'étendue $\mathcal{A} + \mathcal{A}'$ du profil. Les intégrales qui correspondent à la première et à la troisième lignes se transforment, d'après la formule de Green, en intégrales curvilignes étendues aux contours Σ et Σ' ; celle qui est étendue à Σ est nulle d'après (20) et celle qui est étendue à Σ' est nulle d'après (21); il reste donc

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{A}} \left[\mathcal{A}_{55} \left(\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial w} \right)^2 + 2 \mathcal{A}_{56} \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial v} \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial w} + \mathcal{A}_{66} \left(\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial v} \right)^2 \right] dS \\ & + \int_{\mathcal{A}'} \left[\mathcal{A}'_{55} \left(\frac{\partial \mathcal{F}'_1}{\partial w} \right)^2 + 2 \mathcal{A}'_{56} \frac{\partial \mathcal{F}'_1}{\partial v} \frac{\partial \mathcal{F}'_1}{\partial w} + \mathcal{A}'_{66} \left(\frac{\partial \mathcal{F}'_1}{\partial v} \right)^2 \right] dS = 0. \end{aligned}$$

Mais la première quantité entre crochets est la forme quadratique définie positive $2\psi_2(g_2, g_3)$, qui est l'une des parties du potentiel thermodynamique interne par unité de volume [23], où l'on aurait remplacé les glissements g_2, g_3 respectivement par $\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial w}, \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial v}$. L'égalité précédente exige donc que \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}'_1 soient constants en chaque point de \mathcal{A} et de \mathcal{A}' , de sorte que, d'après la deuxième (21), cette valeur constante est la même dans toute l'étendue du profil. Comme enfin la fonction \mathcal{F} doit s'annuler à l'origine d'après la première (10) et (12), la seule solution des équations de (18) à (21) est $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}'_1) = 0$, ce qui établit l'unicité de la solution des équations de (13) à (16).

La fonction \mathcal{F} ayant ainsi été déterminée, on a d'après (11)

$$(22) \quad g_2 = (p - p_0) \left(v + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial w} \right), \quad g_3 = (p - p_0) \left(-w + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v} \right).$$

4. Détermination des fonctions $\mathcal{V}(v, w; \omega, t)$ et $\mathcal{W}(v, w; \omega, t)$. — Dans notre précédent travail, les déformations $\lambda_2, \lambda_3, g_1$ ont été calculées en fonction de λ_1 et de la température θ par la résolution des équations [50] fournies par les trois conditions de Saint-Venant

$$(23) \quad N_2 = 0, \quad N_3 = 0, \quad T_1 = 0,$$

qui ont été établies dans l'hypothèse de la continuité des coefficients d'élasticité dans toute l'étendue du profil. Nous allons voir que ces conditions subsistent si certains de ces coefficients sont discontinus à la traversée des courbes Σ' .

Le point de départ de la démonstration des conditions (23) est que F et G étant deux fonctions continues quelconques de v, w dans toute l'étendue du profil S, on a

$$(24) \quad \int \left[N_2 \frac{\partial F}{\partial v} + N_3 \frac{\partial G}{\partial w} + T_1 \left(\frac{\partial G}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial w} \right) \right] dS = 0$$

[p. 172]. Cette égalité reste valable dans le cas de l'existence des courbes Σ' , les fonctions F et G restant toutefois continues à la traversée de ces courbes. On a, en effet, d'après [27] et [28],

Dans \mathcal{A} :

$$\frac{\partial N_2}{\partial v} + \frac{\partial T_1}{\partial w} = 0, \quad \frac{\partial T_1}{\partial v} + \frac{\partial N_3}{\partial w} = 0;$$

Dans \mathcal{A}' :

$$\frac{\partial N'_2}{\partial v} + \frac{\partial T'_1}{\partial w} = 0, \quad \frac{\partial T'_1}{\partial v} + \frac{\partial N'_3}{\partial w} = 0;$$

Sur Σ :

$$\beta N_2 + \gamma T_1 = 0, \quad \beta T_1 + \gamma N_3 = 0;$$

Sur Σ' :

$$\begin{aligned} \beta N_2 + \gamma T_1 + \beta' N'_2 + \gamma' T'_1 &= 0, \\ \beta T_1 + \gamma N_3 + \beta' T'_1 + \gamma' N'_3 &= 0, \end{aligned}$$

ces deux dernières exprimant la continuité des deux autres composantes de la pression à la traversée des courbes Σ' .

Cela posé, l'intégrale (24) s'écrit encore par application de la formule de Green

$$\begin{aligned} & - \int_{\mathcal{A}} \left[F \left(\frac{\partial N_2}{\partial v} + \frac{\partial T_1}{\partial w} \right) + G \left(\frac{\partial T_1}{\partial v} + \frac{\partial N_3}{\partial w} \right) \right] dS \\ & - \int_{\mathcal{A}'} \left[F \left(\frac{\partial N'_2}{\partial v} + \frac{\partial T'_1}{\partial w} \right) + G \left(\frac{\partial T'_1}{\partial v} + \frac{\partial N'_3}{\partial w} \right) \right] dS \\ & + \int \left[F(\beta N_2 + \gamma T_1) + G(\beta T_1 + \gamma N_3) \right] d\Sigma \\ & + \int \left[F(\beta N_2 + \gamma T_1 + \beta' N'_2 + \gamma' T'_1) \right. \\ & \quad \left. + G(\beta T_1 + \gamma N_3 + \beta' T'_1 + \gamma' N'_3) \right] d\Sigma' \end{aligned}$$

et chaque parenthèse est nulle d'après les équations précédentes.

Dès lors, les raisonnements faits pour aboutir aux conditions (23) subsistent sous la seule et même restriction que les trois coefficients

$$(25) \quad \frac{(A_{12}, A_{13}, A_{14})}{A_{11}}$$

soient constants dans toute l'étendue du profil, les A_{ij} étant les coefficients qui figurent dans les expressions des six déformations en fonction des composantes de pression, tandis que les \mathcal{A}_{ij} sont ceux qui figurent dans les expressions des composantes de pression en fonction des déformations. En particulier, lorsque [p. 175] on considère F et G comme les composantes d'un déplacement élastique, ces compo-

santes sont effectivement continues à la traversée des courbes Σ' . Les expressions [51] de $\lambda_2, \lambda_3, g_1$ en fonction de λ_1 et de θ subsistent donc, soit

$$(26) \quad \begin{cases} \lambda_2 = A_{12} E \lambda_1 + (D_2 - A_{12} E D_1) \theta, \\ \lambda_3 = A_{13} E \lambda_1 + (D_3 - A_{13} E D_1) \theta, \\ g_1 = A_{14} E \lambda_1 + (G_1 - A_{14} E D_1) \theta, \end{cases}$$

$E = \frac{1}{A_{11}}$ désignant le module de Young au point (v, w) du profil parallèlement à l'axe longitudinal et D_1, D_2, D_3, G_1 les quatre coefficients de dilatation et de glissement thermiques définis, en fonction des coefficients directs A_i et réciproques A_{ij} , au moyen des formules [43]. On voit que, dans les expressions (26), les coefficients de λ_1 et de D_1 sont précisément les trois coefficients (25) constants par hypothèse dans toute l'étendue du profil. Rappelons que D_1 est nécessairement de la forme

$$(27) \quad D_1 = D + av + bw,$$

D, a, b étant des constantes pour chaque substance et que D_2, D_3, G_1 peuvent être regardés comme des fonctions de v, w seulement, leurs dérivées par rapport à w étant par hypothèse négligeables [p. 170]. Les seconds membres de (26), où λ_1 est remplacé par sa valeur (11) sont ainsi des fonctions connues de v, w , qui dépendent en outre de ω, t par l'intermédiaire de $\lambda, q - q_0, r - r_0, \theta$ et des coefficients d'élasticité.

D'après les deuxième, troisième et quatrième (11), les fonctions \mathcal{U}, \mathcal{W} sont donc déterminées par les trois équations

$$(28) \quad \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial v} = \lambda_2, \quad \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial w} = \lambda_3, \quad \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial v} + \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial w} = g_1,$$

dont les seconds membres sont donnés par (26). Tout d'abord, si l'on dérive la troisième par rapport à v et à w , il vient en tenant compte des deux premières

$$\frac{\partial^2 \lambda_3}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial w^2} = \frac{\partial^2 g_1}{\partial v \partial w},$$

ce qui est l'une des conditions de Saint-Venant, soit encore, d'après (26) et puisque $(A_{12}, A_{13}, A_{14})E$ sont des constantes et λ_1, D_1 des fonctions linéaires en v, w ,

$$(29) \quad \frac{\partial^2 D_3}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 D_2}{\partial w^2} = \frac{\partial^2 G_1}{\partial v \partial w}.$$

On a ensuite, d'après les deux premières (28),

$$(30) \quad \mathfrak{V} = \int \lambda_2 dv + G(w), \quad \mathfrak{W} = \int \lambda_3 dw + H(v),$$

G et H étant deux fonctions qui, abstraction faite des deux autres variables ω , t , ne dépendent respectivement que de w et de v . En substituant ce résultat dans la troisième (28), il vient

$$(31) \quad \frac{dH}{dv} + \frac{dG}{dw} = g, - \int \frac{\partial \lambda_3}{\partial v} dw - \int \frac{\partial \lambda_2}{\partial w} dv,$$

ce qui exprime que le second membre doit être la somme de deux fonctions ne dépendant respectivement que de v et de w , c'est-à-dire de la forme

$$\mathfrak{H}(v) + \mathfrak{G}(w),$$

\mathfrak{G} et \mathfrak{H} étant ainsi deux fonctions connues. L'équation (31) devient donc

$$\frac{dH}{dv} - \mathfrak{H}(v) + \frac{dG}{dw} - \mathfrak{G}(w) = 0$$

et, comme les variables v , w sont indépendantes, cela exige qu'on ait

$$\frac{dH}{dv} - \mathfrak{H}(v) = A, \quad \frac{dG}{dw} - \mathfrak{G}(w) = -A,$$

A étant une constante arbitraire. Les fonctions G et H s'en déduisent immédiatement, de sorte que la solution générale des équations (28) est en définitive et d'après (30)

$$(32) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{V} = \int \lambda_2(v, w) dv + \int \mathfrak{G}(w) dw - Aw + B, \\ \mathfrak{W} = \int \lambda_3(v, w) dw + \int \mathfrak{H}(v) dv + Av + C, \end{array} \right.$$

B et C désignant deux autres constantes arbitraires, qui dispensent de laisser subsister une constante additive dans chaque intégrale indéfinie des seconds membres. On voit que (B, C) représente une translation d'ensemble et A une rotation d'ensemble autour de l'origine.

Commençons par appliquer les formules générales (32) à la région \mathfrak{A} et formons à cet effet le second membre de (31) afin de déterminer les fonctions \mathfrak{G} et \mathfrak{H} .

On a, d'après (26), (11) et (27)

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \lambda_3}{\partial v} &= -A_{13} E (r - r_0) + \left(\frac{\partial D_3}{\partial v} - A_{13} E a \right) \theta, \\
 \frac{\partial \lambda_2}{\partial w} &= A_{12} E (q - q_0) + \left(\frac{\partial D_2}{\partial w} - A_{12} E b \right) \theta, \\
 (33) \quad g_1 - \int \frac{\partial \lambda_3}{\partial v} dw - \int \frac{\partial \lambda_2}{\partial w} dv &= \\
 A_{14} E [\lambda + (q - q_0)w - (r - r_0)v] + [G_1 - A_{14} E (D + av + bw)] \theta & \\
 + A_{13} E (r - r_0)w - \left(\int \frac{\partial D_3}{\partial v} dw - A_{13} E a w \right) \theta & \\
 - A_{12} E (q - q_0)v - \left(\int \frac{\partial D_2}{\partial w} dv - A_{12} E b v \right) \theta. &
 \end{aligned}$$

Mais l'égalité (29) montre, par deux intégrations successives, qu'on doit avoir

$$(34) \quad G_1 - \int \frac{\partial D_3}{\partial v} dw - \int \frac{\partial D_2}{\partial w} dv = h(v) + g(w),$$

h et g étant deux fonctions de v et de w qui se déterminent par identification des deux membres. On a donc finalement, d'après (31), (33) et (34)

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}(v) &= A_{14} E \lambda - E [A_{12} (q - q_0) + A_{14} (r - r_0)] v \\
 &\quad + [h(v) - A_{14} E D - E (A_{14} a - A_{12} b) v] \theta, \\
 \mathcal{G}(w) &= E [A_{14} (q - q_0) + A_{13} (r - r_0)] w \\
 &\quad + [g(w) + E (A_{13} a - A_{14} b) w] \theta.
 \end{aligned}$$

Il vient ainsi, d'après (32), (26), (27) et (11),

$$(35) \quad \left\{ \begin{aligned}
 \mathcal{V} &= A_{12} E \left[\lambda + (q - q_0)w - (r - r_0) \frac{v}{2} \right] v \\
 &\quad + E [A_{14} (q - q_0) + A_{13} (r - r_0)] \frac{w^2}{2} \\
 &\quad + \left[\int D_2 dv - A_{12} E \left(D + a \frac{v}{2} + b w \right) \right] v \\
 &\quad + \left[\int g(w) dw + E (A_{13} a - A_{14} b) \frac{w^2}{2} \right] \theta - A w + B, \\
 \mathcal{W} &= A_{13} E \left[\lambda + (q - q_0) \frac{w}{2} - (r - r_0) v \right] w \\
 &\quad + A_{14} E \lambda v - E [A_{12} (q - q_0) + A_{14} (r - r_0)] \frac{v^2}{2} \\
 &\quad + \left[\int D_3 dw - A_{13} E \left(D + a v + b \frac{w}{2} \right) \right] w \\
 &\quad + \left[\int h(v) dv - A_{14} E D v - E (A_{14} a - A_{12} b) \frac{v^2}{2} \right] \theta + A v + C.
 \end{aligned} \right.$$

Dans la région \mathcal{A}' , les composantes \mathcal{V}' , \mathcal{W}' du déplacement sont données par les mêmes formules (35), soit (35'), mais où l'on a remplacé

$$D, a, b, D_2, D_3, g, h, A, B, C$$

par les mêmes lettres accentuées D', a', \dots, C' (¹). Passons enfin à la détermination des six constantes A, B, \dots, C' ; nous n'avons, pour les déterminer, que les trois dernières conditions à l'origine (10) et les deux conditions de raccordement

$$(36) \quad \text{Sur } \Sigma' : \quad \mathcal{V} = \mathcal{V}', \quad \mathcal{W} = \mathcal{W}'.$$

Supposons, pour fixer les idées, que l'origine m se trouve dans la région \mathcal{A}' (*fig. 1*). Pour éviter d'inutiles complications, supposons que les quatre intégrales indéfinies, qui figurent dans (35') et qui sont écrites sans constantes additives, s'annulent à l'origine. C'est ce qui aura lieu, en particulier, si D_2, D_3, G_4 sont des polynômes en v, w , hypothèse très largement suffisante au point de vue des applications. Les deuxième et troisième conditions (10) donnent alors $(B', C') = 0$ et la quatrième (10) exige qu'on ait

$$A_{14} E \lambda + [h'(0) - A_{14} E D'] \theta + A' = 0,$$

de sorte que les composantes tangentielles du déplacement sont en définitive d'après (35')

$$(37) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{V} = A_{12} E \left[\lambda + (q - q_0) w - (r - r_0) \frac{v}{2} \right] v \\ \quad + A_{14} E \lambda w + E [A_{12} (q - q_0) + A_{14} (r - r_0)] \frac{w^2}{2} \\ \quad + \left\{ \int D'_2 dv - A_{12} E \left(D' + a' \frac{v}{2} + b' w \right) v + [h'(0) - A_{14} E D'] w \right. \\ \quad \left. + \int g'(w) dw + E (A_{13} a' - A_{14} b') \frac{w^2}{2} \right\} \theta, \\ \mathcal{W}' = A_{13} E \left[\lambda + (q - q_0) \frac{w}{2} - (r - r_0) v \right] w \\ \quad - E [A_{12} (q - q_0) + A_{14} (r - r_0)] \frac{v^2}{2} \\ \quad + \left[\int D'_3 dw - A_{13} E \left(D' + a' v + b' \frac{w}{2} \right) w \right. \\ \quad \left. + \int h'(v) dv - v h'(0) - E (A_{11} a' - A_{12} b') \frac{v^2}{2} \right] \theta. \end{array} \right.$$

(¹) g', h' désignent donc d'autres fonctions de w et de v et non les dérivées de g et de h .

Enfin, pour déterminer les trois autres constantes A, B, C qui figurent dans les expressions (35) relatives à la région \mathcal{A} , nous n'avons plus que les deux conditions (36), qui s'écrivent d'après (35) et (37)

Sur Σ' :

$$(38) \quad \left\{ \begin{array}{l} - (A + A_{14} E \vartheta) w + B \\ + \left\{ \int (D_2 - D'_2) dv - A_{12} E \left[D - D' + (a - a') \frac{v}{2} + (b - b') w \right] v \right. \\ - [h'(o) - A_{14} E D'] w \\ + \left. \int [g(w) - g'(w)] dw + E [A_{13}(a - a') - A_{14}(b - b')] \frac{w^2}{2} \right\} \vartheta = 0, \\ (A + A_{14} E \vartheta) v + C \\ + \left\{ \int (D_3 - D'_3) dw - A_{13} E \left[D - D' + (a - a') v + (b - b') \frac{w}{2} \right] w \right. \\ + [h'(o) - A_{14} E D] v \\ + \left. \int [h(v) - h'(v)] dv - E [A_{14}(a - a') - A_{12}(b - b')] \frac{v^2}{2} \right\} \vartheta = 0. \end{array} \right.$$

Or, sur chaque contour Σ' , les coordonnées v , w sont des fonctions données d'un paramètre λ . Si l'on suppose cette substitution effectuée dans les deux conditions (38), celles-ci, devant alors être vérifiées dans tout le champ de la variable λ , doivent être des identités en λ qui, suivant la forme analytique des fonctions D_2 , D_3 , G_1 , déterminent les trois constantes restantes A, B, C et imposent éventuellement de nouvelles relations entre les constantes spécifiques des deux substances considérées.

Dans le cas particulier où $\vartheta = 0$, les formules (38) donnent immédiatement

$$A = -A_{14} E \vartheta, \quad (B, C) = 0,$$

de sorte que, d'après (35), les expressions de \mathcal{V} , \mathcal{W}' se réduisent aux deux premières lignes des formules (37) qui s'appliquent ainsi à toute l'étendue du profil.

5. Relations entre les forces extérieures et les déformations. — L'expression [59] du potentiel thermodynamique interne linéaire f se réduit ici, du fait du choix particulier du trièdre mobile, à

$$(39) \quad \begin{aligned} 2 \frac{f}{S} = & A_m + E_m [\vartheta^2 + B^2 (q - q_0)^2 + C^2 (r - r_0)^2] \\ & + 2 F_m [\vartheta + w (q - q_0) - v (r - r_0)] \vartheta + \mathcal{C} (p - p_0)^2, \end{aligned}$$

la fonction \mathcal{F} étant définie par les équations de (13) à (16) et les fonctions \mathcal{V} , \mathcal{W} étant données par leurs expressions (35) et (37). Il résulte tout d'abord de la première (43) que le profil reste plan et contenu dans le plan vMw , donc normal à l'axe longitudinal, si $p - p_0$ est nul, c'est-à-dire, d'après la deuxième (42), si le moment de torsion \mathcal{C}_u dans le profil considéré est nul.

Les paramètres directeurs $\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial v} \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial w} - \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial v} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial w}$, ... de la normale en un point de la surface (43) sont ainsi

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial v}\right) \left(1 + \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial w}\right) - \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial v} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial w}, \\ (p - p_0) & \left[\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial v} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial w} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v} \left(1 + \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial w}\right) \right], \\ (p - p_0) & \left[\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial w} - \left(1 + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial v}\right) \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial w} \right], \end{aligned}$$

donc se réduisent très sensiblement, par suite de la petitesse des déformations, à

$$(44) \quad 1 + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial v} + \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial w}, \quad -(p - p_0) \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v}, \quad -(p - p_0) \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial w}.$$

On voit que la somme de leurs carrés se réduit très sensiblement à l'expression $1 + 2 \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial v} + \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial w} \right)$, dont la racine carrée diffère très peu de la première des expressions (44). Les cosinus directeurs de la demi-normale en un point du profil déformé (43) et qui fait un angle aigu avec l'axe Mu , sont ainsi très sensiblement

$$\lambda = 1, \quad \mu = -(p - p_0) \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v}, \quad \nu = -(p - p_0) \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial w},$$

de sorte qu'on reconnaîtra que le profil déformé reste normal en \mathbf{M} à l'axe longitudinal si les deux dérivées $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial (v, w)}$ sont nulles pour $(v, w) = 0$. S'il en est ainsi, on voit d'après (22) que les glissements g_2, g_3 s'annulent effectivement à l'origine.

7. Cas particulier de l'isotropie et de l'homogénéité transversales pour chacune des deux substances. — Si le plan mvw est un plan d'isotropie, on a tout d'abord

$$\mathcal{A}_{55} = \mathcal{A}_{66} = G, \quad \mathcal{A}_{56} = 0,$$

G étant le coefficient d'élasticité transversale, de sorte que la troisième (41) devient

$$(45) \quad \mathcal{C}S = \int G \left[\left(v + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial w} \right)^2 + \left(-w + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v} \right)^2 \right] dS,$$

G étant constant dans chacune des aires partielles \mathcal{A} , \mathcal{A}' du fait de l'homogénéité transversale. Les équations de (13) à (16) déterminant les fonctions \mathcal{F} , \mathcal{F}' se réduisent ainsi aux suivantes

$$(46) \left\{ \begin{array}{l} \text{Dans } \mathcal{A} : \quad \Delta \mathcal{F} = 0; \quad \text{dans } \mathcal{A}' : \quad \Delta \mathcal{F}' = 0; \\ \text{Sur } \Sigma : \quad \quad \quad -\beta w + \gamma v + \frac{d\mathcal{F}}{dn} = 0; \\ \text{Sur } \Sigma' : \quad G \left(-\beta w + \gamma v + \frac{d\mathcal{F}}{dn} \right) + G' \left(-\beta' w + \gamma' v + \frac{d\mathcal{F}'}{dn'} \right) = 0, \\ \quad \quad \quad \mathcal{F} = \mathcal{F}', \end{array} \right.$$

n , n' désignant les demi-normales (β, γ) , (β', γ') .

On a d'autre part, en vertu de la seule isotropie transversale,

$$A_{12}E = A_{13}E = -\sigma, \quad A_{14} = 0; \quad D_2 = D_3, \quad G_1 = 0,$$

σ étant le coefficient de Poisson qui, d'après la constance des coefficients (25), doit avoir la même valeur dans toute l'étendue du profil. De plus, en vertu de l'homogénéité transversale de chaque substance, les deux coefficients de dilatation thermique restants D_1 et $D_2 = D_3$ sont constants dans chaque région \mathcal{A} , \mathcal{A}' , de sorte que, d'après (27), $(a, b) = 0$ et $D_1 = D$. Les fonctions h , g , h' , g' sont donc nulles d'après (34); par suite les formules (37) se réduisent à

$$(47) \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{V}' = -\sigma \left[\lambda v + (q - q_0)vw - (r - r_0) \frac{v^2 - w^2}{2} \right] + (\sigma D'_1 + D'_2)v\theta, \\ \mathcal{W}' = -\sigma \left[\lambda w - (q - q_0) \frac{v^2 - w^2}{2} - (r - r_0)vw \right] + (\sigma D'_1 + D'_2)w\theta \end{array} \right.$$

et les conditions de raccordement (38) à

Sur Σ' :

$$\begin{aligned} [D_2 - D'_2 + \sigma(D_1 - D'_1)]v\theta - Aw + B &= 0, \\ [D_2 - D'_2 + \sigma(D_1 - D'_1)]w\theta + Av + C &= 0. \end{aligned}$$

Comme le crochet est ici indépendant de v , w , ces deux conditions exigent qu'on ait

$$(48) \quad D_2 - D'_2 + \sigma(D_1 - D'_1) = 0, \quad (A, B, C) = 0.$$

On voit que la première (48) exprime que l'expression $\sigma D_1 + D_2$ doit avoir la

même valeur dans chacune des régions \mathcal{A} , \mathcal{A}' , c'est-à-dire dans toute l'étendue du profil. Les expressions (35) deviennent ainsi

$$(49) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{V} = -\sigma \left[\lambda v + (q - q_0)vw - (r - r_0) \frac{v^2 - w^2}{2} \right] + (\sigma D_1 + D_2)v \theta, \\ \mathcal{W} = -\sigma \left[\lambda w - (q - q_0) \frac{v^2 - w^2}{2} - (r - r_0)vw \right] + (\sigma D_1 + D_2)w \theta. \end{array} \right.$$

Il résulte alors de (47) et de la première (48) que les expressions (49) sont valables dans toute l'étendue du profil.

Enfin, la deuxième formule (40) se réduisant ici [p. 179] à

$$(50) \quad \mathbf{F} = -\mathbf{E}D_1,$$

on doit faire dans (41) et (42)

$$(51) \quad \mathbf{F}_m \mathbf{S} = - \int \mathbf{E}D_1 d\mathbf{S}.$$

8. Cas particulier. — Considérons enfin le cas de l'isotropie complète des deux substances supposées, comme au n° 7, transversalement homogènes. On a alors, du fait de l'isotropie complète,

$$E = 2G(1 + \sigma)$$

et, comme σ doit être constant dans toute l'étendue du profil, il en résulte qu'on doit avoir

$$(52) \quad \frac{E}{E'} = \frac{G}{G'}.$$

D'autre part, les deux coefficients de dilatation thermique longitudinale D_1 et transversale D_2 se réduisant maintenant à un seul D , l'expression $\sigma D_1 + D_2$ devient $(\sigma + 1)D$; comme elle doit être constante dans toute l'étendue du profil et qu'il en est déjà ainsi de σ , il en résulte que D doit être le même pour les deux substances.

Supposons en outre que les courbes Σ et Σ' soient deux circonférences concentriques de rayons ρ et ρ' . Du fait de l'homogénéité transversale, l'origine m des axes mvw est le centre de ces circonférences et l'on a sur chacune d'elles

$$-\beta w + \gamma v = 0, \quad -\beta' w + \gamma' v = 0,$$

de sorte que la solution évidente des équations (46) est $(\mathfrak{F}, \mathfrak{F}') = 0$. D'après la première (43), chaque profil reste donc plan et normal à l'axe longitudinal et l'expression (45) se réduit à

$$(53) \quad \mathcal{C}S = \int G(v^2 + w^2) dS.$$

On a d'autre part

$$\mathbf{E}_m S = \int \mathbf{E} dS = \pi [E(\varphi^2 - \varphi'^2) + E' \varphi'^2]$$

et d'après (51)

$$(54) \quad \mathbf{F}_m S = -D \int \mathbf{E} dS = -D \mathbf{E}_m S.$$

En outre

$$\int \mathbf{E} v^2 dS = \int \mathbf{E} w^2 dS = \frac{\pi}{4} [E(\varphi^4 - \varphi'^4) + E' \varphi'^4],$$

$$\int G(v^2 + w^2) dS = \frac{\pi}{2} [G(\varphi^4 - \varphi'^4) + G' \varphi'^4],$$

de sorte que si l'on pose

$$\mathfrak{A} = \frac{\pi}{4} \left[\varphi^4 + \left(\frac{E'}{E} - 1 \right) \varphi'^4 \right],$$

il résulte de la première (41), de (52) et (53) qu'on a

$$(55) \quad (C^2, B^2) \mathbf{E}_m S = \mathfrak{A} E, \quad \mathcal{C}S = 2 \mathfrak{A} G.$$

D'autre part, la deuxième (41) devient d'après (50)

$$(56) \quad (v, w) \mathbf{F}_m S = -D \int \mathbf{E}(v, w) dS = 0$$

d'après le choix des axes mvw . Les formules (42), relatives à l'équilibre ou à une ligne dénuée de viscosité, s'écrivent donc d'après (54), (55) et (56)

$$(57) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{R}_u + S \mathbf{E}_m (\lambda - D\theta) = 0, \\ \mathcal{C}_u + 2 \mathfrak{A} G(p - p_0) = 0, \\ \mathcal{C}_v + \mathfrak{A} E(q - q_0) = 0, \\ \mathcal{C}_w + \mathfrak{A} E(r - r_0) = 0, \end{array} \right.$$

les coefficients de chaque parenthèse étant de plus indépendants de ω , dans l'hypothèse d'un profil constant et de l'homogénéité complète de chaque substance. Enfin les formules (49), valables dans toute l'étendue du profil, s'écrivent plus simplement

$$(58) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{V} = -\sigma \left[\lambda v + (q - q_0)vw - (r - r_0) \frac{v^2 - w^2}{2} \right] + (1 + \sigma)Dv\theta, \\ \mathcal{W} = -\sigma \left[\lambda w - (q - q_0) \frac{v^2 - w^2}{2} - (r - r_0)vw \right] + (1 + \sigma)Dw\theta. \end{array} \right.$$

9. Application. — Considérons une ligne élastique formée de deux substances homogènes et isotropes, telle que, dans son état naturel primitif à la température uniforme T_0 , l'une des substances occupe l'intérieur d'un cylindre circulaire droit de rayon ρ' et de hauteur l , et l'autre substance, l'espace tubulaire compris entre ce cylindre et un autre de même axe et de même hauteur et de rayon $\rho > \rho'$.

Dans cet état primitif, l'axe mu de chaque trièdre (m) étant dirigé suivant l'axe du cylindre, on passe de (m) à (m') par la translation $d\omega$ suivant mu et par une certaine rotation $d\varphi$ autour de mu , que nous laisserons provisoirement indéterminée; d'où

$$(59) \quad p_0 = \frac{d\varphi}{d\omega}, \quad (q_0, r_0) = 0.$$

Considérons maintenant la ligne à la température uniforme $T_0 + \theta$ et dans un état d'équilibre déformé tel que son axe longitudinal soit devenu l'hélice circulaire

$$(60) \quad x = a \cos \Theta, \quad y = a \sin \Theta, \quad z = \frac{h}{2\pi} \Theta$$

de rayon a et de pas h . L'orientation du trièdre (m) autour de mu , dans l'état primitif, ayant été laissée indéterminée, choisissons-la de manière que, dans l'état déformé, le trièdre (M) coïncide avec le trièdre principal de l'hélice au point M , les axes Mv et Mw étant ainsi dirigés respectivement suivant la normale principale et la binormale. Les expressions générales (2) de p , q , r nous donnent ainsi d'après (1) et par application des formules de Frenet

$$(61) \quad p = -\frac{1 + \lambda}{T}, \quad q = 0, \quad r = \frac{1 + \lambda}{R},$$

R et T étant les rayons de courbure et de torsion de l'axe longitudinal déformé. Il résulte dès lors des formules (57) que \mathcal{C}_v est nul.

10. Emploi des équations générales de l'équilibre. — Cherchons maintenant s'il est possible de réaliser l'état d'équilibre qui vient d'être défini, en supposant que les force et couple extérieurs au point M se réduisent à une force unique dirigée suivant la normale principale, et dont nous désignerons par N la valeur par unité de longueur comptée sur l'axe longitudinal déformé; c'est-à-dire en supposant qu'on ait

$$(\mathcal{R}_e, \mathcal{Z}_e; \mathcal{L}_e, \mathcal{M}_e, \mathcal{V}_e) = 0, \quad \mathcal{U}_e = N \frac{ds}{d\omega}.$$

Les équations indéfinies (5) nous donnent ainsi d'après (1), (59) et (61) et en tenant compte de ce que \mathcal{C}_v est nul

$$(62) \left\{ \begin{array}{ll} \frac{d\mathcal{R}_u}{d\omega} - \frac{1+\delta}{R} \mathcal{R}_r = 0, & \frac{d\mathcal{C}_u}{d\omega} = 0, \\ \frac{1}{1+\delta} \frac{d\mathcal{R}_r}{d\omega} + \frac{\mathcal{R}_w}{T} + \frac{\mathcal{R}_u}{R} = N, & \frac{\mathcal{C}_w}{T} + \frac{\mathcal{C}_u}{R} - \mathcal{R}_w = 0, \\ \frac{d\mathcal{R}_w}{d\omega} - \frac{1+\delta}{T} \mathcal{R}_r = 0; & \frac{d\mathcal{C}_w}{d\omega} + (1+\delta) \mathcal{R}_r = 0. \end{array} \right.$$

En éliminant \mathcal{R}_r entre la première et la sixième (61) et en intégrant, il vient tout d'abord

$$\mathcal{R}_u + \frac{\mathcal{C}_w}{R} = A,$$

A étant une constante; d'où, en y remplaçant \mathcal{R}_u et \mathcal{C}_w par leurs valeurs (57) et d'après (59) et (61)

$$SE_m(\delta - D\theta) + AE \frac{1+\delta}{R^2} = A.$$

D'après cette égalité, δ est constant tout le long de la ligne, par suite p et r d'après (61), donc aussi \mathcal{R}_u et \mathcal{C}_w d'après (57). Comme d'autre part, \mathcal{C}_u est également constant d'après la quatrième (62), il en est de même de $p - p_0$ d'après la deuxième (57), par suite de p_0 , de sorte que, d'après (59), l'angle φ est proportionnel à ω . Dans l'état naturel primitif, le lieu de chacun des axes mv , mw , lorsque le point m décrit l'axe longitudinal, est donc un hélicoïde droit. Enfin, d'après la cinquième (62), \mathcal{R}_w est également constant; d'après la première ou la sixième (62),

\mathcal{R}_v est nul et la deuxième fait connaître N . On a donc en définitive d'après (57), (59), (61) et (62)

$$(63) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{R}_u = -SE_m(\lambda - D\theta), \quad \mathcal{C}_u = 2\mathcal{A}G\left(\frac{1+\lambda}{T} + p_0\right), \\ \mathcal{R}_v = 0, \quad \mathcal{C}_v = 0, \\ \mathcal{R}_w = \frac{\mathcal{A}}{R} \left[(2G - E)\frac{1+\lambda}{T} + 2Gp_0 \right]; \quad \mathcal{C}_w = -\mathcal{A}E\frac{1+\lambda}{R}; \\ N = \frac{1}{R} \left\{ -SE_m(\lambda - D\theta) + \frac{\mathcal{A}}{T} \left[(2G - E)\frac{1+\lambda}{T} + 2Gp_0 \right] \right\}, \end{array} \right.$$

toutes ces quantités étant constantes, c'est-à-dire indépendantes de ω . Les conditions aux limites (6) et (7) nous donnent ensuite d'après (63)

$$(64) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{X}_1 = -SE_m(\lambda - D\theta) = -\mathcal{X}_2, \\ (\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2) = 0, \\ \mathcal{Z}_1 = \frac{\mathcal{A}}{R} \left[(2G - E)\frac{1+\lambda}{T} + 2Gp_0 \right] = -\mathcal{Z}_2; \\ \mathcal{L}_1 = 2\mathcal{A}G\left(\frac{1+\lambda}{T} + p_0\right) = -\mathcal{L}_2, \\ (\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2) = 0, \\ \mathcal{N}_1 = -\mathcal{A}E\frac{1+\lambda}{R} = -\mathcal{N}_2. \end{array} \right.$$

On voit que la force et l'axe du couple extérieurs appliqués à chaque extrémité de la ligne doivent être contenus dans le plan rectifiant en ces deux points et que l'ensemble des forces et couples extérieurs appliqués à la ligne ne dépend que de cinq éléments différents et généralement non nuls N , \mathcal{X}_1 , \mathcal{Z}_1 , \mathcal{L}_1 , \mathcal{N}_1 . La dernière (63) et les formules (64) font donc connaître les forces et couples extérieurs qui, à la température donnée $T_0 + \theta$, correspondent à l'axe longitudinal déformé (60) pour des valeurs données des deux paramètres λ et p_0 . Comme d'autre part, les huit quantités N , \mathcal{X}_1 , \mathcal{Z}_1 , \mathcal{L}_1 , \mathcal{N}_1 ; λ , p_0 , θ ne sont liées que par cinq relations, trois d'entre elles peuvent être prises arbitrairement s'il s'agit seulement de réaliser l'axe longitudinal déformé (60).

11. Configuration d'un profil déformé. — Il résulte tout d'abord de ce que nous avons vu au début du n° 8 que chaque profil reste plan et normal à l'axe longi-

nal; le déplacement élastique au point (v, w) du profil primitif se réduit donc à ses composantes tangentielles (58) qui, d'après (59) et (61), s'écrivent

$$(65) \quad \begin{cases} \mathcal{V} = -\sigma \left(\lambda v - \frac{1+\lambda}{R} \frac{v^2 - w^2}{2} \right) + (1+\sigma) D\theta, \\ \mathcal{W} = \left[-\sigma \left(\lambda - \frac{1+\lambda}{R} v \right) + (1+\sigma) D\theta \right] w. \end{cases}$$

Les coefficients de ces deux expressions étant les mêmes dans toutes les sections, les profils déformés sont tous identiques. Par suite de la déformation, le point

$$v = \rho \cos \alpha, \quad w = \rho \sin \alpha$$

du profil primitif mvw est venu, dans le plan Mvw , au point (\mathbf{V}, \mathbf{W}) défini par les deux dernières (43), soit, d'après (65) et en tenant compte de ce que

$$(66) \quad \begin{cases} v^2 - w^2 = \rho^2 \cos 2\alpha, & vw = \frac{\rho^2}{2} \sin 2\alpha, \\ \mathbf{V} = \lambda \cos \alpha + \mu \cos 2\alpha, \\ \mathbf{W} = \lambda \sin \alpha + \mu \sin 2\alpha, \end{cases}$$

en posant

$$\lambda = \rho [1 - \sigma\lambda + (1+\sigma)D\theta], \quad \mu = \rho^2 \frac{\sigma}{2} \frac{1+\lambda}{R},$$

d'où

$$(67) \quad \frac{\mu}{\lambda} = \frac{\sigma}{2} \frac{1+\lambda}{1 - \sigma\lambda + (1+\sigma)D\theta} \frac{\rho}{R}.$$

Si $\frac{\rho}{R}$ est très petit, par exemple de l'ordre de 10^{-2} , le rapport (67) est de l'ordre de 10^{-3} , puisque σ est de l'ordre de $\frac{1}{4}$. Il résulte alors des formules (66) que la circonférence extérieure primitive Σ de centre m et de rayon ρ dans le plan mvw s'est transformée, dans le plan Mvw , en une courbe qui diffère très peu d'une ellipse de centre $(\mu, 0)$, dont le petit axe est dirigé suivant Mv et dont les demi-petit axe A et grand axe B ont pour expressions

$$A = \lambda, \quad B = \lambda \left(1 + 2 \frac{\mu^2}{\lambda^2} \right)$$

et l'aire intérieure à cette courbe ayant même valeur πAB que si elle était réellement une ellipse.

Le profil, primitivement limité par les deux circonférences concentriques Σ et Σ' de rayons ρ et ρ' , se présente donc après déformation comme l'indique la figure 2, O et O' étant les centres d'abscisses μ et μ' des deux pseudo-ellipses et M' le point du profil déformé le plus rapproché de l'axe Oz de l'hélice et d'abscisse $\lambda + \mu$.

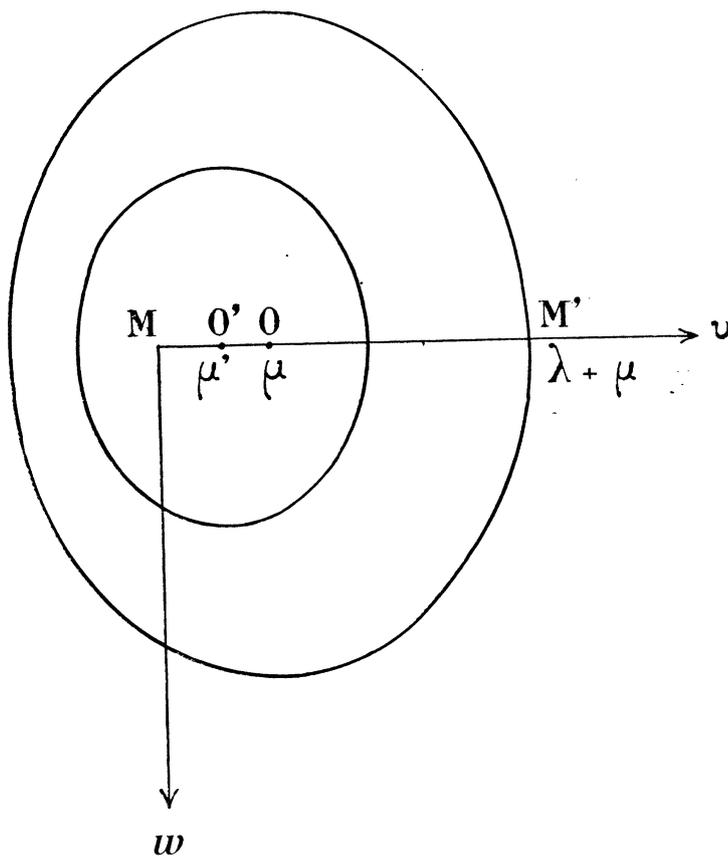


FIG. 2.

12. Remarque. — La distance minima $\lambda + \mu$ à l'axe Oz étant constante tout le long de l'hélice, il résulte de ce qui précède que l'équilibre considéré peut être réalisé en enroulant la ligne élastique primitive sur un cylindre circulaire. Si le frottement de la ligne sur le cylindre est négligeable, les réactions du cylindre sur la ligne s'exercent le long de la génératrice, lieu des points M' , et sont dirigées en chaque point M' suivant l'axe Mv . Les force et couple extérieurs par unité de longueur se réduisent ainsi à une force normale N , qui est donnée par la dernière (63); les formules (64) font ensuite connaître les forces et couples d'encastrement aux deux extrémités.

Supposons l'enroulement effectué à la température T_0 et sous une tension constante \mathcal{C}_0 ; d'après la première (63), on a

$$\mathcal{C}_0 = S E_m \lambda_0,$$

ce qui détermine la dilatation λ_0 à cette température, c'est-à-dire pour $\theta = 0$. Le rayon a_0 de l'hélice à cette même température peut évidemment être déduit avec une grande précision de la longueur de l'axe longitudinal sous la tension \mathcal{C}_0 et de la distance des encastrements, supposés situés sur une même génératrice du cylindre.

Cela posé, à une autre température uniforme $T_0 + \theta$, la distance à l'axe Oz du centre de figure O' de la pseudo-ellipse intérieure (*fig. 2*) est devenue

$$\mathbf{R} = \lambda + \mu - \mu' + \mathcal{R},$$

\mathcal{R} étant le rayon du cylindre à cette température et en supposant toutefois le cylindre suffisamment rigide, ou la tension initiale \mathcal{C}_0 suffisamment faible, pour qu'on puisse négliger la déformation du cylindre sous l'action de la ligne élastique. En mettant alors l'expression précédente sous la forme

$$(68) \quad \mathbf{R} = a_0(1 + \alpha),$$

on conçoit qu'au moyen des formules qui précèdent il soit facile d'exprimer le nombre très petit α en fonction de φ , φ' , σ , D , θ , du rayon du cylindre à la température T_0 et de son coefficient de dilatation thermique transversal.

La recherche de la formule (68) nous a été demandée par le Laboratoire Central d'Électricité en vue de la construction d'un étalon de self-inductance destiné à une nouvelle détermination de l'ohm. Son application à ce cas spécial fait l'objet d'un autre travail qui paraîtra dans les publications du Laboratoire Central.

TABLE DES MATIÈRES DE CE MÉMOIRE

	Pages.
INTRODUCTION	171
1. Préliminaires	172
2. Composantes de la déformation autour d'un point.....	175
3. Détermination de la fonction $\mathcal{U}(v, w; \omega, t)$	178
4. Détermination des fonctions $\mathcal{V}(v, w; \omega, t)$ et $\mathcal{W}(v, w; \omega, t)$	181
5. Relations entre les forces extérieures et les déformations.....	187
6. Équations du profil déformé.....	188
7. Cas particulier de l'isotropie et de l'homogénéité transversales pour chacune des deux substances.....	189
8. Cas particulier.....	191
9. Application.....	193
10. Emploi des équations générales de l'équilibre	194
11. Configuration d'un profil déformé	195
12. Remarque	197
