ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

E. BLUTEL

Sur les surfaces qui sont en même temps lieux de coniques et enveloppes de cônes du second degré

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 3e série, tome 27 (1935), p. 241-258

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1935_3_27__241_0>

Sur les surfaces qui sont en même temps lieux de coniques et enveloppes de cônes du second degré

Par M. E. BLUTEL

La présente Note a pour objet de compléter et de rectifier certains des résultats obtenus dans la thèse que j'ai publiée aux *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, sur le même sujet (3^e série, t. VII, juin et juillet 1890, p. 155-216).

Ce retour à une étude qui date de quarante-cinq ans et que j'avais complètement perdue de vue, m'a été suggéré par un travail de M. Gambier qui, suivant une voie originale, a donné à cette question une ampleur toute nouvelle (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse.....*).

I. Un premier examen du problème montre que, en général, les coniques (e) du plan Π ont deux enveloppes (C) qu'elles touchent en deux points K, K' et que les cônes sont tangents à deux développables qu'ils touchent suivant deux génératrices SH, SH', situées dans un plan R : la dualité de ces propriétés est évidente, mais leur liaison reste obscure.

On peut se donner *a priori* la développable (s) enveloppe du plan Π par l'équation générale de son plan tangent, en fonction d'un paramètre λ, choisir, sur la caractéristique de ce plan, deux points K, K', réels ou imaginaires conjugués dont le lieu, sur la développable (s) forme les deux branches de l'enveloppe (C). Les tangentes à (C), en ces points, se coupent en un point réel k qui est le pôle de KK' par rapport à la conique. Celle-ci dépend encore d'un paramètre dont le choix résulte de la condition géométrique supplémentaire qui lui est imposée. La surface (E) qu'elle engendre est alors définie par des équations qui ne contiennent aucun signe d'intégration.

L'indétermination de la condition géométrique précitée rend difficile l'application de cette méthode.

La même critique s'applique à la marche corrélative; on se donne la courbe (σ) lieu du sommet S du cône du second degré, on choisit deux plans P et Q réels ou imaginaires conjugués, passant par la tangente Sh à (σ) et dépendant du même paramètre λ que le point S; ces deux plans enveloppent deux développables corrélatives des deux branches de (C); un cône de sommet S tangent à ces deux plans le long de leurs caractéristiques SH, SH′, dépend encore d'un paramètre dont le choix résulte d'une condition géométrique supplémentaire imposée à ce cône. La surface qu'il enveloppe est alors déterminée par des équations en termes finis.

Ces deux procédés sont équivalents, les rôles des coordonnées ponctuelles et tangentielles étant inversés : la rédaction de la partie générale de ma thèse n'utilise ni l'un, ni l'autre. Ayant découvert les divisions homographiques découpées sur les coniques génératrices par leurs courbes conjuguées, il m'a paru logique de rapporter la surface aux coordonnées curvilignes définies par les coniques $\lambda = c^{te}$ et par leurs conjuguées $\mu = c^{te}$. Cela avait pour avantage de mettre l'équation différentielle des asymptotiques sous la forme

$$(1) \qquad (A\mu^2 + 2B\mu + C)\left(\frac{dP}{d\lambda}\mu^2 + 2\frac{dQ}{d\lambda}\mu + \frac{dR}{d\lambda}\right)d\lambda^2 + 2\Delta d\mu^2 = 0$$

(p. 185, *loc. cit.*), les racines du premier trinôme correspondant aux points K et K′, celles du second aux points H et H′ (Δ, A, B, C, P, Q, R sont des fonctions de λ).

J'en avais conclu, un peu rapidement, qu'en ces quatre points les asymptotiques sont tangentes entre elles et aux conjuguées de la conique, c'est-à-dire aux génératrices correspondantes du cône. M. Gambier a attiré mon attention à ce sujet : le fait est inexact pour les deux points K et K′ qui sont sur l'arête de rebroussement (C) de la surface.

La forme de l'équation (1) m'avait suggéré une étude particulière du cas où les deux trinômes ont les mêmes racines (H et H′ confondus, l'un avec K, l'autre avec K′) et du cas où H et H′ sont confondus ainsi que K et K′. [Surfaces du premier genre et surfaces du second genre, I et II, *ibid.*]. L'intérêt de ces deux cas provient de ce que l'équation (1) se décompose alors en deux équations de Riccati et que, par suite, les coniques sont divisées homographiquement par les lignes asymptotiques de chaque système. Enfin, j'ai signalé aussi, dans un paragraphe spécial qui leur est uniquement consacré (III, p. 186, *loc. cit.*), une catégorie particulière de surfaces engendrées par des coniques qui passent par deux points fixes et sont tangentes à deux plans fixes. Je m'étais borné à des indications succinctes, ces surfaces ayant été l'objet de travaux antérieurs (Demartres, *Annales École Normale*, 3e série, t. II).

J'avais échoué dans une tentative faite à l'époque pour étudier la distribution des tangentes asymptotiques, soit dans le cas général, soit dans les cas particuliers de surfaces du premier ou du second genre. Les résultats que m'a communiqués M. Gambier, touchant les surfaces du premier genre, m'ont inspiré le désir de reprendre le problème général. J'ai utilisé à cet effet une méthode qui s'inspire de la marche corrélative, indiquée plus haut, mais sans préoccupation d'écarter les symboles d'intégration. M. Gambier a éclairé cette dernière question de façon définitive; on en trouvera la preuve plus loin.

Supposant réels (ils pourraient être imaginaires conjugués) et *distincts* les plans tangents au cône, S*h*H, S*h*H', soient $P = 0$, $Q = 0$ les équations de ces deux plans; soit $R = 0$ celle du plan SHH' (P, Q, R sont des fonctions linéaires des coordonnées courantes et leurs coefficients $u_1, v_1, w_1, s_1, u_2, v_2, w_2, s_2, u, v, w, s$ sont des fonctions de λ). Un calcul facile permet de mettre l'équation du cône sous la forme

$$F(x, y, z, \lambda) \equiv PQ - R^2 = 0, \tag{2}$$

les coefficients de P et Q étant liés à ceux de R par les identités

$$\frac{\partial P}{\partial \lambda} \equiv \alpha(\lambda) R, \qquad \frac{\partial Q}{\partial \lambda} \equiv \beta(\lambda) R. \tag{3}$$

Les cofficients de R sont arbitraires ainsi que les fonctions α et β.

Dans ces conditions, l'identité

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} \equiv (\alpha Q + \beta P) R - 2R \frac{\partial R}{\partial \lambda}, \tag{4}$$

montre que la caractéristique du cône se compose des droites SH, SH', contenues dans le plan R, et d'une conique (*e*) découpée sur le cône par le plan d'équation

$$\Pi \equiv \alpha Q + \beta P - 2 \frac{\partial R}{\partial \lambda} = 0. \tag{5}$$

Les équations (2) et (5) définissent la surface étudiée.

On en obtient une représentation paramétrique en regardant le cône comme l'enveloppe du plan

$$\varpi \equiv \mu^2 P - 2\mu R + Q = 0, \tag{6}$$

qui le touche suivant la droite

$$\mu P - R = 0, \qquad \mu R - Q = 0. \tag{7}$$

Les génératrices SH' et SH correspondent à μ nul ou infini.

La résolution des équations (5) et (7), par rapport aux coordonnées courantes, donne une représentation paramétrique ponctuelle de la surface, relativement à des axes fixes.

Si on utilise le tétraèdre de référence dont les faces ont pour équations respectives, $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$, $\frac{\partial R}{\partial \lambda} = 0$, les coordonnées ponctuelles, par rapport à ce tétraèdre mobile, prennent la forme simple

$$\frac{P}{1} = \frac{R}{\mu} = \frac{Q}{\mu^2} = \frac{2\frac{\partial R}{\partial \lambda}}{\alpha\mu^2 + \beta}. \tag{8}$$

Les arêtes du tétraèdre sont les droites SH, SH′, Sh et les côtés du triangle qui a pour sommets les points de rencontre H_0, H'_0, h_0, des droites précédentes avec le plan d'équation $\frac{\partial R}{\partial \lambda} = 0$. On vérifie sans peine que la caractéristique $H_0H'_0$ du plan R, coupe HH′ en un point I tel que $\alpha Q + \beta P = 0$ et que le plan conjugué du plan ShI, par rapport aux deux plans P, Q, est le plan osculateur de (σ) au point S. Ce dernier plan a donc pour équation $\alpha Q - \beta P = 0$; il coupe (e) en deux points définis par $\alpha\mu^2 - \beta = 0$.

Enfin l'équation (6) donne les coordonnées tangentielles U, V, W, S, du plan tangent à la surface au point $M(\lambda, \mu)$, en fonction de μ et des coordonnées tangentielles des plans P, Q, R, c'est-à-dire en fonction de λ et μ.

Chacune des conjuguées de la conique (e) est telle que la développable engendrée par ses tangentes passe par σ; le plan osculateur en M à cette conjuguée est donc le plan MSh, dont l'équation est $\mu^2 P - Q = 0$. La caractéristique de ce plan, quand M se déplace sur la conjuguée, est située dans le plan $\frac{d}{d\lambda}(\mu^2 P - Q) \equiv 2\mu P \frac{d\mu}{d\lambda} + (\mu^2\alpha - \beta)R = 0$, qui doit contenir SM.

En remplaçant R par μP, il vient $\mu\left(2\frac{d\mu}{d\lambda} + \mu^2\alpha - \beta\right) = 0$.

La solution $\mu = 0$ correspond à la génératrice SH′ qui touche son enveloppe en H'_0; par analogie, $\mu = \infty$ correspond à la génératrice SH, qui touche son enveloppe en H_0. Reste l'équation différentielle des conjuguées, savoir

$$2\frac{d\mu}{d\lambda} + \alpha\mu^2 - \beta = 0. \tag{9}$$

C'est une équation de Riccati, de sorte que les coniques sont partagées homographiquement par leurs conjuguées.

M. Gambier m'a fait remarquer à ce sujet que « les résultats obtenus :

$$\frac{dP}{d\lambda} \equiv \alpha(\lambda)R, \qquad \frac{dQ}{d\lambda} \equiv \beta(\lambda)R, \qquad 2\frac{d\mu}{d\lambda} + \alpha\mu^2 - \beta = 0,$$

font retrouver, d'une manière à la fois simple et rapide, les conclusions fondamentales :

a) L'équation d'une surface B peut s'obtenir avec cinq fonctions arbitraires d'une variable, sans signe de quadratures, ni équations différentielles;

b) On peut donner une représentation paramétrique (dite canonique) où les coniques et leurs conjuguées sont explicitées également, sans signes de quadratures ni équations différentielles.

En effet $\alpha:\beta$ est en général une fonction λ_1 de λ; l'égalité $dP-\lambda_1 dQ=0$, permet d'écrire

$$P\equiv\left(\lambda_1\frac{dA_1}{d\lambda_1}-A_1\right)x+\left(\lambda_1\frac{dA_2}{d\lambda_1}-A_2\right)y+\left(\lambda_1\frac{dA_3}{d\lambda_1}-A_3\right)z+\left(\lambda_1\frac{dA_4}{d\lambda_1}-A_4\right)t,$$

$$Q\equiv\frac{dA_1}{d\lambda_1}x+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{dA_4}{d\lambda_1}t,$$

$$R\equiv A_5\left(\frac{d^2A_1}{d\lambda_1^2}x+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{d^2A_4}{d\lambda_1^2}t\right).$$

On a ainsi les cinq fonctions arbitraires A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 du paramètre λ_1; la surface B est le lieu de la conique d'équations

$$PQ-R^2=0,\qquad \lambda_1 Q+P-2A_5\frac{dR}{d\lambda_1}=0.$$

De l'équation $\dfrac{dQ}{d\lambda}=\beta R$, on déduit $\dfrac{d\lambda_1}{d\lambda}=\beta A_5$, ce qui permet d'écrire l'équation de Riccati sous la forme

$$2\frac{d\mu}{d\lambda_1}+\frac{1}{A_5}(\lambda_1\mu^2-1)=0,\qquad \text{qui équivaut à}\qquad \frac{2d\mu}{d\lambda}+\frac{d\lambda_1}{d\lambda}\frac{1}{A_5}(\lambda_1\mu^2-1)=0.$$

Or l'équation *générale* de Riccati, peut être écrite sous la forme intégrable explicitement,

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{M-M_1}{M-M_2}:\frac{M_0-M_1}{M_0-M_2}\right)=0,$$

où M_0, M_1, M_2 sont trois fonctions arbitraires de λ. On a ainsi une équation

$$2\frac{dM}{d\lambda}+HM^2+2KM-L=0,$$

où H, K, L sont exprimées explicitement en M_0, M_1, M_2 et leurs dérivées en λ; en écrivant ensuite

$$HM+K=H\mu,$$

on a l'équation

$$2\frac{d\mu}{d\lambda} + H\mu^2 - L_1 = 0.$$

L'identification avec l'équation précédente donne

$$\lambda_1 = \frac{H}{L_1}, \qquad A_5 = \frac{1}{L_1}\frac{d\lambda_1}{d\lambda}$$

et alors l'équation des conjuguées est intégrée explicitement. »

Le plan R enveloppe une développable. Soit E le point de son arête de rebroussement, qui correspond au sommet S. Il est intéressant, pour traiter certains problèmes, de déterminer le plan SEh. Le point E étant commun aux trois plans $R = 0$, $\frac{\partial R}{\partial \lambda} = 0$, $\frac{\partial R}{\partial \lambda^2} = 0$, on est conduit à définir deux fonctions θ et ω de λ, telles que le plan $\frac{\partial^2 R}{\partial \lambda^2} - \theta\frac{\partial R}{\partial \lambda} - \omega R = 0$ passe par Sh, qui est l'intersection des plans P et Q, et, par suite, à déterminer deux autres fonctions ω_1 et ω_2 de λ telles que l'on ait :

$$\frac{\partial^2 R}{\partial \lambda^2} \equiv \theta\frac{\partial R}{\partial \lambda} + \omega R + \omega_1 P + \omega_2 Q. \tag{10}$$

La réalisation de cette identité est d'ailleurs possible d'une seule façon quand les fonctions $\frac{\partial R}{\partial \lambda}$, R, P, Q, dont les coefficients sont fonctions de λ, sont linéairement indépendantes, ce qui est le cas général.

Dans ces conditions, la caractéristique du plan Π, dont les équations sont

$$\Pi \equiv \alpha Q + \beta P - 2\frac{\partial R}{\partial \lambda} = 0, \qquad \frac{\partial \Pi}{\partial \lambda} \equiv 2\alpha\beta R + \alpha' Q + \beta' P - 2\frac{\partial^2 R}{\partial \lambda^2} = 0,$$

se trouve dans le plan d'équation

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \lambda} - \theta\Pi \equiv 2(\alpha\beta - \omega)R + (\beta' - 2\omega_1 - \theta\beta)P + (\alpha' - 2\omega_2 - \theta\alpha)Q = 0.$$

Or ce plan passe par S; c'est donc le plan SKK',

Posons

$$\alpha\beta - \omega = \gamma, \qquad \alpha' - 2\omega_2 - \theta\alpha = \gamma_1, \qquad \beta' - 2\omega_1 - \theta\beta = \gamma_2.$$

L'identité précédente prend alors la forme

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \lambda} \equiv \theta \Pi + 2\gamma R + \gamma_1 Q + \gamma_2 P. \tag{11}$$

On aurait pu l'écrire *a priori*, en utilisant l'indépendance des fonctions linéaires Π, R, P, Q. L'intérêt du calcul précédent est de montrer la liaison des identités (10) et (11).

Les valeurs de μ qui correspondent aux points K et K' sont les racines de l'équation

$$\gamma_1 \mu^2 + 2\gamma\mu + \gamma_2 = 0. \tag{12}$$

Soit J le point de rencontre de HH' et KK'; il est défini par les équations

$$\Pi = 0, \qquad R = 0, \qquad \gamma_2 P + \gamma_1 Q = 0,$$

et il est indéterminé si γ_1 et γ_2 sont nuls : ce cas ne peut se présenter que si la caractéristique KK' du plan Π est confondue avec HH'. Écartons ce cas provisoirement.

II. Utilisons les coordonnées tangentielles tirées de l'équation (6) pour former l'équation différentielle des asymptotiques, savoir

$$\left| U, \frac{\partial U}{\partial \lambda}, \frac{\partial U}{\partial \mu}, \frac{\partial^2 U}{\partial \lambda^2} \right| d\lambda^2 + 2 \left| U, \frac{\partial U}{\partial \lambda}, \frac{\partial U}{\partial \mu}, \frac{\partial^2 U}{\partial \lambda \partial \mu} \right| d\lambda\, d\mu + \left| U, \frac{\partial U}{\partial \lambda}, \frac{\partial U}{\partial \mu}, \frac{\partial^2 U}{\partial \mu^2} \right| d\mu^2 = 0.$$

Si on pose $\delta = |u, u_1, u_2, u'|$, un calcul d'identification assez long donne :

$$\frac{1}{2\mu\delta} \left| U, \frac{\partial U}{\partial \lambda}, \frac{\partial U}{\partial \mu}, \frac{\partial^2 U}{\partial \lambda^2} \right| \equiv (\alpha\mu^2 - \beta)^2 + 2\mu^3\gamma_1 + 4\mu^2\gamma + 2\mu\gamma_2;$$

$$\frac{1}{4\mu\delta} \left| U, \frac{\partial U}{\partial \lambda}, \frac{\partial U}{\partial \mu}, \frac{\partial^2 U}{\partial \lambda \partial \mu} \right| \equiv \alpha\mu^2 - \beta; \qquad \frac{1}{4\mu\delta} \left| U, \frac{\partial U}{\partial \lambda}, \frac{\partial U}{\partial \mu}, \frac{\partial^2 U}{\partial \mu^2} \right| \equiv 2.$$

L'utilisation des deux dernières identités redonne l'équation différentielle des conjuguées des coniques. Celle de l'ensemble donne l'équation différentielle des asymptotiques qui prend aisément la forme

$$\left(2\frac{d\mu}{d\lambda} + \alpha\mu^2 - \beta\right)^2 + 2\mu(\gamma_1\mu^2 + 2\gamma\mu + \gamma_2) = 0. \tag{13}$$

Cette équation en $\frac{d\mu}{d\lambda}$ a bien une racine double aux quatre points H, H', K, K', qui correspondent à $\mu = \infty$, $\mu = 0$, et aux racines de l'équation (12).

Cette équation différentielle peut être obtenue plus rapidement par d'autres procédés. M. Gambier l'a reconstituée simplement en écrivant que les équations

$$\varpi = 0, \qquad \frac{d\varpi}{d\lambda} = 0, \qquad \frac{d^2\varpi}{d\lambda^2} = 0,$$

où les dérivations tiennent compte du fait que μ est une fonction de λ, telle que le point M se déplace sur une asymptotique, définissent trois plans passant par M. Il suffit d'ailleurs de l'écrire pour le dernier.

On peut aussi utiliser la connaissance d'un système conjugué sur (E). L'équation

$$(14) \qquad d\lambda[(\alpha\mu^2 - \beta)d\lambda + 2d\lambda] = 0,$$

définit en effet le système constitué par les coniques et leurs conjuguées. Cherchons de même l'équation différentielle des conjuguées des courbes $\mu = c^{te}$. La tangente en M à la conjuguée qui passe par ce point, est l'intersection du plan ϖ et du plan infiniment voisin, quand λ varie seul. Elle est donc définie par les équations

$$\varpi = 0, \qquad \frac{\partial\varpi}{\partial\lambda} \equiv (\alpha\mu^2 + \beta)R - 2\mu\frac{\partial R}{\partial\lambda} = 0.$$

Remplaçons, dans la seconde, $2\dfrac{\partial R}{\partial\lambda}$ par sa valeur tirée de l'identité (5); il vient

$$\left(\alpha\mu + \frac{\beta}{\mu}\right)R + \Pi - \alpha Q - \beta P = 0.$$

La différentiation de cette dernière donne la relation entre $d\lambda$ et $d\mu$ cherchée; c'est

$$\left(\alpha - \frac{\beta}{\mu^2}\right)R\frac{d\mu}{d\lambda} + \left(\alpha'\mu + \frac{\beta'}{\mu}\right)R + \left(\alpha\mu + \frac{\beta}{\mu}\right)\frac{\partial R}{\partial\lambda} + \frac{\partial\Pi}{\partial\lambda} - \alpha' Q - \beta' P - 2\alpha\beta R = 0.$$

Tenant compte des identités (5) et (11) et réunissant les termes qui contiennent le facteur α' ou β', il vient :

$$(15) \quad \left(\alpha - \frac{\beta}{\mu^2}\right)R\frac{d\mu}{d\lambda} + \alpha'(\mu R - Q) + \frac{\beta'}{\mu}(R - \mu P) + \frac{1}{2}\left(\alpha\mu + \frac{\beta}{\mu}\right)(\alpha Q + \beta P) + 2\gamma R + \gamma_1 Q + \gamma_2 P = 0.$$

En y remplaçant P, R, Q, respectivement par $1, \mu, \mu^2$, on trouve l'équation différentielle des conjuguées des courbes $\mu = c^{te}$ sous la forme

$$(15') \qquad 2(\alpha\mu^2 - \beta)\frac{d\mu}{d\lambda} + (\alpha\mu^2 - \beta)^2 + 2\gamma_1\mu^3 + 4\gamma\mu^2 + 2\gamma_2\mu = 0.$$

Posons

$$\alpha\mu^2 - \beta = \mathrm{A}, \qquad \gamma_1\mu^3 + 2\gamma\mu^2 + \gamma_2\mu = \mathrm{B}.$$

Nous connaissons alors les deux systèmes conjugués définis par les équations

$$\mathrm{A}\,d\lambda^2 + 2\,d\lambda\,d\mu = 0, \qquad 2\mathrm{A}\,d\mu^2 + (\mathrm{A}^2 + 2\mathrm{B})\,d\lambda\,d\mu = 0,$$

et qui sont constitués respectivement par les courbes coordonnées et leurs conjuguées.

Les rayons doubles, c'est-à-dire les asymptotiques, s'obtiennent rapidement et sont définis par l'équation

$$4\,d\mu^2 + 4\mathrm{A}\,d\lambda\,d\mu + (\mathrm{A}^2 + 2\mathrm{B})\,d\lambda^2 = 0,$$

qui se met de suite sous la forme

$$\left(2\frac{d\mu}{d\lambda} + \mathrm{A}\right)^2 + 2\mathrm{B} = 0, \tag{13'}$$

identique à (13).

Si $\dfrac{d\mu}{d\lambda}$ est racine de l'équation (13), la tangente asymptotique correspondante, qui est confondue avec sa conjuguée, est l'intersection du plan ϖ et du plan d'équation $\dfrac{d\varpi}{d\lambda} = 0$, c'est-à-dire :

$$\frac{\partial\varpi}{\partial\lambda} + \frac{\partial\varpi}{\partial\mu}\frac{d\mu}{d\lambda} = 0. \tag{16}$$

Or, on a trouvé

$$\frac{\partial\varpi}{\partial\lambda} \equiv (\alpha\mu^2 + \beta)\mathrm{R} - 2\mu\frac{\partial\mathrm{R}}{\partial\lambda} \equiv (\alpha\mu^2 + \beta)\mathrm{R} - \mu(\alpha\mathrm{Q} + \beta\mathrm{P} - \mathrm{H})$$

ou

$$\frac{\partial\varpi}{\partial\lambda} = \mu\mathrm{H} + (\alpha\mu^2 - \beta)(\mu\mathrm{P} - \mathrm{R}),$$

en tenant compte de (6).

Puis

$$\frac{\partial\varpi}{\partial\mu} \equiv 2(\mu\mathrm{P} - \mathrm{R}).$$

L'équation (16) devient donc

$$(16') \qquad \mu \mathrm{H} + \left(\mathrm{A} + 2\frac{d\mu}{d\lambda}\right)(\mu \mathrm{P} - \mathrm{R}) = 0.$$

De plus $(\mu \mathrm{P} - \mathrm{R})^2 \equiv \mathrm{P}(\mathrm{P}\mu^2 - 2\mathrm{R}\mu) + \mathrm{R}^2$, est égal, en tenant compte encore une fois de (6), à $-\mathrm{PQ} + \mathrm{R}^2$, ou $-\mathrm{F}$.

L'élimination de $\mathrm{P}\mu - \mathrm{R}$ entre (13') et (16') donne alors l'équation

$$(17) \qquad \frac{\mathrm{H}^2}{2\mathrm{F}} = \gamma_1 \mu + 2\gamma + \frac{\gamma_2}{\mu},$$

qui est vérifiée par les tangentes asymptotiques au point $\mathrm{M}(\lambda, \mu)$. Ces tangentes sont l'intersection du plan ϖ et de la quadrique $\mathrm{Q}\mu$ définie par l'équation (17), qui dépend en général de μ. L'équation du lieu Σ de ces tangentes, λ restant fixe, s'obtient en éliminant μ entre l'équation (17) et l'équation (6), mise sous la forme

$$(6') \qquad \mathrm{P}\mu - 2\mathrm{R} + \frac{\mathrm{Q}}{\mu} = 0.$$

Posons

$$\frac{\mathrm{H}^2}{2\mathrm{F}} - 2\gamma = 2\mathrm{G}.$$

La résolution des deux équations (6') et

$$\gamma_1 \mu - 2\mathrm{G} + \frac{\gamma_2}{\mu} = 0$$

par rapport à μ et $\frac{1}{\mu}$ donne

$$\mu = \frac{2(\gamma_2 \mathrm{R} - \mathrm{QG})}{\gamma_2 \mathrm{P} - \gamma_1 \mathrm{Q}}, \qquad \frac{1}{\mu} = \frac{2(\mathrm{PG} - \gamma_1 \mathrm{R})}{\gamma_2 \mathrm{P} - \gamma_1 \mathrm{Q}},$$

par suite

$$4(\gamma_2 \mathrm{R} - \mathrm{QG})(\gamma_1 \mathrm{R} - \mathrm{PG}) + (\gamma_2 \mathrm{P} - \gamma_1 \mathrm{Q})^2 = 0.$$

Posons encore

$$\mathrm{H}^2 - 4\gamma \mathrm{F} = \Phi, \qquad \text{d'où} \qquad \mathrm{G} = \frac{\Phi}{4\mathrm{F}};$$

l'équation de Σ se met sous la forme

$$(4\gamma_2 RF - Q\Phi)(4\gamma_1 RF - P\Phi) + 4F^2(\gamma_2 P - \gamma_1 Q)^2 = 0, \tag{18}$$

laquelle équivaut à

$$[4(\gamma_2 R + \gamma Q)F - Q\Pi^2][4(\gamma_1 R + \gamma P)F - P\Pi^2] + 4F^2(\gamma_2 P - \gamma_1 Q)^2 = 0. \tag{18'}$$

Si on se reporte à l'expression de F, on constate que (18′) est homogène et du sixième degré par rapport à P, Q, R, Π.

La quadrique $Q\mu$ définie par l'équation (17) est tangente au cône et par suite à (E) tout le long de la conique (e). Elle est la même pour deux valeurs de μ telles que $\mu\mu' = \frac{\gamma_2}{\gamma_1}$. Les points correspondants M et M′ de la conique décrivent sur cette courbe deux divisions en involution : K, K′ et H, H′ en sont deux couples de points homologues, de sorte que MM′ passe par J. Le plan SMM′, dans les mêmes conditions, tourne autour de SJ. Les quatre tangentes asymptotiques, en M et M′, étant sur $Q\mu$, sont les côtés d'un quadrilatère gauche dont les sommets opposés M, M′ et m, m' sont des points doubles de Σ. La droite mm' conjuguée de MM′, par rapport au cône, décrit le plan polaire (J) du point J. Sa trace n, sur le plan Π, se déplace sur la trace de (J), qui passe par k et h, et rencontre la conique en n_1 et n_2. Déplaçons n sur kh. Quand n est en k, μ et μ' étant racines de l'équation (12), la quadrique Q_μ se réduit au plan double $\Pi^2 = 0$ et les tangentes asymptotiques sont kK et kK′ : on retrouve un résultat établi par M. Gambier. En outre, les points m, m' sont confondus en k. Si n vient en h, les valeurs associées de μ étant ∞ et o, la quadrique (17) est le cône, et les points m, m' se confondent en S. Enfin, si n vient en n_1 ou n_2, la droite MM′ correspondante étant Jn_1 ou Jn_2 a pour conjuguée Sn_1 ou Sn_2 et les points associés m, m' se confondent en n_1 ou n_2.

Les équations de la courbe double, lieu de m et m', résultent de suite de ce que les équations (17) et (6′) ont mêmes racines μ en ces points. On obtient ainsi

$$\frac{\gamma_1}{P} = \frac{\gamma_2}{Q} = \frac{\Pi^2 - 4\gamma F}{4RF}. \tag{19}$$

Ces équations définissent une cubique située dans le plan (J) : S est un point double de Σ et un point d'inflexion de la cubique double; les tangentes menées de S à cette courbe, sont, en dehors de la tangente d'inflexion Sh, les droites Sk, Sn_1, Sn_2 : l'alignement de leurs points de contact, k, n_1, n_2 est bien conforme aux propriétés des cubiques qui ne sont pas unicursales. Les tangentes asymptotiques sont les droites tangentes au cône, le long de (e), qui s'appuient sur cette cubique.

Par une droite D quelconque, menée par S, passent deux plans tangents au cône; un de ces plans touche la conique en M et contient deux tangentes asymptotiques, qui sont conjuguées par rapport à la génératrice SM et à la tangente à (e) en M, et qui rencontrent D en deux points conjugués harmoniques par rapport à S et au point d où D perce le plan Π. Il y a sur D deux couples de points analogues : ce fait se vérifie sur l'équation (18′) qui est bicarrée par rapport à Π.

Si l'on pose $\mu\gamma_1 + 2\gamma + \frac{\gamma_2}{\mu} = \frac{1}{2r}$, à toute valeur de r correspondent deux valeurs de μ, liées par la relation $\mu\mu' = \frac{\gamma_2}{\gamma_1}$, et la quadrique Q_r définie par l'équation $r\Pi^2 - F = 0$ est osculatrice à la surface étudiée aux deux points M et M′. Cette quadrique peut s'obtenir sans passer par l'équation différentielle des asymptotiques, en utilisant une remarque *fondamentale* de M. Gambier. On peut circonscrire à la surface enveloppée, le long de la conique génératrice, une infinité de quadriques Q_ρ définies par l'équation $\Psi \equiv \rho\Pi^2 - F = 0$, où ρ désigne une fonction arbitraire de λ. Utilisant l'identité $\frac{\partial F}{\partial \lambda} \equiv R\Pi$, on trouve

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} \equiv 2\rho\Pi\left[\left(\theta + \frac{\rho'}{2\rho}\right)\Pi + \gamma_2 P + 2\left(\gamma - \frac{1}{4\rho}\right)R + \gamma_1 Q\right] \equiv 2\rho\Pi\Pi_1.$$

La quadrique Q_ρ touche donc son enveloppe suivant deux coniques et elle lui est osculatrice aux deux points où la conique (e) du plan Π est rencontrée par la droite commune aux deux plans Π et Π_1.

Cette droite est l'intersection du plan Π et du plan qui a pour équation

$$\gamma_2 P + 2\left(\gamma - \frac{1}{4\rho}\right)R + \gamma_1 Q = 0.$$

Si on suppose λ fixe et si on remplace ρ par r, ces points ne sont autres que les points M, M′ étudiés précédemment.

On peut retrouver l'équation de Σ en éliminant r entre l'équation de Q_r et l'équation du couple de plans tangents au cône aux deux points M, M′, savoir

$$\left[\gamma_2 P + \gamma_1 Q + 2\left(\gamma - \frac{1}{4r}\right)R\right]^2 - 4\left[\gamma_1\gamma_2 - \left(\gamma - \frac{1}{4r}\right)^2\right]F = 0.$$

On obtient ainsi :

$$(18'') \qquad [(\gamma_2 P + \gamma_1 Q + 2\gamma R)2F - R\Pi^2]^2 + F[(4\gamma F - \Pi^2)^2 - 16\gamma_1\gamma_2 F^2] = 0.$$

A côté de la conique double (e), le long de laquelle les deux nappes de Σ se touchent, et de la cubique double (c), les deux droites SH et SH′ sont des droites inflexionnelles de cette surface. L'intersection de Σ et du cône vérifie l'équation $R^4\Pi^4 = 0$; elle est constituée par les droites SH, SH′, et par la conique (e).

Une série de cas particuliers s'imposent :

1° L'équation (17) se réduit au premier degré si γ_1 ou γ_2 est nul, c'est-à-dire si l'un des points K, K′ est confondu avec l'un des points H, H′. L'élimination de μ est immédiate et donne pour Σ une surface du cinquième degré. D'ailleurs P ou Q est alors en facteur dans l'équation (18′). La cubique (c) est unicursale et a son point double en H ou en H′, son plan passant par SH ou SH′; ce n'est plus alors qu'une courbe simple de Σ.

2° Les points K et K′ sont confondus, c'est-à-dire que $\gamma^2 - \gamma_1\gamma_2 = 0$. La cubique double est unicursale et son point double est au point k confondu avec K et K′.

3° Les points K et K′ sont confondus avec les deux points H et H′, c'est-à-dire $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$. Alors l'équation (18) se réduit à $P.Q.\Phi^2 = 0$. Il n'y a d'ailleurs pas lieu de procéder à une élimination, le paramètre μ ne figurant plus dans l'équation (17). La quadrique Φ est osculatrice à la surface enveloppe en tous les points de (e) : ce dernier résultat est dû à M. Gambier et rectifie celui qui est indiqué (p. 189, *loc. cit.*) touchant deux hyperboloïdes.

III. La marche qui vient d'être suivie ne permet pas d'étudier les surfaces du second genre puisqu'elle utilise deux développables distinctes enveloppes du cône. Supposons-les confondues. Soient G la génératrice le long de laquelle le cône est osculateur à l'unique développable, g sa trace sur le plan de la conique (e), $P(x, y, z, \lambda) = 0$ l'équation du plan tangent le long de cette génératrice. Les équations de G sont $P = 0$, $\dfrac{\partial P}{\partial \lambda} = 0$.

Le cône passant par G, et son sommet se trouvant dans le plan d'équation $\dfrac{\partial^2 P}{\partial \lambda^2} = 0$, son équation est de la forme

$$a_1 P^2 + 2a_2 P \frac{\partial P}{\partial \lambda} + 2a_3 P \frac{\partial^2 P}{\partial \lambda^2} - \left(\frac{\partial P}{\partial \lambda}\right)^2 = 0,$$

où a_1, a_2, a_3 sont des fonctions arbitraires de λ. Cette forme n'est pas altérée si on y remplace P par θP, θ désignant aussi une fonction arbitraire de λ; elle devient

$$\left[a_1 + 2a_2\frac{\theta'}{\theta} + 2a_3\frac{\theta''}{\theta} - \frac{\theta'^2}{\theta^2}\right]P^2 + 2\left[a_2 + (2a_3 - 1)\frac{\theta'}{\theta}\right]P\frac{\partial P}{\partial \lambda} + 2a_3 P\frac{\partial^2 P}{\partial \lambda^2} - \left(\frac{\partial P}{\partial \lambda}\right)^2 = 0.$$

Plaçons-nous dans le cas général où $2a_3 - 1$ n'est pas nul, et déterminons θ par la condition $a_2 + (2a_2 - 1)\dfrac{\theta'}{\theta} = 0$. Il vient alors, pour l'équation du cône,

$$F(x, y, z, \lambda) \equiv 2aP^2 + 2a_3 P\frac{\partial^2 P}{\partial \lambda^2} - \left(\frac{\partial P}{\partial \lambda}\right)^2 = 0,$$

a désignant une nouvelle fonction de λ.

La courbe caractéristique de ce cône est sur la quadrique d'équation

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} \equiv 2a'P^2 + 4aP\frac{\partial P}{\partial \lambda} + 2a'_3 P\frac{\partial^2 P}{\partial \lambda^2} + 2a_3 P\frac{\partial^3 P}{\partial \lambda^3} + 2(a_3 - 1)\frac{\partial P}{\partial \lambda}\frac{\partial^2 P}{\partial \lambda^2} = 0.$$

Cette caractéristique devant être sur un couple de plans dont l'un est le plan P, il faut déterminer une fonction $b(\lambda)$ telle que $\frac{\partial F}{\partial \lambda} + bF$ soit divisible par P, ou que $\left[(2a_3 - 1)\frac{\partial^2 P}{\partial \lambda^2} - b\frac{\partial P}{\partial \lambda}\right]\frac{\partial P}{\partial \lambda}$ le soit. Il faut et il suffit pour cela, les fonctions linéaires P, $\frac{\partial P}{\partial \lambda}$, $\frac{\partial^2 P}{\partial \lambda^2}$ étant indépendantes, que l'on ait $a_3 = 1$, $b = 0$, ce qui exclut l'hypothèse $2a_3 - 1 = 0$. Cela étant, il vient

$$(20)\qquad F \equiv 2aP^2 + 2P\frac{\partial^2 P}{\partial \lambda^2} - \left(\frac{\partial P}{\partial \lambda}\right)^2 \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial \lambda} \equiv 2P\left(a'P + 2a\frac{\partial P}{\partial \lambda} + \frac{\partial^3 P}{\partial \lambda^3}\right) \equiv 2P\Pi.$$

Le cône touche son enveloppe suivant G et une conique (e) dont le plan a pour équation $\Pi = 0$.

Posons

$$\frac{\partial P}{\partial \lambda} \equiv R, \qquad aP + \frac{\partial R}{\partial \lambda} \equiv Q.$$

Le cône a pour équation

$$(21)\qquad F \equiv 2PQ - R^2 = 0.$$

La conique caractéristique (e) est dans le plan défini par

$$(22)\qquad \Pi \equiv a'P + 2a\frac{\partial P}{\partial \lambda} + \frac{\partial^3 P}{\partial \lambda^3} \equiv aR + \frac{\partial Q}{\partial \lambda} = 0.$$

L'équation générale des quadriques Q_ρ, tangentes au cône le long de (e) est

$$(23)\qquad \Phi \equiv \rho\Pi^2 - F = 0,$$

où ρ est une fonction arbitraire de λ. La caractéristique de Q_ρ est sur la quadrique d'équation

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \equiv \rho'\Pi^2 + 2\rho\Pi\frac{\partial \Pi}{\partial \lambda} - 2P\Pi \equiv 2\Pi\left[\frac{\rho'}{2}\Pi + \rho\frac{\partial \Pi}{\partial \lambda} - P\right] = 0.$$

Elle se compose de (e) et d'une autre conique qui rencontre la première en deux points M, M', situés sur la droite

$$\Pi = 0, \qquad \rho\frac{\partial \Pi}{\partial \lambda} - P = 0.$$

La quadrique Q_ρ est osculatrice à son enveloppe en ces points. Si on suppose λ fixe et ρ variable, ces deux points décrivent sur (e) deux divisions en involution; la droite MM′ rencontre le plan P, au point fixe J défini par les équations

$$\Pi = 0, \qquad \frac{\partial \Pi}{\partial \lambda} = 0, \qquad P = 0.$$

Si ρ est infini, MM′ devient la caractéristique KK′ du plan Π. Le plan SMM′, dans ces conditions, tourne autour de SJ; il y a lieu de trouver son équation.

Les quatre fonctions linéaires Π, P, R, Q étant linéairement indépendantes, il existe des fonctions α, α_1, α_2, α_3 de λ vérifiant l'identité

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \lambda} \equiv \alpha \Pi + \alpha_1 P + \alpha_2 R + \alpha_3 Q. \tag{24}$$

L'équation du plan SMM′ est alors

$$\frac{P}{\rho} = \alpha_1 P + \alpha_2 R + \alpha_3 Q,$$

et pour ρ infini, on obtient le plan SKK′ dont l'équation est

$$\alpha_1 P + \alpha_2 R + \alpha_3 Q = 0.$$

Le point J est encore défini par les équations

$$\Pi = 0, \qquad P = 0, \qquad \alpha_2 R + \alpha_3 Q = 0.$$

Les équations du diamètre conjugué du plan SMM′ sont

$$\frac{P}{\alpha_3} = \frac{Q}{\alpha_1 - \frac{1}{\rho}} = \frac{R}{-\alpha_2}.$$

Cette droite se déplace dans le plan d'équation $\alpha_2 P + \alpha_3 R = 0$, c'est-à-dire dans le plan polaire (J) du point J. L'équation du couple de plans tangents au cône, menés par ce diamètre, est

$$\left[2\left(\alpha_1 - \frac{1}{\rho}\right)\alpha_3 - \alpha_2^2\right] F - \left[\left(\alpha_1 - \frac{1}{\rho}\right) P + \alpha_2 R + \alpha_3 Q\right]^2 = 0.$$

En y remplaçant $\frac{1}{\rho}$ par $\frac{\Pi^2}{F}$, on trouve l'équation de Σ, savoir

$$[2\alpha_3 \Pi^2 + (\alpha_2^2 - 2\alpha_1\alpha_3) F] F^2 + [\Pi^2 P - (\alpha_1 P + \alpha_2 R + \alpha_3 Q) F]^2 = 0. \tag{25}$$

C'est encore une surface du sixième degré, admettant (e) comme conique double. Le plan Π la coupe suivant cette conique et suivant les tangentes $k\mathrm{K}$, $k\mathrm{K}'$ à cette courbe aux points K et K'. Le plan P la coupe suivant G et une conique $(\acute{e})$ dont les équations sont

$$(26) \qquad \mathrm{P} = 0, \qquad 2\alpha_3\Pi^2 + (2\alpha_1\alpha_3 - \alpha_2^2)\mathrm{R}^2 + (\alpha_2\mathrm{R} + \alpha_3\mathrm{Q})^2 = 0.$$

Cette conique rencontre G en deux points définis g_1 et g_2 par les équations

$$\mathrm{P} = 0, \qquad \mathrm{R} = 0, \qquad 2\Pi^2 + \alpha_3\mathrm{Q}^2 = 0.$$

Ces points sont conjugués par rapport aux deux points g et S. Cette même conique rencontre $g\mathrm{J}$ en deux points j_1 et j_2 définis par les équations

$$\mathrm{P} = 0, \qquad \Pi = 0, \qquad (2\alpha_1\alpha_3 - \alpha_2^2)\mathrm{R}^2 + (\alpha_2\mathrm{R} + \alpha_3\mathrm{Q})^2 = 0.$$

Ces points sont conjugués par rapport aux deux points g et J.

La cubique des points doubles de Σ, en dehors de (e), est définie cette fois par les deux équations

$$(27) \qquad \alpha_2\mathrm{P} + \alpha_3\mathrm{R} = 0, \qquad \mathrm{P}(\Pi^2 - \alpha_1\mathrm{F}) + \alpha_3\mathrm{QF} = 0.$$

Or ce plan (J) et cette surface cubique passent par G; le reste de leur intersection constitue une conique double (e_1) qui rencontre (e) en un point n_1 et qui passe par k. Les droites $\mathrm{S}k$ et $\mathrm{S}n_1$ sont tangentes à cette conique. Les génératrices rectilignes de Σ sont les droites qui s'appuient sur (e_1) et qui sont tangentes au cône le long de (e).

Écartant G, on place (e_1) sur le cône d'équation

$$(28) \qquad (2\alpha_3^2\mathrm{Q} - \alpha_2^2\mathrm{P})(\alpha_3\mathrm{Q} - \alpha_1\mathrm{P}) + \alpha_3^2\Pi^2 = 0,$$

qui a pour sommet le pôle du plan R par rapport à (e). La conique (e_1) rencontre G aux deux points δ_1, δ_2 définis par les équations

$$\mathrm{P} = 0, \qquad \mathrm{R} = 0, \qquad \Pi^2 + 2\alpha_3\mathrm{Q}^2 = 0.$$

Ces deux points sont conjugués harmoniques par rapport à g et S. De plus, si on rapproche les deux points g_1 et δ_1 définis respectivement par

$$\Pi = \varepsilon\sqrt{-\frac{\alpha_3}{2}}\,\mathrm{Q} \qquad \text{et} \qquad \Pi = \varepsilon\sqrt{-2\alpha_3}\,\mathrm{Q} \qquad (\varepsilon = \pm 1),$$

on constate que $(g, \delta_1, g_1, \mathrm{S}) = -1$, de sorte que δ_1 est le conjugué harmonique de g par rapport à g_1 et S. La connaissance des trois points g, S, g_1, par exemple, entraîne celle de δ_1, g_2, δ_2.

Pour que la conique double (e_1) dégénère en deux droites, il faut et il suffit que le cône d'équation (28) dégénère en deux plans, c'est-à-dire que les deux fonctions linéaires $2\alpha_3^2 Q - \alpha_2^2 P$, $\alpha_3 Q - \alpha_1 P$ soient dépendantes. Cela entraîne la condition $\alpha_2^2 - 2\alpha_1\alpha_3 = 0$. C'est aussi la condition nécessaire et suffisante pour que le plan SKK' soit tangent au cône (S), c'est-à-dire que K et K' soient confondus.

Dans les mêmes conditions, les équations de (e') se réduisent à

$$P = 0, \qquad 2\alpha_3 \Pi^2 + (\alpha_2 R + \alpha_3 Q)^2 = 0,$$

et cette conique se décompose en deux droites D_1, D_2 définies par les équations

$$P = 0, \qquad \alpha_2 R + \alpha_3 Q + \varepsilon \Pi \sqrt{-2\alpha_3} = 0 \qquad (\varepsilon = \pm 1).$$

Ces droites se coupent en J ; elles passent respectivement par g_1 et g_2, l'association de chaque droite et de chaque point étant commandée par la même détermination de ε.

La conique double (e_1) dégénère alors en deux droites Δ_1 et Δ_2 définies par les équations

$$\alpha_2 P + \alpha_3 R = 0, \qquad \alpha_1 P - \alpha_3 Q - \varepsilon \sqrt{-\frac{\alpha_3}{2}}\, \Pi = 0.$$

Elles passent toutes deux par le point k; l'une rencontre G en δ_1, l'autre en δ_2, l'association de chaque droite et de chaque point étant toujours réglée par la valeur attribuée à ε.

Enfin, la surface Σ dégénère en deux surfaces cubiques Σ_1 et Σ_2, définies par l'équation

$$\Pi^2 P - \left(\alpha_1 P + \alpha_2 R + \alpha_3 Q - \varepsilon \sqrt{-2\alpha_3}\, \Pi\right) F = 0. \tag{29}$$

La valeur attribuée à ε, établit la correspondance entre les surfaces cubiques, leurs droites doubles Δ_1 et Δ_2, leurs droites simples D_1 et D_2. On pourra prendre $\varepsilon = +1$, par exemple, et désigner par $\Sigma_1, \Delta_1, D_1, \delta_1, g_1$, les éléments correspondants. La surface Σ_1 est le lieu des droites qui s'appuient sur la conique (e) et les deux droites Δ_1 et D_1.

Les deux surfaces Σ_1 et Σ_2 ont en commun la conique (e), la droite G et la droite kJ. Elles sont conjuguées par rapport au point S et au plan Π. Elles ont les mêmes tangentes asymptotiques en tous les points de (e), les génératrices rectilignes de l'une étant les tangentes aux lignes asymptotiques non rectilignes de l'autre. La recherche de ces dernières conduit à des calculs faciles. On constate que les lignes asymptotiques non rectilignes de Σ_1 sont les courbes d'intersection de cette surface et des quadriques d'un faisceau linéaire ponctuel (et tangentiel) défini par le quadrilatère gauche $kg_1\delta_1$J., dont les diagonales sont Δ_1 et Jg_1. Les génératrices de même système que G et Jk, de ces quadriques, rencontrent Σ_1 en trois points (un seul est réel), de sorte que les lignes asymptotiques non rectilignes sont des quartiques de Steiner qui passent par les deux points fixes k et δ_1.

Je crois inutile de poursuivre : la remarquable étude de M. Gambier comble toutes les lacunes de l'ébauche qui constitue ma thèse. Je n'y serais pas revenu d'ailleurs si je n'avais vu l'occasion de rectifier des erreurs. J'ai signalé au passage celles qui ont une importance théorique. Je dois encore avertir le lecteur d'un défaut de rédaction, qui attribue à un cône de révolution une condition nécessaire et suffisante, alors que cette condition vise son axe, et mentionner deux omissions, l'une dans l'expression de A, l'autre dans la facture du déterminant (4) (p. 180, 163 et 187, *loc. cit.*).