

PIERRE BOOS

Propriétés caractéristiques de courbes gauches

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 3^e série, tome 28 (1936), p. 63-102

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1936_3_28__63_0>

© Université Paul Sabatier, 1936, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PROPRIÉTÉS CARACTÉRISTIQUES DE COURBES GAUCHES

Par M. PIERRE BOOS.

INTRODUCTION

Les différents éléments d'une figure, formée par un arc de courbe et la corde qui le sous-tend, sont des fonctions d'un paramètre qui fixe la position de la figure et d'un paramètre qui en fixe la grandeur; nous cherchons les conditions nécessaires et suffisantes pour que ces fonctions aient certaines formes particulières et nous en déduisons des propriétés caractéristiques de courbes admettant un groupe continu de transformations en elles-mêmes⁽¹⁾.

Dans un premier chapitre, nous envisageons une courbe gauche d'un espace euclidien ou non-euclidien de courbure constante K (la corde qui sous-tend l'arc est une géodésique de l'espace). Les paramètres dont dépend la figure sont l'abscisse curviligne s de l'origine M de l'arc et la longueur l de cet arc ou bien l'angle α que forment la corde et l'arc à l'origine de celui-ci. Nous déterminons les courbes, que nous appelons courbes (P) , telles que l'angle α ne dépende que de l (et non de s), et les courbes (P') telles que la longueur l soit égale au produit d'une fonction de s par une fonction de α ; les courbes (P) ont une courbure et une torsion constantes, ce sont les hélices circulaires de l'espace envisagé; les courbes (P') n'existent que dans l'espace euclidien et sont les hélices coniques.

Dans un deuxième chapitre, nous étudions les fonctions de s et de α (ou de s et l) qui donnent la longueur L de la corde, le rapport r de L à l , l'angle β formé par la corde et l'arc à l'extrémité M_1 de celui-ci, l'aire \mathcal{A} balayée par une géodésique de l'espace qui passe par M et dont un point décrit l'arc MM_1 , l'angle γ sous lequel on voit de M l'arc opposé à MM_1 et nous démontrons que : *Si l'une des fonctions l , L , \mathcal{A} , β , γ est une fonction impaire de α (ou de l) ou bien si la fonction r est une fonction paire de la même variable, la courbe est nécessairement une courbe (P) . — Si l'une des fonctions L ou \mathcal{A} (et l par définition) ne dépend que de α , la courbe est*

⁽¹⁾ Cf. *Comptes rendus*, 194, 1932, p. 1623 et 2271; 202, 1936, p. 197.

une courbe (P); si l'une de ces mêmes fonctions est égale au produit d'une fonction de s par une fonction de α , la courbe est une courbe (P'). — Si l'une des fonctions r, β, γ ne dépend que de α , la courbe est une courbe (P) ou (P').

La démonstration est obtenue par l'établissement de développements limités; mais il faut quelquefois déterminer des termes d'ordre élevé et il est alors intéressant de chercher la méthode qui permet le calcul le moins compliqué; en particulier il faut remarquer que l'utilisation des coordonnées de Weierstrass permet souvent d'obtenir le résultat bien plus simplement que la méthode de calcul qui semble directe dans le cas de l'espace euclidien (nous avons pourtant effectué certains calculs directs à titre de vérification).

Remarquons que s'il n'existe pas de courbes (P') dans un espace de courbure K , non nulle, du moins les courbes qui ont pour équations intrinsèques :

$$\lambda \varphi = -(s - s_0)^{-1}, \quad \tau^2 = 3K + \mu \varphi^2,$$

(φ courbure, τ torsion; λ, μ constantes) sont telles que la différence entre les fonctions l, L, r, β, γ et une fonction ayant la forme correspondant aux courbes (P') soit, par rapport à α , d'un ordre plus élevé de deux unités que pour toutes les autres courbes gauches du même espace. La fonction \mathcal{A} n'a d'ailleurs sur ces courbes aucune particularité analogue.

En terminant ce chapitre nous cherchons s'il existe des courbes (P) telles que la longueur de l'arc soit proportionnelle à l'angle α ; cette propriété caractérise les cercles de l'espace euclidien; dans un espace de courbure K , les courbes qui ont pour équations intrinsèques : $3\varphi^2 = K$, $\tau = 3\varphi$ sont celles pour lesquelles la différence entre l et une fonction linéaire de α est d'ordre le plus élevé, on a alors :

$$l = \frac{2}{\varphi} \left[\alpha - \frac{2^2 3^2}{5^2 \cdot 7} \alpha^7 + \dots \right].$$

Dans un troisième chapitre, nous généralisons cette étude dans le cas des courbes planes ou gauches en géométrie affine; mais pour obtenir des résultats intéressants il faut ici se limiter à des éléments invariants par les transformations affines fondamentales du plan ou de l'espace; aussi devons-nous prendre comme paramètres l'abscisse curviligne affine s de l'origine de l'arc et la longueur affine l de celui-ci et n'envisageons-nous que la fonction $L(l, s)$ qui donne la longueur affine de ce qu'il est naturel d'appeler la corde de l'arc : à savoir la distance affine des éléments linéaires de l'origine et de l'extrémité de celui-ci. Nous disons qu'une courbe est une courbe (P) si L ne dépend pas de s ; et, pour pouvoir définir des courbes (P'), nous envisageons une propriété caractéristique des courbes (P') en géométrie euclidienne : le rapport r des longueurs de la corde et de l'arc dépend seulement du quotient de l par une fonction de s . Nous obtenons ainsi un résultat

généralisant les précédents : *Les courbes (P) ont une courbure et une torsion affines constantes ; les courbes (P') sont toutes les autres courbes W de Klein et Lie ; si le rapport r est une fonction paire de l la courbe est une courbe (P) ; donc, ici encore, les courbes (P) et (P') admettent un groupe continu de transformations en elles-mêmes qui transforment les éléments linéaires en éléments linéaires, conservent les distances (affines) dans le cas des courbes (P) ou multiplient les distances par un même facteur dans le cas des courbes (P').* Remarquons aussi que ce résultat met en évidence l'intérêt de l'introduction des éléments affines pour l'étude des courbes W.

ESPACES EUCLIDIEN OU NON-EUCLIDIEN

CHAPITRE PREMIER

Recherche des courbes (P) et (P').

1. — Nous examinons en premier lieu le cas de l'espace euclidien; il est naturel de définir la courbe gauche (Γ), que nous cherchons, par ses équations intrinsèques, et nous désignerons par $\rho(s)$ et $\tau(s)$ les expressions de la courbure et de la torsion au point d'abscisse curviligne s .

Nous supposons que les fonctions inconnues $\rho(s)$ et $\tau(s)$ admettent autant de dérivées qu'il est nécessaire au voisinage de la valeur s correspondant à l'origine M de l'arc étudié; dans ce cas nous savons que l'on peut trouver un développement limité des coordonnées x, y, z , d'un point voisin de M , lorsqu'on rapporte la courbe au trièdre de Frenet relatif à ce point M . Il suffit de dériver les formules de Frenet qui nous donnent les coefficients de ces développements en fonction des valeurs en M de ρ, τ et de leurs dérivées. Nous obtenons ainsi pour représenter les coordonnées du point M_1 , extrémité de l'arc MM_1 ayant M pour origine et l pour longueur, les expressions suivantes (dont les coefficients dépendent en général de la position du point M) :

$$(1) \quad \begin{cases} x = l - \frac{\rho^2}{6} l^3 - \frac{\rho \rho'}{8} l^4 + \dots, \\ y = \frac{\rho}{2} l^2 + \frac{\rho'}{6} l^3 + (\rho'' - \rho^3 - \rho \tau^2) \frac{l^4}{4!} + (\rho''' - 6\rho^2 \rho' - 3\rho' \tau^2 - 3\rho \tau \tau') \frac{l^5}{5!} + \dots, \\ z = -\frac{\rho \tau}{6} l^3 - (2\rho' \tau + \rho \tau') \frac{l^4}{4!} + \dots, \end{cases}$$

les termes écrits interviennent seuls dans les calculs de ce paragraphe.

L'angle α , sous lequel on voit, de M , l'arc MM_1 , est l'angle de la droite MM_1 avec la tangente en M à la courbe, c'est-à-dire avec l'axe des x . Nous avons donc facilement l'expression de $\tan \alpha$, qui tend vers zéro en même temps que l ; nous en déduisons le développement de α . Il nous suffit donc d'effectuer des calculs, relativement simples, à partir des développements (1), pour obtenir $(y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} x^{-1}$, puis :

$$(2) \quad \alpha = \frac{l}{2} \rho + \frac{l^2}{3!} \rho' + \frac{l^3}{4!} \left(\rho'' - \rho \frac{\tau^2}{3} \right) + \frac{l^4}{5!} \left(\rho''' - \frac{\rho^2 \rho'}{6} - \frac{7\rho' \tau^2}{9} - \frac{4\rho \tau \tau'}{3} \right) + \dots$$

Pour que la courbe possède la propriété (P), il faut que α soit indépendant de s quel que soit l , il est donc nécessaire que tous les coefficients du développement (2) soient indépendants de s ; cela exige que la courbure et la torsion soient des constantes; donc il est nécessaire que la courbe soit une hélice circulaire.

Cette condition nécessaire est suffisante (on peut le vérifier par un calcul élémentaire, sans grand intérêt). Les hélices circulaires admettent un groupe continu de transformations en elles-mêmes (ce sont des déplacements), et une transformation de ce groupe permet de transformer la figure, correspondant à une valeur particulière de s , en la figure correspondant à une autre valeur quelconque de l'abscisse curviligne de l'origine de l'arc; cette transformation conserve la longueur de l'arc ainsi que l'angle de la corde et de l'arc à l'origine; nous voyons donc géométriquement que le déplacement du point M le long d'une courbe (P) n'entraîne aucune déformation de la figure étudiée, par suite l ne dépend que de α et, de même, tous les éléments de la figure doivent être indépendants de s .

Pour qu'une courbe gauche de l'espace euclidien soit une courbe (P'), il faut que l soit égal au produit d'une fonction de α par une fonction de s . Nous pouvons en conclure (car nos hypothèses permettent de calculer une fonction inverse holomorphe au voisinage des valeurs $\alpha = 0$, $l = 0$) que l'angle α ne dépend alors que du quotient q de la longueur l par une fonction inconnue $\varphi(s)$. Il en résulte que le développement (2) doit, dans le cas d'une courbe (P'), pouvoir être identifié au développement d'une fonction $F(q)$; autrement dit, les premiers termes de (2) doivent être de la forme suivante, où nous désignons par A, B, C ... des constantes :

$$(3) \quad \frac{l}{\varphi(s)} + A \frac{l^2}{\varphi^2(s)} + B \frac{l^3}{\varphi^3(s)} + \dots,$$

donc la fonction φ est une fonction linéaire de s (d'après les termes en l et l^2) soit $a(s - s_0)$, la courbure est $\lambda(s - s_0)^{-1}$ et le rapport de la courbure à la torsion est constant : la courbe doit être une hélice conique.

Cette condition nécessaire est suffisante (on peut le vérifier par le calcul); en effet une hélice conique est transformée en elle-même par un groupe continu de transformations (rotation-homothétie) qui transforment les droites en droites, conservent les angles et multiplient les distances par un même facteur.

Soit alors NN_1 un arc défini par l'abscisse s_0 fixe du point N et par l'angle α sous lequel on le voit de N; une transformation du groupe permet de transformer cet arc en celui qui correspond à une valeur quelconque s et à la même valeur de l'angle α , la longueur de l'arc transformé sera le produit de la longueur de NN_1 (qui ne dépend que de α) par une fonction de l'abscisse curviligne s de l'origine du transformé; nous avons donc bien une relation de la forme $l = \varphi(s) \cdot h(\alpha)$.

2. — Lorsque la courbe est tracée dans un espace non-euclidien de courbure constante K , nous procédons de la même manière que ci-dessus pour définir la courbe en utilisant un système de coordonnées de Weierstrass défini par l'égalité :

$$\mathbf{M} = t\mathbf{A} + x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3$$

(nous précisons les axes plus loin), \mathbf{M} et \mathbf{A} désignent des vecteurs d'origine fixe et d'extrémité \mathbf{M} ou \mathbf{A} , le vecteur \mathbf{A} et les vecteurs unités $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ vérifient les relations :

$$\mathbf{A}^2 = \frac{1}{K}, \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_i = 0, \quad \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = 0, \quad \mathbf{e}_i^2 = 1,$$

d'où résulte la relation suivante entre x, y, z, t :

$$(4) \quad K(x^2 + y^2 + z^2) = 1 - t^2.$$

Nous déterminons les axes de coordonnées, relatifs à un point particulier de la courbe (Γ) étudiée, de la même manière que le sont les axes de Frenet : le point \mathbf{A} est situé sur la courbe, les vecteurs $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ sont portés respectivement par la tangente, la normale principale et la binormale définies comme dans le cas d'une courbe de l'espace euclidien. Nous avons donc en dérivant le vecteur $\mathbf{M}(s)$, définissant le point \mathbf{M} de la courbe dont l'abscisse curviligne non-euclidienne est s , et les vecteurs unités correspondant :

$$\frac{d\mathbf{M}}{ds} = \mathbf{e}_1; \quad \frac{d\mathbf{e}_1}{ds} = \frac{\mathbf{e}_2}{R} - K\mathbf{M}; \quad \frac{d\mathbf{e}_2}{ds} = -\frac{\mathbf{e}_1}{R} - \frac{\mathbf{e}_3}{T}; \quad \frac{d\mathbf{e}_3}{ds} = \frac{\mathbf{e}_2}{T};$$

où $R = \varphi^{-1}(s)$ et $T = \tau^{-1}(s)$ sont des fonctions inconnues de s donnant les rayons de courbure et de torsion de la courbe en \mathbf{M} .

Ces formules nous permettent de calculer les développements limités, suivant les puissances de l , des coordonnées x, y, z, t du point de la courbe extrémité d'un arc ayant pour origine \mathbf{A} et pour longueur l car nous supposons que les fonctions φ et τ admettent, au voisinage de la valeur s correspondant à \mathbf{A} , autant de dérivées qu'il est nécessaire. Les dérivées successives, par rapport à l , de x, y, z, t

ont en effet pour valeurs, lorsque l est nul, les valeurs des projections des dérivées successives du vecteur \mathbf{M} en A et l'on obtient ainsi :

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} x &= l - \frac{l^3}{6}(\rho^2 + K) - \frac{l^4}{8}\rho\rho' + \frac{l^5}{5!}(\rho^4 + \rho^2\tau^2 + 2K\rho^2 + K^2 - 3\rho'^2 - 4\rho\rho'') + \dots \\ y &= \frac{l^2}{2}\rho + \frac{l^3}{6}\rho' + \frac{l^4}{4!}(\rho'' - \rho^3 - \rho\tau^2 - K\rho) + \frac{l^5}{5!}(\rho''' - 6\rho^2\rho' - 3\rho'\tau^2 - 3\rho\tau\tau' - K\rho') \\ &\quad + \frac{l^6}{6!}\left\{\rho^{(4)} - 10\rho''\rho^2 - 6\rho''\tau^2 - K\rho'' - 4\rho\tau\tau'' - 3\rho\tau'^2 - 15\rho\rho'^2\right\} + \dots \\ z &= -\frac{l^3}{6}\rho\tau - \frac{l^4}{4!}(\rho\tau' + 2\rho'\tau) + \frac{l^5}{5!}(-\rho\tau'' - 3\rho''\tau - 3\rho'\tau' + \rho^3\tau + \rho\tau^3 + K\rho\tau) + \dots \\ t &= 1 - K\frac{l^2}{2} + K\frac{l^4}{4!}(\rho^2 + K) + K\frac{l^5}{5!}\rho\rho' + K\frac{l^6}{6!}(9\rho\rho'' + 8\rho'^2 - K^2 - 2K\rho^2 - \rho^4 - \rho^2\tau^2) \\ &\quad + K\frac{l^7}{6!}(2\rho\rho''' + 5\rho'\rho'' - 2K\rho\rho' - 2\rho^3\rho' - \rho\rho'\tau^2 - \rho^2\tau\tau') + \dots \end{aligned} \right.$$

Le cosinus de l'angle de deux directions, définies l'une par dx, dy, dz, dt et l'autre par $\delta x, \delta y, \delta z, \delta t$, est donné par la relation :

$$ds \cdot \delta s \cdot \cos V = dx \cdot \delta x + dy \cdot \delta y + dz \cdot \delta z + \frac{1}{K} dt \cdot \delta t;$$

or une géodésique passant par l'origine des coordonnées (point $0, 0, 0, 1$) peut être représentée paramétriquement par les équations :

$$\begin{aligned} x &= (K)^{-\frac{1}{2}} \cos \theta \sin \psi \sin \varphi, & y &= (K)^{-\frac{1}{2}} \cos \theta \cos \psi \sin \varphi, & z &= (K)^{-\frac{1}{2}} \sin \theta \sin \varphi, & t &= \cos \varphi, & \text{si } K > 0; \\ x &= (-K)^{-\frac{1}{2}} \cos \theta \sin \psi \operatorname{Sh} \varphi, & y &= (-K)^{-\frac{1}{2}} \cos \theta \cos \psi \operatorname{Sh} \varphi, & z &= (-K)^{-\frac{1}{2}} \sin \theta \operatorname{Sh} \varphi, & t &= \operatorname{Ch} \varphi, & \text{si } K < 0; \end{aligned}$$

donc la géodésique de l'espace qui joint l'origine au point (a, b, c, d) a une direction définie à l'origine par :

$$\delta x = a(a^2 + b^2 + c^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad \delta y = b(a^2 + b^2 + c^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad \delta z = c(a^2 + b^2 + c^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad \delta t = 0$$

et l'on a $\delta s = 1$. La direction de la tangente à la courbe au point origine de l'arc étudié est donnée par $dx = 1; dy = dz = dt = 0$; donc l'angle formé par la géodésique corde (qui joint l'origine au point x, y, z, t) et par la tangente à la courbe est déterminé par l'une ou l'autre des relations suivantes et cet angle doit tendre vers 0 en même temps que l :

$$\cos \alpha = \frac{|x|}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad \operatorname{tg} \alpha = (y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} |x|^{-1}, \quad \cos \alpha = |x| \left(\frac{1 - l^2}{K} \right)^{-\frac{1}{2}},$$

qui se déduisent l'une de l'autre par des transformations élémentaires en tenant compte, pour la dernière, de la relation (4) et dans lesquelles on doit remplacer x, y, z, t par les développements (5). On en déduit que l'angle α admet un développement limité suivant les puissances de l et l'on obtient, pour les premiers termes de ce développement, l'expression suivante où $\rho, \rho', \rho'', \dots$ et τ, τ', \dots désignent les valeurs prises à l'origine de l'arc étudié par la courbure, la torsion et leurs dérivées par rapport à l'abscisse curviligne (nous l'avons calculée à l'aide de la formule donnant la tangente de l'angle α) :

$$(6) \quad \alpha = \frac{l}{2} \rho + \frac{l^2}{6} \rho' + \frac{l^3}{4!} \left(\rho'' + K \rho - \frac{\rho \tau^2}{3} \right) + \frac{l^4}{5!} \left(\rho''' - \frac{\rho^2 \rho'}{6} - \frac{7 \rho' \tau^2}{9} - \frac{4}{3} \rho \tau \tau' + \frac{7}{3} K \rho' \right) \\ + \frac{l^5}{6!} \left(\rho^{(4)} - \frac{\rho^2 \rho''}{2} + 4K \rho'' - \rho \rho'^2 - \frac{3}{2} K \rho^3 + 3K^2 \rho - \frac{5}{3} \rho'' \tau^2 - 2 \rho \tau \tau'' - \frac{7}{4} \rho \tau'^2 - \frac{13}{3} \rho' \tau \tau' - \frac{\rho^3 \tau^2}{2} + \frac{\rho \tau^4}{9} - K \rho \tau^2 + \frac{5}{9} \dots \right)$$

3. — Ce développement (6) doit être indépendant de s quel que soit l lorsque la courbe est une courbe (P), il est donc nécessaire que ces courbes (P) aient leur courbure et leur torsion constantes et elles sont des hélices circulaires de l'espace envisagé. Cette condition nécessaire est suffisante : en effet les coefficients des développements (5) dépendent uniquement des valeurs, à l'origine des coordonnées, de la courbure, de la torsion et de leurs dérivées successives, donc si ρ et τ sont des constantes, les coefficients de ces développements seront les mêmes quelle que soit la position sur la courbe de l'origine de l'arc; par suite les calculs, que l'on doit effectuer pour obtenir l'angle α correspondant à des arcs de même longueur, seront identiques et la courbe possède effectivement la propriété (P).

Les courbes à courbure et torsion constantes, sont définies par une équation différentielle à coefficients constants que l'on déduit simplement des formules de Frenet :

$$(7) \quad \frac{d^4 \mathbf{M}}{ds^4} + (\rho^2 + \tau^2 + K) \frac{d^2 \mathbf{M}}{ds^2} + K \tau^2 \mathbf{M} = 0,$$

et nous pouvons vérifier directement que la condition nécessaire obtenue ci-dessus est suffisante en calculant l'angle α pour certaines des courbes définies par l'équation (7). Pour cela nous utilisons la représentation de Poincaré faisant correspondre à notre espace non-euclidien le demi-espace (z positif) dans lequel l'élément linéaire est défini par $d\sigma^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{z^2}$ et les géodésiques sont des demi-cercles orthogonaux au plan horizontal. Parmi les hélices circulaires de l'espace non-euclidien figurent les courbes dont la représentation dans le demi-espace de Poincaré est une hélice conique (au sens ordinaire du mot) dont le point asymptote est dans le plan, $z = 0$, limitant le demi-espace et qui est tracée sur un cylindre à génératrices per-

pendiculaires à ce plan. Les autres courbes vérifiant (7) sont déduites de celles-ci par une transformation par rayons vecteurs réciproques. Le calcul de l'angle α ne présente aucune difficulté et l'on vérifie bien qu'il est indépendant de l'abscisse curviligne non-euclidienne de l'origine de l'arc.

Ce résultat est une conséquence de l'existence du groupe des transformations de l'hélice conique en elle-même (groupe correspondant à celui des transformations de l'espace non-euclidien qui transforment en elle-même l'hélice circulaire dont l'hélice conique est l'image). Soit (G) une hélice conique représentant, dans le demi-espace de Poincaré, une courbe définie par l'équation (7). En choisissant convenablement les axes de coordonnées et l'origine des arcs sur (G), on peut représenter les coordonnées d'un point M de cette courbe en fonction de son abscisse curviligne euclidienne s par les expressions :

$$x = ks \cos \varphi, \quad y = ks \sin \varphi, \quad z = as \quad \text{où} \quad \varphi = h \log bs,$$

les constantes h, k, a, b , sont liées par la relation $a^2 = 1 - k^2 - h^2 k^2$.

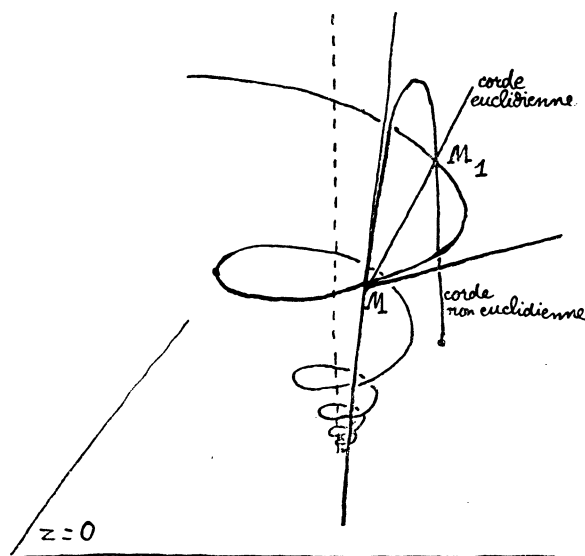


FIG. 1.

La courbe (G) possède la propriété (P') d'après ce que nous avons vu plus haut (§ 1); donc la longueur euclidienne d'un arc MM_1 est égale au produit d'une fonction de l'angle sous lequel on le voit de son origine par la valeur du rayon de courbure (euclidien) à l'origine. Par conséquent si la longueur d'un arc MM_1 est proportionnelle à l'abscisse curviligne s du point M, cet arc est vu de son origine sous un angle indépendant de s car le choix de l'origine des arcs sur (G) est tel que

le rayon de courbure en M ait pour valeur $\frac{s}{kh\sqrt{1+h^2}}$. La longueur non-euclidienne du même arc MM_1 est une constante quand M décrit la courbe; en effet, si l'on désigne par $A - 1$ le coefficient de proportionnalité de la longueur euclidienne à l'abscisse curviligne de M , la longueur non-euclidienne de l'arc MM_1 est égale à $\int_s^{As} \frac{ds}{as} = \frac{1}{a} \log A$. Donc l'angle sous lequel l'arc MM_1 est vu (au sens non-euclidien) de son origine doit être, lui aussi, constant puisque la courbe (G) est l'image d'une courbe (P) de l'espace non-euclidien.

Ce résultat est une conséquence immédiate de l'existence du groupe des rotations-homothéties qui transforment (G) en elle-même. Une transformation (T) de ce groupe transforme l'arc MM_1 en un arc $M'M'_1$ dont la longueur euclidienne est égale au produit, par $A - 1$, de l'abscisse curviligne euclidienne de l'origine M' du transformé; (T) transforme la droite MM_1 en la droite $M'M'_1$ et l'angle formé en M par la corde et l'arc est égal à l'angle formé en M' par la corde et l'arc; la corde non-euclidienne de l'arc MM_1 est le demi-cercle, orthogonal au plan limite du demi-espace, qui passe par M et M_1 et ce demi-cercle est transformé en le demi-cercle analogue passant par M' et M'_1 , c'est-à-dire, en la corde non-euclidienne de l'arc $M'M'_1$; comme la transformation (T) conserve les angles nous voyons bien que la courbe (G) est une courbe (P) si on la considère comme une courbe de l'espace non-euclidien; nous remarquons également que le trièdre formé par la tangente en M à (G), la droite MM_1 et la tangente en M au demi-cercle image de la corde non-euclidienne, reste égal à lui-même lorsque M décrit la courbe si la longueur euclidienne de l'arc MM_1 varie proportionnellement au rayon de courbure (euclidien) en M .

4. — *Il n'existe aucune courbe (plane ou gauche) de l'espace non-euclidien possédant la propriété (P').* Nous avons vu, en effet, que, dans le cas d'une courbe (P'), le développement de l'angle α peut être écrit sous la forme (3) et nous déterminons les conditions imposées à la courbure et à la torsion de la courbe cherchée en exprimant que l'on peut identifier le développement (6) avec une expression (3); les coefficients de (6) et (3) doivent être des fonctions de s qui sont identiques.

Le premier terme nous montre immédiatement que la fonction inconnue $\varphi(s)$ figurant dans l'expression de α doit être proportionnelle à ρ^{-1} de sorte que le coefficient d'une puissance quelconque de l dans (6) doit être égal au produit d'une constante par la même puissance de ρ . D'autre part les deux termes suivants nous donnent l'équation différentielle à laquelle doit satisfaire ρ et une relation entre la courbure et la torsion :

$$(8) \quad \begin{cases} \rho' = \lambda \rho^2, \\ \tau^2 = 3K + \mu \rho^3, \end{cases} \quad \lambda, \mu \text{ constantes arbitraires.}$$

En tenant compte de (8) nous pouvons obtenir l'expression de $\tau\tau'$ et des dérivées de ρ ce qui donne facilement l'expression des coefficients de l^4 et de l^5 dans le développement (6). Le coefficient de l^4 est bien égal au produit de ρ^4 par une constante. Le coefficient de l^5 est, en désignant par A une constante dont la valeur ne nous intéresse pas :

$$\left\{ A\rho^5 - \frac{K\rho^3}{3}(\lambda^2 + \mu + 9) + K^2\rho + \frac{1}{4}\rho\tau'^2 \right\} \frac{1}{6!}.$$

Si ρ dépend de s , l'expression ci-dessus est une fonction de s qui doit être identique au produit de ρ^5 par une constante, ce qui exige que τ'^2 soit identique à un polynôme en ρ ; or des relations (8) nous déduisons $\tau'^2 = \frac{\lambda^2\mu^2\rho^0}{3K + \mu\rho^2}$ ce qui ne peut être identique à un polynôme en ρ que si la courbure K de l'espace est nulle. Donc les termes écrits du développement (6) exigent que l'espace soit euclidien, que la torsion soit proportionnelle à la courbure et que celle-ci soit de la forme $-\frac{1}{\lambda(s-s_0)}$; nous retrouvons seulement les hélices coniques obtenues au § 1. Nous remarquons que les courbes de l'espace non-euclidien qui ont pour équations intrinsèques :

$$\lambda\rho = -(s-s_0)^{-1}, \quad \tau^2 = 3K + \mu\rho^2,$$

sont telles que la différence entre la fonction $\alpha(l, s)$ et une fonction ayant la forme correspondant aux courbes (P') soit, par rapport à l , d'un ordre supérieur de *deux unités* à la même différence dans le cas de toute autre courbe du même espace.

5. — Les transformations qui transforment en elles-mêmes les courbes (P) et (P') nous montrent que les fonctions de deux variables qui donnent la valeur d'un élément de la figure formée par l'arc et sa corde doivent avoir une forme particulière; sur une courbe (P), quelle que soit la variable choisie pour déterminer la grandeur de l'arc MM_1 , les éléments de la figure seront toujours indépendants de l'abscisse curviligne de l'origine de l'arc; sur une courbe (P') nous voyons que le choix de l'angle en M comme variable arbitraire est préférable à celui de la longueur l de l'arc : l'énoncé de la propriété qui nous a permis de trouver les courbes (P') est plus simple, toutes les longueurs attachées à notre figure jouiront de la même propriété d'être le produit d'une fonction de s par une fonction de α , enfin certains éléments (angles, rapports de deux longueurs) seront indépendants de s si on exprime leurs valeurs en fonction de α et de s . Ces raisons géométriques nous invitent à remplacer la variable l que nous avons utilisée jusqu'ici par la variable α ; les développements (5) étant connus en fonction de l et s , nous effectuerons certains des calculs en fonction de l et nous utiliserons, pour revenir à la variable α , l'expression de l en fonction

de α , expression que nous obtenons simplement en déterminant le développement limité de la fonction inverse $l(\alpha, s)$ définie par la relation (6). On trouve :

$$(9) \quad l = \frac{2\alpha}{\rho} - \frac{4}{3} \frac{\rho'}{\rho^3} \alpha^2 + \frac{2}{9} \alpha^3 \left(\frac{8\rho'^2}{\rho^5} + \frac{\tau^2}{\rho^3} - \frac{3\rho''}{\rho^4} - \frac{3K}{\rho^3} \right) \\ + \alpha^4 \left(-\frac{4}{15} \frac{\rho'''}{\rho^5} + \frac{16\tau\tau'}{45\rho^4} - \frac{80\rho'^3}{27\rho^7} - \frac{8\rho'\tau^2}{15\rho^5} + \frac{20\rho'\rho''}{9\rho^6} + \frac{8K\rho'}{5\rho^3} + \frac{2\rho'}{45\rho^3} \right) + \dots$$

Les développements (9) [ou (6)] nous montrent immédiatement que l ne peut être une fonction impaire de α [ou α une fonction impaire de l] que si les coefficients des puissances 2 et 4 sont nuls ce qui exige que la courbure et la torsion soient des constantes et la courbe doit être une courbe (P). Il suffit d'ailleurs que la courbe soit une courbe (P) pour qu'il en soit ainsi car, ρ et τ étant des constantes, on voit que les composantes de la dérivée $2m^{\text{ième}}$ du vecteur \mathbf{M} sont nulles sur les axes \mathbf{e}_1 et \mathbf{e}_3 de même que les composantes de la dérivée $(2m+1)^{\text{ième}}$ sont nulles sur les axes \mathbf{A} et \mathbf{e}_2 . Il en résulte que x et z sont des fonctions impaires de l , y et t des fonctions paires et par suite la valeur absolue de α n'est pas altérée par le changement de l en $-l$, le premier terme de (6) nous montre alors que α est une fonction impaire de l . Remarquons que nous avons dû choisir le signe de ce premier coefficient en tenant compte des relations qui nous ont permis de calculer l'angle.

CHAPITRE II

Propriétés caractéristiques des courbes (P) ou (P').

6. — Les formes particulières, que possèdent les fonctions représentant différents éléments de la figure lorsque la courbe est une courbe (P) ou (P'), permettent-elles de caractériser ces courbes?

Le premier élément que nous envisageons est la longueur L de la corde qui sous-tend l'arc; la fonction $L(s, \alpha)$ est indépendante de s sur une courbe (P) et égale au produit du rayon de courbure par une fonction de l'angle α sur une courbe (P').

La longueur L de la corde s'obtient très simplement en remarquant que le paramètre φ utilisé dans la représentation d'une géodésique de l'espace (§ 2) est proportionnel à la longueur sur cette géodésique de sorte que la distance de l'origine $(0, 0, 0, 1)$ au point (x, y, z, t) est donnée suivant que K est positif ou négatif par :

$$t = \cos \left[(K)^{\frac{1}{2}} L \right] \quad \text{ou} \quad t = \text{Ch} \left[(-K)^{\frac{1}{2}} L \right].$$

Cette formule nous permet de déterminer un développement limité de L par la méthode des coefficients indéterminés beaucoup plus simplement que nous ne pourrions le faire dans le cas d'un espace euclidien par l'utilisation de la formule $L = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$ et il est aisé de remarquer que le résultat doit être valable même lorsque K est nul.

Le calcul est ici très simple, L tend vers 0 en même temps que l , et nous devons choisir le signe de L ; il est naturel de prendre le premier coefficient du développement cherché égal à +1. On trouve ainsi :

$$(10) \quad L = l - l^3 \frac{\rho^2}{4!} - l^4 \frac{\rho \rho'}{4!} + l^5 \left(-\frac{\rho \rho''}{80} - \frac{\rho'^2}{90} - \frac{K \rho^2}{240} + \frac{\rho^4}{1920} + \frac{\rho^2 \tau^2}{720} \right) \\ + l^6 \left(-\frac{\rho \rho'''}{360} - \frac{\rho' \rho''}{144} - \frac{K \rho \rho'}{240} + \frac{\rho^3 \rho'}{960} + \frac{\rho \rho' \tau^2}{720} + \frac{\rho^2 \tau \tau'}{720} \right) + \dots,$$

d'où l'on déduit, en tenant compte de (9) :

$$(10') \quad L = \frac{2\alpha}{\rho} - \frac{4\rho'}{3\rho^3} \alpha^2 + \alpha^3 \left(\frac{16\rho'^2}{9\rho^5} + \frac{2\tau^2}{9\rho^3} - \frac{2\rho''}{3\rho^4} - \frac{1}{3\rho} - \frac{2K}{3\rho^3} \right) \\ + \alpha^4 \left(-\frac{4\rho'''}{15\rho^5} + \frac{16\tau\tau'}{45\rho^4} - \frac{80\rho'^3}{27\rho^7} - \frac{8\rho'\tau^2}{15\rho^5} + \frac{20\rho'\rho''}{9\rho^6} + \frac{8K\rho'}{5\rho^5} + \frac{2\rho'}{45\rho^3} \right) + \dots$$

Ces développements nous montrent immédiatement des conditions nécessaires pour que la fonction $L(s, l)$ ou la fonction $L(s, \alpha)$ soit indépendante de s . Il faut que la courbure et la torsion soient des constantes, donc que la courbe soit une courbe (P) et cela suffit d'après ce que nous avons remarqué géométriquement.

Pour que la longueur de la corde soit égale au produit d'une fonction de s par une fonction de α , il faut que les coefficients de (10') soient égaux aux produits d'une même fonction de s par des constantes; donc ρ' doit être proportionnel à ρ^2 (le rayon de courbure est donc une fonction linéaire de l'arc). Les coefficients de α^3 et α^4 exigent simplement que $\tau^2 - 3K$ soit aussi proportionnel à ρ^2 [et nous retrouvons les mêmes premières conditions que dans la recherche des courbes (P')]. Le terme suivant du développement (10') nous est donc nécessaire. Nous aurons ultérieurement souvent à faire ces mêmes hypothèses sur la courbure et la torsion aussi devons-nous compléter les différents développements lorsque ρ' et τ vérifient (8). On a dans ce cas :

$$(11) \quad l = \frac{2}{\rho} \alpha - \frac{4}{3} \lambda \frac{\alpha^2}{\rho} + \frac{\alpha^3}{\rho} \left(\frac{2}{9} \mu + \frac{4}{9} \lambda^2 \right) + \frac{\alpha^4}{\rho} \left(\frac{2\lambda}{45} - \frac{16\lambda^3}{135} - \frac{8\lambda}{45} \mu \right) \\ + \alpha^5 \left[\frac{A}{\rho} - \frac{4K^2}{45\rho^5} + \frac{4K(\lambda^2 + \mu + 9)}{135\rho^3} - \frac{\tau^2}{45\rho^5} \right] + \dots$$

où nous désignons par A une constante; dans les calculs analogues nous désignons par de grandes lettres (autres que K) des constantes dont la valeur n'intervient pas; nous utiliserons même, pour ne pas multiplier les notations, la même lettre pour représenter des constantes de valeurs différentes intervenant dans un même calcul.

Nous pouvons alors calculer le coefficient de α^5 figurant dans le développement de L (les quatre premiers coefficients sont effectivement proportionnels à $1/\rho$), on obtient :

$$\frac{A}{\rho} - \frac{4K^2}{45\rho^5} + \frac{4K(\lambda^2 + \mu + 9)}{135\rho^3} - \frac{\tau^2}{45\rho^5},$$

ce qui ne peut être proportionnel à $\frac{1}{\rho}$ que s'il existe une identité de la forme suivante :

$$12K^3 - 4K^2\rho^2(3\lambda^2 + 2\mu + 27) - 4K\rho^4(\lambda^2 + \mu + 9)\mu + \lambda^2\mu^2\rho^6 \equiv B\rho^4(3K + \mu\rho^2);$$

cette identité en s exige, si ρ n'est pas une constante, que K soit nul. Donc, si L est égal au produit d'une fonction de s par une fonction de α , l'espace est euclidien et la courbe est une courbe (P').

On voit aussi sur les développements (10) et (10') que la fonction L ne peut être

une fonction impaire de l'une des variables l ou α qu'à la condition que la courbe soit une courbe (P); on démontre aisément que cela suffit (comme plus haut, § 5).

7. — Le développement (10) nous fournit immédiatement les premiers termes du développement du rapport des longueurs de la corde et de l'arc lorsque l'on prend pour variable la longueur de l'arc; mais, ainsi que nous l'avons remarqué, l'étude de ce rapport sera surtout intéressante en prenant la variable α . Nous n'avons pas jugé utile d'écrire le développement de ce rapport r suivant les puissances de l ; on en déduit :

$$(12) \quad r = 1 - \frac{\alpha^2}{6} - \alpha^3 \frac{\rho'}{9\rho^2} + \alpha^4 \left(\frac{1}{120} + \frac{16\rho'^2}{135\rho^4} - \frac{4\rho''}{45\rho^3} + \frac{2K}{45\rho^2} - \frac{2\tau^2}{135\rho^2} \right) \\ + \alpha^5 \left(-\frac{2\rho'''}{45\rho^4} - \frac{2\tau\tau'}{135\rho^3} - \frac{68\rho'^3}{405\rho^5} - \frac{\rho'\tau^2}{81\rho^4} + \frac{K\rho'}{27\rho^4} + \frac{\rho'\rho''}{5\rho^3} + \frac{\rho'}{270\rho^2} \right) + \dots$$

Si r est une fonction paire de α , nécessairement les coefficients de α^3 et α^5 sont nuls dans (12), par suite ρ' et τ' sont nuls. Donc la courbe doit être une courbe (P). Cela suffit puisqu'alors l et L sont toutes deux des fonctions impaires de α .

Pour que ce rapport r ne dépende que de α , la première condition nous est fournie par le coefficient de α^3 qui exige que ρ' soit proportionnel à ρ^2 . Si l'on choisit le coefficient de proportionnalité nul (ρ est alors une constante), le coefficient de α^4 nous montre que τ est aussi une constante [la courbe est alors une courbe (P)].

Si le coefficient de proportionnalité n'est pas nul, le coefficient de α^4 nous impose la deuxième des conditions (8) et nous retrouvons les mêmes courbes que précédemment. Mais, comme dans les questions précédentes, le coefficient suivant du développement (12) est conforme à ce que nous désirons, il faut donc calculer le coefficient de α^6 dans ce développement de r .

Les termes écrits des développements (5) ne suffisent pas pour effectuer le calcul et nous devons déterminer le coefficient de l^6 figurant dans le développement de t . On trouve, en dérivant les formules de Frenet, que ce coefficient a pour expression, lorsque ρ et τ vérifient (8) :

$$\frac{K}{8!} [A\rho^6 + K^2 + 18K^2\rho^2 + K\rho^4(9 + 8\mu - 244\lambda^2) + \rho^2\tau'^2].$$

Nous pouvons alors déterminer très simplement le coefficient de l^6 dans le développement de $L(s, l)$, c'est :

$$A\rho^6 - \frac{K^2\rho^2}{2 \cdot 7!} + \frac{K\rho^4(\lambda^2 + \mu + 9)}{6 \cdot 7!} - \frac{\rho^2\tau'^2}{8!},$$

et en utilisant l'expression (11) nous obtenons le coefficient de α^6 dans le développement du rapport $r(s, \alpha)$. [On vérifie que les coefficients des puissances de α de degré inférieur à 6 sont des constantes], le coefficient de α^6 est :

$$B + \frac{8K^2}{3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \rho^4} - \frac{8K(\lambda^2 + \mu + 9)}{3^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \rho^3} + \frac{2\tau^2}{3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \rho^4};$$

cette expression ne peut être une constante, lorsque ρ et τ ne sont pas eux-mêmes des constantes, que si la courbure K est nulle. Donc *si le rapport des longueurs de la corde et de l'arc ne dépend que de l'angle sous lequel on voit l'arc de son origine, la courbe est une courbe (P) ou une courbe (P')*; si la courbure de l'espace n'est pas nulle, les courbes dont les équations intrinsèques sont données par (8) jouissent de la propriété suivante : on pourra trouver une fonction $h(\alpha)$ indépendante de s , telle que la différence entre le rapport r et la fonction $h(\alpha)$ soit, par rapport à α , d'un ordre supérieur de deux unités à celui d'une différence analogue pour toute autre courbe [les courbes (P) exceptées].

8. — Pour calculer l'angle β que forment l'arc et sa corde à l'extrémité de l'arc, nous pouvons utiliser l'expression établie plus haut pour l'angle à l'origine, car cet angle β n'est autre que l'angle sous lequel on voit, de son origine, un arc de longueur $-l$ dont l'origine a pour abscisse curviligne $s + l$. Donc nous avons $\beta(s, l) = \alpha(s + l, -l)$ et nous pouvons calculer β en remplaçant, dans (6), l par $-l$ et en développant ρ et τ par la formule de Taylor.

Il est d'ailleurs facile de déterminer directement cet angle β et nous aurons besoin, ultérieurement, de l'un des calculs intermédiaires que nous donnons ci-dessous. On déduit très simplement de la représentation paramétrique des géodésiques, la direction au point de coordonnées x, y, z, t , de la géodésique qui joint ce point à l'origine des coordonnées :

$$\delta x = tx \left(\frac{K}{1-t^2} \right)^{\frac{1}{2}} \delta s, \quad \delta y = ty \left(\frac{K}{1-t^2} \right)^{\frac{1}{2}} \delta s, \quad \delta z = tz \left(\frac{K}{1-t^2} \right)^{\frac{1}{2}} \delta s, \quad \delta t = -K \left(\frac{1-t^2}{K} \right)^{\frac{1}{2}} \delta s;$$

ce qui nous montre, en tenant compte de la relation (4), que l'angle β est déterminé par la relation :

$$\cos \beta = \left| \frac{t'}{K} \right| \left(\frac{1-t^2}{K} \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Nous avons remarqué d'autre part que l'expression du cosinus de l'angle α est

$|x| \left(\frac{1-l^2}{K} \right)^{-\frac{1}{2}}$, et nous en déduisons (en tenant compte des signes de x et de l') que la différence des cosinus des deux angles est égale à :

$$\cos \alpha - \cos \beta = \left(x + \frac{l'}{K} \right) \left(\frac{1-l^2}{K} \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Nous aurons besoin pour un calcul ultérieur du développement de β suivant les puissances de l ; nous l'obtenons très facilement par l'un ou l'autre des procédés indiqués ci-dessus; c'est (moyennant une convention de signe faite pour l'angle β opposée à celle faite pour l'angle α) :

$$(13) \quad \beta = \frac{\rho}{2} l + \frac{\rho'}{3} l^3 + l^5 \left(\frac{\rho''}{8} + \frac{K\rho}{24} - \frac{\rho\tau^2}{72} \right) + l^7 \left(\frac{K\rho'}{45} - \frac{\rho'\tau^2}{135} - \frac{\rho\tau\tau'}{60} + \frac{\rho^2\rho'}{720} + \frac{\rho'''}{30} \right) + \dots$$

d'où en tenant compte de (9) :

$$(14) \quad \beta = \alpha + \frac{2\rho'}{3\rho^2} \alpha^2 + \alpha^3 \left(\frac{2\rho''}{3\rho^3} - \frac{8\rho'^2}{9\rho^4} \right) + \alpha^4 \left(\frac{2\rho'''}{5\rho^4} - \frac{4\tau\tau'}{45\rho^3} + \frac{40\rho'^3}{27\rho^6} - \frac{16\rho'\rho''}{9\rho^5} + \frac{2\rho'}{45\rho^2} - \frac{2K\rho'}{5\rho^4} + \frac{2\rho'\tau^2}{15\rho^4} \right) + \dots$$

Le développement (14) nous donne les conditions nécessaires (et suffisantes) pour que β soit une fonction impaire de α ; il faut en effet que les coefficients de α^2 et α^4 soient nuls, donc que la courbure et la torsion soient des constantes et la courbe doit être une courbe (P), dans ce cas β est égal à α .

Les termes connus de ce développement (14) ne suffisent pas pour déterminer la condition nécessaire et suffisante pour que β soit une fonction de α seulement. Tous les coefficients de (14) doivent alors être des constantes, mais les termes écrits ci-dessus conduisent seulement aux conditions (8) moins restrictives que les conditions connues comme suffisantes [il suffit, en effet, que la courbe soit une courbe (P')].

9. — Nous pouvons calculer, à l'aide des termes écrits dans les différents développements qui précèdent, le coefficient de α^5 figurant dans (14) lorsqu'on fait les hypothèses (8) sur la courbure et la torsion. On obtient ainsi un coefficient qui est constant et ne nous donne pas la condition prévue. Nous devons donc compléter, dans cette même hypothèse (8), les développements qui nous sont utiles pour déter-

miner un nombre assez grand de termes dans le développement de β , que nous déduirons du calcul de la différence des cosinus donnée ci-dessus.

Il nous faut pour cela calculer les dérivées du vecteur \mathbf{M} de manière à connaître x et l' jusqu'aux termes de degré 8 compris; donc nous devons écrire les projections sur les quatre axes de la dérivée $\mathbf{M}^{(6)}$, sur les axes \mathbf{A} , \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 celles de $\mathbf{M}^{(7)}$, sur les axes \mathbf{A} et \mathbf{e}_1 celles de $\mathbf{M}^{(8)}$, enfin la projection sur \mathbf{A} de la dérivée 9° (dans la question actuelle où $x + \frac{l'}{K}$ nous intéresse seul, nous pouvons nous dispenser du calcul de cette dernière projection). On trouve :

$$x + \frac{l'}{K} = \frac{\lambda \rho^3 l^4}{12} + l^5 \frac{\lambda^2 \rho^4}{8} + \frac{l^6}{6!} [-10K\lambda \rho^3 + \rho^5(104\lambda^3 - 4\lambda - 4\lambda\mu)] + \frac{l^7}{6!} [-15K\lambda^2 \rho^4 + \rho^6(110\lambda^4 - 10\lambda^2\mu + 10\lambda^2\mu^2) \\ + \frac{l^8}{8!} [36K^2\lambda \rho^3 + K\rho^8(-976\lambda^3 + 32\lambda\mu + 36\lambda) + 2\lambda \rho^3 \tau'^2 + 2\rho^2 \tau' \tau'' + A\rho^7] + \dots$$

D'autre part nous avons facilement le développement du deuxième facteur figurant dans la différence des cosinus de α et β ; ce développement nous sera utile plus loin, et nous donnons son expression dans le cas général [ρ et τ ne vérifiant pas nécessairement (8)] :

$$(15) \quad \left(\frac{1-l^2}{K} \right)^{-\frac{1}{2}} = l^{-1} \left\{ 1 + \frac{l^2}{24} (\rho^2 + 4K) + l^4 \frac{\rho \rho'}{24} + l^6 \left(\frac{\rho \rho''}{80} + \frac{\rho'^2}{90} + \frac{7\rho^4}{8 \cdot 6!} - \frac{\rho^2 \tau^2}{6!} - \frac{K\rho^3}{360} + \frac{7K^2}{360} \right) \right. \\ \left. + l^8 \left(\frac{\rho \rho'''}{360} + \frac{\rho' \rho''}{144} + \frac{7\rho^3 \rho'}{4 \cdot 6!} - \frac{\rho \rho' \tau^2}{6!} - \frac{\rho^2 \tau \tau'}{6!} - \frac{K\rho \rho'}{360} \right) + \dots \right\}$$

Nous avons très facilement l'expression de la différence des cosinus en fonction de l et, sans calculer de nouveaux termes du développement (11), nous en déduisons le développement de cette différence suivant les puissances de α et finalement on trouve :

$$\beta = \alpha + \dots + \frac{\alpha^6}{63} \left[-4\lambda \frac{K^2}{\rho^4} + \frac{4\lambda K}{5\rho^2} (\lambda^2 + \mu + 9) + \frac{2\tau' \tau''}{5\rho^3} - \frac{\lambda \tau'^2}{\rho^4} + A \right] + \dots,$$

où les coefficients des termes non écrits de degré inférieur à 6 sont des constantes. Le coefficient de α^6 , ci-dessus, ne peut être indépendant de s que si l'on a une identité de la forme :

$$-4K^2\lambda\rho + \frac{4}{5}\lambda K(\lambda^2 + \mu + 9)\rho^3 + \frac{2\tau' \tau'' - 5\lambda\rho \tau'^2}{5} = B\rho^5,$$

qui exige que K (ou λ) soit nul; on le voit en remplaçant $2\tau' \tau'' - 5\lambda\rho \tau'^2$ par son expression :

$$(3K + \mu\rho^2)^{-2}(3K - \mu\rho^2)\lambda^3\mu^2\rho^7.$$

Donc : S'il existe, entre les angles sous lesquels on voit un arc de son origine et de son extrémité, une relation indépendante de la position de l'arc sur la courbe, cette courbe est nécessairement une courbe (P) (alors les deux angles ont la même valeur absolue) ou une courbe (P'). Le calcul nous a montré que sur les courbes vérifiant (8) la fonction $\beta(s, \alpha)$ possède bien la propriété signalée pour les fonctions étudiées précédemment : l, L, r .

10. — Nous rapprochons de l'étude de l'angle β celle de l'angle γ sous lequel on voit du point M l'arc MM_1 de valeur algébrique $-l$, en vue de chercher les courbes telles qu'il existe, entre les angles sous lesquels on voit, du milieu d'un arc, ses deux moitiés, une relation indépendante de la position de l'arc sur la courbe.

Les courbes (P) jouissent de cette propriété (et même alors les deux angles ont même valeur absolue) ainsi que les courbes (P') puisque, sur ces dernières, l'angle α est une fonction $F[l\varphi(s)]$, il en résulte que l'angle γ , égal à $F[-l\varphi(s)]$, peut être exprimé en fonction de α seulement.

La recherche des premiers termes du développement de l'angle γ ne présente aucune difficulté. Nous avons, en effet, le développement de γ suivant les puissances de l en remplaçant l par $-l$ dans (6); nous en déduisons la somme $\alpha + \gamma$ dans laquelle nous remplaçons l par le développement (9) pour obtenir :

$$\gamma = -\alpha + \frac{4\rho'}{3\rho^3}\alpha^2 - \frac{16\rho'^2}{9\rho^4}\alpha^3 + \alpha^4\left(\frac{4\rho'''}{15\rho^4} - \frac{8\rho'\rho''}{9\rho^5} - \frac{2\rho'}{45\rho^2} - \frac{80\rho'^3}{27\rho^6} - \frac{16\rho'\rho''}{45\rho^3} - \frac{4K\rho'}{15\rho^4} + \frac{4\rho'\tau^2}{45\rho^4}\right) + \dots$$

Il est donc nécessaire, pour que l'angle γ ne dépende que de α , que ρ' et $\tau^2 - 3K$ soient proportionnels à ρ^2 ; nous retrouvons les courbes définies par les équations (8). Comme plus haut nous allons montrer que K doit être nul si λ ne l'est pas; mais il faut, ici aussi, calculer les coefficients des deux termes suivants du développement de γ .

Nous effectuons le calcul de la manière suivante : recherche du développement de $\cos \alpha$ jusqu'au terme de degré 7 inclus; ce développement, suivant les puissances de l , nous donne immédiatement le cosinus de l'angle γ ou mieux la différence des cosinus des deux angles, d'où nous déduisons le développement de l'angle γ suivant les puissances de α .

Le tableau des dérivées du vecteur \mathbf{M} , nous fournit sans nouveaux calculs les développements de x et de t respectivement jusqu'aux termes de degré (en l) 8 ou 9, nous en déduisons les développements de l^2 et de :

$$\left(\frac{1-l^2}{K}\right)^{-\frac{1}{2}} = l^{-1} \left\{ \begin{aligned} &1 + l^2\left(\frac{\rho^2}{24} + \frac{K}{6}\right) + l^3\frac{\lambda\rho^3}{24} + l^4\left[\frac{7K^2}{360} - \frac{K\rho^2}{144} + \rho^4\left(\frac{26\lambda^2 - \mu}{6!} + \frac{7}{8 \cdot 6!}\right)\right] \\ &+ l^5\left[-\frac{K\lambda\rho^3}{144} + \rho^5\left(\frac{11\lambda^3 - \lambda\mu}{360} + \frac{7\lambda}{4 \cdot 6!}\right)\right] + l^6\left[\frac{31K^3}{3 \cdot 7!} - \frac{47K^2\rho^2}{4 \cdot 7!} + K\rho^4\left(\frac{2\mu - 61\lambda^2}{2 \cdot 7!} - \frac{17}{2 \cdot 8!}\right) + \rho^2\frac{\tau'^2}{8!} + A\rho^6\right] \\ &+ l^7\left[-\frac{47}{4 \cdot 7!}K^2\lambda\rho^3 - K\rho^5\left(\frac{26\lambda^3 - 2\lambda\mu}{7!} + \frac{17\lambda}{8!}\right) + \frac{\lambda\rho^3\tau'^2 + \rho^2\tau'\tau''}{8!} + B\rho^7\right] + \dots, \end{aligned} \right\}$$

d'où, en multipliant par le développement de α :

$$(16) \quad \cos \alpha = 1 - \frac{l^2 \rho^2}{8} - l^3 \frac{\lambda \rho^3}{12} + l^4 \left(\frac{\rho^4}{16 \cdot 24} + \frac{5 \rho^4 \mu}{6!} - \frac{\lambda^2 \rho^4}{18} \right) + l^5 \rho^5 \lambda \frac{(3 + 8\mu - 28\lambda^2)}{6!} \\ + l^6 \left[-\frac{K^2 \rho^6}{2 \cdot 6!} + K \rho^4 \frac{(9 + \lambda^2 + \mu)}{6 \cdot 6!} - \frac{\rho^6 \tau'^2}{8 \cdot 6!} + A \rho^6 \right] \\ + l^7 \left[-\frac{3K^2 \lambda \rho^7}{7!} + K \rho^5 \lambda \frac{2(\lambda^2 + \mu + 9)}{7!} - \frac{6(\rho^5 \tau' \tau'' + \lambda \rho^3 \tau'^2)}{8!} + B \rho^7 \right] + \dots;$$

le développement de la différence des cosinus de nos deux angles s'obtient en donnant à l dans le développement (16) deux valeurs opposées et en retranchant membre à membre; puis, en utilisant la formule (11), nous obtenons le développement de cette différence suivant les puissances de α :

$$\cos \gamma - \cos \alpha = \frac{4}{3} \lambda \alpha^3 + \dots + \alpha^7 \left[-\frac{8K^2 \lambda}{7 \cdot 45 \rho^4} - \frac{8K \lambda (\lambda^2 + \mu + 9)}{7 \cdot 27 \rho^5} + \frac{4 \tau' \tau''}{105 \rho^5} - \frac{2 \lambda \tau'^2}{315 \rho^4} + C \right] + \dots$$

Tenant compte des expressions de τ'^2 et $\tau' \tau''$, on en déduit que γ ne peut être une fonction de α indépendante de s que si K est nul, car le coefficient de α^5 dans le développement de γ est égal (à une constante additive près) à celui de α^7 dans le développement ci-dessus. Donc :

S'il existe, entre les angles sous lesquels on voit du milieu d'un arc ses deux moitiés, une relation indépendante de la position de l'arc sur la courbe, celle-ci est une courbe (P) ou une courbe (P').

11. — Nous nous proposons d'étudier un dernier élément de la figure construite à partir de l'arc MM_1 de la courbe envisagée : l'aire balayée par un arc de géodésique dont l'origine est en M et dont l'extrémité décrit l'arc MM_1 . Cette aire est, en général, fonction de l'abscisse s du point M et de l'angle sous lequel on voit l'arc du point M ; on remarque géométriquement que cette aire est indépendante de s sur les courbes (P) et égale au produit d'une fonction de s par une fonction de l lorsque la courbe est une courbe (P'), et nous recherchons si ces propriétés permettent de caractériser les courbes (P) et (P').

La géodésique qui pivote autour de M et dont un point décrit l'arc MM_1 engendre une surface applicable sur un plan (de l'espace non-euclidien) et il est facile de trouver la différentielle de l'aire cherchée en examinant la surface de l'espace euclidien qui correspond à un plan de l'espace non-euclidien. Par exemple si nous supposons K positif, cela revient à étudier, en utilisant un système de coordonnées qui correspond à celui de Weierstrass que nous avons défini plus haut, l'aire balayée sur une sphère de rayon $(K)^{-\frac{1}{2}}$ par un arc de grand cercle pivotant autour d'un

point A et dont l'extrémité décrit un arc AM d'une courbe sphérique passant par A. On voit que si les coordonnées de M sont x, y, t , la différentielle de l'aire cherchée est égale à $\frac{(1-t)d\theta}{K}$. Nous pourrons faire le calcul si cette différentielle

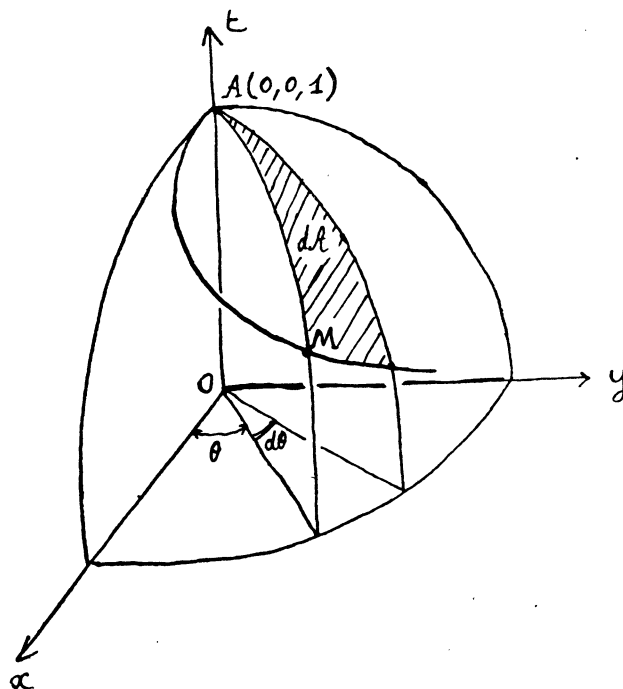


FIG. 2.

est exprimée en fonction de la coordonnée t seule et de la différentielle de l'arc sur la courbe décrite par M. Or la relation existant entre $d\theta, ds, dt$ est :

$$Kds^2 = (1-t^2)d\theta^2 + \frac{dt^2}{1-t^2},$$

donc la différentielle de l'aire \mathcal{A} cherchée est :

$$d\mathcal{A} = \left(1 - \frac{t'^2}{K(1-t^2)}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1-t^2}{K}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{1-t}{K}\right) ds.$$

Pour utiliser les calculs déjà effectués, nous remarquons que $1 - \frac{t'^2}{K(1-t^2)}$ est le carré du sinus de l'angle β sous lequel on voit l'arc de son extrémité et il nous est très facile de déduire le développement de $\sin \beta$ suivant les puissances de t en tenant compte de (13), d'autre part nous avons donné (15) le développement du deuxième facteur figurant dans $d\mathcal{A}$ de sorte que le calcul du développement, sui-

vant les puissances de l , de la différentielle de l'aire cherchée est aisé; nous obtenons ainsi les premiers termes du développement de cette aire suivant les puissances de l :

$$(17) \quad \mathcal{A} = \frac{\rho l^3}{12} + \frac{\rho' l^4}{24} + l^5 \left(\frac{\rho''}{80} - \frac{\rho \tau^2}{6!} - \frac{\rho^3}{240} + \frac{K \rho}{120} \right) \\ + l^6 \left(\frac{K \rho'}{240} - \frac{\rho' \tau^2}{6 \cdot 270} - \frac{\rho \tau \tau'}{6!} - \frac{\rho^2 \rho'}{160} + \frac{\rho'''}{360} \right) + \dots,$$

d'où l'on déduit, en utilisant le développement (9) :

$$\mathcal{A} = \frac{2\alpha^3}{3\rho^2} - \frac{2\rho'\alpha^4}{3\rho^4} + \alpha^5 \left(-\frac{2}{15\rho^2} - \frac{4\rho''}{15\rho^5} + \frac{8\rho'^2}{9\rho^6} + \frac{8\tau^2}{45\rho^4} - \frac{2K}{5\rho^4} \right) \\ + \alpha^6 \left(\frac{4K\rho'}{3\rho^6} - \frac{196\rho'\tau^2}{405\rho^6} + \frac{4\tau\tau'}{15\rho^5} - \frac{2\rho'}{45\rho^4} - \frac{4\rho'''}{45\rho^6} + \frac{64\rho'\rho''}{45\rho^7} - \frac{112\rho'^3}{81\rho^8} \right) + \dots$$

Donc, pour que l'aire $\mathcal{A}(s, \alpha)$ soit indépendante de s , il faut que ρ et τ soient des constantes, donc que la courbe soit une courbe (P). Pour que \mathcal{A} soit égale au produit d'une fonction de s par une fonction de α , il faut que cette fonction de s soit égale à ρ^{-2} et tous les coefficients du développement ci-dessus doivent être proportionnels à ρ^{-2} , donc ρ' doit être proportionnel à ρ^3 (terme en α^4); le coefficient de α^5 exige que $4\tau^2 - 9K$ soit proportionnel à ρ^2 . *Nous n'obtenons donc pas ici les mêmes premières conditions que dans tous les problèmes précédents*, et le coefficient de α^6 ne peut être proportionnel à ρ^2 que si K est nul (si bien entendu on suppose que ρ dépend effectivement de s).

Il nous a semblé utile de vérifier, par d'autres procédés de calcul, les coefficients trouvés dans le cas du développement de l'aire. Nous avons pour cela déterminé les termes indépendants de la courbure K de l'espace dans les coefficients de (17) en calculant directement le développement dans le cas d'une courbe gauche d'un espace euclidien et nous avons vérifié les termes contenant K , qui sont tous indépendants de la torsion dans les coefficients nous intéressant, en utilisant des résultats obtenus, par ailleurs, pour une courbe d'une surface de l'espace euclidien⁽¹⁾.

En effet si l'on rapporte une surface (de courbure constante K) à un système de coordonnées polaires géodésiques dont l'origine est un point M de la courbe (dont la courbure géodésique est ρ), nous pouvons facilement calculer le développement limité de l'aire comprise sur la surface entre un arc de la courbe (ayant pour origine M et pour longueur l) et la géodésique corde de cet arc. Les calculs sont très différents de ceux que nous avons résumés plus haut et fournissent une vérification

⁽¹⁾ Voir *Annales École Normale* (3), LIII, pp. 133 et 134.

intéressante des termes contenant K dans (17). D'autre part, dans le cas d'un espace euclidien la différentielle de l'aire envisagée est :

$$\frac{1}{2} [x^2 + y^2 + z^2 - (xx' + yy' + zz')^2]^{\frac{1}{2}} dl,$$

et l'on vérifie, par des calculs plus longs que ceux faits dans le cas général où K n'est pas nul, que les termes de (17) qui contiennent la torsion de la courbe sont aussi exacts.

12. — Signalons que pour comparer les résultats précédents à ceux de la géométrie affine nous devons utiliser des fonctions et des variables ne faisant intervenir que des longueurs. En particulier nous définirons les courbes (P) par la propriété suivante : La longueur L de la corde ne dépend que de l et non de s (voir plus haut, § 6) et les courbes (P') par la propriété suivante : le rapport r des longueurs L et l ne dépend que du quotient de l par une fonction de s [cette propriété caractérise bien les courbes (P') trouvées ci-dessus, il suffit pour le voir d'utiliser le développement (10) qui nous donne l'expression de r en fonction de s et l].

REMARQUES.

13. — Les courbes (P) possèdent plusieurs propriétés caractéristiques des cercles et nous nous proposons de déterminer s'il existe, parmi elles, *des courbes telles que la longueur d'un arc soit proportionnelle à l'angle sous lequel on le voit de son origine*. Si une courbe possède cette propriété, tous les coefficients du développement (6) sont nuls excepté le premier; cela exige que ρ' soit nul et que τ^2 soit égal à $3K$; donc dans l'espace euclidien *cette propriété caractérise les cercles*.

Si l'on suppose ρ constant et τ^2 égal à $3K$, le coefficient de l^4 est nul mais le coefficient de l^5 ne peut l'être que si :

$$-\frac{3}{2} K \rho^3 + 3K^2 \rho - \frac{\rho^3 \tau^2}{2} + \frac{\rho \tau^4}{9} - K \rho \tau^2 = 0 \quad \text{ou} \quad K \rho (K - 3\rho^2) = 0,$$

donc, si la courbure de l'espace n'est pas nulle, il est nécessaire que ρ^2 soit égal à $\frac{K}{3}$; nous allons vérifier que ces conditions nécessaires ne sont pas suffisantes et qu'il n'existe aucune courbe, plane ou gauche, de l'espace non-euclidien possédant la propriété envisagée.

Pour le montrer nous devons calculer les termes des différents développements indispensables pour obtenir le terme du 7^e degré dans (6). Nous effectuons le calcul

en utilisant la formule donnant le cosinus de l'angle α et pour éviter des dénominateurs trop élevés nous prenons comme arbitraire (au lieu de la courbure K de l'espace) la moitié de la courbure de la courbe que nous désignons par $a = \frac{\rho}{2}$, la courbure de l'espace est alors $12a^2$ et la torsion de la courbe est $\tau = 6a$.

Dans ces conditions les dérivées du vecteur \mathbf{M} sont :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}'' &= -3 \cdot 2^2 a^2 \mathbf{A} && + 2 a \mathbf{e}_3 \\
 \mathbf{M}''' &= && - 4 \cdot 2^2 a^2 \mathbf{e}_1 && - 3 \cdot 2^2 a^2 \mathbf{e}_3 \\
 \mathbf{M}^{(4)} &= 12 \cdot 2^4 a^4 \mathbf{A} && - 13 \cdot 2^3 a^3 \mathbf{e}_2 \\
 \mathbf{M}^{(5)} &= && 25 \cdot 2^4 a^4 \mathbf{e}_1 && + 39 \cdot 2^4 a^4 \mathbf{e}_3 \\
 \mathbf{M}^{(6)} &= -75 \cdot 2^6 a^6 \mathbf{A} && + 142 \cdot 2^5 a^5 \mathbf{e}_2 \\
 \mathbf{M}^{(7)} &= && - 217 \cdot 2^6 a^6 \mathbf{e}_1 && - 426 \cdot 2^6 a^6 \mathbf{e}_3 \\
 \mathbf{M}^{(8)} &= 651 \cdot 2^8 a^8 \mathbf{A} && - 1495 \cdot 2^7 a^7 \mathbf{e}_2 \\
 \mathbf{M}^{(9)} &= && 2146 \cdot 2^8 a^8 \mathbf{e}_1 && + 4485 \cdot 2^8 a^8 \mathbf{e}_3 \\
 \mathbf{M}^{(10)} &= -6438 \cdot 2^{10} a^{10} \mathbf{A} && + 15601 \cdot 2^9 a^9 \mathbf{e}_2
 \end{aligned}$$

et nous obtenons les développements suivants :

$$l^2 = 1 - 12a^2 l^2 + 52a^4 l^4 - \frac{2^3 \cdot 41}{3} a^6 l^6 + \frac{4 \cdot 571}{3 \cdot 5} a^8 l^8 - \frac{2^3 \cdot 94441}{3^3 \cdot 7 \cdot 5^2} a^{10} l^{10} + \dots,$$

d'où :

$$\left(\frac{1-l^2}{K}\right)^{-\frac{1}{2}} = l^{-1} \left(1 + \frac{13}{6} a^2 l^2 + \frac{179}{2^3 \cdot 3^2} a^4 l^4 + \frac{4669}{2^4 \cdot 3^3 \cdot 5} a^6 l^6 + \frac{3135117}{2^7 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7} a^8 l^8 + \dots\right);$$

d'autre part :

$$x = l \left(1 - \frac{8}{3} a^2 l^2 + \frac{10}{3} a^4 l^4 - \frac{2^2 \cdot 31}{5 \cdot 3^2} a^6 l^6 + \frac{2 \cdot 2146}{3^4 \cdot 5 \cdot 7} a^8 l^8 + \dots\right),$$

donc :

$$\cos \alpha = 1 - \frac{a^2 l^2}{2} + \frac{1}{2^3 \cdot 3} a^4 l^4 - \frac{1}{2^4 \cdot 3^2 \cdot 5} a^6 l^6 - \frac{41467}{2^7 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7} a^8 l^8 + \dots$$

Pour que α fût proportionnel à l , il faudrait que ce développement coïncidât avec le développement de $\cos al$. Or le terme de degré 8 rend une telle identification impossible et α n'est pas proportionnel à l . On obtient d'ailleurs :

$$\alpha = al + \frac{36}{175} a^3 l^3 + \dots, \quad \text{d'où} \quad l = \frac{1}{a} \left(\alpha - \frac{2^2 \cdot 3^2}{5^2 \cdot 7} \alpha^3 + \dots\right).$$

14. — Nous avons démontré qu'il n'existe aucune courbe (P') dans un espace non-euclidien de courbure K non nulle, plus généralement nous nous proposons de déterminer s'il y a des courbes telles que la relation entre la longueur l de l'arc, l'angle α sous lequel on le voit de son origine et l'abscisse curviligne s de cette origine puisse s'écrire :

$$(18) \quad g(l) = \varphi(s) \cdot h(\alpha);$$

les fonctions g et h , nulles pour $l = 0$ et $\alpha = 0$, sont holomorphes au voisinage de ces valeurs. Ce que nous savons de α nous montre que si la relation entre l , s et α a la forme (18), l'angle α (et plus généralement toute fonction holomorphe de α au voisinage de $\alpha = 0$) est une fonction holomorphe F du quotient q de la fonction $g(l)$ par la fonction inconnue φ . Nous pouvons multiplier F et g par des constantes (cela revient à multiplier φ par une constante) et ces deux fonctions holomorphes peuvent être développées sous la forme :

$$\begin{aligned} g(l) &= l + B l^2 + C l^3 + D l^4 + \dots, \\ F(q) &= q + a_1 q^2 + b_1 q^3 + c_1 q^4 + \dots, \end{aligned}$$

d'où résulte que α (ou une fonction de α) doit admettre un développement ayant la forme suivante :

$$(19) \quad \alpha = \frac{l}{\varphi(s)} + \left(\frac{B}{\varphi} + \frac{a_1}{\varphi^2} \right) l^2 + \left(\frac{C}{\varphi} + \frac{2a_1 B}{\varphi^2} + \frac{b_1}{\varphi^3} \right) l^3 + \left(\frac{D}{\varphi} + a_1 \frac{2C + B^2}{\varphi^2} + \frac{3b_1 B}{\varphi^3} + \frac{c_1}{\varphi^4} \right) l^4 + \dots$$

Les coefficients des mêmes puissances de l dans (6) et (19) doivent être des fonctions de s identiques car nous éliminons le cas des courbes (P) et on en déduit très simplement que la courbure et la torsion de notre courbe doivent vérifier les relations suivantes (où l'on désigne par a, b, c, d des constantes) :

$$(20) \quad \begin{cases} \rho' = a\rho + b\rho^2, \\ \tau^2 = c + ab\rho + d\rho^2, \end{cases} \quad \text{alors} \quad \varphi = 2\rho^{-1};$$

les coefficients (constants) figurant dans les développements de $g(l)$ et $F(q)$ sont déterminés en fonction de a, b, c, d :

$$B = \frac{a}{3}, \quad a_1 = \frac{2b}{3}, \quad C = \frac{a^2}{12} + \frac{K}{12} - \frac{c}{36}, \quad b_1 = \frac{2}{3}b^2 - \frac{d}{9}.$$

Le coefficient de l^4 dans (19) est alors un polynôme en ρ dont deux coefficients seuls ne sont pas encore déterminés. En tenant compte de (20) nous obtenons les valeurs de $\tau\tau'$ et des dérivées de ρ sous forme de polynômes en ρ et le coefficient

de l' figurant dans (6) est lui aussi un polynôme en ρ . Si l'on écarte le cas d'une courbe (P), les deux coefficients en question sont des fonctions de s qui ne peuvent être identiques que si leurs expressions sous forme de polynômes en ρ sont elles-mêmes identiques. Ceci impose aux constantes a, b, c, d deux relations et nous permet de calculer de nouveaux coefficients de g et de F :

$$\begin{aligned} Kb - \frac{bc}{3} &= 0, & D &= \frac{a}{60} \left(a^2 - \frac{7}{9}c + \frac{7}{3}K \right), \\ \frac{5}{9}ab^2 - \frac{4}{9}ad - \frac{a}{6} &= 0, & c_1 &= \frac{2b}{15} \left(6b^2 - \frac{19}{9}d - \frac{1}{6} \right); \end{aligned}$$

donc puisque a et b ne sont pas simultanément nuls (cas d'une courbe P) nous avons trois hypothèses possibles à envisager pour les coefficients de (20) :

$$\left\{ \begin{array}{l} b = 0, \\ d = -\frac{3}{8}, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} c = 3K, \\ a = 0, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} c = 3K, \\ d = \frac{5}{4}b^2 - \frac{3}{8}, \end{array} \right.$$

en remarquant d'ailleurs que nous devons supposer K différent de zéro lorsque nous envisageons la seconde de ces hypothèses, sinon nous retrouvons les courbes (P') de l'espace euclidien.

Nous devons examiner maintenant si l'une de ces hypothèses suffit pour permettre l'identification des termes de degré 5 figurant dans (6) et (19). Dans (19) le coefficient de l^5 est un polynôme en ρ , sans terme constant, du 5° degré; si nous remplaçons $\tau^2, \tau\tau'$ et les dérivées de ρ par leurs expressions tirées de (20) dans les différents termes du coefficient de l^5 figurant dans (6), nous obtenons un polynôme en ρ sans terme constant. Donc $-2\rho\tau\tau'' - \frac{7}{4}\rho\tau'^2$, que l'on peut écrire également $-2(\tau\tau'' + \tau'^2)\rho + \frac{1}{4}\rho\tau'^2$, doit être identique à un polynôme en ρ sans terme constant et il en résulte que τ'^2 doit être un polynôme du 4° degré en ρ . Cette remarque nous montre que dans chacune des hypothèses ci-dessus, il faut encore que les coefficients vérifient de nouvelles conditions qui permettent de simplifier le calcul d'identification (surtout dans le cas des deux premières hypothèses) et les seules valeurs possibles des lettres a, b, c, d sont telles que :

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad & b = 0, \quad c = 0, \quad d = -\frac{3}{8}, \quad \text{alors} \quad \tau'^2 = -\frac{3}{8}a^2\rho^2; \\ \text{(II)} \quad & a = 0, \quad c = 3K, \quad d = 0, \quad \text{alors} \quad \tau'^2 = 0; \\ \text{(III)} \quad & a^2b^2 = 12Kd, \quad c = 3K, \quad d = \frac{5}{4}b^2 - \frac{3}{8}, \quad \text{alors} \quad \tau'^2 = d(a\rho + b\rho^2)^2; \end{aligned}$$

et il faut pouvoir identifier le polynôme du 5^e degré en φ , coefficient de l^5 dans (19) (polynôme dont deux coefficients seulement ne sont pas déterminés) avec le coefficient correspondant de (6). Dans l'hypothèse (III) nous exprimons que les termes en φ^2 ont même coefficient et l'on obtient la condition $\frac{a^2 b}{18}$ nul, ce qui nous ramène soit à la première, soit à la seconde hypothèse.

Dans l'hypothèse (I) ou (II), les coefficients de φ^3 seuls donnent une nouvelle condition, à savoir dans l'hypothèse (I) :

$$\frac{15}{16} \left(\frac{7a^2}{3} + K \right) = \frac{187}{96} a^2 - \frac{9}{8} K, \quad \text{d'où} \quad 23a^2 + 198K = 0;$$

dans l'hypothèse (II) :

$$3K + \frac{Kb^2}{3} = 0, \quad \text{d'où} \quad b^2 + 9 = 0.$$

Nous obtenons donc des valeurs déterminées pour tous les coefficients de (20), d'ailleurs irréalisables si l'on se borne aux éléments réels car $\frac{\tau^2}{\varphi^2}$ dans l'hypothèse (I) et b^2 dans l'hypothèse (II) doivent être négatifs.

Dans le cas de l'hypothèse (II) nous pouvons montrer sans nouveaux calculs que les conditions trouvées ne suffisent pas, car les termes suivants des deux développements (6) et (19) ne peuvent être identifiés. Nous avons en effet dans cette hypothèse (II) des fonctions particulières vérifiant les relations (8) où nous faisons $\lambda = b$ et $\mu = 0$, et nous avons remarqué qu'une fonction holomorphe quelconque de α (donc $\cos \alpha$) doit admettre un développement de même forme que (19) dans lequel seuls les coefficients de la fonction F correspondante sont modifiés. Il en résulte que nous devons pouvoir identifier (16), dans lequel nous connaissons le terme de degré 7, avec un développement tel que (19) où la fonction F a pour expression :

$$F(q) = 1 - \frac{1}{2} q^2 - \frac{2b}{3} q^3 + A_1 q^4 + B_1 q^5 + A q^6 + B q^7 + \dots \quad (A_1 \text{ et } B_1 \text{ étant déjà déterminés}),$$

q désignant le quotient par $2\varphi^{-1}$ de la fonction $g(l)$ dont les premiers termes sont déterminés :

$$g = l + a_5 l^5 + a_6 l^6 + \dots$$

L'identification des termes en l^6 nous donne la valeur de a_5 (et nous permet de vérifier la condition trouvée plus haut $b^2 = -9$). On doit avoir $a_5 = \frac{K^2}{360}$ et l'identification des termes en l^7 montre que a_6 est nul et que l'on doit avoir également $-\frac{b}{4} \cdot \frac{K^2}{360} = -\frac{3K^2 b}{7!}$, ce qui est impossible si K n'est pas nul.

Les calculs précédents ne nous suffisent pas pour achever l'étude de la première hypothèse. Nous devons déterminer les termes de degré supérieur figurant dans le développement d'une fonction holomorphe de α et nous choisissons, ici aussi, le cosinus de cet angle qui doit pouvoir être identifié avec une fonction $F(q)$, du produit par φ de la fonction $g(l)$ dont le développement commence alors par les termes :

$$g(l) = l + \frac{a}{3} l^2 + \dots + g_3 l^3 + g_6 l^6 + \dots$$

Les résultats établis nous montrent que le développement de $\cos \alpha$ débute par les termes suivants :

$$1 - l^2 \frac{\varphi^2}{8} - l^3 \frac{a\varphi^2}{12} - l^4 \varphi^2 \left(\frac{K}{48} + \frac{25a^2}{6!} \right) - l^5 \varphi^2 \left(\frac{2aK}{5!} + \frac{8a^3}{6!} \right) + \dots,$$

de sorte que la fonction $F(q)$ doit avoir un développement de la forme :

$$F(q) = 1 - \frac{q^2}{8} + A_6 q^6 + A_7 q^7 + \dots$$

Nous déterminons dans le développement de $\cos \alpha$ le coefficient de l^6 ; ce coefficient sera un polynôme en φ dont le terme du deuxième degré fournit la valeur de g_6 , le terme du quatrième degré doit disparaître, le terme du sixième degré nous donnera la valeur de A_6 . Comme nous effectuons le calcul sans tenir compte de la dernière relation trouvée ci-dessus (parce que la valeur de a^2 ne simplifie guère les coefficients numériques), nous devons retrouver cette même relation pour exprimer que le terme en φ^4 disparaît. Le coefficient de l^7 ne doit contenir, lui aussi, aucun terme en φ^4 , et le terme en φ^6 y est déterminé par la valeur trouvée pour A_6 car ce terme doit être égal à $2A_6 a \varphi^6$.

Nous donnons ci-dessous quelques-uns des développements intermédiaires qu'il a fallu établir pour obtenir le développement de $\cos \alpha$. On les déduit de la valeur des projections des vecteurs dérivées de \mathbf{M} (sur les quatre axes pour les dérivées d'ordre inférieur ou égal à 6, sur \mathbf{A} , \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 pour $\mathbf{M}^{(7)}$, sur \mathbf{A} , \mathbf{e}_1 pour $\mathbf{M}^{(8)}$, sur \mathbf{A} seulement pour $\mathbf{M}^{(9)}$) :

$$\begin{aligned} x = l \left\{ \begin{aligned} &1 - \frac{l^2}{6} (K + \varphi^2) - \frac{l^3}{8} a \varphi^2 + \frac{l^4}{5!} \left[K^2 + \varphi^2 (2K - 7a^2) + \frac{5}{8} \varphi^4 \right] + \frac{l^5}{6!} \left[\varphi^2 (10aK - 15a^3) + \frac{25}{4} a \varphi^4 \right] \\ &+ \frac{l^6}{7!} \left[-K^3 + \varphi^2 (\dots) + \varphi^4 \left(-\frac{9}{4} K + \frac{325}{8} a^2 \right) - \frac{25}{64} \varphi^6 \right] + \frac{l^7}{8!} \left[\varphi^2 (\dots) + \varphi^4 \left(-\frac{63}{2} Ka + \frac{1750}{8} a^3 \right) - \frac{525}{64} a \varphi^6 \right] - \end{aligned} \right. \\ t = 1 - \frac{l^2}{2} K + \frac{l^4}{4!} K (K + \varphi^2) + \frac{l^5}{4!} Ka \varphi^2 + \frac{l^6}{6!} K \left[-K^2 + \varphi^2 (17a^2 - 2K) - \frac{5}{8} \varphi^4 \right] + \frac{l^7}{6!} K \left[\varphi^2 (7a^3 - 2Ka) - \frac{5}{4} a \varphi^4 \right] \\ + \frac{l^8}{8!} K \left[K^3 + \varphi^2 (\dots) + \varphi^4 \left(\frac{9}{4} K - \frac{605}{8} a^2 \right) + \frac{25}{64} \varphi^6 \right] + \frac{l^9}{9!} K \left[\varphi^2 (\dots) + \varphi^4 \left(\frac{81}{2} aK - \frac{4170}{8} a^3 \right) + \frac{675}{64} a \varphi^6 \right]. \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\left. \frac{1-t^2}{K} \right)^{-\frac{1}{2}} = l^{-1} \left\{ \begin{aligned} & 1 + l^2 \left(\frac{\rho^2}{24} + \frac{K}{6} \right) + \frac{l^2 a \rho^2}{24} + l^4 \left[\frac{14}{6!} K^2 + \rho^2 \frac{(17a^2 - 2K)}{6!} + \frac{5\rho^4}{4 \cdot 6!} \right] \\ & + l^6 \left[\rho^2 \frac{(7a^3 - 2aK)}{6!} + \frac{5a}{2 \cdot 6!} \rho^4 \right] + l^8 \left[\frac{31}{3 \cdot 7!} K^3 + \rho^2(\dots) + \rho^4 \left(\frac{23}{4 \cdot 8!} K + \frac{1187}{8 \cdot 8!} a^2 \right) + \frac{635}{3 \cdot 64 \cdot 8!} \rho^6 \right] \\ & + l^7 \left[\rho^3(\dots) + \rho^4 \left(\frac{23aK}{2 \cdot 8!} + \frac{1321}{12 \cdot 8!} a^3 \right) + \frac{635}{64 \cdot 8!} a \rho^6 \right] + \dots \end{aligned} \right\}$$

et par suite $\cos \alpha$, qui est égal à $x \left(\frac{1-t^2}{K} \right)^{-\frac{1}{2}}$ admet pour développement :

$$\begin{aligned} \cos \alpha = & 1 - \frac{l^2 \rho^2}{8} - l^2 \frac{a \rho^2}{12} - l^4 \rho^2 \left(\frac{K}{48} + \frac{25a^2}{6!} \right) - l^6 \rho^2 \left(\frac{2aK}{5!} + \frac{8a^3}{6!} \right) \\ & + l^8 \left[\rho^2(\dots) + \rho^4 \left(\frac{23a^2}{3 \cdot 64 \cdot 6!} + \frac{33K}{32 \cdot 6!} \right) - \frac{175}{64 \cdot 8!} \rho^6 \right] + l^7 \left[\rho^3(\dots) + \rho^4 \left(\frac{23a^2}{2 \cdot 8!} + \frac{99aK}{8!} \right) - \frac{450}{64 \cdot 8!} a \rho^6 \right] + \dots \end{aligned}$$

Les conditions imposées par le coefficient de l^6 sont :

$$\frac{23a^2}{3 \cdot 64 \cdot 6!} + \frac{33K}{32 \cdot 6!} = 0, \quad \text{ce qui est bien :} \quad 23a^2 + 198K = 0,$$

$$\text{et} \quad A_6 = -\frac{175}{64 \cdot 8!}.$$

Alors le terme en ρ^4 disparaît effectivement du coefficient de l^7 , mais il faudrait que le terme en ρ^6 , du même coefficient, fût $-\frac{350}{64 \cdot 8!} a$. Donc l'identification entre $\cos \alpha$ et une fonction de la forme cherchée est impossible, et les seules courbes conduisant à la relation (18) sont les courbes (P) et (P').

GÉOMÉTRIE AFFINE

CHAPITRE III

15. — Pour généraliser, avec quelque intérêt, l'étude précédente dans le cas de la géométrie affine, nous devons n'envisager que des variables et des fonctions représentant des éléments invariants par les transformations affines fondamentales de déterminant égal à 1. Aussi nous prenons comme paramètres l'abscisse curviligne affine de l'origine de l'arc étudié et la longueur affine l de cet arc. Nous définissons la longueur affine L de la corde comme étant la distance affine des éléments linéaires (point, tangente dans le cas des courbes planes; point, tangente, plan osculateur dans le cas des courbes gauches), et nous étudions les fonctions $L(l, s)$ et $r(l, s) = \frac{L}{l}$. Nous dirons qu'une courbe est une courbe (P) si L est indépendant de s ou qu'elle est une courbe (P') si r dépend seulement du quotient de l par une fonction de s .

Remarquons que l'étude de la géométrie affine plane n'est pas un cas particulier de la géométrie de l'espace, aussi devons-nous l'examiner tout d'abord. Nous rappelons⁽¹⁾ les formules fondamentales de la géométrie affine des courbes planes. Si l'on désigne par $\mathbf{M}(s)$ le vecteur définissant la position du point \mathbf{M} de la courbe, ayant pour abscisse curviligne s , et par $k(s)$ la courbure affine en ce point \mathbf{M} , on a :

$$(21) \quad [\mathbf{M}', \mathbf{M}'] = 1, \quad \mathbf{M}''' + k(s) \cdot \mathbf{M}' = 0,$$

où les dérivées sont prises par rapport à s et où le symbole $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$ désigne la valeur algébrique du déterminant qui donne la grandeur du produit extérieur des deux vecteurs \mathbf{A} et \mathbf{B} .

La distance affine de deux éléments linéaires est égale au double de la racine cubique réelle de l'aire du triangle construit à partir de ces éléments, de sorte que la longueur⁽²⁾ de la corde sera le double de la racine cubique de :

$$f = \frac{[\mathbf{M}', \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}][\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}, \mathbf{M}_1']}{2[\mathbf{M}', \mathbf{M}_1']},$$

⁽¹⁾ Voir par exemple : BLASCHKE, *Vorlesungen über Differential geometrie*, Band II.

⁽²⁾ Ici, et dans tout ce qui suit, le mot *longueur* doit être entendu au sens affine, même si nous ne le spécifions pas.

en désignant par \mathbf{M}_l le vecteur correspondant à l'extrémité de l'arc qui a \mathbf{M} pour origine et l pour longueur.

Nous supposons que la courbure k admet autant de dérivées qu'il est nécessaire au voisinage de la valeur s correspondant à l'origine de l'arc étudié de sorte que l'on peut développer $\mathbf{M}_l - \mathbf{M}$ et \mathbf{M}'_l par la formule de Taylor et ainsi obtenir un développement limité, suivant les puissances de l , des différents produits figurant dans l'expression f . Le calcul de ces facteurs revient à celui des produits suivants obtenus très simplement en dérivant les relations (21) :

$$\begin{aligned} [\mathbf{M}' \cdot \mathbf{M}'''] &= 0, & [\mathbf{M}'' \cdot \mathbf{M}'''] &= k, \\ [\mathbf{M}' \cdot \mathbf{M}^{(4)}] &= -k, & [\mathbf{M}'' \cdot \mathbf{M}^{(4)}] &= k', \\ [\mathbf{M}' \cdot \mathbf{M}^{(5)}] &= -2k', & [\mathbf{M}'' \cdot \mathbf{M}^{(5)}] &= k'' - k^2, \\ [\mathbf{M}' \cdot \mathbf{M}^{(6)}] &= k^2 - 3k'', & [\mathbf{M}'' \cdot \mathbf{M}^{(6)}] &= k''' - 4kk', \\ [\mathbf{M}' \cdot \mathbf{M}^{(7)}] &= 6kk' - 4k''', & [\mathbf{M}'' \cdot \mathbf{M}^{(7)}] &= k^2, \\ & & [\mathbf{M}''' \cdot \mathbf{M}^{(5)}] &= 2kk'. \end{aligned}$$

On obtient ainsi les premiers termes de f (*) :

$$f = \frac{l^2}{8} + \frac{k^2(s)}{1920} l^4 + \frac{kk'}{1920} l^6 + \dots,$$

d'où nous déduisons le développement limité de la longueur de la corde :

$$(22) \quad L = l + \frac{k^2}{6!} l^6 + \frac{kk'}{6!} l^8 + \dots$$

16. — Les courbes (P) sont des courbes telles que L ne dépende pas de s quelle que soit la valeur de l ; il est donc nécessaire que tous les coefficients du développement (22) soient indépendants de s pour que la courbe puisse être une courbe (P) et, par suite, la courbure affine k est une constante.

Cette condition nécessaire est suffisante puisque la courbe est alors une conique (ellipse ou hyperbole si $k \neq 0$), donc elle possède un groupe continu de transformations affines qui la transforment en elle-même. Ces transformations ont des déterminants égaux à 1 de sorte que nous pourrions faire coïncider un arc quelconque de la courbe avec le transformé, par l'une d'elles, d'un arc ayant une origine fixe et

(*) Les deux premiers termes de ce développement figurent dans le livre de M. BLASCHKE : *Vorlesungen über Differential geometrie*, Bd. II, Kap. 1, § 15; mais la formule (162) de cet ouvrage contient une erreur d'impression.

la même longueur que l'arc envisagé; d'autre part ces transformations font se correspondre les éléments linéaires des différents arcs transformés et conservent leurs distances affines; donc les longueurs des cordes de tous les arcs ayant même longueur sont bien égales.

Dans le cas particulier où k est nul, la courbe est une parabole et nous avons $L = l$ comme le faisait prévoir la définition des distances affines.

17. — Les courbes (P') sont définies par le fait que le rapport des longueurs de la corde et de l'arc ne dépend que du quotient de la longueur de l'arc par une certaine fonction $\varphi(s)$ de l'abscisse curviligne de son origine. Par suite nous devons pouvoir identifier le développement du quotient $\frac{L}{l}$ avec un développement de la forme suivante où nous désignons par A, B, ... des constantes :

$$(23) \quad 1 + A \frac{l^4}{\varphi^4(s)} + B \frac{l^5}{\varphi^5(s)} + \dots;$$

donc nécessairement :

$$k^2(s) = \frac{A_4}{2\varphi^4(s)}, \quad kk' = \frac{B_4}{\varphi^5(s)}.$$

Par suite φ est une fonction linéaire de s (comme en géométrie euclidienne); or nous pouvons changer l'origine des arcs affines sur la courbe et multiplier φ par un facteur constant, donc la courbure k doit être inversement proportionnelle au carré de l'abscisse curviligne s .

Cette condition nécessaire est suffisante; nous l'établirons géométriquement. Les courbes dont l'équation intrinsèque affine est :

$$(24) \quad k(s) = \frac{a}{s^2}, \quad a \text{ constante}$$

sont bien connues, *ce sont les courbes W de Klein et Lie* définies par le fait qu'il existe un groupe continu de transformations affines (T), dont les déterminants peuvent être différents de 1, qui les transforment en elles-mêmes.

Ces courbes possèdent effectivement la propriété caractéristique des courbes (P') : soit N un point fixe de l'une d'elles, une certaine transformation T(s), du groupe, transforme N en le point M d'abscisse curviligne s ; le point M₁, extrémité de l'arc

étudié, est le transformé par cette même transformation d'un certain point N_1 . Les longueurs affines des arcs MM_1 et NN_1 ont pour rapport la racine cubique du déterminant de la transformation $T(s)$. Les éléments linéaires en M et M_1 sont les transformés par $T(s)$ des éléments linéaires en N et N_1 , de sorte que le rapport des longueurs des cordes MM_1 et NN_1 est, lui aussi, égal à la racine cubique du déterminant de la transformation. Donc le rapport des longueurs de la corde et de l'arc MM_1 est égal au rapport des longueurs de la corde et de l'arc NN_1 , ce dernier ne dépend que de la longueur de l'arc NN_1 , puisque le point N est fixe. Or la longueur de NN_1 est égale au quotient de la longueur l de l'arc MM_1 par la racine cubique du déterminant de $T(s)$, c'est-à-dire par une certaine fonction de s et l'on obtient bien le résultat annoncé : $\frac{L}{l}$ ne dépend que du quotient de l par une fonction de s .

La forme des courbes W et l'expression des transformations en elles-mêmes qu'elles possèdent, dépendent de la valeur du coefficient a qui figure dans l'équation (24). Il est facile de vérifier, dans toutes les hypothèses faites sur a ($a < -2$; $a = -2$; $-2 < a < \frac{1}{4}$; $a = \frac{1}{4}$; $a > \frac{1}{4}$) que le déterminant de la transformation $T(s)$ qui transforme un point fixe N , arbitrairement choisi sur la courbe, en le point M d'abscisse curviligne s , est égal au produit de s^3 par une certaine constante conformément au résultat établi plus haut sur la valeur de la fonction φ .

Donc les courbes planes (P) ou (P') admettent un groupe continu de transformations en elles-mêmes; ces transformations transforment des droites en droites, conservent les longueurs affines s'il s'agit d'une courbe (P) ou multiplient les longueurs par un même facteur s'il s'agit d'une courbe (P'). Ces transformations sont tout à fait analogues aux déplacements (cas des courbes P) ou aux déplacements combinés avec des homothéties (cas des courbes P') que nous avons rencontrés plus haut en géométrie euclidienne.

18. — Remarquons aussi que la fonction $L(s, l)$ ne peut être une fonction impaire de l , ou la fonction r une fonction paire de la même variable, que si la courbe est une courbe (P). Il est en effet nécessaire que le développement (22) ne contienne que des termes de degré impair; ce qui exige que k' soit nul pour qu'il en soit ainsi.

Cette condition nécessaire est suffisante, car la propriété envisagée est une conséquence de la propriété caractéristique des courbes (P). Soit en effet MM_1 l'arc ayant M pour origine et $-l$ pour longueur; d'après la définition des courbes (P), tous les arcs ayant $-l$ pour longueur ont une corde égale à la corde de MM_1 , donc

en particulier l'arc M_1M . Cette remarque prouve que les cordes de MM_1 et de MM_2 ont même valeur absolue, ou que L est une fonction impaire de l .

19. — Nous procédons de la même manière pour étudier une courbe gauche définie par les expressions $k(s)$ et $t(s)$ de la courbure et de la torsion affines au point M d'abscisse curviligne affine s sur la courbe. Si l'on appelle $\mathbf{M}(s)$ le vecteur définissant le point M , les deux formules fondamentales sont :

$$(\mathbf{M}', \mathbf{M}'', \mathbf{M}''') = 1, \quad \mathbf{M}^{(4)} + k(s) \cdot \mathbf{M}'' + t(s) \cdot \mathbf{M}' = 0,$$

en désignant par $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ la valeur algébrique du produit mixte des trois vecteurs \mathbf{A} , \mathbf{B} et \mathbf{C} .

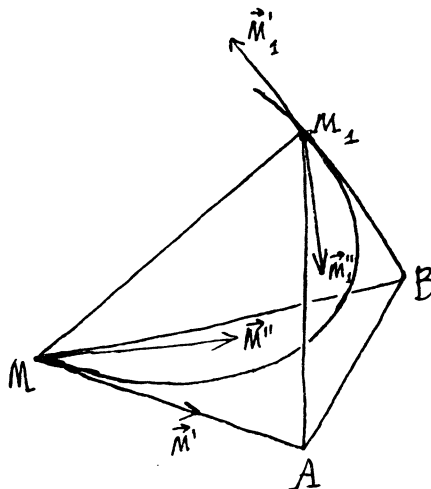


FIG. 3.

La longueur L de la corde est la distance affine des éléments linéaires de l'origine M et de l'extrémité M_1 de l'arc étudié. Cette longueur L est égale à la longueur de l'arc MM_1 d'une cubique, à courbure et torsion affines nulles, ayant en M et M_1 les mêmes éléments linéaires que la courbe; donc L est proportionnelle à la racine sixième du volume du tétraèdre $MABM_1$ construit à partir de ces éléments linéaires. Le volume J de $MABM_1$ est égal au sixième du produit mixte de trois vecteurs convenablement choisis et, pour calculer facilement un développement limité de J suivant les puissances de l en fonction des valeurs en M de k, t et de leurs dérivées, nous évaluons $6J$ comme étant la valeur commune des quatre produits mixtes suivants :

$$(\mathbf{MA}, \mathbf{MB}, \mathbf{MM}_1), \quad (\mathbf{M}_1\mathbf{B}, \mathbf{M}_1\mathbf{A}, \mathbf{M}_1\mathbf{M}), \quad (\mathbf{AB}, \mathbf{AM}, \mathbf{AM}_1), \quad (\mathbf{BM}, \mathbf{BA}, \mathbf{BM}_1);$$

or nous avons, en désignant par a, b, c, d, e, f certains nombres :

$$\begin{aligned} \mathbf{MA} &= a\mathbf{M}' = \mathbf{M}_1 - \mathbf{M} + b\mathbf{M}' + c\mathbf{M}'', \\ \mathbf{MB} &= \mathbf{M}_1 - \mathbf{M} + e\mathbf{M}' = f\mathbf{M}' + d\mathbf{M}''. \end{aligned}$$

Nous en concluons que $6J$ est égal à la valeur commune des cinq expressions :

$$\begin{aligned} ad(\mathbf{M}', \mathbf{M}'', \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}), & \quad -ae(\mathbf{M}', \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}, \mathbf{M}'), & \quad -ec(\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}, \mathbf{M}', \mathbf{M}''), \\ -ace(\mathbf{M}', \mathbf{M}', \mathbf{M}''), & \quad -ade(\mathbf{M}', \mathbf{M}'', \mathbf{M}'), \end{aligned}$$

ce qui nous permet d'éliminer les inconnues a, b, c, d, e et d'obtenir :

$$J = \frac{(\mathbf{M}', \mathbf{M}'', \mathbf{M}_1 - \mathbf{M})(\mathbf{M}', \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}, \mathbf{M}')(\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}, \mathbf{M}', \mathbf{M}'')}{6(\mathbf{M}', \mathbf{M}'', \mathbf{M}_1)(\mathbf{M}', \mathbf{M}', \mathbf{M}'')}. \quad .$$

Si nous supposons que la courbure et la torsion affines admettent, au voisinage de la valeur s , autant de dérivées qu'il est nécessaire, nous pouvons calculer les développements de Taylor de chacun des vecteurs figurant ci-dessus, et des opérations simples nous donneront le développement limité cherché. Il nous faudra pour l'obtenir calculer les valeurs en \mathbf{M} des produits mixtes de vecteurs dérivés de \mathbf{M} , ces produits mixtes se déduisent des relations fondamentales par dérivation, et l'on trouve, en désignant, pour simplifier, par (pqr) le produit mixte $(\mathbf{M}^{(p)}, \mathbf{M}^{(q)}, \mathbf{M}^{(r)})$:

$$\begin{aligned} (123) &= 1, & (124) &= 0, \\ (125) &= -k, & (126) &= -2k' - t, \\ (127) &= k^2 - 3k'' - 3t', & (128) &= 6kk' + 2kt - 6t'' - 4k''', \\ (129) &= 13kk'' + 10k'^2 + 7k't + 8kt' + t^2 - k^3 - 10t''' - 5k^{(4)}, \\ (134) &= k, & (135) &= k' + t, \\ (136) &= k'' + 2t' - k^2, & (137) &= k''' + 3t'' - 4kk' - 2kt, \\ (138) &= k^{(4)} + 4t''' - 7kk'' - 4k'^2 - 6kt' - 5k't - t^2 + k^3, \\ (145) &= k^2, & (146) &= 2kk' + kt, \\ (147) &= 3kk'' + 3kt' - k^3, & (156) &= 2k'^2 + 3k't + t^2 + k^3 - 2kt' - kk'', \\ (234) &= -t, & (235) &= -t', \\ (236) &= kt - t'', & (237) &= kt' + 3k't + t^2 - t''', \\ (245) &= -kt, & (246) &= -2k't - t^2, & (345) &= k't - kt' + t^2; \end{aligned}$$

le développement des produits mixtes $(\mathbf{M}', \mathbf{M}'', \mathbf{M}_i - \mathbf{M})$ et $(\mathbf{M}', \mathbf{M}'', \mathbf{M}_i')$ ne présente aucune difficulté. Pour les autres produits figurant dans \mathbf{J} on trouve :

$$\begin{aligned} (\mathbf{M}', \mathbf{M}_i - \mathbf{M}, \mathbf{M}_i') &= \frac{l^4}{12} + \frac{l^6}{6!} [9(125) + 5(134)] + \frac{2l^7}{6!} [(126) + (135)] \\ &\quad + \frac{l^8}{4 \cdot 7!} [10(127) + 14(136) + 7(145)] \\ &\quad + \frac{l^9}{3 \cdot 8!} [9(128) + 16(137) + 14(146)] \\ &\quad + \frac{l^{10}}{10!} [35(129) + 75(138) + 90(147) + 42(156)] + \dots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{M}', \mathbf{M}_i', \mathbf{M}_i'') &= \frac{l^4}{2} + \frac{l^4}{4!} [3(125) + 2(134)] + \frac{l^5}{5!} [4(126) + 5(135)] \\ &\quad + \frac{l^6}{6!} [5(127) + 9(136) + 5(145)] \\ &\quad + \frac{l^7}{7!} [6(128) + 14(137) + 14(146)] \\ &\quad + \frac{l^8}{8!} [7(129) + 20(138) + 28(147) + 14(156)] + \dots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{M}_i - \mathbf{M}, \mathbf{M}_i', \mathbf{M}_i'') &= \frac{l^3}{6} + \frac{l^5}{5!} [6(125) + 5(134)] + \frac{l^6}{6!} [10(126) + 16(135) + 5(234)] \\ &\quad + \frac{l^7}{7!} [15(127) + 35(136) + 21(145) + 21(235)] \\ &\quad + \frac{l^8}{8!} [21(128) + 64(137) + 70(146) + 56(236) + 42(245)] \\ &\quad + \frac{l^9}{9!} [28(129) + 105(138) + 162(147) + 84(156)] \\ &\quad + \frac{l^9}{9!} [120(237) + 168(246) + 42(345)] + \dots \end{aligned}$$

[nous avons tenu compte en écrivant ces produits de la valeur nulle de (124)]. Après remplacement des produits (pqr) par leurs valeurs en fonction de k, t et de leurs dérivées, nous obtenons facilement le développement de \mathbf{J} qui est ⁽¹⁾ :

$$\mathbf{J} = \frac{1}{6} \left[\frac{l^6}{108} + \frac{4k^2 l^{10}}{6! 6!} + \frac{4kk' l^{11}}{6! 6!} + \left(5l^2 - 4k' t + \frac{28}{45} k^3 + 8k'^2 + 8kk'' \right) \frac{l^{12}}{10!} + \dots \right].$$

⁽¹⁾ Cette formule complète la formule (200) proposée dans le livre de M. BLASCHKE (Bd. II, K. 3, § 38); mais les valeurs numériques des coefficients de l^{10} diffèrent légèrement.

Ce volume est proportionnel à la sixième puissance de la longueur L cherchée ; or d'après la définition des distances, on doit avoir $L = l$ lorsque k et t sont identiquement nulles ; nous en déduisons le coefficient de proportionnalité et finalement :

$$(25) \quad L = l + l^5 \frac{k^2}{7200} + l^6 \frac{kk'}{7200} + l^7 \left(\frac{l^2}{8!} - \frac{k't}{10 \cdot 7!} + \frac{k'^2 + kk''}{5 \cdot 7!} + \frac{k^3}{450 \cdot 6!} \right) + \dots$$

20. — Pour qu'une courbe soit une courbe (P) il faut que tous les coefficients du développement (25) soient indépendants de s , donc en particulier la courbure et la torsion doivent être des constantes.

Cette condition nécessaire est suffisante puisque les courbes ayant une courbure et une torsion affines constantes admettent un groupe continu de transformations affines, dont les déterminants sont égaux à 1, qui les transforment en elles-mêmes. Ces transformations permettent de faire coïncider les éléments linéaires à l'origine et à l'extrémité de deux arcs ayant même longueur affine, ce qui montre bien que les longueurs des cordes correspondantes sont égales.

21. — Les courbes (P') sont définies par le fait que le rapport $\frac{L}{l} = r$ ne dépend que du quotient de la longueur l par une fonction $\varphi(s)$. Donc nous devons pouvoir identifier, comme précédemment, le développement de r avec un développement de la forme (23); cela exige que :

$$k^2(s) = \frac{A_1}{\varphi^4(s)}, \quad kk' = \frac{B_1}{\varphi^3(s)}.$$

Si A_1 et B_1 ne sont pas nuls, nous pouvons, en changeant au besoin l'origine sur la courbe étudiée et en multipliant la fonction inconnue par une constante, conclure de ces deux premières conditions que la fonction φ est égale à l'abscisse curviligne de l'origine M de l'arc [comme dans toutes les recherches précédentes sur les courbes (P')], et la courbure de la courbe en M est inversement proportionnelle au carré de l'abscisse curviligne de ce point.

Le terme suivant du développement de r ne permet alors l'identification avec un développement (23) que si la torsion vérifie une relation de la forme :

$$5l^2 - \frac{D}{s^2} t = \frac{C}{s^6},$$

dans laquelle C et D désignent des constantes. Cela exige que la torsion soit inversement proportionnelle au cube de l'abscisse curviligne du point M ; donc une

courbe ne peut posséder la propriété (P') que si ses équations intrinsèques affines sont de la forme :

$$k(s) = \frac{\lambda}{s^2}, \quad t(s) = \frac{\mu}{s^3},$$

avec l'hypothèse que la courbure n'est pas identiquement nulle.

On reconnaît les équations des courbes W , gauches, et l'on vérifie très simplement que la condition trouvée est suffisante : Les courbes W admettent en effet un groupe continu de transformations affines qui les transforment en elles-mêmes. Ces transformations transforment les éléments linéaires d'un point N de la courbe en les éléments linéaires du transformé de N , de sorte que la longueur de la corde d'un arc MM_1 transformé de l'arc NN_1 sera égale au produit de la longueur de la corde de NN_1 par la racine sixième du déterminant de la transformation; un raisonnement analogue à celui du paragraphe 17 montre que le rapport de la corde à l'arc ne dépend alors que du quotient de la longueur de l'arc par une fonction de l'abscisse curviligne de son origine.

22. — Dans le cas particulier où les constantes A_1 et B_1 sont toutes deux nulles, la courbure de la courbe est identiquement nulle et les termes en l^5 et l^6 figurant dans le développement (25) ont un coefficient nul si bien que nous ne connaissons que les deux premiers termes du développement de r (à savoir $r = 1 + l^2 \frac{l^2}{8!} + \dots$) et nous ne pouvons déterminer la forme de la fonction inconnue φ car nous n'avons alors que l'unique relation :

$$l^2 = \frac{A'}{\varphi^6},$$

dans laquelle A' est une constante différente de zéro (sinon la courbe serait la cubique servant à définir la longueur de la corde).

Nous devons donc calculer le coefficient suivant de nos différents développements dans l'hypothèse où k est nul; mais nous aurons besoin ultérieurement de ces mêmes coefficients dans l'hypothèse plus générale où k est une constante, aussi donnons-nous immédiatement les résultats lorsque la courbure est une constante quelconque.

Le tableau des produits mixtes de dérivées du vecteur \mathbf{M} doit être complété comme suit :

$$\begin{aligned} (1210) &= -15l^{(4)} + 21kl'' + 9tl' - 3k^2t, & (139) &= 5l^{(4)} - 13kl'' - 7tl' + 3k^2t, \\ (148) &= 6kl'' - 2k^2t, & (157) &= -3kl'' + 3tl' + k^2t, \\ (238) &= -l^{(4)} + kt'' + 5tl' - k^2t, & (247) &= -3tl' + k^2t, \\ (256) &= kt'' - tl' - k^2t, & (346) &= -kt'' + 2tl'. \end{aligned}$$

D'autre part, les développements des produits mixtes intervenant dans l'expression de J doivent être complétés par les termes suivants :

$$\begin{aligned}
 & + \frac{l^{11}}{10!} [4(1210) + 10(139) + 15(148) + 12(157)] \quad \text{dans } (M', M_1 - M, M'_1); \\
 & + \frac{l^9}{9!} [8(1210) + 27(139) + 48(148) + 42(157)] \quad \text{dans } (M', M'_1, M''_1); \\
 & + \frac{l^0}{10!} \left[36(1210) + 160(139) + 315(148) + 288(157) \right. \\
 & \quad \left. + 450(247) + 252(256) + 225(238) + 210(346) \right] \quad \text{dans } (M_1 - M, M'_1, M_1).
 \end{aligned}$$

Ces expressions nous permettent de calculer le terme de degré 17 figurant au numérateur et celui de degré 11 au dénominateur de J pour obtenir, lorsque k est constant :

$$J = \frac{1}{6} \left[\frac{l^6}{108} + \frac{4k^2}{6!6!} l^0 + \left(5l^2 + \frac{28}{45} k^3 \right) \frac{l^{12}}{10!} + \frac{5tl'}{10!} l^{13} + \dots \right];$$

nous avons donc, dans cette même hypothèse sur k :

$$(26) \quad L = l + l^2 \frac{k^2}{7200} + l^2 \left(\frac{l^2}{8!} + \frac{k^3}{450 \cdot 6!} \right) + l^2 \frac{tl'}{8!} + \dots$$

Donc si l'on suppose la courbure identiquement nulle, cette courbe pourra être une courbe (P') à la condition que l'on ait :

$$l^2 = \frac{A'}{\varphi^6} \quad \text{et} \quad tl' = \frac{B'}{\varphi^7},$$

ce qui prouve, en changeant au besoin l'origine sur la courbe étudiée et en multipliant φ par une constante, que la torsion en M est inversement proportionnelle au cube de l'abscisse curviligne de ce point et que la fonction φ est encore égale à l'abscisse curviligne de M . Nous obtenons donc encore une courbe dont les équations intrinsèques affines sont celles d'une courbe W , mais ici le paramètre λ est nul; la condition est donc suffisante.

23. — Les développements (25) et (26) nous permettent de déterminer les courbes gauches telles que la longueur de la corde soit une fonction impaire de la longueur de l'arc ou telles que le rapport de ces longueurs soit une fonction paire de la même variable. Nous avons déjà remarqué que les courbes planes (P) possèdent cette propriété et un raisonnement, analogue à celui du § 18, nous montre que les courbes gauches (P) la possèdent également.

La condition suffisante qu'une courbe soit une courbe (P) est ici encore nécessaire; il faut en effet que le développement (25) soit celui d'une fonction impaire de la variable l , donc les coefficients des puissances paires de l doivent être tous nuls et en particulier la courbure doit être une constante. Cela étant démontré, nous pouvons utiliser le développement (26) dans lequel le coefficient de l^3 doit être nul identiquement, ce qui exige que l' soit nul, donc la courbure et la torsion affines de la courbe sont constantes.

24. — Au lieu de déterminer l'arc MM_1 par sa longueur, il est possible de prendre comme variable la longueur L de la corde (la même remarque s'applique au cas des courbes d'un espace euclidien ou non-euclidien). Il est possible de faire l'inversion de fonction définie par $L = L(s, l)$ au voisinage de $L = 0$, $l = 0$ et l'on peut calculer les premiers termes du développement de r en fonction de L et de s . D'ailleurs ici (en géométrie affine) les termes, dont nous avons besoin pour obtenir les conclusions, ont le même coefficient lorsque l'on prend l'une ou l'autre des variables.

En résumé : *Les courbes telles que le rapport des longueurs affines d'un arc et de sa corde (celle-ci définie comme il a été précisé plus haut) ne dépende que du quotient de la longueur de l'arc par une fonction de l'abscisse curviligne de l'origine de celui-ci, ou bien ne dépende que du quotient de la longueur de la corde par une fonction de l'abscisse curviligne de l'origine de l'arc, sont les courbes W planes ou gauches.*

Si ce rapport est une fonction paire de la longueur de l'arc ou une fonction paire de la longueur de la corde, il est nécessairement indépendant de la position de l'arc sur la courbe, et les transformations affines qui transforment la courbe W en elle-même ont un déterminant égal à 1.

Remarquons que la relation $r = F\left[\frac{l}{\varphi(s)}\right]$ entraîne que l est égal au produit d'une fonction de s par une fonction de r , mais cette dernière n'est pas holomorphe au voisinage de $r = 1$ et, malgré l'analogie plus grande de cette propriété avec celles de l'espace euclidien, nous croyons [préférable de conserver l'énoncé donné plus haut.
