ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

E. A. WEISS

Suites de points en correspondance trilinéaire

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 4e série, tome 2 (1938), p. 145-154

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1938_4_2__145_0>

SUITES DE POINTS EN CORRESPONDANCE TRILINÉAIRE

Par E. A. WEISS, à Bonn.

---

1. Le système complet d'invariants de trois suites de points du plan. — Le système complet d'invariants de deux suites de points [1]

$$(1) \qquad (um_1)(\mu_1\tau); \qquad (um_2)(\mu_2\tau)$$

a été donné par M. A. Teichmann [2]. M. Teichmann montre que ce système comprend, outre les formes (1) elles-mêmes, les formes

$$(2) \qquad (v_1x) = \frac{1}{2}(xm_1m'_1)(\mu_1\mu'_1), \qquad (v_2x) = \frac{1}{2}(xm_2m'_2)(\mu_2\mu'_2)$$

qui, égalées à zéro, donnent les supports des deux suites et la forme

$$(3) \qquad (v_1v_2u)$$

correspondant au point commun de ces deux droites. Le système contient les formes linéaires

$$(4) \qquad (v_1m_2)(\mu_2\tau), \qquad (v_2m_1)(\mu_1\tau)$$

donnant les paramètres des points d'intersection d'une suite de points avec le support de l'autre et la forme

$$(5) \qquad (v_2m_1)(\mu_1\mu_2)(m_2v_1)$$

qui, égalée à zéro, représente la condition d'identité de ces deux paramètres ou la condition de perspectivité des deux suites de points.

---

(1) Cette notion et les formules suivantes sont expliquées dans mon Mémoire *Sur les systèmes linéaires de suites de points en géométrie plane projective*, L'Enseignement Mathématique, **29**, 1930, S. 59-71.

(2) A. Teichmann, *Beiträge zur Invariantentheorie rationaler Punktreihen in der Ebene*, Thèse, Bonn, 1929.

Le système comprend enfin les formes

$$(xm_1 m_2)(\mu_1 \tau)(\mu_2 \tau), \tag{6}$$

$$(um_1)(\mu_1 \mu_2)(m_2 u) \tag{7}$$

se rapportant à la courbe de deuxième classe déterminée par les deux suites. L'expression (6) donne une représentation paramétrique, (7) l'équation tangentielle de cette courbe. Le déterminant de la courbe est le carré de l'invariant (5).

L'intérêt que la théorie invariantive des suites de points présente au point de vue de la géométrie projective pourrait suggérer l'étude d'un système de trois et même d'un plus grand nombre de suites. Mais un système de ce genre devient vite assez compliqué.

Or, ce système devient au contraire extrêmement simple au moment où l'on suppose que les trois variables binaires n'appartiennent plus à un seul champ binaire.

Supposons donc différents les champs binaires de trois suites de points. Soient ξ, η, ζ les variables et μ_α, μ_β, μ_γ les symboles appartenant à ces champs. Il s'agit alors de trouver le système complet des formes

$$(um_\alpha)(\mu_\alpha \xi) = (u_1 m_{\alpha 1} + u_2 m_{\alpha 2} + u_3 m_{\alpha 3})(\mu_{\alpha 1}\xi_2 - \mu_{\alpha 2}\xi_1), \quad (um_\beta)(\mu_\beta \eta), \quad (um_\gamma)(\mu_\gamma \zeta). \tag{8}$$

Commençant comme en haut on obtient successivement les formes

$$(v_\alpha x) = \frac{1}{2}(xm_\alpha m'_\alpha)(\mu_\alpha \mu'_\alpha), \quad (v_\beta x), \quad (v_\gamma x); \quad (v\, v_\gamma u), \quad (v_\gamma v_\alpha u), \quad (v_\alpha v_\beta u), \quad (v_\alpha v_\beta v_\gamma), \tag{9}$$

correspondant aux supports des trois suites, leurs points d'intersection, et à l'invariant qui s'annule, si les trois droites passent par un point.

Les trois formes

$$(xm_\beta m_\gamma)(\mu_\beta \eta)(\mu_\gamma \zeta), \ldots \tag{10}$$

appartiennent aux homographies découpées sur deux suites par les droites du faisceau x.

Les six formes binaires

$$(v_\beta m_\gamma)(\mu_\gamma \zeta), \ldots \tag{11}$$

déterminent les paramètres des points découpés sur une des suites par les supports des autres.

Enfin la forme trilinéaire

$$(m_\alpha m_\beta m_\gamma)(\mu_\alpha \xi)(\mu_\beta \eta)(\mu_\gamma \zeta) \tag{12}$$

donne, égalée à zéro, la correspondance trilinéaire que les droites du plan établissent entre les points des trois suites.

Les formes (8)-(12) *représentent un système complet d'invariants des trois suites de points* (8).

2. Suites de points du plan en correspondance trilinéaire. — Le système complet des invariants d'une forme trilinéaire

$$\mathfrak{F} = (\alpha\xi)(\beta\eta)(\gamma\zeta) \tag{13}$$

est bien connu. C. Le Paige[1] a commencé la recherche de ces invariants et leur a donné une interprétation géométrique. Le caractère complet du système a été prouvé indépendamment par plusieurs auteurs[2]. Ce système comprend les trois formes quadratiques

$$\mathfrak{K}_\alpha = \frac{1}{2}(\beta\beta')(\gamma\gamma')(\alpha\xi)(\alpha'\xi), \quad \mathfrak{K}_\beta, \quad \mathfrak{K}_\gamma, \tag{14}$$

donnant les *six paramètres noyaux* de la correspondance trilinéaire $\mathfrak{F} = 0$, leur discriminant commun

$$\mathfrak{D} = \frac{1}{8}(\beta\beta')(\gamma\gamma')(\beta''\beta''')(\gamma''\gamma''')(\alpha\alpha'')(\alpha'\alpha''') \tag{15}$$

et le covariant trilinéaire

$$\mathfrak{Q} = \frac{1}{2}(\beta\beta')(\gamma\gamma')(\alpha\alpha'')(\alpha'\xi)(\beta''\eta)(\gamma''\zeta). \tag{16}$$

Supposons $\mathfrak{D} \neq 0$, la correspondance trilinéaire sera régulière, c'est-à-dire à noyaux différents sur chaque suite de points. On reçoit, dans ce cas, les triples de la correspondance $\mathfrak{Q} = 0$ en remplaçant dans chaque triple de la correspondance $\mathfrak{F} = 0$ le point situé sur une (quelconque) des trois suites par le point harmonique par rapport aux points noyaux de cette suite. Passons les cas de dégénérescence.

Prenant maintenant (12) à la place de $\mathfrak{F}$, il est clair que les invariants de cette forme seront susceptibles d'une représentation en fonction d'invariants des trois suites de points. Le calcul donne

$$\mathfrak{F} = (m_\alpha m_\beta m_\gamma)(\mu_\alpha\xi)(\mu_\beta\eta)(\mu_\gamma\zeta), \tag{17}$$

$$\mathfrak{K}_\alpha = (v_\beta q_\alpha)\cdot(v_\gamma q_\alpha), \quad \mathfrak{K}_\beta, \quad \mathfrak{K}_\gamma, \tag{18}$$

$$\mathfrak{D} = -\frac{1}{4}(v_\alpha v_\beta v_\gamma)^2, \tag{19}$$

$$\mathfrak{Q} = \frac{1}{2}\left[(v_\alpha q_\beta)(v_\beta q_\gamma)(v_\gamma q_\alpha) - (v_\alpha q_\gamma)(v_\beta q_\alpha)(v_\gamma q_\beta)\right], \tag{20}$$

---

(1) Voir sur ses travaux L. Berzolari, *Algebraische Transformationen und Korrespondenzen*, Math. Enzyklopädie, III, C. 11, Leipzig, 1934, p. 1813.

(2) H. Lepper, *Über die invarianten Bildungen von Formen mit digre dienten Schichten von Variablen*, thèse, Giessen, 1908, § 14. — E. Schwartz, *Über binäre trilineare Formen*, Math. Zeitschr. **12**, 1922, p. 18-35. — W. Saddler, *Triple Binary Forms; the complete system for a single* (1, 1, 1)-form with its geometrical interpretation. Proc. Cambridge Phil. Soc. **22**, 1923-1925, p. 688-693.

q_α, q_β, q_γ étant des abréviations pour

$$(21)\qquad q_\alpha = m_\alpha(\mu_\alpha\xi), \qquad q_\beta = m_\beta(\mu_\beta\eta), \qquad q_\gamma = m_\gamma(\mu_\gamma\zeta).$$

Le tableau contient des résultats classiques de la théorie des correspondances trilinéaires : *les droites du plan coupent trois suites de points* (8) *en* ∞^2 *triples d'une correspondance trilinéaire* $\mathfrak{F} = 0$. *Cette correspondance est irrégulière* (*à points noyaux confondus*) *ou régulière* (*à points noyaux différents*) *suivant que les supports des trois suites passent par un point* ($\mathfrak{D} = 0$) *ou non* ($\mathfrak{D} \neq 0$). *Les points noyaux* ($\mathfrak{K}_\alpha = 0$, *etc.*) *sont sur chaque suite les points découpés par les supports des autres. Les triples* ξ, η, ζ *de la correspondance* $\mathfrak{Q} = 0$ *représentent enfin des triangles en même temps inscrits et perspectives du triangle fondamental des droites supports.*

Il sera nécessaire, pour la suite, de trouver pour les formes $\mathfrak{K}_\alpha$, $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{Q}$ des expressions un peu différentes. Posons

$$(22)\qquad v_\alpha = g_\alpha g'_\alpha, \qquad v_\beta = g_\beta g'_\beta, \qquad v_\gamma = g_\gamma g'_\gamma,$$

g_α, g'_α étant deux points quelconques de la droite v_α, etc. Cette substitution donne pour $\mathfrak{K}_\alpha$

$$(23)\qquad \mathfrak{K}_\alpha = \frac{1}{2}(g_\beta g'_\beta q_\alpha)\cdot(g_\gamma g'_\gamma q_\alpha), \quad \mathfrak{K}_\beta, \quad \mathfrak{K}_\gamma.$$

L'invariant $-4\mathfrak{D}$ devient le carré du déterminant

$$(24)\qquad (v_\alpha v_\beta v_\gamma) = (g_\alpha g'_\alpha,\ g_\beta g'_\beta,\ g_\gamma g'_\gamma) = (g_\alpha g_\beta g'_\beta)(g'_\alpha g_\gamma g'_\gamma) - (g_\alpha g_\gamma g'_\gamma)(g'_\alpha g_\beta g'_\beta)$$

et $\mathfrak{Q}$ se change en

$$(25)\qquad \mathfrak{Q} = \frac{1}{2}\left[(g_\alpha g'_\alpha q_\beta)(g_\beta g'_\beta q_\gamma)(g_\gamma g'_\gamma q_\alpha) - (g_\alpha g'_\alpha q_\gamma)(g_\beta g'_\beta q_\alpha)(g_\gamma g'_\gamma q_\beta)\right].$$

3. Suites de points de l'espace en correspondance trilinéaire. — Nous nous proposons d'étudier de la même façon le système de trois suites de points de l'espace ordinaire. Soient donc

$$(26)\qquad (um_\alpha)(\mu_\alpha\xi) = (u_1 m_{\alpha 1} + \ldots + u_4 m_{\alpha 4})(\mu_{\alpha 1}\xi_2 - \mu_{\alpha 2}\xi_1), \quad (um_\beta)(\mu_\beta\eta), \quad (um_\gamma)(\mu_\gamma\zeta)$$

trois suites de points de l'espace. Les plans passant par un point p coupent les trois suites en ∞^2 triples de points d'une correspondance trilinéaire

$$(27)\qquad \mathfrak{F} \equiv (pm_\alpha m_\beta m_\gamma)(\mu_\alpha\xi)(\mu_\beta\eta)(\mu_\gamma\zeta) = 0.$$

Chaque point p de l'espace donnant lieu à une telle correspondance, l'équation (27) représente ∞^3 correspondances trilinéaires.

Les trois droites v_α, v_β, v_γ, supports des suites de points considérées, déterminent une demi-quadrique D. Chaque génératrice de D ayant un point commun avec v_α, v_β, v_γ détermine un triple de points ξ, η, ζ. Chacun de ces triples appartient à chaque correspondance trilinéaire $\mathfrak{F} = 0$ (27). Le plan joignant la génératrice au point p découpe en effet le triple correspondant à la génératrice. Il s'ensuit *que les correspondances trilinéaires du système* ∞^3 (27) *sont, parmi le système* ∞^7 *de toutes les correspondances trilinéaires caractérisées par le fait* (*équivalent à quatre conditions linéaires*) *de contenir les* ∞^1 *triples découpés par les génératrices de la demi-quadrique* D.

Soit p un point fixe. Le contenu géométrique de l'équation (27) peut être énoncé d'une autre manière : en regardant de p comme point central les trois suites de points, les trois points ξ, η, ζ d'un triple de la correspondance $\mathfrak{F} = 0$ semblent être trois points d'une droite. En autres termes : en projetant de p les suites de points sur un plan arbitraire, la correspondance trilinéaire $\mathfrak{F} = 0$ donne, dans ce plan, une correspondance trilinéaire du genre considéré au numéro précédent.

Cette remarque rend inutile chaque calcul pour trouver les invariants de la forme $\mathfrak{F}$. Ces invariants se déduisent au contraire immédiatement au moyen du principe de transfert de A. CLEBSCH des invariants (17)-(20) de la forme trilinéaire (17).

Les paramètres noyaux de la correspondance sont donc les zéros des formes quadratiques

$$(28) \qquad \mathfrak{K}_\alpha = (pg_\beta g'_\beta q_\alpha)\cdot(pg_\gamma g'_\gamma q_\alpha), \quad \mathfrak{K}_\beta, \quad \mathfrak{K}_\gamma.$$

Ce sont les paramètres des points que les transversales passant par p *et coupant deux des trois suites déterminent sur ces deux suites.*

Le discriminant commun des formes $\mathfrak{K}_\alpha$, $\mathfrak{K}_\beta$, $\mathfrak{K}_\gamma$ devient, d'après (24), le carré de l'invariant

$$(29) \qquad (pg_\alpha g_\beta g'_\beta)(pg'_\alpha g_\gamma g'_\gamma) - (pg_\alpha g_\gamma g'_\gamma)(pg'_\alpha g_\beta g'_\beta),$$

quadratique en p et qui, égalé à zéro, représente la quadrique Q soutien de la demi-quadrique D. *Donc* Q *est le lieu des points* p *pour lesquels* $\mathfrak{F} = 0$ *devient une correspondance à noyaux confondus.*

Le principe de transfert déduit enfin de (25) le covariant trilinéaire

$$(30) \quad \mathfrak{L} = \frac{1}{2}[(pg_\alpha g'_\alpha q_\beta)(pg_\beta g'_\beta q_\gamma)(pg_\gamma g'_\gamma q_\alpha) - (pg_\alpha g'_\alpha q_\gamma)(pg_\beta g'_\beta q_\alpha)(pg_\gamma g'_\gamma q_\beta)],$$

trois points ξ, η, ζ *formant un triple de la correspondance* $\mathfrak{L} = 0$, *s'ils sont projetés de* p *dans un triangle perspectif au triangle, projection des droites supports.*

4. La surface de Weddle dégénérée $\mathfrak{Q} = 0$. — Considérons l'équation $\mathfrak{Q} = 0$ et supposons fixes les points ξ, η, ζ non alignés et variable le point p. $\mathfrak{Q} = 0$ représentera une surface cubique S^3, la surface lieu des points qui projettent en deux triangles perspectifs les points ξ, η, ζ et les droites v_α, v_β, v_γ. Or, les droites v_α, v_β, v_γ passant respectivement par ξ, η, ζ, les projections des droites v_α, v_β, v_γ sont les tangentes menées de ces points à une conique bien déterminée. Imaginons-nous maintenant les droites v_α, v_β, v_γ comme droites joignant les points ξ, η, ζ à trois points infiniment voisins. Le lieu S^3 pourra être considéré comme lieu de tous les points p projetant, en six points d'une conique, les points ξ, η, ζ et leurs points voisins. La surface S^3 est donc une partie d'une surface de Weddle dégénérée, ensemble du plan $e = \xi\eta\zeta$ et de la surface S^3 (1).

Étudions de plus près cette surface cubique. Il est bien connu, que la surface de Weddle contient vingt-cinq droites dont quinze sont les droites joignant deux à deux les points doubles de la surface et dix sont les droites singulières des paires de plans passant par les six points. Des quinze droites de la première espèce, six nous restent sur la surface S^3 : les droites v_α, v_β, v_γ elles-mêmes et les côtés du triangle ξ, η, ζ. Des dix droites de la deuxième espèce, trois nous restent. Ce sont les droites v'_α, v'_β, v'_γ; v'_α étant définie comme droite d'intersection des plans ξv_β et ξv_γ, etc. Les quatre droites passant respectivement par ξ, η, ζ n'étant pas coplanaires, les points ξ, η, ζ sont des points doubles de la surface.

La surface contient, outre les neuf droites déjà nommées, trois autres droites v''_α, v''_β, v''_γ dont v''_α par exemple est située dans le plan $v_\alpha v'_\alpha$. Nous allons montrer que ces droites sont dans un plan et passent en même temps par un point, qui, en raison de cette propriété, est un point d'Eckardt.

En effet, les droites v_α, v_β, v_γ; v'_α, v'_β, v'_γ sont trois génératrices de chaque espèce d'une quadrique Q. Cette quadrique coupe le plan e dans une conique C passant par ξ, η, ζ. Soit p_α le point d'intersection de la tangente de C au point ξ et de la droite $\eta\zeta$. Les points p_β, p_γ étant définis de la même manière, les points p_α, p_β, p_γ sont sur une droite, soit g.

Soit x un point arbitraire de la surface S^3. Les plans joignant x à v_α, v_β, v_γ coupent le plan e en trois droites. Si x se déplace sur la surface, les trois droites formant des triangles perspectifs au triangle fixe ξ, η, ζ décrivent trois faisceaux liés par une correspondance trilinéaire $\mathfrak{T}$.

Considérons la tangente de la conique C au point ξ. Les droites des faisceaux η et ζ formant avec elle des triples de la correspondance trilinéaire $\mathfrak{T}$ décrivent deux faisceaux homologiques. Chaque paire des deux faisceaux donne lieu

---

(1) Cette dégénération de la surface de Weddle a déjà été considérée par F. Morley, I. R. Conner, *Plane sections of a Weddle surface*. Am. Journ. of. Math. **31**, 1909, p. 263-270, voir p. 270.

à un point de la surface, situé dans le plan $v_\alpha v'_\alpha$, c'est-à-dire à un point de la droite v'_α. Or, la tangente en ξ et les droites (coïncidentes) joignant η et ζ à p_α forment un triangle (dégénéré) perspectif au triangle ξ, η, ζ. Le point p_α (point d'intersection des plans $p_\alpha v_\alpha$, $p_\alpha v_\beta$, $p_\alpha v_\gamma$) est donc un point de v''_α. De même v''_β et v''_γ passent respectivement par p_β et p_γ.

Maintenant les tangentes menées en ξ, η, ζ à la conique C forment un triangle de la correspondance trilinéaire $\mathfrak{T}$, le centre de perspectivité étant le point hessien des points ξ, η, ζ (pôle par rapport à la conique C de la droite g). Le point de la surface S^3 correspondant au triple des tangentes est le point d'intersection des plans $v_\alpha v'_\alpha$, $v_\beta v'_\beta$, $v_\gamma v'_\gamma$, c'est-à-dire le pôle p du plan e par rapport à la quadrique Q. La définition de ce point étant symétrique en ξ, η, ζ le point p est commun aux droites $v''_\alpha, v''_\beta, v''_\gamma$. Ainsi ces droites sont les droites joignant p à $p_\alpha, p_\beta, p_\gamma$. Elles sont donc dans un plan. C. q. f. d. En résumé :

L'équation $\mathfrak{Q} = 0$, pour ξ, η, ζ fixes et p variable, représente une surface S^3 de troisième ordre à trois points doubles ξ, η, ζ et à douze droites. Trois droites joignent deux à deux les points doubles de la surface. Les droites $v_\alpha, v_\beta, v_\gamma$; $v'_\alpha, v'_\beta, v'_\gamma$ dont deux passent respectivement par chaque point double sont deux triples de génératrices de chaque espèce d'une quadrique Q. Les droites $v''_\alpha, v''_\beta, v''_\gamma$ sont dans un plan et passent par le point p, pôle par rapport à Q du plan $e \equiv \xi, \eta, \zeta$. Ce point est donc un point d'Eckardt de la surface.

5. Suites de points de l'espace R_4 en correspondance trilinéaire. — Passons à l'étude du système de trois suites de points de l'espace R_4

$$(31)\quad (um_\alpha)(\mu_\alpha\xi) = (u_1 m_{\alpha 1} + \ldots + u_5 m_{\alpha 5})(\mu_{\alpha 1}\xi_2 - \mu_{\alpha 2}\xi_1),\quad (um_\beta)(\mu_\beta\eta),\quad (um_\gamma)(\mu_\gamma\zeta).$$

Les espaces R_3 passant par une droite pp' découpent de ces suites les ∞^2 triples de la correspondance trilinéaire

$$(32)\qquad \mathfrak{F} \equiv (pp' m_\alpha m_\beta m_\gamma)(\mu_\alpha\xi)(\mu_\beta\eta)(\mu_\gamma\zeta) = 0.$$

Chaque triple donne lieu à un plan joignant ses points. Ce plan étant dans un espace R_3 avec pp' rencontre pp'. Réciproquement, un plan coupant pp' est avec pp' dans un espace R_3. Il est donc permis de dire que la correspondance trilinéaire (32) est découpée par les plans rencontrant en même temps les trois suites de points et la droite pp'.

La correspondance trilinéaire (32) ne caractérise pas univoquement la droite pp'. D'après un théorème connu de C. Segre (¹) chaque plan de l'espace R_4 coupant qua-

(¹) C. Segre, *Alcune considerazioni elementari sull' incidenza di rette e piani nello spazio a quattro dimensioni*. Rend. Circ. Palermo, **2**, 1888, p. 45-52.

tre droites fixes, coupe une cinquième, formant avec les quatre premières un quintuple de droites associées. La droite qq' associée à pp' par rapport aux droites supports v_α, v_β, v_γ des trois suites de points détermine donc la même correspondance trilinéaire que pp'.

Deux droites différentes déterminant en général deux correspondances différentes, l'équation (32) comprend ∞^6 correspondances trilinéaires. Parmi l'ensemble ∞^7 de toutes les correspondances trilinéaires elles sont caractérisées par le fait de contenir le triple découpé par la transversale commune des supports v_α, v_β, v_γ.

Les points noyaux de la correspondance (32) sont les points

$$\mathfrak{K}_\alpha \equiv (pp'g_\beta g'_\beta q_\alpha)(pp'g_\gamma g'_\gamma q_\alpha) = 0, \qquad \mathfrak{K}_\beta = 0, \qquad \mathfrak{K}_\gamma = 0, \tag{33}$$

où les transversales communes de pp' et de deux des suites de points coupent ces suites. Nommons β^1, γ^2; γ^1, α^2; α^1, β^2 les trois paires de points correspondant à ces transversales. La droite qq' déterminant la même correspondance trilinéaire que pp' doit nécessairement conduire aux mêmes points noyaux. Elle est donc la transversale commune des droites β^2, γ^1; γ^2, α^1; α^2, β^1. Cette remarque suggère une construction très simple de la cinquième droite associée qq'.

Les cinq droites associées et leurs dix tranversales 3 à 3 forment avec leurs quinze points d'intersection une configuration $(15_3, 15_3)$ que l'on peut projeter dans un plan (¹). La configuration plane résultante (*fig. 1*) peut être construite au moyen d'une seule construction quadratique.

Une droite pp' déterminant une correspondance trilinéaire à noyaux confondus doit se trouver dans un plan coupant en même temps v_α, v_β, v_γ. Les droites jouissant de cette propriété engendrent un complexe quadratique dont l'équation résulte de (29) au moyen du principe de transfert de CLEBSCH

$$(pp'g_\alpha g_\beta g'_\beta)(pp'g'_\alpha g_\gamma g'_\gamma) - (pp'g_\alpha g_\gamma g'_\gamma)(pp'g'_\alpha g_\beta g'_\beta) = 0. \tag{34}$$

Le même complexe est, d'après une remarque faite par M. R. WEITZENBÖCK (²), le lieu de toutes les droites pp' identiques par rapport aux droites fixes v_α, v_β, v_γ à leur cinquième associée qq'.

Enfin le complexe cubique

$$\mathfrak{C} \equiv \frac{1}{2}[(pp'g_\alpha g'_\alpha q_\beta)(pp'g_\beta g'_\beta q_\gamma)(pp'g_\gamma g'_\gamma q_\alpha) - (pp'g_\alpha g'_\alpha q_\gamma)(pp'g_\beta g'_\beta q_\alpha)(pp'g_\gamma g'_\gamma q_\beta)] = 0 \tag{35}$$

(¹) Voir sur cette configuration H. F. BAKER, *Principles of Geometry*, vol. IV, Cambridge 1925, chap. V et E. BERTINI, A. DUSCHEK, *Einführung in die projektive Geometrie mehrdimensionaler Räume*, Vienne, 1924, p. 193-197.

(²) R. WEITZENBÖCK, *Zur projektiven Geometrie des* R_4. Sitzber. Wiener Ak. d. Wiss. **121**, II A, 1912, p. 2553-2633.

est le lieu de toutes les droites pp' qui projettent les droites v_α, v_β', v_γ et les points q_α, q_β, q_γ en deux triangles perspectifs.

Résumons les résultats : *trois suites de points de* R_4 *étant données, chaque*

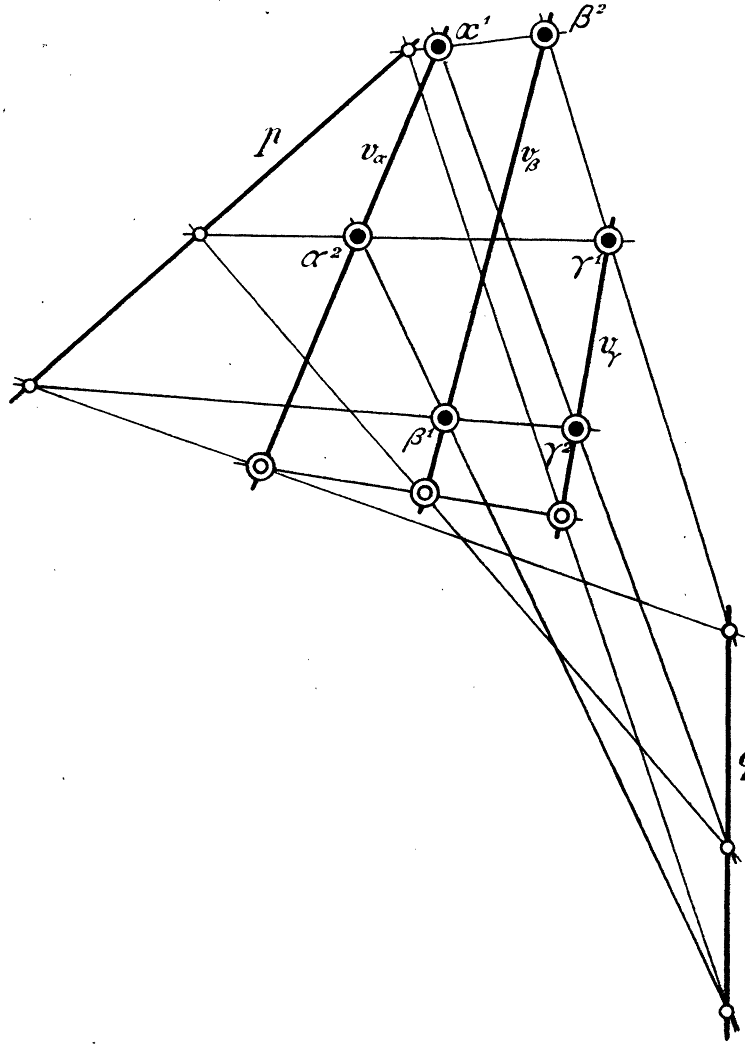

FIG. 1.

droite pp' *détermine une correspondance trilinéaire entre ces suites. La droite* qq' *formant avec* pp' *et les supports des trois suites un quintuple de droites associées, établit la même correspondance que* pp'. *Toutes les correspondances déterminées de cette manière ont un triple commun, le triple découpé par la transversale commune des trois supports. En général la correspondance est à noyaux différents. Elle devient à noyaux* *confondus, si pp' appartient au complexe quadratique* (34) *des droites situées dans un plan qui rencontre en même temps les supports des trois suites.*

6. Suites de points de l'espace R_5 en correspondance trilinéaire. — Les considérations précédentes peuvent être poursuivies dans l'espace R_5. Cet espace présente le cas le plus général puisque trois droites sont toujours situées au moins dans un R_5. En R_5 tous les plans $E = pp'p''$ qui coupent, en même temps, un plan fixe E' et les supports des suites de points données déterminent entre ces suites une correspondance trilinéaire

$$\mathfrak{F} \equiv (pp'p'' m_\alpha m_\beta m_\gamma)(\mu_\alpha \xi)(\mu_\beta \eta)(\mu_\gamma \zeta) = 0. \tag{36}$$

Cette correspondance est la plus générale. ∞^2 des ∞^9 plans de l'espace R_5 déterminent la même correspondance que E'. Ces plans engendrent la même variété M_4^3 que les ∞^2 plans E joignant les trois points d'un triple. Or, cette variété a été étudiée à fond par U. PERAZZO(1). Je n'ajouterai que la remarque que cette variété est la projection d'une variété de SEGRE, M_4^6 de R_8, prise d'un plan qui coupe M_4^6 en trois points et trois points seulement(2).

---

(1) U. PERAZZO, *Sopra una forma cubica con* 9 *rette doppie dello spazio a cinque dimensioni, e i corrispondenti complessi cubici di rette nello spazio ordinario.* Atti Acc. di Torino **36**, 1901, p. 891-916.

(2) G. SCORZA, *Le varietà a curve sezioni ellittiche.* Annali di Mat. (3) **15**, 1908, p. 267. E. A. WEISS, *Die Mannigfaltigkeit von Perazzo als Projektion der Segreschen Mannigfaltigkeit* M_4^6. Mathematica, **14**, 1938, p. 39-46.