ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

ANDRÉ HAARBLEICHER

Cubiques auto-inverses isogonales par rapport à un triangle

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 4e série, tome 4 (1940), p. 65-96

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1940_4_4__65_0>

CUBIQUES AUTO-INVERSES ISOGONALES

PAR RAPPORT A UN TRIANGLE

Par M. André HAARBLEICHER.

1. Les courbes auto-inverses isogonales par rapport à un triangle ont été examinées dans une étude parue dans les *Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse* en 1938, p. 47 à 58.

Le triangle étant pris comme triangle de référence, il y a six équations définissant des cubiques auto-inverses isogonales(¹) :

A $\quad A(X^3+Y^3)+B(X^2Y+Y^2X)=0,$

B $\quad A(X^3-Y^3)+B(X^2Y-Y^2X)=0,$

C $\quad A(X^3+Y^2Z)+B(X^2Y+XYZ)+C(Y^2X+X^2Z)=0,$

D $\quad A(X^3-Y^2Z)+B(X^2Y-XYZ)+C(Y^2X-X^2Z)=0,$

E $\quad AX(Y^2+Z^2)+BY(Z^2+X^2)+CZ(X^2+Y^2)+DXYZ=0,$

F $\quad AX(Y^2-Z^2)+BY(Z^2-X^2)+CZ(X^2-Y^2)=0;$

A, B, C, D étant des coefficients quelconques.

Les équations obtenues par permutation de X, Y, Z définissent les mêmes familles de courbes avec permutation des sommets du triangle.

Les équations **A** et **B** représentent des systèmes de trois droites; les équations **C** et **D** des courbes de la même famille. Il y a donc trois familles de cubiques auto-inverses isogonales par rapport à un triangle, qui sont définies par les équations **C** et **D**, **E**, **F** lorsque le triangle est pris comme triangle de référence.

Elle font l'objet de la présente étude. On énoncera d'abord quelques théorèmes généraux dont on fera l'application.

On désignera par Q_1, Q_2, Q_3 les sommets du triangle de référence opposés aux côtés d'équations $X=0$, $Y=0$, $Z=0$, par I, I_1, I_2, I_3 les centres du cercle inscrit et des cercles exinscrits dans les angles Q_1, Q_2, Q_3.

(¹) *Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse*, 1938, p. 53.

2. *L'équation générale des courbes d'un ordre quelconque n auto-inverses isogonales par rapport au triangle de référence est*

$$(1) \qquad F(X, Y, Z) = \Sigma A(X^{\alpha} Y^{\beta} Z^{\gamma} \pm X^{a-\alpha} Y^{b-\beta} Z^{c-\gamma}) = 0.$$

A, α, β, γ étant des coefficients variant d'un terme à l'autre, quelconques tels que la somme $\alpha + \beta + \gamma$ soit égale à l'ordre n de la courbe, et a; b, c des coefficients fixes égaux respectivement au maximum de α, β, γ; leur somme est égale à $2n$; le même signe $+$ ou $-$ est pris pour tous les termes.

En effet, dans l'équation d'une courbe quelconque d'ordre n, le maximum de α, β ou γ peut être égal à n et la somme $a + b + c$ à $3n$. Chaque fois que la courbe passe par un sommet du triangle de référence, le maximum du degré de la coordonnée correspondant au côté opposé est diminué d'une unité. Une courbe auto-inverse isogonale d'ordre n ayant les sommets du triangle pour points multiples d'ordres m_1, m_2, m_3 tels que $m_1 + m_2 + m_3 = n$(¹), la somme $a + b + c$ est diminuée de n unités et égale à $2n$. On peut donc grouper les termes deux par deux de façon à écrire l'équation d'une courbe auto-inverse isogonale

$$\Sigma(AX^{\alpha} Y^{\beta} Z^{\gamma} + BX^{a-\alpha} Y^{b-\beta} Z^{c-\gamma}) = 0;$$

l'identification avec la courbe inverse isogonale dont l'équation est obtenue en remplaçant X, Y, Z par $\frac{1}{X}, \frac{1}{Y}, \frac{1}{Z}$ donne $A = KB$, $B = KA$, K étant un coefficient d'identification; d'où $K^2 = 1$ et $B = \pm A$(²).

3. Toute courbe auto-inverse isogonale par rapport à un triangle qui a un point double autre qu'un sommet du triangle a pour point double le point inverse isogonal.

Une cubique non décomposable auto-inverse isogonale par rapport à un triangle ne peut avoir pour point double qu'un sommet du triangle ou un centre de cercle inscrit ou exinscrit sans quoi elle aurait deux points doubles et serait décomposable.

4. *Sur une droite quelconque ne passant pas par un sommet d'un triangle sont deux points inverses isogonaux par rapport à ce triangle* : ce sont les points d'intersection de la droite avec la conique inverse isogonale. Lorsque la droite est la droite de l'infini, les deux points sont les points cycliques. Lorsque la droite passe par le centre d'un cercle inscrit ou exinscrit, les deux points sont confondus en ce centre : la conique est tangente à la droite. Lorsque la droite passe par un sommet du

---

(¹) A. F. S. U. T., *loc. cit.*, p. 47.

(²) La formule s'applique aussi au cas d'un terme où $\alpha = a - \alpha$, $\beta = b - \beta$, $\gamma = c - \gamma$, qui disparaît pour $K = -1$; (exemple : équation **F**).

triangle, les deux points sont ce sommet et le point d'intersection de la droite avec le côté opposé. Lorsque la droite est une bissectrice du triangle, chaque point de la droite a pour inverse isogonal un autre point de la droite.

Lorsqu'une courbe auto-inverse isogonale est tangente à une bissectrice en un sommet du triangle, elle coupe le côté opposé en un point situé sur la bissectrice, point inverse isogonal du sommet. *Lorsqu'une courbe auto-inverse isogonale est tangente à une bissectrice en un des points* I, I_1, I_2, I_3, *ce contact est toujours double ;* en effet, toute courbe tangente à une bissectrice en un point I_i a pour inverse isogonale une courbe tangente à cette bissectrice au même point; lorsque la courbe se déforme pour se rapprocher d'une courbe auto-inverse isogonale, il en est de même de la courbe inverse isogonale ; le double contact subsiste, il en est donc ainsi à la limite et le point I_i est un point d'inflexion de la courbe auto-inverse isogonale.

Il résulte de là que, si l'on désigne par $m_1, m_2, m_3, p, p_1, p_2, p_3$ les ordres de multiplicité sur une courbe auto-inverse isogonale par rapport à un triangle $Q_1Q_2Q_3$ des points $Q_1, Q_2, Q_3, I, I_1, I_2, I_3$ les sommes

$$m_1+p+p_1,\quad m_1+p_2+p_3,\quad m_2+p+p_2,\quad m_2+p_3+p_1,\quad m_3+p+p_3,\quad m_3+p_1+p_2$$

sont de même parité que l'ordre n de la courbe. D'autre part $m_1+m_2+m_3=n$ (n° 2) et par suite *la somme* $p+p_1+p_2+p_3$ *est toujours paire.*

5. *Lorsqu'une droite passant par un sommet d'un triangle est tangente à une courbe auto-inverse isogonale par rapport à ce triangle, la droite passant par le même sommet et symétrique par rapport aux bissectrices issues de ce sommet est tangente à la même courbe :* les deux points de contact sont inverses isogonaux.

C'est l'application du théorème(1) « lorsque deux courbes (C) et (C′) sont tangentes en un point P, les courbes inverses isogonales sont tangentes au point inverse isogonal de P » au cas où la courbe (C) est auto-inverse isogonale et où la courbe (C′) est une droite passant par un sommet du triangle.

6. *Les tangentes à deux courbes inverses isogonales par rapport à un triangle en deux points inverses isogonaux par rapport à ce triangle se coupent en un point dont l'inverse isogonal est situé sur la droite qui joint les deux premiers points.*

En effet, soit T la tangente à une courbe quelconque (C) en un point P et T_0 la tangente à la courbe (C_0) inverse isogonale de (C) par rapport à un triangle $Q_1Q_2Q_3$ au point P_0 inverse isogonal de P par rapport à ce triangle. Soit un faisceau linéaire de courbes passant par P et comprenant la courbe (C) : les courbes inverses isogonales forment un faisceau linéaire de courbes passant par P_0 et comprenant la

(1) A. F. S. U. T., *loc. cit.*, p. 47.

courbe (C_0). Les tangentes en P et P_0 à deux courbes inverses isogonales appartenant respectivement à ces deux faisceaux forment deux faisceaux homographiques ayant pour rayons homologues (n° **5**) les droites joignant P et P_0 respectivement à chacun des sommets du triangle $Q_1 Q_2 Q_3$. Chaque point d'intersection de deux rayons homologues de ces faisceaux, en particulier celui des tangentes T et T_0 est donc sur la conique circonscrite au triangle et passant par P et P_0. Cette conique a pour inverse isogonale la droite PP_0 (n° **4**). Donc le point inverse isogonal du point d'intersection des tangentes T et T_0 est sur la droite PP_0.

Ce théorème peut être démontré par l'analyse. Soit

$$AX + BY + CZ = 0,$$

l'équation d'une droite T quelconque, le triangle $Q_1 Q_2 Q_3$ étant pris comme triangle de référence. L'équation de la conique inverse isogonale est

$$AYZ + BZX + CXY = 0.$$

La tangente T_0 à cette conique au point P_0 (X_0, Y_0, Z_0) a pour équation

$$(BZ_0 + CY_0)X + (CX_0 + AZ_0)Y + (AY_0 + BX_0)Z = 0.$$

Toute courbe (C) passant par le point P inverse isogonal de P_0 (situé sur la droite T) et tangente en ce point à la droite T a pour inverse isogonale une courbe (C_0) passant par le point P_0 et tangente en ce point à la conique, donc à la droite T_0. Les droites T et T_0 définies par les équations précédentes se coupent au point de coordonnées

$$B(AY_0 + BX_0) - C(CX_0 + AZ_0),\quad C(BZ_0 + CY_0) - A(AY_0 + BX_0),\quad A(CX_0 + AZ_0) - B(BZ_0 + CY_0);$$

dont l'inverse isogonal a pour coordonnées :

$$\frac{1}{B(AY_0 + BX_0) - C(CX_0 + AZ_0)},\quad \frac{1}{C(BZ_0 + CY_0) - A(AY_0 + BX_0)},\quad \frac{1}{A(CX_0 + AZ_0) - B(BZ_0 + CY_0)};$$

pour que ce dernier point soit sur la droite qui joint le point $P\left(\frac{1}{X_0}, \frac{1}{Y_0}, \frac{1}{Z_0}\right)$ au point $P(X_0, Y_0, Z_0)$, il faut et suffit que

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{X_0} & \frac{1}{Y_0} & \frac{1}{Z_0} \\ X_0 & Y_0 & Z_0 \\ \frac{1}{B(AY_0 + BX_0) - C(CX_0 + AZ_0)} & \frac{1}{C(BZ_0 + CY_0) - A(AY_0 + BX_0)} & \frac{1}{A(CX_0 + AZ_0) - B(BZ_0 + CY_0)} \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation est vérifiée quels que soient A, B, C, si l'on tient compte de ce que le point P_0 est sur la conique, c'est-à-dire que

$$AY_0Z_0 + BZ_0X_0 + CX_0Y_0 = 0,$$

ce qui démontre le théorème.

Lorsque les courbes (C) et (C_0) se confondent en une courbe auto-inverse isogonale, le théorème s'énonce : *les tangentes à une courbe auto-inverse isogonale par rapport à un triangle en deux points inverses isogonaux par rapport à ce triangle se coupent en un point dont l'inverse isogonal est situé sur la droite qui joint les deux premiers points.*

7. *Enveloppe des droites joignant deux points inverses isogonaux situés sur une courbe auto-inverse isogonale.* Voici une méthode générale qui s'applique à une courbe d'ordre n quelconque et dont on fera l'application pour les trois familles de cubiques aux n^{os} **10, 22** et **26**. Soit

$$uX + vY + wZ = 0, \tag{2}$$

l'équation d'une droite D passant par le point de la courbe de coordonnées X, Y, Z et son inverse isogonal ; u, v, w vérifient donc

$$\frac{u}{X} + \frac{v}{Y} + \frac{w}{Z} = 0. \tag{3}$$

Le point étant sur la courbe, ses coordonnées vérifient l'équation de la courbe

$$F(X, Y, Z) = 0; \tag{4}$$

l'équation tangentielle de l'enveloppe s'obtient en éliminant X, Y, Z entre les équations (2), (3) et (4). De (2) on tire :

$$Z = -\frac{uX + vY}{w},$$

en remplaçant Z par cette expression dans l'équation (4), on a :

$$F_1(X, Y) = 0; \tag{5}$$

équation homogène en X et Y. L'équation (4) étant vérifiée par $\frac{1}{X}$, $\frac{1}{Y}$, $\frac{1}{Z}$, on obtient en éliminant Z entre les équations (3) et (4) une équation (6) dérivée de l'équation (5) par la substitution de $\frac{1}{X}$ et $\frac{1}{Y}$ à X et Y.

L'équation (5) a pour racines en $\frac{X}{Y}$ $t_1, t_2 \ldots t_n$, l'équation (6) $\frac{1}{t_1}, \frac{1}{t_2}, \ldots \frac{1}{t_n}$. Pour éliminer $\frac{X}{Y}$ entre ces deux équations, il suffit d'exprimer qu'elles ont une racine commune. Si l'on prend une racine de l'équation (5) et son inverse, on a $t_1 = \frac{1}{t_1}$ par exemple, ou $t_1 = \pm 1$; on obtient ainsi une solution étrangère (qui exprime que l'un des points d'intersection de la droite D et de la courbe est situé sur une bissectrice de l'angle Q_3 du triangle $Q_1 Q_2 Q_3$). Reste la condition qu'une racine de l'équation (5) est égale à l'inverse d'une autre racine $t_1 = \frac{1}{t_2}$ par exemple, c'est-à-dire que *le produit de deux racines de l'équation* (5) *est égal à 1*. Cette condition s'exprime par une relation homogène entre les coefficients de l'équation (5) qui est une équation homogène en u, v, w.

Réciproquement, cette équation est l'équation tangentielle de l'enveloppe des droites qui joignent un point quelconque M de la courbe à chacun des points d'intersection de la courbe avec la droite symétrique de Q_3 M par rapport aux bissectrices de l'angle Q_3. En appliquant la même méthode et remplaçant Y par $-\frac{uX + wZ}{v}$ $\left(\text{ou X par } -\frac{vY + wZ}{u}\right)$, on obtient l'équation tangentielle de l'enveloppe des droites qui joignent un point quelconque M de la courbe à chacun des points d'intersection de la courbe avec la droite symétrique de Q_2 M (ou Q_1 M) par rapport aux bissectrices de l'angle Q_2 (ou Q_1). Ces deux ensembles de droites ont en commun les droites qui joignent deux points inverses isogonaux de la courbe et ces droites seulement. Les premiers membres des deux équations obtenues ont donc un facteur commun $f(u, v, w)$ et l'équation de l'enveloppe cherchée est

$$f(u, v, w) = 0.$$

En partant de la courbe φ, d'équation tangentielle $f(u, v, w) = 0$, on peut obtenir l'équation de la courbe Φ en éliminant u, v, w entre cette équation et

$$uX + vY + wZ = 0,$$

$$\frac{u}{X} + \frac{v}{Y} + \frac{w}{Z} = 0;$$

équations qui expriment que la tangente (u, v, w) à la courbe φ passe par les deux points inverses isogonaux (X, Y, Z) et $\left(\frac{1}{X}, \frac{1}{Y}, \frac{1}{Z}\right)$; on obtient l'équation

$$f[X(Y^2 - Z^2), \quad Y(Z - X^2), \quad Z(X^2 - Y^2)] = 0.$$

Relations entre une courbe quelconque Φ auto-inverse isogonale par rapport à un triangle et la courbe φ enveloppe des droites qui joignent deux points inverses isogonaux situés sur la courbe Φ.

Lorsque la courbe Φ, d'ordre n ne passe par aucun des centres I_i des cercles inscrits ou exinscrits au triangle, chaque bissectrice issue d'un sommet du triangle, point d'ordre de multiplicité m de la courbe Φ (m pouvant être nul ou égal à un) la rencontre $n - m$ points inverses isogonaux deux à deux. Dans ce cas, chacune des valeurs m_1, m_2, m_3, ordres de multiplicité des sommets Q_1, Q_2, Q_3 du triangle est de même parité que l'ordre n de la courbe Φ. La bissectrice considérée est donc tangente d'ordre $\frac{n-m}{2}$ à la courbe φ. Deux bissectrices passant par chaque sommet, le nombre total Σt des tangences de la courbe φ aux six bissectrices est égal à $3n - \Sigma m$ ou $3n - n$ ou $2n$.

Chaque fois que la courbe Φ passe par un point I_i, chacune des bissectrices qui y passe rencontre la courbe Φ en un point de moins autre que I_i. Si Σp est le nombre total des passages par les quatre points I_i (nombre toujours pair, n° **4**) le nombre des tangences des bissectrices est diminué de $\frac{3\Sigma p}{2}$, car par chaque point I_i passent trois bissectrices. Par conséquent, pour une courbe Φ quelconque auto-inverse isogonale d'ordre n et la courbe φ correspondante

$$\Sigma t = 2n - \frac{3\Sigma p}{2}.$$

Remarquons que lorsque la somme des ordres de multiplicité sur la courbe Φ des deux points I_i situés sur une bissectrice est impaire, l'ordre de multiplicité du sommet du triangle situé sur cette bissectrice est de parité différente de celle de l'ordre n de la courbe Φ — lorsqu'elle est paire, l'ordre de multiplicité du sommet est de même parité que l'ordre de la courbe Φ (comme il a été indiqué ci-dessus pour le cas où cette somme est nulle) — et réciproquement. D'autre part, il résulte de là que la somme des ordres de multiplicité sur la courbe Φ des deux points I_i (situés sur une bissectrice) est de même parité que celle des deux autres points I_i (situés sur l'autre bissectrice issue du même sommet) (n° **4**).

L'équation donnée ci-dessus pour la courbe Φ en partant de la courbe φ montre que l'ordre n de la courbe Φ est au plus égal à trois fois la classe c de la courbe φ et que chacun des sommets du triangle et des points I_i est un point multiple d'ordre c de la courbe Φ. Chaque fois que la courbe φ est tangente à une bissectrice, celle-ci fait tout entière partie du lieu des points inverses isogonaux situés sur une tangente à la courbe φ (puisque chaque point de cette bissectrice a pour inverse isogonal un autre point de la même bissectrice) et l'ordre de la courbe Φ est diminué d'une unité, ainsi que l'ordre de multiplicité du sommet et des deux points I_i situés sur cette bissectrice. Donc

$$n = 3c - \Sigma t,$$

et

$$\Sigma p = 4c - 2\Sigma t;$$

cette dernière formule se déduit d'ailleurs des deux précédentes; on tire de là

$$2c = 2n - \Sigma p,$$

et, en particulier si

$$\Sigma t = 0,$$
$$n = 3c;$$

et si

$$\Sigma p = 0,$$
$$n = c.$$

Ces résultats peuvent se résumer comme suit :

Lorsqu'une courbe Φ auto-inverse isogonale par rapport à un triangle ne passe par aucun des centres I_i de cercle inscrit ou exinscrit au triangle, la classe c de la courbe φ enveloppe des droites qui joignent deux points inverses isogonaux de la courbe Φ est égale à l'ordre n de la courbe Φ et la courbe φ est tangente au total $2n$ fois à l'ensemble des bissectrices du triangle. Chaque fois que la courbe Φ passe par l'un des points I_i, la classe de la courbe φ est diminuée d'une demi-unité (le nombre total Σp des passages est toujours pair) et le nombre total Σt des tangences de la courbe φ à l'ensemble des bissectrices est diminué de $\frac{3}{2}$.

Réciproquement, lorsqu'une courbe φ n'est pas tangente à une bissectrice d'un triangle, l'ordre n de la courbe Φ, lieu des deux points inverses isogonaux par rapport à ce triangle situés sur une tangente qui enveloppe la courbe φ est égal à trois fois la classe c de la courbe φ et les sommets du triangle ainsi que les centres I_i des cercles inscrit et exinscrits sont chacun un point multiple d'ordre c de la courbe Φ. Chaque fois que la courbe φ est tangente à une bissectrice, celle-ci fait partie du lieu, l'ordre de la courbe Φ est diminué d'une unité ainsi que l'ordre de multiplicité, sur la courbe Φ du sommet et de chacun des deux points I_i situés sur cette bissectrice.

On obtient ainsi les théorèmes.

Étant donné une courbe quelconque φ et un triangle quelconque l'ordre de la courbe Φ auto-inverse isogonale par rapport au triangle engendrée par les deux points inverses isogonaux situés sur une tangente qui enveloppe la courbe φ est égal à trois *fois la classe de la courbe φ moins le nombre total des tangences de la courbe φ à l'ensemble des six bissectrices du triangle.*

L'ordre de multiplicité, sur la courbe Φ de chacun des sommets du triangle ou des centres des cercles inscrit ou exinscrits est égal à la classe de la courbe φ moins le nombre total des tangences de la courbe φ aux bissectrices qui passent par le point considéré.

Le nombre total des ordres de multiplicité sur la courbe Φ des centres I_i des cercles inscrit et exinscrits au triangle est égal à quatre fois la classe de la couche φ moins deux fois le nombre total des tangences de la couche φ aux six bissectrices du triangle.

Étant donné une courbe Φ auto-inverse isogonale quelconque par rapport à un triangle, la classe de la courbe φ enveloppe des droites qui joignent deux points inverses isogonaux de la courbe Φ est égal à l'ordre de la couche Φ moins la moitié du nombre total de multiplicité, sur la courbe Φ, des quatre centres des cercles inscrit et exinscrits au triangle (nombre toujours pair).

Le nombre des tangences de la courbe φ à une bissectrice quelconque du triangle est égal à la moitié de la différence entre l'ordre de la courbe Φ et le total des ordres de multiplicité, sur la courbe Φ, du sommet et des deux centres I_i de cercles inscrit et exinscrits au triangle situés sur cette bissectrice (différence toujours paire).

Le nombre total des tangences de la courbe φ à l'ensemble des six bissectrices du triangle est égal à deux fois l'ordre de la courbe Φ moins trois fois la moitié du nombre total des ordres de multiplicité, sur la courbe Φ, des quatre centres des cercles inscrit et exinscrits au triangle.

L'application des théorèmes précédents permet de déterminer les principales caractéristiques de la courbe Φ ou de la courbe φ lorsque l'autre courbe est donnée. On fera cette application au n° **37** pour les trois familles de cubiques auto-inverses isogonales par rapport à un triangle et on obtiendra les résultats donnés par la méthode analytique aux n^{os} **10, 22** et **26**.

Pour une trimochloïde (courbe des trois barres) qui est du sixième ordre, a les sommets du triangle pour points doubles et les points cycliques pour points triples et qui, en général, ne passe par aucun point I_i, la courbe φ est de la sixième classe; chaque bissectrice est bitangente à la courbe et la droite de l'infini tritangente; la courbe φ est donc au maximum du douzième ordre.

Pour la courbe Γ correspondant à une cubique d'équation F[1], courbe du sixième ordre, ayant les sommets du triangle pour points doubles, les points cycliques pour points triples et chacun des quatre points I_i pour point simple, la courbe φ est de la quatrième classe ayant les bissectrices du triangle pour tangentes simples et la droite de l'infini pour tangente triple : elle est donc du sixième ordre.

---

[1] A. F. S. U. T., *loc. cit.*, p. 57.

On peut aussi obtenir l'ordre de la courbe Φ, étant donné la courbe φ par la considération des points à l'infini de la courbe Φ qui sont inverses isogonaux des points de cette courbe situés sur le cercle W circonscrit au triangle par rapport auquel la courbe Φ est auto-inverse isogonale.

L'équation, en coordonnées isotropes (origine le centre de ce cercle) de la droite qui joint un point $\left(\delta, \frac{1}{\delta}\right)$ de ce cercle au point inverse isogonal est(1) :

$$X - \delta + \frac{P}{\delta}\left(\varphi - \frac{1}{\delta}\right) = 0,$$

ou

$$\delta^3 - X\delta^2 - PY\delta + P = 0;$$

elle contient le paramètre δ au troisième degré et la droite enveloppe donc une courbe ψ de la troisième classe lorsque le point $\left(\delta, \frac{1}{\delta}\right)$ parcourt le cercle; cette courbe est tangente aux bissectrices du triangle; à chaque tangente commune aux courbes ψ et φ autre que ces bissectrices correspond un point à l'infini de la courbe Φ; le nombre de ces points, ordre de la courbe Φ, est donc égal à $3c - \Sigma t$.

La courbe ψ a pour équation linéaire

$$PX^2Y^2 + 4P^2Y^3 + 4X^3 + 18PXY - 27P = 0,$$

et pour équation tangentielle

$$P^2u^3 + v^3 + Puv = 0,$$

elle est du quatrième ordre; étant de la troisième classe, elle a trois points de rebroussement (qui sont les sommets d'un triangle équilatéral inscrit dans le cercle concentrique au cercle W circonscrit au triangle, d'un rayon triple et ayant ses côtés parallèles aux hauteurs du triangle de Morley du triangle $Q_1Q_2Q_3$) et une tangente double, la droite de l'infini qui est bitangente aux points cycliques.

Cubiques définies par les équations

$$\textbf{C} \qquad A(X^3 + Y^2Z) + BXY(X + Z) + CX(Y^2 + XZ) = 0,$$

$$\textbf{D} \qquad A(X^3 - Y^2Z) + BXY(X - Z) + CX(Y^2 - XZ) = 0,$$

A, B, C étant des coefficients quelconques.

8. Les cubiques définies par ces équations ont un sommet du triangle Q_3 pour point double; elles passent par un autre sommet Q_2 et par les deux centres de cercle

(1) De l'emploi des droites isotropes comme axes de coordonnées. Gauthier-Villars (1931), p. 14.

inscrit ou exinscrits situés sur une bissectrice passant par ce dernier sommet, I_1 et I_3 (**C**) ou I et I_2 (**D**). Réciproquement, les cubiques qui satisfont à ces six conditions doivent, pour appartenir aux familles définies par ces équations, satisfaire à une septième condition qui est de passer par deux points quelconques inverses isogonaux par rapport au triangle.

9. Les tangentes au point double ont pour équation

$$AY^2 + BXY + CX^2 = 0.$$

Pour que le point double soit un point de rebroussement, il faut et suffit que

$$B^2 - 4AC = 0.$$

condition réalisée pour une infinité de cubiques **C** ou **D**.

10. *Enveloppe des droites joignant deux points inverses isogonaux d'une cubique définie par une équation* **C** *ou* **D**. On applique la méthode du n° **7**. La substitution de $-\dfrac{uX + vY}{w}$ à Z dans l'équation **C** donne :

$$AwX^3 + BwX^2Y + CwXY^2 - (AY^2 + BXY + CX^2)(uX + vY) = 0;$$

ou $$(Aw - Cu)X^3 + (Bw - Bu - Cv)X^2Y + (Cw - Au - Bv)XY^2 - AvY^3 = 0.$$

Exprimer que le produit de deux racines d'une équation du troisième degré est égal à 1 (n° **7**), c'est exprimer que le produit des racines est une racine de l'équation. Pour cette équation en $\dfrac{X}{Y}$, le produit des racines est $\dfrac{Av}{Aw - Cu}$. On a donc

$$A^2v^2 + Av(Bw - Bu - Cv) + (Aw - Cu)(Cw - Au - Bv) + (Aw - Cu)^2 = 0;$$

ou $$(A - C)[A(v^2 - w^2 - uw) - Buv + Cu(w - u)] = 0.$$

La substitution de $-\dfrac{uX + wZ}{v}$ à Y donne par un calcul analogue[1]

$$[A(v^2 - w^2 - uw) - Buv + Cu(w + u)][A(v^2 + w^2 - uw) + Bv(w - u) + Cu(u - w)] = 0.$$

Les deux équations sont simultanément vérifiées lorsque

$$A(v^2 - w^2 - uw) - Buv + Cu(w + u) = 0, \tag{7}$$

---

[1] On montre ainsi l'application de la méthode générale (n° **7**). Mais dans ce cas particulier Q_3 étant un point double, une droite passant par Q_3 ne rencontre la cubique qu'en un autre point et la première opération donne l'équation tangentielle cherchée.

équation tangentielle de l'enveloppe des droites joignant deux points inverses isogonaux de la cubique définie par l'équation **C**.

Cette enveloppe est une conique. Toutes les coniques définies par l'équation (7) lorsque A, B, C varient sont tangentes aux droites de coordonnées tangentielles

$$u = 0 \quad v = w, \qquad u = 0 \quad v = -w, \qquad v = 0 \quad w = -u$$

et d'équations linéaires

$$Y + Z = 0, \qquad Y - Z = 0, \qquad X - Z = 0;$$

ce sont les côtés du triangle $Q_1 I I_2$. Réciproquement, l'équation (7) contenant deux paramètres indépendants au premier degré est l'équation générale des coniques inscrites dans ce triangle. En intervertissant X et Y et en faisant ensuite une permutation circulaire de X, Y, Z, on obtient pour les différentes catégories de cubiques **C** les mêmes résultats avec les triangles

$$Q_1 I I_2, \qquad Q_2 I I_3, \qquad Q_3 I I_1$$
$$Q_2 I I_1, \qquad Q_3 I I_2, \qquad Q_1 I I_3$$

La même méthode appliquée aux cubiques **D** donne le même résultat avec les triangles

$$Q_1 I_1 I_3, \qquad Q_2 I_2 I_1, \qquad Q_3 I_3 I_2,$$
$$Q_2 I_2 I_3, \qquad Q_3 I_3 I_1, \qquad Q_1 I_1 I_2.$$

Ces douze triangles peuvent être définis comme formés chacun par un sommet quelconque du triangle $Q_1 Q_2 Q_3$ et par les deux centres de cercles inscrit ou exinscrits situés sur chacune des quatre bissectrices issues des deux autres sommets.

L'enveloppe des droites joignant deux points inverses isogonaux d'une cubique **C** *ou* **D** *est une conique inscrite dans un de ces douze triangles.*

Réciproquement, *si l'on considère une conique quelconque inscrite dans l'un de ces triangles, les deux points inverses isogonaux par rapport au triangle* $Q_1 Q_2 Q_3$ *situés sur une tangente à cette conique décrivent, lorsque la tangente roule sur la conique, une cubique* **C** *ou une cubique* **D** *suivant le triangle considéré.*

Lorsque la conique est une parabole, la cubique est circulaire[1].

11. *Par deux points du plan qui ne sont pas inverses isogonaux l'un de l'autre passe une cubique et une seule définie par chacune des équations* **C** *ou* **D**. C'est la cubique définie par les six conditions énoncées au n° **8** les deux points et leurs inverses isogonaux.

Par un point quelconque du plan, il en passe une infinité qui forment un faisceau linéaire et ont neuf points communs à savoir : le point double comptant pour

[1] A. F. S. U. T., *loc. cit.*, p. 54, n° 21.

quatre, le sommet du triangle ainsi que les deux centres de cercles inscrit ou exinscrits communs à toutes les courbes définies par la même équation, le point et son inverse isogonal.

Réciproquement, *deux cubiques quelconques définies par une équation* **C** (*ou une équation* **D**) *se coupent, en dehors des deux sommets du triangle et des deux centres de cercles inscrit ou exinscrits en deux points inverses isogonaux.*

Aux cubiques **C** *ou* **D** *formant un faisceau linéaire correspondent des coniques définies au n°* **10** *formant un faisceau tangentiel et réciproquement*, car l'un des deux paramètres indépendants des équations s'exprime alors en fonction linéaire de l'autre : la quatrième tangente commune aux coniques du faisceau est la droite qui joint les deux points inverses isogonaux communs aux cubiques du faisceau.

12. *Une cubique quelconque à point double est une cubique de la famille* **C** *ou* **D** *auto-inverse isogonale par rapport à certains triangles.*

Considérons une cubique quelconque ayant un point double Q_3 que l'on prend pour origine de coordonnées rectangulaires. Soit

$$f(x, y) = 0$$

l'équation de la cubique et

$$ux + vy + 1 = 0$$

celle d'une droite quelconque qui coupe la cubique en trois points Q_2, I_i, I_j. Les coefficients angulaires des droites Q_3Q_2, Q_3I_i, Q_3I_j sont les racines en $\frac{y}{x}$ de l'équation du troisième degré obtenue en remplaçant une variable d'homogénéité introduite dans l'équation $f(x, y) = 0$ par $-(ux + vy)$. Pour qu'il existe un triangle $Q_1Q_2Q_3$ ayant les points I_i et I_j pour centres de cercles inscrit ou exinscrits, il faut que l'angle $I_iQ_3I_j$ soit droit c'est-à-dire que le produit de deux des trois coefficients angulaires de Q_3Q_2, Q_3I_i, Q_3I_j soit égal à -1 ou que, si P est le produit des trois racines de l'équation précédente en $\frac{y}{x}$, $-P$ soit racine de cette équation. En exprimant cette condition, on obtient une première équation en u et v.

Le coefficient angulaire de la droite Q_3Q_2 est égal à $-P$. On obtient les équations des droites Q_2Q_1 et Q_3Q_1, symétriques de Q_3Q_2 respectivement par rapport à $Q_2I_iI_j$ et à Q_3I_i ou Q_3I_j. Le triangle $Q_1Q_2Q_3$ a ainsi par construction les points I_i et I_j pour centres de cercles inscrit ou exinscrits et la cubique a pour point double Q_3 et passe par Q_2, I_i, I_j. Pour qu'elle soit par rapport à ce triangle une cubique de la famille **C** ou **D**, il faut et suffit qu'elle passe par deux points inverses isogonaux par rapport au triangle (n° **8**). Soit M un point quelconque de la cubique (que l'on choisira adéquat à un calcul simple) en exprimant que la courbe passe par le point inverse isogonal M_0, on a une seconde équation en u et v.

Les deux équations en u et v ainsi obtenues permettent de définir une ou plusieurs droites dont chacune donne, par la méthode indiquée, un triangle par rapport auquel la cubique quelconque donnée est auto-inverse isogonale de la famille **C** ou **D**.

Applications. Strophoïde d'équation

$$(ax + by)(x^2 + y^2) - xy = 0;$$

on trouve que u et v peuvent avoir des valeurs quelconques satisfaisant à l'équation

$$2a^2 + 2b^2 + av + bu = 0$$

qui exprime que la droite $Q_2 I_i I_j$ passe par le foyer double de la strophoïde et que le point Q_2 est le foyer double. A chaque droite passant par ce point correspond un triangle $Q_1 Q_2 Q_3$, Q_3 étant le point double de la strophoïde, par rapport auquel la strophoïde est une courbe auto-inverse isogonale de la famille **C** ou **D**. Il y a une infinité de triangles satisfaisant à cette condition. Tous ces triangles ont deux sommets fixes : le point double Q_3 et le foyer double Q_2 de la strophoïde; le lieu du troisième sommet est une strophoïde qui a même point double et même foyer double que la strophoïde donnée et dont l'asymptote fait avec la droite $Q_3 Q_2$ un angle double de celui de la strophoïde donnée.

Cissoïde de Dioclès, d'équation

$$x(x^2 + y^2) - 2Ry^2 = 0$$

on trouve $v = 0$, $u = -\frac{1}{R}$: la droite $Q_2 I_i I_j$ est la parallèle à l'asymptote équidistante du point double de l'asymptote; le point Q_2 est le point à l'infini sur la cissoïde. Il y a donc un triangle par rapport auquel la cissoïde est auto-inverse isogonale : ce triangle a pour côtés l'asymptote, la parallèle et la perpendiculaire à l'asymptote menées par le point double.

Ces propriétés de la strophoïde et de la cissoïde peuvent facilement être vérifiées par la géométrie.

Cubiques définies par l'équation trilinéaire

$$\mathbf{E} \qquad AX(Y^2 + Z^2) + BY(Z^2 + X^2) + CZ(X^2 + Y^2) + DXYZ = 0$$

A, B, C, D étant des coefficients quelconques.

Les propriétés suivantes ont été démontrées antérieurement :

13. Ces cubiques sont circonscrites au triangle de référence par rapport auquel elles sont auto-inverses isogonales.

14. Une cubique de cette famille peut être définie : *le lieu des points dont le cercle podaire par rapport au triangle de référence est orthogonal à un cercle fixe et réciproquement* (1) (2).

Autre définition : *le lieu de deux foyers coaxiaux d'une conique qui varie en restant inscrite dans le triangle de telle façon que le cercle qui a pour diamètre l'axe passant par les deux foyers reste orthogonal à un cercle fixe* (2) (3).

On a appelé cette courbe une *podaride* pour le triangle (4).

15. *Une droite quelconque et la conique inverse isogonale par rapport à un triangle forment une podaride pour ce triangle* (4).

16. *Les trois points d'intersection d'une podaride pour un triangle avec les trois côtés du triangle, autres que les sommets, sont en ligne droite* (5). *Cette droite a pour équation :*

$$\frac{X}{A}+\frac{Y}{B}+\frac{Z}{C}=0.$$

Les tangentes à une podaride pour un triangle aux trois sommets du triangle coupent les côtés opposés en trois points en ligne droite (5). *Cette droite a pour équation :*

$$AX+BY+CZ=0.$$

17. *Une podaride pour un triangle* $Q_1Q_2Q_3$ *coupe le cercle circonscrit au triangle aux trois sommets du triangle et en trois autres points qui forment un triangle* T : *les triangles* $Q_1Q_2Q_3$ *et* T *sont circonscrits à une même parabole* (6).

18. *Le lieu du milieu du segment de droite joignant deux points inverses isogonaux d'une podaride est une cubique* (7).

Les deux autres foyers de la conique dont deux foyers coaxiaux parcourent une podaride (n° **14**) *décrivent une trimochloïde* (2) (7).

19. *Par trois points quelconques du plan ne comprenant pas deux points inverses isogonaux l'un de l'autre par rapport à un triangle passe une podaride pour ce triangle*

(1) E. D. I. A. C., *loc. cit.*, p. 54 à 58.
(2) A. F. S. U. T., *loc. cit.*, p. 54, n° 23.
(3) *Journal de l'École Polytechnique*, 1933. Étude sur la courbe des trois barres, p. 36.
(4) J. E. P., 1939. Faisceaux linéaires de courbes des trois barres, p. 16.
(5) J. E. P., 1939, *loc. cit.*, p. 17.
(6) J. E. P., 1933, *loc. cit.*, p. 22.
(7) J. E. P., 1933, *loc. cit.*, p. 34.

et en général une seule. Lorsque les trois points sont en ligne droite, cette podaride est formée par la droite et la conique inverse isogonale (¹).

Quand il en passe deux, il en passe une infinité. Toute cubique qui passe par l'intersection de deux podarides pour un même triangle est une podaride pour ce triangle (¹).

Par deux points du plan, qui ne sont pas inverses isogonaux par rapport à un triangle, passent une infinité de podarides pour ce triangle qui forment un faisceau linéaire (¹).

Les six points d'intersection de deux podarides pour un même triangle autres que les sommets du triangle forment un quadrilatère complet, les extrémités de chacune des trois diagonales étant deux points inverses isogonaux (¹).

Deux groupes de points inverses isogonaux par rapport à un triangle forment un quadrilatère ayant pour diagonales les droites qui joignent les points inverses isogonaux : les points d'intersection des côtés opposés — qui forment avec les quatre premiers points un quadrilatère complet — sont inverses isogonaux par rapport au triangle.

20. *Les cercles orthogonaux aux cercles podaires des points des podarides pour un même triangle qui forment un faisceau linéaire passent par deux points fixes* (¹).

Les cercles podaires de trois points en ligne droite d'une podaride ont deux points communs (¹).

Les podarides pour un triangle ont, en outre, les propriétés suivantes :

21. *Pour un triangle quelconque, il existe une infinité de podarides passant par un quelconque des centres de cercle inscrit ou exinscrit : ce point est un point double de la podaride.*

Lorsque le point double est de rebroussement, la podaride est décomposable.

En effet, pour que l'équation **E** soit vérifiée par les coordonnées du centre du cercle inscrit, par exemple, $X = Y = Z$, il faut et suffit que les coefficients A, B, C, D vérifient l'équation

$$2A + 2B + 2C + D = 0 \tag{8}$$

qui comporte une infinité de solutions.

Lorsque cette équation est vérifiée, si l'on désigne par $F(X, Y, Z) = 0$ l'équation **E**, les équations $F'_X = 0$, $F'_Y = 0$, $F'_Z = 0$ sont vérifiées pour $X = Y = Z$ et le point I qui a ces coordonnées est un point double de la courbe. De même pour les autres points de coordonnées $X = \pm Y = \pm Z$.

(¹) E. D. I. A. C., *loc. cit.*, p. 54 à 58.

L'équation générale de ces podarides est

$$AX(Y \mp Z)^2 + BY(Z \mp X)^2 + CZ(X \mp Y)^2 = 0,$$

le signe — étant pris un nombre impair de fois.

Tout point double d'une cubique auto-inverse isogonale par rapport à un triangle ne peut être qu'un sommet du triangle ou un centre de cercle inscrit ou exinscrit (n° **3**). On vérifie sur l'équation **E** qu'un sommet ne peut être un point double d'une podaride sans que la courbe soit décomposable. Donc il n'y a pas d'autre podaride non décomposable à point double que celles qui viennent d'être définies.

A chaque podaride à point double correspond une trimochloïde ayant le même point double et une cubique lieu des milieux des segments de droite joignant deux points inverses isogonaux de la podaride qui a aussi le même point double. Les tangentes à la podaride en ce point sont perpendiculaires aux tangentes de la trimochloïde [1].

Les tangentes à la podaride en un point double, $X = Y = Z$ par exemple, ont pour équation

$$(B + C)X^2 + (C + A)Y^2 + (A + B)Z^2 - 2AYZ - 2BZX - 2CXY = 0.$$

Cette équation représente deux droites et son discriminant est toujours nul. Elle représente deux droites confondues et le point double est un point de rebroussement lorsque les mineurs du premier ordre sont nuls, ce qui a lieu si

$$AB + BC + CA = 0. \tag{9}$$

L'équation **E** de la podaride, si l'on remplace A et D par leurs valeurs tirées des équations (8) et (9), est

$$[BY(Z - X) + CZ(Y - X)][B(Z - X) + C(Y - X)] = 0.$$

La podaride se compose d'une droite quelconque passant par le point $X = Y = Z$ et de la conique inverse isogonale, qui est tangente à la droite en ce point.

De même pour les autres points doubles $X = \pm Y = \pm Z$.

Il n'y a donc pas de podaride non décomposable ayant un point de rebroussement.

22. *L'enveloppe des droites joignant deux points inverses isogonaux situés sur une podaride pour un triangle est une courbe de la troisième classe tangente aux six bissectrices du triangle.*

Réciproquement, *étant donné une courbe quelconque de la troisième classe tangente aux six bissectrices d'un triangle, les deux points inverses isogonaux par rap-*

---

[1] A. F. S. U. T., *loc. cit.*, p. 49, n° 5.

port au triangle situés sur une tangente à cette courbe décrivent une podaride pour ce triangle lorsque la tangente roule sur la courbe.

Aux podarides pour un triangle formant un faisceau linéaire correspondent des courbes ainsi définies formant un faisceau tangentiel et réciproquement.

En effet, par l'application de la méthode indiquée aux n^{os} **7** et **10**, on obtient pour l'enveloppe des droites joignant deux points inverses isogonaux situés sur une podaride définie par l'équation **E** l'équation tangentielle.

$$(10) \qquad Au(u^2 - v^2 - w^2) + Bv(v^2 - w^2 - u^2) + Cw(w^2 - u^2 - v^2) + Duvw = 0.$$

Cette équation est vérifiée, quels que soient les coefficients A, B, C, D, par les systèmes de valeurs de u, v, w satisfaisant aux relations

$$\begin{array}{llllll} u = 0 & v + w = 0, & v = 0 & w + u = 0, & w = 0 & u + v = 0, \\ u = 0 & v - w = 0, & v = 0 & w - u = 0, & w = 0 & u - v = 0, \end{array}$$

qui représentent les droites d'équations

$$\begin{array}{lll} Y - Z = 0, & Z - X = 0, & X - Y = 0, \\ Y + Z = 0, & Z + X = 0, & X + Y = 0; \end{array}$$

ce sont les bissectrices du triangle de référence.

D'autre part, l'équation (10) étant l'équation d'une courbe de la troisième classe et contenant trois paramètres indépendants au premier degré est l'équation générale des courbes de la troisième classe tangentes à ces six bissectrices.

Réciproquement, à toute courbe de cette famille qui peut ainsi être définie par l'équation (10) correspond une podaride définie par l'équation **E**.

Lorsque les podarides forment un faisceau linéaire, deux des paramètres s'expriment en fonction linéaire du troisième et les courbes définies par l'équation (10) forment un faisceau tangentiel. Réciproquement. Les trois tangentes communes aux courbes du faisceau tangentiel, autres que les bissectrices, sont les trois diagonales du quadrilatère complet inscrit dans toutes les podarides du faisceau.

Lorsque la podaride a un point double, le point I par exemple, les coefficients A, B, C, D sont liés par l'équation (8) et l'équation (10) devient :

$$Au(u - v - w) + Bu(v - w - u) + Cw(w - u - v) = 0$$

après élimination du facteur $u + v + w$ qui exprime que toute droite passant par le point double peut être considérée comme passant par deux points inverses isogonaux. L'enveloppe est une conique tangente aux trois bissectrices qui ne passent pas par le point double.

Lorsque la podaride à point double est circulaire, cette conique est une parabole : c'est le cas de la strophoïde.

23. *Une cubique quelconque qui n'a pas de point de rebroussement est une podaride pour certains triangles.*

Lorsque la cubique a un point double, les triangles pour lesquels elle est une podaride ont ce point pour centre de cercle inscrit ou exinscrit.

Lemme I. *Une cubique quelconque qui n'a pas de point de rebroussement passe par les six sommets d'une infinité de quadrilatères complets.* En effet, la cubique est alors au moins de la quatrième classe; d'un de ses points on peut lui mener deux tangentes de points de contact E et F et par le point E une sécante qui coupe la courbe en A et B; les droites AF et BF coupent la courbe en des points D et C tels que la droite DC passe par le point A (théorème connu sur les intersections de droites et de cubiques). La cubique est circonscrite au quadrilatère complet ABCDEF.

Réciproquement, *si un quadrilatère complet est inscrit dans une cubique, les tangentes aux extrémités d'une diagonale se coupent sur la courbe.* Même démonstration.

Lemme II. *Toute cubique passant par les six sommets d'un quadrilatère complet est une podaride pour certains triangles.* Soit K une cubique passant par les sommets M, M_0, N, N_0, P, P_0 d'un quadrilatère complet de diagonales MM_0, NN_0, PP_0. Soit avec des axes de coordonnées quelconques

$$ux + vy + 1 = 0$$

l'équation d'une droite quelconque et A, B deux points d'intersection de la droite avec la cubique K. Il existe une conique (M) de foyers M et M_0 et une conique (N) de foyers N et N_0 tangentes à la droite AB. Soit m le point d'intersection des secondes tangentes menées par A et B à la conique (M) et n le point analogue pour la conique (N). Les coordonnées de ces points sont des fonctions de u et v. En exprimant que ces points sont confondus, on obtient deux équations en u et v qui comportent des systèmes de solutions. A chacun de ces systèmes correspond une droite AB telle qu'il existe un triangle ABC qui a deux sommets A et B sur la courbe K et qui est circonscrit à une conique (M) et à une conique (N), c'est-à-dire par rapport auquel les points M et M_0, N et N_0 sont inverses isogonaux. Ces deux groupes de points déterminent un faisceau linéaire de podarides pour le triangle ABC passant par les neuf points A, B, C, M, M_0, N, N_0, P, P_0 (n° **19**). Toute cubique qui passe par huit de ces points, en particulier la cubique K qui passe par A, B, M, M_0, N, N_0, P, P_0 passe par le neuvième et est une podaride du faisceau. Donc la cubique K est une podaride pour le triangle ABC ainsi défini.

Il résulte des lemmes I et II qu'*une cubique quelconque, à l'exception des cubiques à point de rebroussement est une podaride pour certains triangles.*

Par application du n° **21**, les triangles pour lesquels une cubique à point double est une podaride ont ce point pour centre de cercle inscrit ou exinscrit. On a déjà vérifié cette propriété pour la strophoïde[1], podaride très particulière correspondant au cas où le cercle orthogonal se réduit à une droite passant par l'un des centres de cercle inscrit ou exinscrit au triangle.

24. *Les tangentes à une podaride pour un triangle en deux points inverses isogonaux par rapport à ce triangle se coupent en un point situé sur la podaride. C'est le point inverse isogonal du troisième point d'intersection de la podaride avec la droite qui joint les deux premiers points.*

En effet, deux points inverses isogonaux M et M_0 situés sur une podaride étant deux sommets opposés d'un quadrilatère complet inscrit dans la courbe (n° **19**), les tangentes en ces points se coupent en un point P de la podaride (n° **23**). Le point inverse isogonal P_0 est donc situé sur la courbe. D'après le n° **6**, il est aussi sur la droite MM_0.

Cubiques définies par l'équation linéaire

$$\mathbf{F} \qquad AX(Y^2 - Z^2) + BY(Z^2 - X^2) + CZ(X^2 - Y^2) = 0.$$

A, B, C étant des coefficients quelconques.

25. *Ces cubiques passent par les sommets du triangle de référence et les quatre centres des cercles inscrit ou exinscrits à ce triangle.* Réciproquement, *toutes les cubiques passant par ces sept points peuvent être définies par une équation* **F**.

26. Une cubique de cette famille peut être définie : *le lieu de deux points inverses isogonaux par rapport au triangle de référence situés sur une droite qui pivote autour d'un point fixe* qu'on appellera *pivot* de la courbe *et réciproquement.*

En effet, en appliquant la méthode des n^os^ **7** et **10**, on trouve pour l'enveloppe de la droite qui joint deux points inverses isogonaux situés sur la cubique définie par l'équation **F** l'équation tangentielle

$$Au + Bv + Cw = 0,$$

qui représente le point de coordonnées A, B, C.

Réciproquement, l'équation du lieu précédemment défini, si le pivot est le point (A, B, C), est

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ \frac{1}{X} & \frac{1}{Y} & \frac{1}{Z} \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0,$$

qui, sous forme entière, est l'équation **F**.

---

[1] A. F. S. U. T., *loc. cit.*, p. 36.

Lorsque le pivot est à l'infini, la cubique est circulaire (¹) et réciproquement.

Lorsque le pivot est sur une bissectrice du triangle $Q_1 Q_2 Q_3$ la cubique se décompose en cette bissectrice et une conique passant par les deux sommets du triangle et les deux points I_i non situés sur cette bissectrice. En effet, si $A = B$ par exemple, l'équation **F** devient

$$(Y - X)\,[A(XY + Z^2) - CZ(X + Y)] = 0.$$

Lorsque le pivot est un centre I_i de cercle inscrit ou exinscrit, la cubique se compose des trois bissectrices qui passent par ce point. En effet, si $A = B = C$ par exemple, l'équation **F** devient

$$A(Y - X)(X - Z)(Y - Z) = 0.$$

On peut aussi définir la cubique : *le lieu de deux foyers coaxiaux d'une conique qui varie en restant inscrite dans un triangle de telle façon que l'axe passant par ces deux foyers passe par un point fixe.*

En coordonnées isotropes (origine le centre du cercle circonscrit au triangle $Q_1 Q_2 Q_3$), le pivot ayant pour coordonnées X_1, Y_1, l'équation de la cubique est (²)

$$X_1(PWY + U) - Y_1(PWX + PV) + PVY - UX = 0.$$

27. *Une cubique de cette famille non décomposable ne peut pas avoir de point double.*

Un sommet du triangle de référence $Q_1 Q_2 Q_3$, le sommet Q_3 par exemple, $X = 0$, $Y = 0$, ne peut être un point double que si $A = B = 0$ et l'équation **F** se réduit à $Z(X^2 - Y^2) = 0$: la cubique est formée par les deux bissectrices issues du sommet point double et par le côté opposé.

Pour qu'un centre de cercle inscrit ou exinscrit, $X = Y = Z$ par exemple, soit un point double, il faut $A = B = C$ et l'équation **F** se réduit à (n° **26**).

$$A(X - Y)(Y - Z)(Z - X) = 0.$$

Aucun autre point ne peut être un point double (n° **3**).

Une cubique **F** est donc de la sixième classe : d'un point non situé sur la courbe on peut lui mener six tangentes et d'un point de la courbe quatre en dehors de la tangente en ce point.

28. *Une cubique* **F** *passe par son pivot. La tangente en ce point est la droite qui le joint au point inverse isogonal.*

(¹) A. F. S. U. T., *loc. cit.*, p. 58.
(²) A. F. S. U. T., *loc. cit.*, p. 56.

Les trois points d'intersection d'une cubique **F** *avec les côtés du triangle* $Q_1 Q_2 Q_3$ *(autres que les sommets) sont les points de Ceva du pivot.* Ces points D_1, D_2, D_3 ont pour coordonnées O, B, C; A, O, C; A, B, O.

Les tangentes en ces points se construisent comme suit : pour la tangente en D_1, on mène par le point P_0 inverse isogonal du pivot une parallèle à $Q_2 Q_3$ qui coupe le côté $Q_1 Q_2$ en P_2 (et le côté $Q_1 Q_3$ en P_3); on joint le sommet Q_2 (ou Q_3) au point symétrique de P_0 par rapport au point P_2 (ou P_3); la droite ainsi tracée coupe la droite $Q_1 P_0$ en un point de la tangente en D_1. *Les tangentes aux trois points d'intersection d'une cubique* **F** *avec les côtés du triangle* $Q_1 Q_2 Q_3$ *(autres que les sommets) sont concourantes au point d'intersection de la cubique avec la tangente au point inverse isogonal du pivot.* En effet, les équations de ces quatre tangentes sont :

$$\begin{aligned}
&A(B^2-C^2)X - C^2BY + B^2CZ = o,\\
&C^2AX + B(C^2-A^2)Y - A^2CZ = o,\\
&-B^2AX + A^2BY + C(A^2-B^2)Z = o,\\
&A^3(B^2-C^2)X + B^3(C^2-A^2)Y + C^3(A^2-B^2)Z = o;
\end{aligned}$$

le point de concours a pour coordonnées

$$A(B^2+C^2)-\frac{B^2C^2}{A},\qquad B(C^2+A^2)-\frac{C^2A^2}{B},\qquad C(A^2+B^2)-\frac{A^2B^2}{C}.$$

Les tangentes à une cubique **F** *aux sommets du triangle* $Q_1 Q_2 Q_3$ *sont concourantes au point inverse isogonal du pivot :* la quatrième tangente issue de ce point est la tangente au pivot.

Les tangentes à une cubique **F** *aux centres* I, I_1, I_2, I_3 *des cercles inscrit et exinscrits passent par le pivot.* En effet, la tangente en un point I_i est la limite d'une droite joignant deux points inverses isogonaux qui se rapprochent simultanément du point I_i, droite qui passe toujours par le pivot.

Les trois droites joignant les centres des cercles exinscrits I_1, I_2, I_3 *respectivement aux points d'intersection d'une cubique* **F** *avec les côtés* $Q_2 Q_3$, $Q_3 Q_1$, $Q_1 Q_2$ *et la droite joignant le centre du cercle inscrit au point inverse isogonal du pivot sont concourantes en un point situé sur la cubique.* En effet, les équations de ces droites sont :

$$\begin{aligned}
&(B-C)X - CY + BZ = o,\\
&CX + (C-A)Y - AZ = o,\\
&-BX + AY + (A-B)Z = o,\\
&A(B-C)X + B(C-A)Y + C(A-B)Z = o;
\end{aligned}$$

le point de concours a pour coordonnées $AB + AC - BC$, $BC + BA - CA$, $CA + CB - AB$.

Les droites $D_2 D_3$, $D_3 D_1$, $D_1 D_2$ coupent la courbe en des points E_1, E_2, E_3.

Les droites Q_1E_1, Q_2E_2, Q_3E_3 *sont concourantes au point inverse isogonal du point de concours des tangentes en* D_1, D_2, D_3 *point situé sur la cubique.* En effet, les équations des droites D_2D_3, D_3D_1, D_1D_2 sont :

$$-\frac{X}{A}+\frac{Y}{B}+\frac{Z}{C}=0, \qquad \frac{X}{A}-\frac{Y}{B}+\frac{Z}{C}=0, \qquad \frac{X}{A}+\frac{Y}{B}-\frac{Z}{C}=0;$$

en tirant Z de l'équation de la droite D_2D_3, on trouve pour les coordonnées de E_1

$$\frac{X}{2ABC}=\frac{CY}{C^2A^2+C^2B^2-A^2B^2}=\frac{BZ}{B^2C^2+B^2A^2-C^2A^2};$$

les coordonnées de E_2 et E_3 sont obtenues par permutations circulaires de A, B, C et X, Y, Z; les équations des droites Q_1E_1, Q_2E_2, Q_3E_3 sont :

$$\begin{aligned}
&& \frac{B^2C^2+B^2A^2-C^2A^2}{B}Y-\frac{C^2A^2+C^2B^2-A^2B^2}{C}Z&=0,\\
-\frac{A^2B^2+A^2C^2-B^2C^2}{A}X && +\frac{C^2A^2+C^2B^2-A^2B^2}{C}Z&=0,\\
\frac{A^2B^2+A^2C^2-B^2C^2}{A}X-\frac{B^2C^2+B^2A^2-C^2A^2}{B}Y && &=0;
\end{aligned}$$

ces trois droites concourent au point de coordonnées

$$\frac{A}{A^2B^2+A^2C^2-B^2C^2}, \qquad \frac{B}{B^2C^2+B^2A^2-C^2A^2}, \qquad \frac{C}{C^2A^2+C^2B^2-A^2B^2}.$$

Les droites D_1E_1, D_2E_2, D_3E_3, *sont concourantes au point inverse isogonal du pivot.* En effet, la droite D_1E_1 a pour équation

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ 0 & B & C \\ 2AB^2C^2 & B(C^2A^2+C^2B^2-A^2B^2) & C(B^2C^2+B^2A^2-C^2A^2) \end{vmatrix}=0$$

ou

$$A(B^2-C^2)X+C^2BY-B^2CZ=0,$$

de même D_2E_2

$$-C^2AX+B(C^2-A^2)Y+A^2CZ=0$$

et D_3E_3

$$+B^2AX-A^2BY+C(A^2-B^2)Z=0;$$

ces droites concourent au point $\left(\frac{1}{A}, \frac{1}{B}, \frac{1}{C}\right)$.

Les droites I_1E_1, I_2E_2, I_3E_3 *concourent au point inverse isogonal du point de concours des droites* I_1D_1, I_2D_2, I_3D_3, *point situé sur la cubique.*

En effet, la droite $I_1 E_1$ a pour équation :

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ -1 & 1 & 1 \\ 2AB^2C^2 & B(C^2A^2+C^2B^2-A^2B^2) & C(B^2C^2+B^2A^2-C^2A^2) \end{vmatrix} = 0$$

ou $$(B-C)(AB+AC-BC)X + C(BC+BA-CA)Y - B(CA+CB-AB)Z = 0,$$

de même $I_2 E_2$ $$-C(AB+AC-BC)X + (C-A)(BC+BA-CA)Y + A(CA+CB-AB)Z = 0$$

et $I_3 E_3$ $$B(AB+AC-BC)X - A(BC+BA-CA)Y + (A-B)(CA+CB-AB)Z = 0;$$

ces trois droites concourent au point de coordonnées

$$\frac{1}{AB+AC-BC}, \quad \frac{1}{BC+BA-CA}, \quad \frac{1}{CA+CB-AB}.$$

29. *Les six points d'intersection d'une cubique* **F** *avec le cercle circonscrit au triangle* $Q_1 Q_2 Q_3$ *sont les sommets de ce triangle et trois points qui forment un triangle* **T**. *Les triangles* $Q_1 Q_2 Q_3$ *et* **T** *sont tels que l'un d'eux et le symétrique de l'autre par rapport au centre du cercle circonscrit sont circonscrits à une même parabole*(1).

30. *Le lieu d'un point tel que la somme algébrique de ses distances à* n *droites fixes quelconques données (comptées pour chaque droite positivement d'un côté de la droite et négativement de l'autre) est égale à celle du point inverse isogonal par rapport à un triangle est une cubique* **F** *circulaire.*

En effet, si

$$a_p x + b_p y + c_p = 0$$

est l'équation d'une de ces droites en coordonnées rectangulaires, la somme des distances ainsi définies d'un point $(x_1\, y_1)$ aux n droites considérées est :

$$\sum_{p=1}^{p=n} \frac{a_p x_1 + b_p y_1 + c_p}{2\sqrt{a_p^2 + b_p^2}}.$$

Si $(y_2,\, x_2)$ est le point inverse isogonal, on a donc :

$$\sum_{p=1}^{p=n} \frac{a_p}{2\sqrt{a_p^2+b_p^2}}(x_1 - x_2) + \sum_{p=1}^{p=n} \frac{b_p}{2\sqrt{a_p^2+b_p^2}}(y_1 - y_2) = 0,$$

la droite qui joint les deux points a une direction fixe et réciproquement les deux

(1) A. F. S. U. T., *loc. cit.*, p. 57.

points inverses isogonaux situés sur une droite parallèle à cette direction satisfont à la condition énoncée.

31. *Le lieu du milieu du segment de droite joignant deux points inverses isogonaux d'une cubique* **F** *est une cubique*(¹).

Les deux autres foyers de la conique dont deux foyers coaxiaux parcourent une cubique **F** *décrivent une courbe du sixième ordre*(¹) ayant les points cycliques pour points triples, les sommets du triangle $Q_1 Q_2 Q_3$ pour points doubles, passant par les centres des cercles inscrit et exinscrits au triangle $Q_1 Q_2 Q_3$ et ayant pour foyers doubles les trois points d'intersection (autres que Q_1, Q_2, Q_3) de la cubique **F** avec le cercle circonscrit au triangle $Q_1 Q_2 Q_3$.

32. *Par deux points quelconques du plan non inverse isogonaux l'un de l'autre passe une cubique* **F** *et une seule*. C'est la cubique qui passe par les sept points communs à toutes les cubiques **F**, les deux points et leurs inverses isogonaux.

Par un point du plan passent une infinité de cubiques **F** *qui forment un faisceau linéaire*. Les neuf points communs aux cubiques du faisceau sont les sept points communs à toutes les cubiques **F**, le point et son inverse isogonal.

Réciproquement, *deux cubiques* **F** *se coupent aux sept points communs à toutes les cubiques* **F** *et en deux points inverses isogonaux*.

Les pivots des cubiques **F** *d'un faisceau linéaire sont sur une droite :* c'est la droite qui joint les deux points inverses isogonaux communs à toutes les cubiques du faisceau.

33. *En général, il n'y a pas de triangle* $Q_1 Q_2 Q_3$ *pour lequel une cubique quelconque est une cubique* **F**.

En effet, supposons le problème résolu et soit trois droites formant le triangle $Q_1 Q_2 Q_3$: leurs équations, avec des axes rectangulaires quelconques contiennent six paramètres indépendants. On en déduit les équations des droites $Q_1 I I_2$, $Q_1 I_2 I_3$, $Q_2 I I_3$, $Q_2 I_3 I_1$, $Q_3 I I_3$, $Q_3 I_1 I_2$ en fonction de ces six paramètres.

L'équation générale des cubiques passant par les sept points $Q_1, Q_2, Q_3, I, I_1, I_2, I_3$ est si l'on désigne par $I_i I_j = 0$ l'équation de la droite $I_i I_j$

$$I_1 I_2 . I_1 Q_1 . I_1 I_3 + \lambda I_2 I_3 . I_2 Q_2 . I_2 I_1 + \mu I_3 I_1 . I_3 Q_3 . I_3 I_2 = 0,$$

λ et μ étant deux paramètres variables. Si le triangle $Q_1 Q_2 Q_3$ existait, cette équation pourrait s'identifier avec l'équation de la cubique donnée. Or, l'identification donne, après l'introduction d'un coefficient d'identification K, un système de

(¹) A. F. S. U. T., *loc. cit.*, p. 57.

dix équations à neuf inconnues λ, μ, K et les six paramètres des droites qui, en général ne comporte pas de solution.

Lorsqu'une cubique est une cubique **F** pour un triangle, elle est aussi, par application du n° **23**, une podaride pour d'autres triangles.

34. Un certain nombre de cubiques particulières de cette famille ont fait l'objet d'études. On les désignera par leur pivot, leur équation en coordonnées trilinéaire et leur équation en coordonnées isotropes avec les notations habituelles. On appellera A, B, C les angles du triangle $Q_1Q_2Q_3$.

a) Pivot : le centre de la gravité du triangle;

$$X \sin B \sin C(Y^2 - Z^2) + Y \sin C \sin A(Z^2 - X^2) + Z \sin A \sin B(X^2 - Y^2) = 0;$$
$$3P^2Y^3 - PSY^2X + TX^2Y - 3X^3 - 2PTY^2 + 2SX^2 + (5PS - T^2)Y - (5T - S^2)X = 0;$$

le lieu du centre des coniques inscrites dans un triangle et telles que les normales aux points de contact soient concourantes (Thomson, N. A. M., 1865, p. 144; — Lemoine, A. F. A. S., Oran 1888, p. 171);

le lieu du centre des coniques circonscrites à un triangle et telles que les normales aux sommets du triangle soient concourantes (Darboux, N. A. M., 1866, p. 95; — Neuberg et Shoute, A. F. A. S., Marseille 1891, p. 163).

b) Pivot : le centre du cercle circonscrit au triangle;

$$X \cos A(Y^2 - Z^2) + Y \cos B(Z^2 - X^2) + Z \cos C(X^2 - Y^2) = 0,$$
$$P^2Y^3 - X^3 - TPY^2 + SX^2 + SPY - TX = 0;$$

cette cubique a pour asymptotes les parallèles aux hauteurs du triangle de Morley menées par le centre de gravité du triangle $Q_1Q_2Q_3$;

le lieu du centre radical de trois cercles ayant même rayon et passant chacun par deux sommets différents du triangle (Lemoine, A. F. A. S., Pau 1892, p. 102);

le lieu d'un point M du plan du triangle $Q_1Q_2Q_3$ tel que la somme des angles $\widehat{MQ_1Q_2}$, $\widehat{MQ_2Q_3}$, $\widehat{MQ_3Q_1}$ soit égale à un angle droit (cette propriété a été signalée par M. Decerf, professeur agrégé de Mathématiques au Lycée Janson de Sailly).

c) Pivot : le point anticomplémentaire de l'orthocentre;

$$(\cos A - \cos B \cos C)X(Y^2 - Z^2) + (\cos B - \cos C \cos A)Y(Z^2 - X^2) + (\cos C - \cos A \cos B)Z(X^2 - Y^2) = 0,$$
$$P^2Y^3 - SPY^2X + TX^2Y - X^3 + (3PS - T^2)Y - (3T - S^2)X = 0;$$

cette cubique a un centre qui est le centre du cercle circonscrit au triangle; elle a pour asymptotes les médiatrices du triangle;

le lieu du point de concours des normales à une conique aux trois sommets d'un triangle lorsque la conique varie en restant circonscrite au triangle de telle façon que ces trois normales soient concourantes (Darboux, N. A. M., 1866, p. 95);

le lieu du point dont les projections sur les trois côtés d'un triangle sont des points de Ceva (Dewulf, N. A. M., 1876, p. 550; — Van Aubel, N. C. M., t. IV, p. 261)[1];

le lieu du point de concours des normales aux points de contact avec les côtés d'un triangle à une conique qui varie en restant inscrite dans le triangle de telle façon que ces trois normales soient concourantes (Neuberg et Shoute, A. F. A. S., Marseille 1891, p. 113).

d) Pivot : le milieu du segment de droite qui joint l'orthocentre au centre de gravité

$$(3\cos A - 4\sin B\sin C)X(Y^2 - Z^2) + (3\cos B - 4\sin C\sin A)Y(Z^2 - X^2) + (3\cos C - 4\sin A\sin B)Z(X^2 - Y^2) = 0,$$
$$3P^2Y^3 + 2SPY^2X - 2TX^2Y - 3X^3 - 5TPY^2 + 5SX^2 - (SP - 2T^2)Y + (T - 2S^2)X = 0;$$

le lieu d'un point M tel que si l'on construit les symétriques M_1, M_2, M_3 de ce point par rapport aux côtés Q_2Q_3, Q_3Q_1, Q_1Q_2 d'un triangle $Q_1Q_2Q_3$, les droites Q_1M_1, Q_2M_2, Q_3M_3 soient concourantes (Lemoine, A. F. A. S., Limoges 1890, p. 121).

e) Pivot : le point à l'infini sur la polaire trilinéaire du centre du cercle inscrit;

$$(\sin B - \sin C)X(Y^2 - Z^2) + (\sin C - \sin A)Y(Z^2 - X^2) + (\sin A - \sin B)Z(X^2 - Y^2) = 0,$$
$$\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}} + \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)(PWY + U) + \left(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma}\right)(WX + V) = 0;$$

cette cubique est circulaire (n° **25**);

le lieu du point tel que la somme de ses coordonnées normales absolues soit égale à celle du point inverse isogonal (Lemoine, A. F. A. S., Pau 1892, p. 102).

Les cubiques *a*), *b*), *c*), *d*) appartiennent au faisceau linéaire des cubiques **F** qui passent par le centre du cercle circonscrit et l'orthocentre du triangle $Q_1Q_2Q_3$.

Récapitulation de théorèmes communs aux trois familles de cubiques auto-inverses isogonales.

35. Les cubiques auto-inverses isogonales par rapport à un triangle sont soit :

circonscrites au triangle et ne passant par aucun centre de cercle inscrit ou exinscrit (podarides pour le triangle sans point double);

---

[1] Van Aubel a reconnu à cette cubique les propriétés définies au n° **28** et les propriétés complémentaires résultant de la symétrie par rapport au centre.

circonscrites au triangle et ayant l'un des centres de cercle inscrit ou exinscrit pour point double (podarides pour le triangle à point double); ce point n'est jamais un point de rebroussement;

circonscrites au triangle et passant par les quatre centres de cercles inscrit ou exinscrits (cubique **F**), ces cubiques n'ont pas de point double;

ayant un sommet du triangle pour point double, un autre pour point simple et passant par les deux centres de cercles inscrit ou exinscrits situés sur une bissectrice issue de ce dernier sommet (cubique **C** ou cubique **D**); le point double peut être de rebroussement.

Il n'y a pas d'autre cubique non décomposable auto-inverse isogonale par rapport à un triangle.

36. Les nos **12, 23** et **33** donnent les théorèmes suivants :

Une cubique quelconque est auto-inverse isogonale par rapport à un certain nombre de triangles (ce nombre peut être égal à un, à un nombre fini ou être infini);

1° lorsque la cubique n'a pas de point double, ce ou ces triangles sont inscrits dans la cubique qui est une podaride pour ce ou ces triangles;

2° lorsque la cubique a un point double de rebroussement, ce ou ces triangles ont pour sommets le point double, un point simple de la cubique et un point extérieur à la cubique; la cubique passe par les deux centres de cercles inscrit ou exinscrits situés sur l'une des bissectrices passant par le point simple;

3° lorsque la cubique a un point double qui n'est pas de rebroussement, il y a un ou des triangles appartenant à l'une et à l'autre de ces deux catégories; pour ceux de la première, le point double est un centre de cercle inscrit ou exinscrit.

En outre, il y a des cubiques n'ayant pas de point double qui sont inverses isogonales de la famille **F** par rapport à un triangle auquel elles sont circonscrites. En général, une cubique quelconque n'a pas cette propriété; lorsqu'elle y satisfait cette cubique est, de plus, une podaride pour d'autres triangles conformément à 1° ci-dessus.

37. L'application de la formule du n° **7**

$$n = 3c - \Sigma t.$$

et des théorèmes du n° **7** permet de déterminer les courbes φ telles que les deux points inverses isogonaux par rapport à un triangle $Q_1 Q_2 Q_3$ situés sur une tangente qui roule sur la courbe φ décrivent une cubique Φ auto-inverse isogonale par rapport au triangle et de définir la nature de cette cubique.

Il suffit de déterminer les cas où la formule précédente, pour laquelle n, c et Σt sont définis au n° **7** donne pour n la valeur 3.

Dans ce qui suit, on désignera par τ le nombre des tangences à la courbe φ des bissectrices passant par un point Q_i ou I_i et par μ l'ordre de multiplicité de ce point sur la courbe Φ, on a (n° **7**) :

$$\mu = c - \tau.$$

1° $c = 1$, $\Sigma t = 0$: la courbe φ se réduit à un point fixe qui n'est pas situé sur une bissectrice du triangle $Q_1Q_2Q_3$.

Par aucun sommet du triangle $Q_1Q_2Q_3$ et par aucun des points I, I_1, I_2, I_3 ne passe une bissectrice tangente à la courbe φ; donc pour chacun de ces sept points :

$$\tau = 0, \qquad \mu = c - 0 = 1,$$

les sept points sont des points simples de la cubique Φ, qui est une cubique **F** (n° **26**).

2° $c = 2$, $\Sigma t = 3$: la courbe φ est une conique tangente à trois bissectrices du triangle $Q_1Q_2Q_3$.

a) le triangle T_1 formé par ces trois bissectrices a pour sommets trois points I_i,

par chaque sommet du triangle $Q_1Q_2Q_3$ passe une bissectrice tangente à la courbe φ; pour chacun de ces points,

$$\tau = 1, \qquad \mu = c - 1 = 1;$$

par chacun des points I_i, sommets du triangle T_1, passent deux bissectrices tangentes à la courbe φ; pour chacun de ces points,

$$\tau = 2, \qquad \mu = c - 2 = 0;$$

par le quatrième point I_i ne passe aucune bissectrice tangente à la courbe φ; pour ce point,

$$\tau = 0, \qquad \mu = c - 0 = 2;$$

la cubique Φ a donc les sommets du triangle $Q_1Q_2Q_3$ pour points simples; elle ne passe pas par trois points I_i et a le quatrième pour point double; c'est une podaride pour le triangle $Q_1Q_2Q_3$ à point double (n° **22**).

b) le triangle T_1 formé par les trois bissectrices tangentes à la courbe φ a pour sommets un sommet du triangle $Q_1Q_2Q_3$, Q_1 par exemple, et deux points I_i, I et I_2 par exemple,

pour le sommet Q_1	$\tau = 2$,	$\mu = c - 2 = 0$,
pour le sommet Q_2	$\tau = 1$,	$\mu = c - 1 = 1$,
pour le sommet Q_3	$\tau = 0$,	$\mu = c - 0 = 2$,
pour chacun des points I et I_2	$\tau = 2$;	$\mu = c - 2 = 0$,
pour chacun des points I_1 et I_3	$\tau = 1$,	$\mu = c - 1 = 1$;

la cubique Φ a pour point double Q_3, pour points simples Q_2, I_1, I_3; elle ne passe pas par Q_1, I, I_2. Suivant le triangle T_1 considéré, c'est une cubique **C** ou une cubique **D** (n° **10**).

3° $c = 3$, $\Sigma t = 6$: la courbe φ est une courbe de la troisième classe tangente aux six bissectrices du triangle $Q_1Q_2Q_3$;

pour chacun des sommets Q_1, Q_2, Q_3 $\tau = 2$, $\mu = c - 2 = 1$,
pour chaque point I_i $\tau = 3$, $\mu = c - 3 = 0$;

la cubique Φ est circonscrite au triangle $Q_1Q_2Q_3$ et ne passe par aucun point I_i : c'est une podaride pour le triangle $Q_1Q_2Q_3$ n'ayant pas de point double (n° **22**).

Il est impossible que la courbe φ ait une bissectrice pour tangente double et quatre bissectrices pour tangentes simples (cas théoriquement possible pour la répartition de six tangences à une courbe de la troisième classe), car d'un des points I_i partiraient une tangente double et deux tangentes simples à la courbe φ de la troisième classe.

Il est également impossible d'obtenir une cubique Φ pour $c > 3$, c'est-à-dire de réaliser alors $\Sigma t = 3c - 3$ sans qu'il y ait au moins un point I_i tel que les trois bissectrices passant par ce point aient au total un nombre de tangences à la courbe φ supérieur à c.

Les cas définis ci-dessus sont donc les seuls pour lesquels la courbe Φ est une cubique et l'on obtient ainsi par l'application géométrique des théorèmes du n° **7** les résultats obtenus par la méthode analytique aux n^os **10**, **22** et **26**.

Relations entre la transformation par inversion isogonale et la transformation par inversion (rayons vecteurs réciproques).

38. Ces deux transformations sont ponctuelles et quadratiques.

Si l'on prend comme triangle de référence le triangle ayant pour sommets un point quelconque O du plan et les points cycliques i et j, la transformation par inversion isogonale par rapport au triangle Oij et la transformation par inversion (rayons vecteurs réciproques) le centre d'inversion étant le point O et la puissance d'inversion égale à 1 donnent pour un point P deux points P_0 et P_1 équidistants du point O et par conséquent symétriques par rapport à une droite OI passant par O. La direction de cette droite, bissectrice de l'angle Oij qui est indéterminée, peut être choisie arbitrairement.

Si le point P parcourt une courbe (C), le point P_0 parcourt la courbe (C_0) transformée de (C) par inversion isogonale par rapport au triangle Oij et le point P_1 la courbe (C_1) transformée de (C) par rayons vecteurs réciproques avec le centre et la puissance d'inversion indiqués. Les courbes (C_0) et (C_1) sont symétriques par rapport à la droite OI : l'une est l'image de l'autre dans une glace plane.

En effet, les coordonnées trilinéaires, le triangle Oij étant pris comme triangle de référence sont les coordonnées isotropes avec le point O comme origine des coordonnées (la coordonnée Z étant remplacée par 1). En coordonnées isotropes, X et Y étant les coordonnées du point P, les coordonnées X_0, Y_0 du point P_0 sont donc $\frac{1}{X}, \frac{1}{Y}$; les coordonnées X_1, Y_1 du point P_1 transformé du point P par inversion (rayons vecteurs réciproques), la puissance d'inversion étant 1 et le centre d'inversion O, sont données par les équations

$$\frac{Y_1}{X_1} = \frac{Y}{X}, \qquad X_1Y_1 . XY = 1;$$

d'où

$$X_1 = \pm\frac{1}{Y}, \qquad Y_1 = \pm\frac{1}{X}.$$

Donc

$$X_1Y_1 = X_0Y_0 \qquad \text{et} \qquad \frac{Y_0}{X_0}.\frac{Y_1}{X_1} = 1;$$

ce qui démontre la relation énoncée entre P_0 et P_1.

L'équation de la courbe (C) étant $F(X, Y) = 0$, celle de la courbe (C_0) sera $F\left(\frac{1}{X}, \frac{1}{Y}\right) = 0$ et celle de la courbe (C_1), $F\left(\frac{1}{Y}, \frac{1}{X}\right) = 0$.

On peut vérifier l'exactitude de cette conception par l'application aux courbes (C) et (C_0) des théorèmes concernant les courbes inverses isogonales. Par exemple, appliquons le théorème du n° **6** concernant les tangentes en deux points inverses isogonaux P et P_0. Les tangentes aux courbes (C) et (C_1) aux points P et P_1 inverses (par rayons vecteurs réciproques) sont également inclinées sur la droite OPP_1 et se coupent en un point t tel que le triangle tPP_1 soit isocèle de base PP_1. La tangente en P_0 à la courbe (C_0) symétrique de (C_1) par rapport à une droite OI passant par le point O est la droite symétrique de tP_1 par rapport à la droite OI, cette tangente coupe la tangente tP à la courbe (C) en un point T. Le point T_0 inverse isogonal du point T s'obtient, d'après la règle indiquée, en construisant sur OT le point T_1 tel que $\overline{OT_1}.\overline{OT} = \overline{OP_1}.\overline{OP}$ et en prenant le symétrique T_0 de T_1 par rapport à OI. Le théorème du n° **6** exprime que le point T_0 doit être sur la droite PP_0. On démontre facilement par la géométrie élémentaire que cette propriété est vérifiée quel que soit le triangle isocèle de base PP_1 (P et P_1 étant deux points quelconques sur une droite PP_1 passant par O) et quelle que soit la direction de la droite OI, ce qui montre que le théorème du n° **6** concernant deux courbes inverses isogonales s'applique aux courbes (C) et (C_0), la courbe (C_0) dérivant de la courbe (C) par la construction indiquée (transformation par rayons vecteurs réciproques et symétrie par rapport à une droite OI).

Ce qui précède ne concerne que la relation entre la transformation par inversion (rayons vecteurs réciproques) et la transformation par inversion isogonale par rapport au triangle particulier Oij. La transformation par inversion isogonale n'est pas projective.

Enfin, la relation montre que les courbes auto-inverses isogonales par rapport au triangle Oij et les courbes anallagmatiques sont, en général, différentes : les premières sont les courbes qui, passant par P, passent également par P_0; les deuxièmes sont les courbes qui, passant par P, passent également par P_1. Elles ne se confondent que si elles ont pour axe de symétrie une droite passant par le point O.

Ajouter à la fin du n° **9** :

En coordonnées isotropes, origine le centre du cercle circonscrit au triangle $Q_1Q_2Q_3$ et notations habituelles, l'équation des cubiques **C** ou **D** est :

$$(LPV+MU-NPW)(X+\gamma\alpha Y-\gamma-\alpha)\mp\alpha\sqrt{\gamma\alpha}\,(LX+MY+N)(X+\beta\gamma Y-\beta-\gamma)^2=0;$$

le signe — étant pris pour l'une des familles de cubiques, le signe + pour l'autre. L, M, N sont des coefficients quelconques.

Page 73, 13ᵉ ligne :

Au lieu de : *couche* Φ; lire : *courbe* Φ.
