Annales de la faculté des sciences de Toulouse

Paul Vincensini

Sur certaines congruences rectilignes appartenant à un complexe linéaire

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 4e série, tome 4 (1940), p. 97-115

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1940_4_4__97_0>

SUR CERTAINES CONGRUENCES RECTILIGNES

APPARTENANT A UN COMPLEXE LINÉAIRE

Par M. Paul VINCENSINI

---

1. Dans un Mémoire qui paraîtra prochainement aux *Annales de l'École Normale Supérieure*, j'ai été amené à étudier les congruences rectilignes telles que les coordonnées de la trace d'un rayon quelconque $D(u, v)$ sur le plan xOy aient des expressions de la forme :

$$(1) \qquad \begin{cases} x = -\mathcal{F}(Z)\,\Delta(\Phi, Y), \\ y = \mathcal{F}(Z)\,\Delta(\Phi, X), \end{cases}$$

où X, Y, Z sont les cosinus directeurs de D, $\mathcal{F}(Z)$ une fonction arbitraire de Z (c'est-à-dire de l'angle que fait D avec Oz), Φ une fonction arbitraire des deux variables u, v qui fixent D, et Δ le paramètre différentiel mixte du premier ordre relatif au ds^2 de la représentation sphérique de la congruence

$$(2) \qquad ds^2 = \mathrm{S}\,dX^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2.$$

On sait que les équations

$$(3) \qquad \begin{cases} \xi = \Delta(\Phi, X), \\ \eta = \Delta(\Phi, Y), \\ \zeta = \Delta(\Phi, Z), \end{cases}$$

définissent le lieu des projections orthogonales, H, de l'origine, sur les rayons $R(u, v)$ d'une congruence normale $\mathfrak{N}$, qui est d'ailleurs la congruence normale la plus générale si Φ est la fonction la plus générale des deux variables u et v. Nous dirons que la surface $H(\xi, \eta, \zeta)$ est la surface podaire (relative à o) de la congruence normale $\mathfrak{N}$. (C) étant une congruence quelconque définie par les formules (1), il lui correspond une congruence $\mathfrak{N}$, et la forme même des équations (1) montre que l'on passe de $\mathfrak{N}$ à C en projetant orthogonalement le point H relatif à chaque rayon R en K, sur le plan xOy, en faisant tourner le vecteur $\overrightarrow{OK}$ de $+\frac{\pi}{2}$ autour du point O dans le plan xOy, en soumettant ensuite $\overrightarrow{OK}$ à l'homothétie de centre O et de rapport $\mathfrak{F}(Z)$, et en menant par l'extrémité K' du vecteur ainsi obtenu la parallèle D à R.

Les opérations géométriques ci-dessus, appliquées aux différentes droites de l'espace, définissent une transformation de l'espace réglé, que dans le Mémoire cité nous avons appelée $T[\mathfrak{F}(Z)]$, et qui est complètement définie dès que $\mathfrak{F}(Z)$ (que nous dirons la *fonction transformatrice*) est connue; Oz est l'axe de la transformation, O le centre, et xOy le plan de cette transformation. Les congruences définies par les équations (1) sont les transformées, par une transformation $T[\mathfrak{F}(Z)]$ arbitraire, des différentes congruences normales de l'espace.

La fonction $\Phi(u, v)$ qui figure dans les équations (3) (définie à une constante additive près) représente, comme il est bien connu, la distance algébrique de l'origine au plan tangent à l'une quelconque, S, des surfaces orthogonales aux rayons de la congruence normale $\mathfrak{N}$ correspondante. S sera dite la *surface génératrice* de la congruence C transformée de $\mathfrak{N}$ par $T[\mathfrak{F}(Z)]$.

Si C jouit de propriétés géométriques spéciales, $\mathfrak{N}$ et S jouiront de propriétés correspondantes. Nous voudrions présenter ici quelques remarques au sujet de la transformation, par une $T[\mathfrak{F}(Z)]$, de congruences normales $\mathfrak{N}$ en congruences C appartenant à un complexe linéaire d'axe Oz (axe de transformation). En général, une congruence normale n'admet pas de transformées C situées dans un complexe linéaire d'axe Oz, et nous verrons que les surfaces génératrices des congruences C appartenant effectivement à un tel complexe sont susceptibles d'une définition géométrique intéressante. D'autre part, en observant que certaines congruences de définition géométrique remarquable, telles que les congruences à surface moyenne plane (xOy) ou à enveloppée moyenne point (O) ou à foyers associés équidistants d'une droite fixe (Oz), peuvent être déduites des congruences normales par des transformations $T[\mathfrak{F}(Z)]$ convenables, nous serons conduits à déterminer toutes celles de ces congruences qui appartiennent à un complexe linéaire d'axe Oz, et à présenter, au sujet de ces congruences, quelques remarques géométriques.

2. Une congruence normale $\mathfrak{N}$ étant définie par sa surface podaire (3), cherchons à déterminer la fonction $\Phi(u, v)$ pour que la transformée C de $\mathfrak{N}$ par la transformation $T[\mathfrak{F}(Z)]$ [$\mathfrak{F}(Z)$ est une fonction *donnée* de Z], appartienne à un complexe linéaire d'axe Oz dont, négligeant une homothétie, nous pouvons prendre l'équation en coordonnées pluckériennes (X, Y, Z, L, M, N) sous la forme

$$N = Z. \tag{4}$$

Les coordonnées du rayon $D(u, v)$ de la congruence C, issu du point (x, y) défini par les équations (1), et de cosinus directeurs X, Y, Z, sont :

$$\left\{\begin{array}{lll} X, & Y, & Z \\ L = & yZ & = Z\mathcal{F}(Z)\,\Delta(\Phi, X), \\ M = & -xZ & = Z\mathcal{F}(Z)\,\Delta(\Phi, Y), \\ N = & xY - yX & = -\mathcal{F}(Z)\,[Y\,\Delta(\Phi, Y) + X\,\Delta(\Phi, X)]; \end{array}\right.$$

soit, en tenant compte de la relation évidente,

$$X\,\Delta(\Phi, X) + Y\,\Delta(\Phi, Y) + Z\,\Delta(\Phi, Z) = 0,$$

$$\left\{\begin{array}{lll} X, & Y, & Z, \\ L = Z\mathcal{F}(Z)\,\Delta(\Phi, X), & M = Z\mathcal{F}(Z)\,\Delta(\Phi, Y), & N = Z\mathcal{F}(Z)\,\Delta(\Phi, Z). \end{array}\right.$$

Les fonctions Φ qui définissent, par leur surface podaire (3), les congruences normales $\mathfrak{N}$ dont les transformées par $T[\mathcal{F}(Z)]$ appartiennent au complexe linéaire (4), s'obtiennent en remplaçant dans (4) N par l'expression ci-dessus; on trouve ainsi l'équation :

$$(5) \qquad \Delta(\Phi, Z) = \frac{1}{\mathcal{F}(Z)} = \Theta(Z),$$

en désignant par $\Theta(Z)$ l'inverse de la fonction transformatrice.

Toute équation de la forme (5), où $\Theta(Z)$ est une fonction arbitraire de Z, définit une famille, dépendant d'une fonction arbitraire, de congruences normales transformables en congruences appartenant au complexe linéaire $N = Z$. Ces congruences sont définies par les équations (3) de leurs surfaces podaires, équations dans lesquelles Φ est remplacée par l'intégrale générale de (5); la fonction transformatrice commune à toutes ces congruences est $\mathcal{F}(Z) = \dfrac{1}{\Theta(Z)}$.

L'équation (5) montre déjà que les congruences normales $\mathfrak{N}$ dont les transformées par une $T[\mathcal{F}(Z)]$ sont dans un complexe linéaire d'axe Oz, sont celles pour lesquelles la cote $[z = \Delta(\Phi, Z)]$ de la projection orthogonale du point O sur un rayon quelconque ne dépend que de l'angle que fait le rayon avec Oz. En appelant *surfaces réglées parallèles* d'une congruence les surfaces réglées de la congruence admettant pour représentations sphériques les différents parallèles d'axe Oz de la sphère image, on peut donc définir les congruences ($\mathfrak{N}$) envisagées ici, en disant que les lieux des projections orthogonales de l'origine O sur les rayons des différentes surfaces réglées parallèles sont des courbes planes, situées dans des plans parallèles au plan xOy. Ainsi, appartiennent à la famille ($\mathfrak{N}$) toutes les congruences des normales aux diverses surfaces de révolution autour de Oz.

Mais l'intégration de l'équation (5) va nous permettre de caractériser les congruences $\mathfrak{N}$ actuelles par une propriété géométrique plus remarquable encore, relative à la génération des surfaces orthogonales à leurs rayons.

Prenons pour représentation sphérique, sur la sphère de rayon *un*, le système formé par les méridiens et les parallèles; on aura alors :

$$(6) \qquad \begin{cases} X = \sin u \cos v, \\ Y = \sin u \sin v, \\ Z = \cos u, \end{cases}$$

$$ds^2 = du^2 + \sin^2 u dv^2.$$

Dans ces conditions, les paramètres différentiels $\Delta(\Phi, X)$, $\Delta(\Phi, Y)$, $\Delta(\Phi, Z)$ auront les expressions :

$$(7) \qquad \begin{cases} \Delta(\Phi, X) = \dfrac{\partial \Phi}{\partial u} \cos u \cos v - \dfrac{\sin v}{\sin u} \dfrac{\partial \Phi}{\partial v}, \\ \Delta(\Phi, Y) = \dfrac{\partial \Phi}{\partial u} \cos u \sin v + \dfrac{\cos v}{\sin u} \dfrac{\partial \Phi}{\partial v}, \\ \Delta(\Phi, Z) = -\dfrac{\partial \Phi}{\partial u} \sin u, \end{cases}$$

et l'équation (5) prendra la forme :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} \sin u + \Theta(\cos u) = 0;$$

soit, en posant $-\dfrac{\Theta(\cos u)}{\sin u} = U'$ (U' étant la dérivée d'une fonction de u) :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} = U'.$$

On en déduit :

$$(8) \qquad \Phi = U + V;$$

U et V étant des fonctions arbitraires respectives des arguments u et v.

Les surfaces orthogonales aux rayons des congruences normales admettant une transformation $T[\mathcal{F}(Z)]$ les amenant dans un complexe linéaire d'axe Oz, sont donc définies tangentiellement par le plan :

$$(9) \qquad \sin u \cos v \,.\, x + \sin u \sin v \,.\, y + \cos u \,.\, z = U + V.$$

Pour une valeur donnée de v, le plan (9) enveloppe un cylindre de génératrices perpendiculaires au plan $y = \operatorname{tg} v \,.\, x$ (de trace Ox_1 sur xOy), et dont la section droite par le plan zOx_1 est définie tangentiellement par l'équation :

$$x_1 \sin u + z \cos u = U + V.$$

Lorsque v varie, le cylindre précédent subit une dilatation fonction arbitraire de v, et l'on peut énoncer le résultat suivant.

Les congruences normales susceptibles d'une transformation $T[\mathcal{F}(Z)]$ *les transformant en congruences appartenant à un complexe linéaire d'axe* Oz, *sont les congruences des normales aux surfaces enveloppes d'un cylindre arbitraire de génératrices perpendiculaires à* Oz, *tournant autour de* Oz *tout en se dilatant, la loi de dilatation étant absolument arbitraire.*

Si la dilatation est nulle, on retrouve les congruences des normales aux surfaces de révolution autour de Oz, déjà signalées.

La fonction transformatrice associée à l'une quelconque des congruences $\mathfrak{N}$ qui viennent d'être déterminées, transformables par une $T[\mathcal{F}(Z)]$ en congruences appartenant à un complexe linéaire d'axe Oz, ne dépend que de la donnée (à une dilatation arbitraire près) du cylindre générateur des surfaces orthogonales aux rayons; son expression est, comme on l'a vu,

$$\mathcal{F}(Z) = \frac{1}{\Theta(Z)} = \frac{1}{\Theta(\cos u)},$$

soit, en tenant compte de la définition de U' :

$$\mathcal{F}(Z) = -\frac{1}{U' \sin u}. \tag{10}$$

3. Pour obtenir explicitement les congruences du complexe linéaire d'axe Oz, transformées des congruences $\mathfrak{N}$ déterminées au numéro 2, il suffit de remplacer Φ par $U+V$ et $\mathcal{F}(Z)$ par $-\dfrac{1}{U' \sin u}$ dans les équations (1) qui définissent la trace, sur le plan xOy, du rayon générateur de l'une des congruences cherchées, rayon dont les cosinus directeurs X, Y, Z ont les expressions (6). En tenant compte des équations (7) on obtient ainsi :

$$\left\{\begin{aligned} x &= \operatorname{cotg} u \sin v \;\; + \mathfrak{U}\mathfrak{V} \cos v, \\ y &= -\operatorname{cotg} u \cos v + \mathfrak{U}\mathfrak{V} \sin v, \\ z &= 0; \end{aligned}\right. \tag{11}$$

après avoir posé :

$$\left\{\begin{aligned} & V' = \mathfrak{V}, \\ & \frac{1}{\sin^2 u \,.\, U'} = \mathfrak{U}. \end{aligned}\right. \tag{12}$$

$\mathfrak{U}$ et $\mathfrak{V}$ sont des fonctions arbitraires de u et v respectivement, au même titre que U et V.

Il est intéressant, pour la suite, de déterminer la surface moyenne de la congruence générale (11). L'équation générale donnant les abscisses des foyers portés par le rayon (u, v), comptées à partir du point (x, y) où ce rayon perce le plan xOy, est :

$$(EG - F^2)\rho^2 + [gE - (f+f')F + eG]\rho + eg - ff' = 0,$$

où E, F, G sont les coefficients du ds^2 de la représentation sphérique, et où l'on a :

$$e = S\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u}, \qquad g = S\frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v}, \qquad f = S\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}, \qquad f' = S\frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u};$$

x, y, z étant les coordonnées du point de départ sur chaque rayon.

Avec la représentation sphérique adoptée ici, on a :

$$E = 1, \qquad F = 0, \qquad G = \sin^2 u;$$

de sorte que l'abscisse, λ, du point moyen situé sur le rayon (u, v), a pour expression :

$$\lambda = -\frac{e}{2} - \frac{g}{2\sin^2 u}.$$

Les expressions de e et g s'obtiennent en remplaçant dans $S\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u}$ et $S\frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v}$, (X, Y, Z) et (x, y, z) par leurs expressions (6) et (11); on trouve ainsi :

$$e = \mathcal{U}'\mathcal{V}\cos u,$$
$$g = \mathcal{U}\,\mathcal{V}\sin u;$$

et, par suite :

$$\lambda = -\frac{\mathcal{V}}{2}\left(\mathcal{U}'\cos u + \frac{\mathcal{U}}{\sin u}\right).$$

Les équations de la surface moyenne de la congruence la plus générale d'un complexe linéaire d'axe Oz, transformée d'une congruence normale par une transformation $T[\mathcal{F}(Z)]$, sont donc :

$$(13) \qquad \begin{cases} \mathcal{X} = \cot g\, u \sin v + \frac{\mathcal{V}}{2}\cos v\,(\mathcal{U} - \mathcal{U}'\sin u\cos u), \\ \mathcal{Y} = -\cot g\, u\cos v + \frac{\mathcal{V}}{2}\sin v\,(\mathcal{U} - \mathcal{U}'\sin u\cos u), \\ \mathcal{Z} = -\frac{\mathcal{V}}{2}\cos u\left(\mathcal{U}'\cos u + \frac{\mathcal{U}}{\sin u}\right). \end{cases}$$

On voit, en particulier, que pour que la congruence soit à surface moyenne plane (plan xOy), il faut et il suffit que l'on ait, soit $\mathcal{V} = 0$, soit

$$\mathcal{U}'\cos u + \frac{\mathcal{U}}{\sin u} = 0.$$

Dans le premier cas, la première équation (12) montre que $V = a = \text{const.}$, $\mathfrak{U}$, et par suite U, restant arbitraires. Les surfaces génératrices des congruences envisagées sont alors définies tangentiellement par

$$\sin u \cos v \,.\, x + \sin u \sin v \,.\, y + \cos u \,.\, z = \Phi = U + a;$$

ces surfaces génératrices sont les diverses surfaces de révolution autour de Oz, et la fonction transformatrice attachée à l'une quelconque d'entre elles a pour expression :

$$\mathcal{F}(Z) = -\frac{1}{U' \sin u}.$$

Dans le deuxième cas, c'est la fonction V qui est arbitraire, et l'expression de U $\left(\text{liée à } \mathfrak{U} \text{ par } \dfrac{1}{\sin^2 u \,.\, U'} = \mathfrak{U}\right)$ est définie par

$$\mathfrak{U}' \cos u + \frac{\mathfrak{U}}{\sin u} = 0,$$

d'où l'on déduit

$$\mathfrak{U} = k \operatorname{cotg} u, \qquad (k = \text{const.});$$

et, par suite,

$$U = k \log \operatorname{tg} u + h, \qquad (h = \text{const.}).$$

Les surfaces génératrices sont, dans ce cas, les enveloppes du plan

$$\sin u \cos v \,.\, x + \sin u \sin v \,.\, y + \cos u \,.\, z = k \log \operatorname{tg} u + V,$$

où k est une constante arbitraire et V une fonction arbitraire de v.

Si, U étant une fonction arbitraire de u, V est une fonction du premier degré de v,

$$V = av + b;$$

la surface (13) est de révolution autour de Oz, et l'on obtient ainsi toutes les congruences d'un complexe linéaire d'axe Oz, transformées de congruences normales par des transformations $T[\mathcal{F}(Z)]$, dont les surfaces moyennes sont de révolution autour de l'axe du complexe. Les surfaces génératrices de ces congruences sont, comme l'on voit, *les enveloppes d'un cylindre arbitraire de génératrices perpendiculaires à* Oz, *tournant autour de* Oz *et subissant en même temps une dilatation proportionnelle à l'angle de rotation.*

4. En général, une congruence d'un complexe linéaire transformée par une $T[\mathcal{F}(Z)]$ d'une congruence normale, n'admet qu'une seule congruence normale génératrice (ou une seule surface génératrice à une dilatation près), si l'on ne considère pas comme distinctes deux congruences (ou deux surfaces) génératrices homothétiques dans une homothétie de centre O. Deux telles congruences fournissent évidemment la même congruence transformée avec des fonctions transformatrices dont le quotient est égal au rapport d'homothétie.

Mais il se peut qu'à une congruence déterminée d'un complexe linéaire correspondent plusieurs congruences génératrices. La recherche des congruences admettant plusieurs congruences normales génératrices (et par suite, comme on le verra, une infinité de telles congruences) conduit, comme nous allons le montrer, *aux congruences transformées des congruences des normales aux surfaces de révolution autour de* Oz.

Il est facile de voir qu'une congruence d'un complexe linéaire, C, transformée par une $T[\mathcal{F}(Z)]$ d'une congruence normale $\mathfrak{N}$ dont tous les rayons coupent Oz, peut provenir de n'importe quelle autre congruence dont les rayons coupent Oz. Envisageons les rayons de C coupant (évidemment à angle droit) une même droite du plan xOy issue de O; il est clair que C est engendrée par la rotation autour de Oz de l'ensemble de ces rayons. Donnons-nous une fonction arbitraire $\varphi(Z)$ autre que $\mathcal{F}(Z)$, et effectuons, à partir de C, la transformation inverse de $T[\varphi(Z)]$. Les rayons de la congruence transformée couperont évidemment tous Oz; cette dernière sera donc une congruence normale (arbitraire) dont tous les rayons coupent Oz, et sa transformée par $T[\varphi(Z)]$ sera C, qui peut bien, par suite, être considérée comme admettant pour génératrice une congruence normale quelconque dont les rayons rencontrent Oz.

Le fait que les congruences normales dont les rayons coupent Oz sont *les seules* pouvant être regardées comme génératrices d'une même congruence d'un complexe linéaire est d'ailleurs facile à établir. Imaginons deux congruences normales $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$, dont les transformées par $T[\mathcal{F}_1(Z)]$ et $T[\mathcal{F}_2(Z)]$ sont confondues. Il résulte de la définition géométrique de la transformation $T[\mathcal{F}(Z)]$ que les rayons homologues de $\mathfrak{N}_1$ et $\mathfrak{N}_2$ (correspondant à un même rayon de la congruence transformée), sont parallèles et dans un même plan issu de O, le rapport de leurs distances au point O ne dépendant que de Z. $\mathfrak{N}_2$ est transformée de $\mathfrak{N}_1$, dans une transformation remplaçant, chaque rayon, par son homothétique dans une homothétie de centre O et dont le rapport est une certaine fonction $\Theta(Z)$ de Z, transformation que, conformément aux notations du Mémoire des *Annales de l'Ecole Normale Supérieure* auquel il est fait allusion plus haut, nous appellerons $\mathcal{H}[\Theta(Z)]$. Il suffit donc, pour établir le résultat annoncé, de montrer que les seules congruences normales susceptibles d'une transformation $\mathcal{H}[\Theta(Z)]$ les laissant normales, sont les congruences des normales aux surfaces de révolution autour de Oz.

Désignons à cet effet par x, y, z les coordonnées d'un point quelconque de la surface de départ d'une congruence normale $\mathfrak{N}$, et par X, Y, Z les cosinus directeurs du rayon, D, issu du point (x, y, z); $x, y, z, \ldots Z$ sont des fonctions de deux paramètres u et v.

Le fait que la congruence est normale se traduit par la relation

$$(14) \qquad S \frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} = S \frac{\partial X}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u}.$$

Exprimons que la congruence $\mathfrak{N}$ peut être transformée en une nouvelle congruence normale $\mathfrak{N}'$ par une transformation $\mathcal{H}[\Theta(Z)]$. On pourra prendre pour surface de départ de $\mathfrak{N}'$ le lieu du point

$$x' = \Theta(Z) . x, \qquad y' = \Theta(Z) . y, \qquad z' = \Theta(Z) . z$$

et la condition pour que $\mathfrak{N}'$ soit normale est :

$$(15) \qquad S \frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial x'}{\partial v} = S \frac{\partial X}{\partial v} \frac{\partial x'}{\partial u};$$

soit :

$$S \frac{\partial X}{\partial u}\left[\frac{\partial \Theta}{\partial Z} \frac{\partial Z}{\partial v} . x + \Theta(Z) \frac{\partial x}{\partial v}\right] = S \frac{\partial X}{\partial v}\left[\frac{\partial \Theta}{\partial Z} \frac{\partial Z}{\partial u} . x + \Theta(Z) \frac{\partial x}{\partial u}\right],$$

ou, en tenant compte de (14) et en négligeant le cas évident où $\Theta(Z) = \text{const.}$ ($\mathfrak{N}'$ et $\mathfrak{N}$ homothétiques),

$$\frac{\partial Z}{\partial v} S\, x \frac{\partial X}{\partial u} = \frac{\partial Z}{\partial u} S\, x \frac{\partial X}{\partial v},$$

qui peut s'écrire :

$$x\left[\frac{\partial Z}{\partial v} \frac{\partial X}{\partial u} - \frac{\partial X}{\partial v} \frac{\partial Z}{\partial u}\right] - y\left[\frac{\partial Z}{\partial u} \frac{\partial Y}{\partial v} - \frac{\partial Z}{\partial v} \frac{\partial Y}{\partial u}\right] = 0,$$

et finalement, en remplaçant les quantités entre crochets par des quantités proportionnelles,

$$xY - yX = 0.$$

Cette dernière relation exprime que le rayon générateur D de $\mathfrak{N}$ rencontre Oz, et que par suite $\mathfrak{N}$ est bien, comme on l'avait annoncé, la congruence des normales à une surface de révolution d'axe Oz.

5. Parmi les congruences transformées des congruences normales par une T $[\mathcal{F}(Z)]$ figurent les congruences admettant pour enveloppée moyenne le point O, les congruences à surface moyenne plane (xOy), et les congruences à foyers associés équidistants d'une droite fixe (Oz), que j'ai étudiées en détail dans un Mémoire des présentes *Annales* [1], et que dans la suite, pour abréger, j'appellerai congruences des types respectifs (A), (B), (C).

[1] Sur trois types de congruences rectilignes. — *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1927.

Nous allons chercher ici, en déterminant leurs surfaces génératrices, les congruences des types (A), (B) ou C appartenant à un complexe linéaire d'axe Oz.

Les congruences générales du type (A) sont les transformées d'une congruence normale ($\mathfrak{N}$) arbitraire par la transformation $T\left[\frac{1}{Z}\right]$; les congruences du type (B) sont les transformées des congruences normales par $T[Z]$; enfin les congruences du type (C) sont les transformées des congruences normales par $T\left[\frac{1}{Z}-Z\right]$. On peut, pour ces trois résultats, se reporter au Mémoire des *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse* qui vient d'être cité, ou à celui des *Annales de l'Ecole Normale Supérieure* dont il est question plus haut.

Congruences du type (*A*) *situées dans un complexe linéaire d'axe* Oz. — La relation (10) montre que l'on doit avoir, pour ces congruences,

$$\frac{1}{Z}=\frac{1}{\cos u}=-\frac{1}{U'\sin u};$$

relation d'où l'on déduit :

$$U=\log\frac{k}{\sin u},$$

k étant une constante arbitraire que, moyennant une remarque faite au début du numéro 4, nous pouvons supposer égale à *un* :

$$U=\log\frac{1}{\sin u}.$$

Les surfaces génératrices des congruences (A) situées dans le complexe linéaire $N=Z$, peuvent donc être définies comme les enveloppes du cylindre dont la section droite (dans le plan xOz) est définie tangentiellement par l'équation

$$\sin u\,.\,x+\cos u\,.\,z=\log\frac{1}{\sin u},$$

lorsque ce cylindre tourne autour de l'axe Oz, tout en se dilatant suivant une loi absolument arbitraire.

Les congruences (A) elles-mêmes s'obtiennent en soumettant les congruences des normales aux enveloppes des cylindres ci-dessus à la transformation $T\left[\frac{1}{\cos u}\right]$. Les équations explicites de ces congruences se déduisent des formules générales (11), en substituant à $\mathfrak{U}=\frac{1}{\sin^2 u\,.\,U'}$, son expression actuelle qui est, puisque $U'=-\operatorname{cotg} u$:

$$\mathfrak{U}=-\frac{1}{\sin u\cos u}.$$

Les surfaces moyennes des congruences obtenues sont définies par les équations (13), qui s'écrivent ici :

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{X} &= \operatorname{cotg} u(\sin v - \mathfrak{V}\cos v),\\ \mathfrak{Y} &= -\operatorname{cotg} u(\cos v + \mathfrak{V}\sin v),\\ \mathfrak{Z} &= \mathfrak{V},\end{aligned}\right.$$

et qui représentent un conoïde quelconque d'axe Oz.

Les nappes focales des congruences que l'on vient de déterminer, que l'on obtient explicitement sans difficulté, fournissent les couples de surfaces conjuguées par rapport à un complexe linéaire dont les points homologues sont équidistants d'un point fixe situé sur l'axe du complexe.

Notons ce résultat, sur lequel nous reviendrons plus loin :

Les congruences à enveloppée moyenne point situées dans un complexe linéaire dont l'axe passe par le point moyen ont pour surfaces moyennes les différents conoïdes droits admettant pour axe l'axe du complexe.

Congruences (B) appartenant à un complexe linéaire d'axe Oz. — Pour obtenir ces congruences il faut prendre $\mathfrak{F}(Z) = Z$. (10) donne alors :

$$Z = \cos u = -\frac{1}{U' \sin u},$$

d'où

$$U' = -\frac{1}{\sin u \cos u},$$

et par suite, en négligeant une dilatation constante des cylindres enveloppant les surfaces génératrices,

$$U = \log \operatorname{tg} u,$$

conformément d'ailleurs à ce qu'on a vu au numéro 3.

Les surfaces génératrices des congruences (B) appartenant à un complexe linéaire d'axe Oz, sont donc les enveloppes du cylindre dont la section droite est définie tangentiellement par

$$\sin u \,.\, x + \cos u \,.\, y = \log \operatorname{tg} u,$$

lorsque ce cylindre tourne autour de Oz en subissant une dilatation fonction arbitraire de l'angle de rotation.

On obtient explicitement les congruences (B) elles-mêmes en substituant, dans les équations (11), à $\mathfrak{U} = \frac{1}{\sin^2 u \,.\, U'}$, son expression actuelle qui est $\mathfrak{U} = -\operatorname{cotg} u$.

Les nappes focales de ces congruences sont les différents couples de surfaces conjuguées par rapport à un complexe linéaire, dont les points homologues sont équidistants d'un plan fixe perpendiculaire à l'axe du complexe.

Congruences du type (C). — Elles correspondent à la fonction transformatrice

$$\mathfrak{F}(Z) = \frac{1}{Z} - Z = \frac{\sin^2 u}{\cos u};$$

l'équation (10) s'écrit ici :

$$\frac{\sin^2 u}{\cos u} = -\frac{1}{U' \sin u},$$

d'où

$$U' = -\frac{\cos u}{\sin^3 u},$$

et par suite, une dilatation étant toujours négligée,

$$U = \frac{1}{2 \sin^2 u}.$$

Les surfaces génératrices des congruences (C) appartenant à un complexe linéaire d'axe Oz, sont les enveloppes du cylindre dont la section droite est définie tangentiellement par

$$\sin u \,.\, x + \cos u \,.\, y = \frac{1}{2 \sin^2 u},$$

lorsque ce dernier tourne autour de Oz en se dilatant suivant une loi arbitraire.

Les congruences (C) du complexe se déduisent des congruences des normales aux surfaces ci-dessus par la transformation $T\left[\frac{\sin^2 u}{\cos u}\right]$. Les équations explicites de ces congruences s'obtiennent comme on l'a déjà expliqué au sujet des congruences (A) et (B). Les surfaces moyennes de ces mêmes congruences sont définies par les formules (13), qui, compte tenu de $\mathfrak{U} = \frac{1}{\sin^2 u \,.\, U'}$ et de la valeur de U' $\left(U' = -\frac{\cos u}{\sin^3 u}\right)$, s'écrivent :

$$(17) \qquad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{X} &= \operatorname{cotg} u \sin v, \\ \mathfrak{Y} &= -\operatorname{cotg} u \cos v, \\ \mathfrak{Z} &= \mathfrak{V}; \end{aligned} \right.$$

$\mathfrak{V}$ étant, comme toujours, une fonction arbitraire de v seul. Les équations (17) représentent, tout comme les équations (16) relatives aux congruences (A), la famille des *conoïdes droits d'axe* Oz.

Nous avons supposé, jusqu'ici, le paramètre du complexe linéaire envisagé égal à *un*. Si l'on fixe, en même temps, l'axe Oz du complexe et un conoïde d'axe Oz, et si l'on fait varier le paramètre du complexe, on voit que le conoïde considéré est la surface moyenne d'une infinité de congruences des types (A) ou (C) appartenant toutes à des complexes linéaires d'axe Oz, et l'on peut énoncer le résultat suivant :

Tout conoïde droit peut être regardé comme la surface moyenne de deux familles de congruences, l'une formée de congruences admettant pour enveloppées moyennes un point de l'axe du conoïde, l'autre formée de congruences à foyers associés équidistants de cet axe, toutes les congruences de l'une ou l'autre des deux familles appartenant à des complexes linéaires admettant pour axe l'axe du conoïde.

Si $\mathfrak{V} = 0$ [*voir* les équations (16) et (17)], les deux familles de congruences ci-dessus se confondent en une seule. Si l'on néglige une homothétie (si l'on suppose le paramètre du complexe égal à un), on obtient une congruence appartenant à la fois aux types (A) et (C), définie par les équations suivantes donnant les coordonnées (x, y) du point où le rayon de cosinus directeurs X, Y, Z [définis par les formules (6)] perce le plan xOy :

$$\left\{\begin{aligned} x &= \operatorname{cotg} u \sin v, \\ y &= -\operatorname{cotg} u \cos v. \end{aligned}\right. \tag{18}$$

Il est d'ailleurs évident géométriquement que cette congruence appartient aussi au type (B).

La congruence ci-dessus offre un exemple intéressant de congruences (signalées au numéro 4) pouvant être regardées, d'une infinité de façons, comme transformées de congruences normales par des transformations $T[\mathcal{F}(Z)]$. Suivant que l'on envisage la congruence comme appartenant au type (A), (B) ou (C), la surface génératrice (de révolution puisque la dilatation $\mathfrak{V}$ du cylindre qui la détermine comme enveloppe est nulle) admet pour méridienne l'une des courbes définies tangentiellement par les équations :

$$\left\{\begin{aligned} \sin u \,.\, x + \cos u \,.\, y &= \log \frac{1}{\sin u}, \\ \sin u \,.\, x + \cos u \,.\, y &= \log \operatorname{tg} u, \\ \sin u \,.\, x + \cos u \,.\, y &= \frac{1}{2 \sin^2 u}, \end{aligned}\right.$$

les fonctions transformatrices relatives à chaque cas étant

$$\frac{1}{\cos u}, \qquad \cos u, \qquad \frac{\sin^2 u}{\cos u}.$$

En ce qui concerne les équations (17) définissant la surface moyenne d'une congruence d'un complexe linéaire à foyers associés équidistants de l'axe du complexe, on peut faire la remarque suivante. Ces équations montrent qu'étant donnée une congruence quelconque du type envisagé, *si l'on soumet chaque série de rayons s'appuyant sur une même génératrice du conoïde moyen à une translation* *parallèle à l'axe du complexe, la loi de variation de cette translation lorsqu'on passe d'une génératrice du conoïde moyen à une autre étant choisie de façon absolument arbitraire, on obtient une autre congruence du même type.*

La construction précédente permet, comme l'on voit, de déduire très simplement, toutes les congruences d'un complexe linéaire à foyers associés équidistants de l'axe du complexe de l'une quelconque d'entre elles, par exemple *de la congruence des normales à un hélicoïde minima réglé de même axe que le complexe* qui est évidemment une congruence particulière de la famille considérée ici.

6. Portons maintenant plus spécialement notre attention sur les congruences du type (A) (à enveloppée moyenne point).

Soit $\mathcal{C}$ un conoïde droit quelconque d'axe Δ. O étant un point quelconque de Δ il existe, comme on l'a vu au numéro précédent, ∞^1 congruences admettant pour enveloppée moyenne le point O et appartenant à des complexes linéaires d'axe Δ; chaque complexe d'axe Δ individualise l'une de ces congruences.

Si l'on considère un complexe linéaire d'axe Δ déterminé, et si l'on envisage les ∞^1 positions que peut occuper O sur Δ, on peut dire qu'à chacune de ces positions correspond une congruence du complexe admettant pour enveloppée moyenne le point O correspondant. On voit donc que :

Tout conoïde d'axe Δ peut être considéré comme la surface moyenne d'une double infinité de congruences admettant pour enveloppée moyenne un point situé sur Δ et appartenant à des complexes linéaires d'axe Δ; tout point O de Δ fournit ∞^1 congruences distribuées dans les ∞^1 complexes d'axe Δ, et tout complexe d'axe Δ fournit ∞^1 congruences différant par la position qu'occupe O sur Δ.

L'ensemble des congruences admettant pour enveloppées moyennes les différents points d'une droite Δ et appartenant à des complexes linéaires d'axe Δ est susceptible d'une construction géométrique simple, qui est à rapprocher de celle qui donne les congruences d'un complexe linéaire à foyers associés équidistants de l'axe du complexe à partir de la congruence des normales à un hélicoïde minima réglé.

Donnons-nous arbitrairement un complexe linéaire Γ d'axe Δ, un conoïde droit $\mathcal{C}$ dont l'axe est celui du complexe, et un point O sur Δ; nous individualisons ainsi la congruence A la plus générale de l'ensemble envisagé. M étant un point quelconque du conoïde $\mathcal{C}$, on peut construire le rayon D de la congruence A issu du point M de la façon suivante.

M étant le point moyen sur D, et le plan moyen correspondant passant par O, D est dans le plan P perpendiculaire en M à OM. En outre, D, appartenant au complexe Γ, est situé dans le plan polaire, π, du point M, par rapport au complexe (plan qui passe par la génératrice du conoïde $\mathcal{C}$ contenant le point M). D est donc la droite d'intersection des deux plans distincts P et π.

Si l'on envisage les ∞^1 congruences (A) du complexe Γ admettant pour surface moyenne le conoïde $\mathcal{C}$, on voit que les rayons de ces ∞^1 congruences issus d'un même point M de $\mathcal{C}$ *sont dans un même plan* (le plan polaire π de M). Tout point M de $\mathcal{C}$ est le centre d'un faisceau plans de rayons, et les ∞^1 faisceaux relatifs aux différents points de $\mathcal{C}$ jouissent de la propriété suivante :

Si l'on considère comme homologues, dans les différents faisceaux, les rayons appartenant à la même congruence, les ∞^2 faisceaux sont homographiques.

Soient, en effet, A_1, A_2, A_3, A_4 quatre congruences (A) relatives aux points O_1, O_2, O_3, O_4 de Δ, et D_1, D_2, D_3, D_4 les rayons de ces congruences issus d'un même point M de $\mathcal{C}$. D_1, D_2, D_3, D_4 sont les intersections, du plan polaire π de M relativement au complexe Γ, avec les plans P_1, P_2, P_3, P_4 perpendiculaires en M à O_1M, O_2M, O_3M, O_4M respectivement. Ces plans appartiennent à un faisceau ayant pour axe la perpendiculaire en M au plan (M, Δ); on a donc :

$$(D_1, D_2, D_3, D_4) = (P_1, P_2, P_3, P_4) = (O_1, O_2, O_3, O_4).$$

(D_1, D_2, D_3, D_4) ne dépend que des quatre points O_1, O_2, O_3, O_4, et nullement de la position occupée par le point M sur $\mathcal{C}$. La proposition annoncée se trouve donc établie.

7. Les expressions (*voir* le numéro 2) des trois dernières coordonnées pluckériennes L, M, N, de la droite transformée du rayon générateur d'une congruence normale quelconque $\mathfrak{N}$ par une transformation $T[\mathcal{F}(Z)]$,

$$L = Z\mathcal{F}(Z)\,\Delta(\Phi, X), \qquad M = Z\mathcal{F}(Z)\,\Delta(\Phi, Y), \qquad N = Z\mathcal{F}(Z)\,\Delta(\Phi, Z),$$

montrent que si l'on envisage, non plus un complexe linéaire, mais un complexe quelconque Γ dont l'équation $\varphi(X, Y, Z, L, M, N) = 0$ est *homogène* en L, M, N, *toutes les congruences transformées de $\mathfrak{N}$ par les différentes $T[\mathcal{F}(Z)]$ possibles sont dans Γ dès que l'une d'elles y est*; les différentes transformées sont d'ailleurs évidemment deux à deux en transformation $\mathcal{H}[\Theta(Z)]$ (*voir* le numéro 4).

En particulier, si l'on a égard aux congruences des types (A), (B), (C) dont il a été question dans les numéros précédents, on voit qu'un complexe Γ qui contient des transformées $T[\mathcal{F}(Z)]$ de congruences normales *contient toujours des congruences des trois types ci-dessus*. Il contient d'ailleurs autant de congruences de chacun de ces types qu'il y a de congruences normales dont les transformées par $T[\mathcal{F}(Z)]$ sont dans le complexe. Chacune des congruences normales $\mathfrak{N}$ en question fournit (à une homothétie éventuelle près), une congruence (A), une congruence (B) et une congruence (C), appartenant au complexe; ces congruences sont, respectivement, transformées de $\mathfrak{N}$ par les transformations $T\left[\frac{1}{Z}\right]$, $T[Z]$ et $T\left[\frac{1}{Z} - Z\right]$; elles sont deux à deux en transformation $\mathcal{H}[\Theta(Z)]$, c'est-à-dire se correspondent deux à deux avec homothétie, relativement à O, des surfaces réglées admettant pour image sphérique un même parallèle quelconque d'axe Oz.

Envisageons, par exemple, le complexe (tétraédral) des droites normales à leurs conjuguées par rapport à une quadrique (non réduite à une sphère) :

$$Q \equiv \frac{x^2}{l} + \frac{y^2}{m} + \frac{z^2}{n} - 1 = 0,$$

complexe dont l'équation est :

$$(19) \qquad aLX + bMY = 0$$
$$(a = l - n, \qquad b = m - n).$$

(19) est homogène en L, M, et le complexe est du type Γ dont il a été question plus haut.

Cherchons les congruences normales dont les transformées par des $T[\mathcal{F}(Z)]$ sont dans le complexe. En remplaçant dans (19) L et M par leurs expressions, et en posant, comme il est légitime, $a = 1$, on obtient l'équation :

$$(20) \qquad X\,\Delta(\Phi, X) + bY\,\Delta(\Phi, Y) = 0,$$

qui définit, par leurs surfaces podaires, les congruences normales cherchées.

Avec les notations du numéro 2, l'équation (20) s'écrit :

$$(21) \qquad \sin u \cos u \frac{\partial \Phi}{\partial u} + (b - 1)\frac{\sin v \cos v}{\cos^2 v + b \sin^2 v}\frac{\partial \Phi}{\partial v} = 0;$$

et l'on en déduit immédiatement :

$$\Phi \equiv \Phi\,[\sin v\,(\cos v)^{-b}\,(\operatorname{tg} u)^{1-b}],$$

Φ étant regardé comme un symbole de fonction arbitraire.

Les congruences normales dont les transformées par une $T[\mathcal{F}(Z)]$ (*arbitraire*) sont dans le complexe Γ, sont les congruences des normales aux surfaces S définies tangentiellement par l'équation

$$(S) \qquad \sin u \cos v \,.\, x + \sin u \sin v \,.\, y + \cos u \,.\, z = \Phi\,[\sin v(\cos v)^{-b}\,(\operatorname{tg} u)^{1-b}].$$

Les congruences à enveloppée moyenne point (O) situées dans le complexe Γ ont pour surfaces génératrices les surfaces (S), et la fonction transformatrice correspondante est $\dfrac{1}{Z} = \dfrac{1}{\cos u}$.

Les coordonnées du point (x, y) où le rayon générateur d'une telle congruence perce le plan xOy, sont données par les équations (1) où $\mathcal{F}(Z) = \dfrac{1}{\cos u}$ et où $\Phi = \Phi[\sin v (\cos v)^{-b} (\mathrm{tg}\, u)^{1-b}]$; on trouve en négligeant une symétrie relativement à O :

$$(22) \qquad \begin{cases} x = \Phi'(\mathrm{tg}\, u)^{-b} (\cos v)^{-1-b} \dfrac{\cos v}{\cos^2 u}, \\ y = b\Phi'(\mathrm{tg}\, u)^{-b} (\cos v)^{-1-b} \dfrac{\sin v}{\cos^2 u}, \end{cases}$$

équations où Φ' représente la dérivée de Φ par rapport à son argument.

Les équations des congruences à surface moyenne plane (xOy) et à foyers associés équidistants de Oz, situées dans le complexe tétraédral Γ, peuvent se déduire des équations (22).

La fonction $\Theta(Z)$, qui définit la transformation $\mathcal{H}[\Theta(Z)]$ faisant passer d'une congruence (A) à enveloppée moyenne point à une congruence (B) à surface moyenne plane, est le quotient des fonctions transformatrices Z et $\dfrac{1}{Z}$ relatives à (B) et (A); cette fonction est donc $\Theta(Z) = Z^2 = \cos^2 u$. Les équations définissant, par les coordonnées (x, y) du point où un rayon quelconque de cosinus directeurs

$$X = \sin u \cos v, \qquad Y = \sin u \sin v, \qquad Z = \cos u$$

perce le plan xOy, la congruence à surface moyenne plane (xOy) la plus générale située dans le complexe Γ, s'obtiennent en multipliant les coordonnées x, y figurant dans (22) par $\cos^2 u$; on trouve ainsi les équations générales

$$(23) \qquad \begin{cases} x = \Phi'(\mathrm{tg}\, u)^{-b} (\cos v)^{-1-b} \cos v, \\ y = b\Phi'(\mathrm{tg}\, u)^{-b} (\cos v)^{-1-b} \sin v. \end{cases}$$

De même, pour avoir les équations de la congruence à foyers associés équidistants de Oz la plus générale située dans le complexe Γ, il suffit de multiplier, dans (22), x et y par le quotient des fonctions transformatrices relatives aux congruences des types (C) et (A), soit :

$$\frac{\dfrac{1}{Z} - Z}{\dfrac{1}{Z}} = 1 - Z^2 = \sin^2 u.$$

Ces équations sont donc :

$$(24) \qquad \begin{cases} x = \Phi'(\mathrm{tg}\, u)^{2-b} (\cos v)^{-1-b} \cos v, \\ y = b\Phi'(\mathrm{tg}\, u)^{2-b} (\cos v)^{-1-b} \sin v. \end{cases}$$

8. Nous allons, pour terminer, reprendre pour la transformation $\mathcal{H}[\Theta(Z)]$ définie au numéro 4, et consistant à remplacer chaque rayon d'une congruence rectiligne de cosinus directeurs X, Y, Z par son homothétique dans l'homothétie de centre O et de rapport $\Theta(Z)$, le problème que l'on vient d'étudier pour la transformation $T[\mathcal{F}(Z)]$. Cherchons s'il existe des congruences normales transformables, par des transformations $\mathcal{H}[\Theta(Z)]$, en congruences appartenant à un complexe linéaire d'axe Oz, complexe dont, négligeant une homothétie, nous prendrons encore l'équation sous la forme $N = Z$.

Il se trouve qu'il existe effectivement de telles congruences, et que leurs surfaces orthogonales sont susceptibles d'une définition, comme enveloppes de cylindres, très analogue à celle des surfaces génératrices des congruences d'un complexe linéaire dont il est question dans les numéros qui précèdent.

Soit $\mathcal{N}$ une congruence normale arbitraire, définie, par sa surface podaire, au moyen des équations (3) où Φ est une fonction arbitraire des deux variables u et v qui fixent les différents rayons. Les coordonnées pluckériennes du rayon générateur de $\mathcal{N}$ sont :

$$\left\{\begin{aligned} &X, \quad Y, \quad Z, \\ &L = Z\,\Delta(\Phi, Y) - Y\,\Delta(\Phi, Z), \\ &M = X\,\Delta(\Phi, Z) - Z\,\Delta(\Phi, X), \\ &N = Y\,\Delta(\Phi, X) - X\,\Delta(\Phi, Z); \end{aligned}\right.$$

celles du rayon générateur de la congruence $\mathcal{N}'$ transformée de $\mathcal{N}$ par $\mathcal{H}[\Theta(Z)]$ sont par suite :

$$\left\{\begin{aligned} &X, \quad Y, \quad Z, \\ &L' = \Theta(Z)\,[Z\Delta(\Phi, Y) - Y\Delta(\Phi, Z)], \\ &M' = \Theta(Z)\,[X\Delta(\Phi, Z) - Z\Delta(\Phi, X)], \\ &N' = \Theta(Z)\,[Y\Delta(\Phi, X) - X\Delta(\Phi, Y)]. \end{aligned}\right.$$

$\mathcal{N}'$ appartiendra au complexe $N = Z$ si l'on a

$$Y\Delta(\Phi, X) - X\Delta(\Phi, Y) = \frac{Z}{\Theta(Z)} = \mathcal{F}(Z),$$

soit, avec la représentation sphérique (6) du numéro 2, et tenant compte des expressions (7) :

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u} = U, \qquad [U = -\mathcal{F}(\cos u)],$$

et par suite, la constante additive dans Φ pouvant être négligée,

$$(25) \qquad \Phi = Uv.$$

Les seules congruences normales qui admettent des transformées $\mathcal{H}[\Theta(Z)]$ situées dans un complexe linéaire d'axe Oz, sont donc celles qui sont définies par l'équation (25), où U est une fonction arbitraire de la seule variable u. La fonction $\Theta(Z)$ réalisant la transformation est alors :

$$\Theta(Z) = \frac{Z}{\mathcal{F}(Z)} = -\frac{\cos u}{U}.$$

Les congruences normales que l'on vient d'obtenir sont susceptibles d'une définition géométrique, qui est à rapprocher de la définition des congruences normales transformables en congruences d'un complexe linéaire d'axe Oz par une transformation $T[\mathcal{F}(Z)]$.

Les surfaces orthogonales aux rayons de ces congruences (surfaces génératrices des congruences transformées), sont définies tangentiellement par l'équation

$$\sin u \cos v \,.\, x + \sin u \sin v \,.\, y + \cos u \,.\, z = Uv.$$

Pour v donné, le plan précédent enveloppe un cylindre arbitraire de génératrices perpendiculaires à Oz, et, lorsque v varie, ce cylindre tourne autour de Oz, en subissant une homothétie de centre O de rapport proportionnel à l'angle de rotation. On peut donc énoncer le résultat suivant :

Les congruences normales transformables par une $\mathcal{H}[\Theta(Z)]$ *en congruences appartenant à un complexe linéaire d'axe* Oz, *sont constituées par les normales aux surfaces enveloppes d'un cylindre arbitraire de génératrices perpendiculaires à* Oz, *lorsque celui-ci tourne autour de* Oz *en subissant une homothétie de centre* O *de rapport proportionnel à l'angle de rotation.*

Un exemple simple de congruences normales, transformables en congruences d'un complexe linéaire d'axe Oz par une transformation $\mathcal{H}[\Theta(Z)]$, est fourni par les congruences des normales à l'enveloppe d'un cylindre de révolution dont l'axe est perpendiculaire en O à Oz, le cylindre tournant autour de Oz en subissant une homothétie de centre O et de rapport proportionnel à l'angle de rotation. On obtient ces congruences avec $U = a = \text{const.}$; elles sont constituées, comme on le voit sans peine, *par les tangentes communes à deux paraboloïdes de révolution d'axe* Oz *et de foyer* O, *symétriques par rapport au point* O. La fonction $\Theta(Z)$ qui opère la transformation est ici $-\cos u$, et les congruences transformées, dont la détermination est immédiate, sont constituées *par les tangentes communes à deux paraboloïdes de révolution d'axe* Oz *et de sommet* O, *symétriques par rapport au point* O.