

PAUL CARNET

Ondes imaginaires dans l'espace à canaux suivi de l'atome et la nébuleuse spirale dans une métrique riemannienne dépendant du temps

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 4^e série, tome 7 (1943), p. 1-70

http://www.numdam.org/item?id=AFST_1943_4_7_1_0

© Université Paul Sabatier, 1943, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ANNALES
DE LA
FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE,
POUR LES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET LES SCIENCES PHYSIQUES.

ONDES IMAGINAIRES DANS L'ESPACE A CANAUX

SUIVI DE

L'ATOME ET LA NÉBULEUSE SPIRALE

DANS UNE MÉTRIQUE RIEMANNIENNE A POTENTIELS DÉPENDANT DU TEMPS

Par PAUL CARNET

PREMIÈRE PARTIE

ONDES IMAGINAIRES DANS L'ESPACE A CANAUX

Cette Première Partie développe quelques conséquences physiques d'une récente étude de M. A. Buhl [1, p. 14], [2] sur la *Géométrie des espaces à canaux*, cas particuliers des espaces fibrés de W. Threlfall [3, pp. 242-255]. Ces recherches s'apparentent également à celles de Georges Humbert sur les invariants géométriques intégraux transportés par des surfaces variables [4]. L'idée fondamentale est que, moyennant un cloisonnement convenable de l'espace, certaines intégrales, attachées à l'élément superficiel, peuvent être propagées par des surfaces variables, véritables fronts d'ondes lorsqu'elles dépendent du temps, et que ces concepts peuvent subsister sur des ensembles *discontinus*, c'est-à-dire sur des fragments de surface non raccordés, se propageant chacun pour son propre compte dans leurs compartiments respectifs. C'est cet abandon de la continuité tangentielle joint à l'invariance canale qui font de la canalisation spatiale un instrument de recherche physique, car elle se plie éminemment [1, p. 20, 39] aux problèmes de la Mécanique moderne; elle comporte même schématiquement en elle des aspects tourbillonnaires, corpusculaires et ondulatoires qui peuvent prendre des significations physiques.

Nous avons voulu montrer que, moyennant un certain cloisonnement spatial et une hypothèse simple d'invariance géométrique, on est amené à considérer, dans l'espace à canaux, des ondes se propageant d'une manière discontinue à la vitesse de la lumière, qui donnent, par une correspondance facile à saisir, une règle relativiste de composition des vitesses dans le champ gravitationnel, une règle de construction du champ de deux masses finies, point de départ du problème des deux corps, et qui conduisent à la formation d'un hamiltonien dont l'intégration classique donne les équations des trajectoires planétaires d'Einstein.

Il s'agit là d'ondes liées à des points ou des milieux mobiles de même qu'on rencontre en Mécanique ondulatoire des ondes imaginaires associées à des mouvements ponctuels ou d'ensemble [v. par exemple 16].

Une Seconde Partie⁽¹⁾, conduite selon la méthode relativiste habituelle, redonne en les analysant les résultats géométriques de la première, puis en fait l'application aux champs gravitationnels de l'atome et de la nébuleuse spirale, champs qui se révèlent très voisins, pour ne pas dire structurellement identiques.

Nous n'ignorons pas que les rapprochements entre l'espace astronomique et le microcosme ne sont pas conformes à toutes les appréciations. Ainsi M. Louis de Broglie dans *Matière et Lumière* (1937; p. 289) écrit textuellement : « Dans le monde physique, l'infiniment petit n'est pas une réduction homothétique de l'infiniment grand ».

Mais M. Jean Thibaud dans *Vie et Transmutation des Atomes* (1937) parle (p. 23) des deux infinis de Pascal et décrit les atomes comme « de petites cellules d'espace renfermant une manière d'univers en raccourci ». Plus loin, le même auteur (p. 205) rappelle que l'abbé Lemaître a proposé de « considérer l'univers entier comme un immense atome dont les rayons cosmiques seraient les rayons X ».

Du moment que l'on n'oublie pas le caractère spéculatif de telles opinions, il est certainement permis de noter les circonstances mathématiques qui pourraient les corroborer aussi bien que les circonstances qui pourraient les infirmer.

*
* *

Ce travail, accepté comme Thèse de Doctorat, est maintenant une œuvre posthume, la mort ayant surpris Paul Carnet, en 1943, avant même qu'il ait pu recevoir des épreuves. J'adresse un souvenir ému à sa mémoire. A. B.

1. La notation (A. I, 1) renverra à la Seconde Partie, chap. I, paragr. 1, tandis que dans la Seconde la notation (O. I, 1) renverra de même à la première.

CHAPITRE PREMIER

Préliminaires. — Trajectoires planétaires dans le plan à canaux.

Rappelons d'abord brièvement les bases de la théorie telle qu'elle est exposée dans le Mémoire [1] et extrayons-en les résultats qui seront utilisés par la suite.

L'idée directrice est l'exploitation des schèmes mathématiques dérivés de la formule de Stokes. Les développements les plus divers sont axés sur cette identité intégrale fondamentale qui, comme on le sait, est génératrice de correspondances physico-géométriques remarquables. C'est ainsi que tout l'électro-magnétisme maxwellien peut être déduit d'une identité stokienne à quatre dimensions et que la Gravifique einsteinienne s'est révélée elle aussi comme issue de la même origine (Th. De Donder [5], A. Buhl [6] et [7, p. 3], E. Goursat [8, p. 151]).

1.

Partant de l'identité

$$(1) \quad \int_C X dY = \int \int_A dX dY,$$

et lui appliquant un premier changement de variables

$$(2) \quad X = X(P, Q), \quad Y = Y(P, Q),$$

puis un second

$$P = P(x, y, z), \quad Q = Q(x, y, z),$$

dans lequel z appartient à une surface d'équation $z = z(x, y)$, M. Buhl déduit de (1) tout d'abord la formule de Riemann

$$\int_{C'} U dP + V dQ = \int \int_{A'} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial P} & \frac{\partial}{\partial Q} \\ U & V \end{vmatrix} dP dQ$$

dans laquelle on a posé

$$(3) \quad U = X \frac{\partial Y}{\partial P}, \quad V = X \frac{\partial Y}{\partial Q},$$

puis la formule fondamentale

$$(4) \quad \int_{\Sigma} U dP + V dQ = \int_{\sigma} \int_{\sigma} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial P} & \frac{\partial}{\partial Q} \\ U & V \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} d\sigma,$$

où l'aire σ limitée par le contour Σ résulte de la double transformation de l'aire A enfermée dans C . Dans le deuxième déterminant, les dérivées partielles sont représentées par l'indice indiquant la variable de dérivation [1, p. 14]. Il déduit de (4) la formule de Stokes, en faisant correspondre au binôme différentiel $U dP + V dQ$ le trinôme $F dx + G dy + H dz$, ce qui montre la connexion de son problème avec la réduction des formes de Pfaff [8].

Mais venons-en à l'introduction des canaux. En vue des applications qui doivent suivre, nous transposerons les formules de M. Buhl en coordonnées semi-polaires. Soit $f(r, \psi, z) = 0$ l'équation de la surface σ . Les formules de transformation $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\psi = \text{Arc tg } \frac{y}{x}$, appliquées à une fonction quelconque $g(x, y, z)$ donnent, en tenant compte de leurs inverses, $x = r \cos \psi$, $y = r \sin \psi$,

$$g_x = g_r \frac{\partial r}{\partial x} + g_{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial x} = g_r \cos \psi - g_{\psi} \frac{\sin \psi}{r}$$

$$g_y = g_r \frac{\partial r}{\partial y} + g_{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial y} = g_r \sin \psi + g_{\psi} \frac{\cos \psi}{r}.$$

Comme

$$\alpha = \frac{f_x}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2}}, \quad \beta = \frac{f_y}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2}}, \quad \gamma = \frac{f_z}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2}},$$

le second déterminant de (4) devient

$$\frac{1}{\sqrt{f_r^2 + \frac{1}{r^2} f_{\psi}^2 + f_z^2}} \cdot \begin{vmatrix} f_r \cos \psi - f_{\psi} \frac{\sin \psi}{r} & f_r \sin \psi + f_{\psi} \frac{\cos \psi}{r} & f_z \\ P_r \cos \psi - P_{\psi} \frac{\sin \psi}{r} & P_r \sin \psi + P_{\psi} \frac{\cos \psi}{r} & P_z \\ Q_r \cos \psi - Q_{\psi} \frac{\sin \psi}{r} & Q_r \sin \psi + Q_{\psi} \frac{\cos \psi}{r} & Q_z \end{vmatrix}$$

ou bien

$$\frac{1}{\sqrt{f_r^2 + \frac{1}{r^2} f_{\psi}^2 + f_z^2}} \begin{vmatrix} f_r & \frac{1}{r} f_{\psi} & f_z \\ P_r & \frac{1}{r} P_{\psi} & P_z \\ Q_r & \frac{1}{r} Q_{\psi} & Q_z \end{vmatrix} = D(f; r, \psi, z).$$

Si l'on désigne par A_i les termes de la première colonne du premier déterminant, par B_i ceux de la deuxième (avec $i = 1, 2, 3$), le deuxième déterminant s'obtient en remplaçant dans le premier les termes de la première colonne par $A_i \cos \psi + B_i \sin \psi$, et ceux de la deuxième par $B_i \cos \psi - A_i \sin \psi$.

La formule (4) devient alors

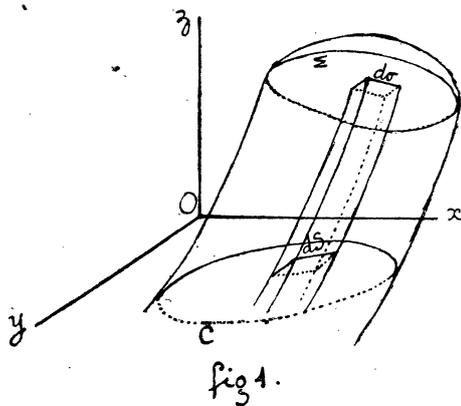
$$(4 \text{ bis}) \quad \int_{\Sigma} U dP + V dQ = \int \int_{\sigma} \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial P} & \frac{\partial}{\partial Q} \\ U & V \end{array} \right| \begin{vmatrix} f_r & \frac{1}{r} f_{\psi} & f_z \\ P_r & \frac{1}{r} P_{\psi} & P_z \\ Q_r & \frac{1}{r} Q_{\psi} & Q_z \end{vmatrix} \frac{d\sigma}{\sqrt{f_r^2 + \frac{1}{r^2} f_{\psi}^2 + f_z^2}}$$

ou bien

$$\int_{\Sigma} U dP + V dQ = \int \int_{\sigma} \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial P} & \frac{\partial}{\partial Q} \\ U & V \end{array} \right| D(f; r, \psi, z) d\sigma,$$

P et Q étant maintenant exprimés avec les variables r, ψ, z .

Considérons les deux ensembles de surfaces obtenues en donnant aux constantes C_1, C_2 , des équations $P(r, \psi, z) = C_1, Q(r, \psi, z) = C_2$, des ensembles de valeurs infiniment voisines. Nous cloisonnons l'espace en une infinité de canaux à section quadrangulaire qui découpent sur la surface σ des éléments $d\sigma$ de coordonnées r, ψ, z . Imaginons, sécant ces canaux, une surface S de contour C et d'équation $\Phi(R, \Psi, Z) = 0$.



Le canal Γ , qui découpe l'élément $d\sigma$, détermine sur S l'élément dS de coordonnées R, Ψ, Z et, sur toute l'étendue du canal, dP et dQ doivent être considérés comme constants. On a donc, en désignant par $\Lambda(P, Q)$ le premier déterminant du second membre de (4 bis),

$$(5) \quad \Lambda(P, Q) dP dQ = \Lambda(P, Q) \cdot D(f; r, \psi, z) d\sigma = D(\Phi; R, \Psi, Z) \cdot \Lambda(P, Q) dS,$$

P et Q devant évidemment être écrits dans le second membre avec les variables r, ψ, z et dans le troisième avec les variables R, Ψ, Z .

Soit maintenant une fonction quelconque $\Theta(R, \Psi, Z)$. Posons

$$(6) \quad \frac{1}{\Theta} \cdot D(\Phi; R, \Psi, Z) = \Delta(R, \Psi, Z).$$

On peut, dans ce Δ , exprimer R, Ψ, Z à l'aide de P, Q et de Φ , en résolvant par rapport à R, Ψ, Z le système

$$P(R, \Psi, Z) = P, \quad Q(R, \Psi, Z) = Q, \quad \Phi(R, \Psi, Z) = \Phi,$$

et comme le point R, Ψ, Z appartient à la surface S , on peut remplacer Φ par zéro. D'où finalement

$$\Delta(R, \Psi, Z) = \Delta_1(o, P, Q).$$

On tire alors de (5)

$$\Lambda(P, Q) \cdot D(f; r, \psi, z) \cdot d\sigma = \Delta_1(o, P, Q) \cdot \Lambda(P, Q) \cdot \Theta dS.$$

Comme $\Lambda(P, Q)$ n'a pas encore été déterminé, on peut en profiter pour poser

$$\Lambda(P, Q) = \frac{1}{\Delta_1(o, P, Q)},$$

d'où

$$\Theta dS = \frac{1}{\Delta_1(o, P, Q)} \cdot D(f; r, \psi, z) \cdot d\sigma;$$

ce qui donne l'intégrale $\int \int \Theta dS$, le long de l'aire de contour C , par une intégrale double stokienne qu'on transformerait en une intégrale de ligne attachée au contour Σ en déterminant U et V par la condition différentielle

$$\frac{\partial V}{\partial P} - \frac{\partial U}{\partial Q} = \frac{1}{\Delta_1(o, P, Q)},$$

et en calculant la somme qui est au premier membre de (4),

$$\int \int_C \Theta dS = \int_{\Sigma} U dP + V dQ.$$

La formule (4) joue donc dans l'espace à canaux le même rôle que la formule de Stokes dans l'espace ordinaire; c'est la *formule de Stokes pour espaces à canaux*.

2. — Propagation d'intégrales d'aires invariantes.

Cherchons toutes les surfaces S^* pour lesquelles l'intégrale $\int \int \Theta dS$ ait une valeur constante σ dans le canal fini Γ . Soit $\Pi(\rho, \omega, \zeta) = 0$ une telle surface. On aura

$$(7) \quad \frac{1}{\Theta} D(\Phi; R, \Psi, Z) \cdot \Lambda(P, Q) \cdot \Theta dS = \frac{1}{\Theta} \cdot D(\Pi; \rho, \omega, \zeta) \cdot \Lambda(P, Q) \Theta dS^*;$$

et comme on doit avoir

$$\Theta(R, \Psi, Z) dS = \Theta(\rho, \omega, \zeta) dS^*,$$

il en résulte que les deux multiplicateurs de ces quantités dans l'égalité (6), et par suite $\Delta(R, \Psi, Z)$ et $\Delta^*(\rho, \omega, \zeta)$, doivent être égaux. En les transformant comme ci-dessus, on obtient

$$\Delta_1(\Phi, P, Q) = \Delta_1^*(\Pi, P, Q),$$

et comme $\Phi = 0$ pour le point (R, Ψ, Z) , de même que $\Pi = 0$ pour le point (ρ, ω, ζ) ,

$$\Delta_1(0, P, Q) = \Delta_1^*(0, P, Q).$$

De sorte que l'égalité (6)

$$(8) \quad \frac{1}{\Theta} \cdot D(\Phi; R, \Psi, Z) = \Delta_1(0, P, Q)$$

subsistera pour d'autres surfaces que $\Phi = 0$, à savoir pour toutes les surfaces S^* , d'équation $\Pi = 0$, cherchées. On les obtiendra donc par intégration de l'équation aux dérivées partielles (8).

Pour calculer effectivement $\Delta_1(0, P, Q)$, on remarquera que, d'après (5), et puisque $\Theta dS = d\sigma$,

$$(9) \quad \Delta_1(0, P, Q) = \Delta(R, \Psi, Z) = D(f; r, \psi, z) = \Gamma(r, \psi, z).$$

On exprimera r, ψ, z à l'aide de P, Q, f comme précédemment et l'on aura

$$(9 \text{ bis}) \quad \Delta_1(0, P, Q) = \Gamma_1(f, P, Q) = \Gamma_1(0, P, Q).$$

Les surfaces S^* *propagent* ainsi, dans les canaux Γ , des intégrales d'aires invariantes. Si ces surfaces dépendent du temps, on a l'image d'une *propagation ondulatoire*. Mais ce qui est très remarquable, c'est que les éléments, différentiels ou finis, de la surface S^* peuvent très bien n'être pas raccordés d'un canal à l'autre.

Les formules subsistent grâce au cloisonnement de l'espace en canaux. Si plusieurs familles différentes de surfaces S^* répondent à la question, ce qui est le cas général, on pourra considérer dans un canal le mouvement d'un élément pris dans l'une des familles, puis dans le canal voisin le mouvement d'un élément pris dans une autre famille et ainsi de suite. On aura ainsi l'image d'un *déplacement corpusculaire*. C'est de cette possibilité que nous tirerons la principale des applications qui vont suivre (n° 5).

3. — Les trajectoires planétaires dans le plan à canaux. Génération par double mouvement.

Proposons-nous de rechercher les courbes planes dont l'élément d'arc répond à la définition

$$dS^2 = F(r) d\psi^2,$$

avec $F(r)$ polynôme en r . La particularisation à la géométrie plane des formules du n° 2 va sans nulle difficulté. Les formules (8) et (9) donnent

$$(10) \quad \left| \begin{array}{c} f_r \quad \frac{1}{r} f_\psi \\ P_r \quad \frac{1}{r} P_\psi \end{array} \right| \frac{1}{\sqrt{f_r^2 + \frac{1}{r^2} f_\psi^2}} = \left| \begin{array}{c} \Phi_R \quad \frac{1}{R} \Phi_\Psi \\ P_R \quad \frac{1}{R} P_\Psi \end{array} \right| \frac{1}{\Theta \sqrt{\Phi_R^2 + \frac{1}{R^2} \Phi_\Psi^2}} = \Delta_1(o, P).$$

Choisissons pour cercle de base σ le cercle

$$f(r, \psi) = r - r_0 = 0$$

et pour canaux les rayons

$$P = \psi = C_1.$$

La courbe cherchée S propage donc dans ces canaux des éléments d'arc

$$dS = \sqrt{F(r)} dC_1,$$

et comme $d\sigma = r_0 dC_1$, on a

$$d\sigma = \Theta dS, \quad \text{avec} \quad \Theta = \frac{r_0}{\sqrt{F(r)}}.$$

Les courbes S sont données par l'intégration de l'équation (10) dérivant de (8)

$$\left| \begin{array}{c} \Phi_R \quad \frac{1}{R} \Phi_\Psi \\ o \quad \frac{1}{R} \end{array} \right| \frac{\sqrt{F(R)}}{r_0 \sqrt{\Phi_R^2 + \frac{1}{R^2} \Phi_\Psi^2}} = \Delta_1(o, P)$$

avec

$$\Delta_1(o, P) = \Gamma(r, \psi) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \end{vmatrix} = \frac{1}{r}.$$

D'où l'équation

$$(11) \quad \begin{vmatrix} \Phi_R & \frac{1}{R} \Phi_\Psi \\ 0 & \frac{1}{R} \end{vmatrix} \frac{\sqrt{F(R)}}{\sqrt{\Phi_R^2 + \frac{1}{R^2} \Phi_\Psi^2}} = 1.$$

En écrivant l'équation de S sous la forme

$$\Phi(\Psi, R) = \Psi - \Psi_0 - G(R) = 0,$$

on tire de (11)

$$(12) \quad \Psi - \Psi_0 = \int \frac{dR}{\sqrt{F(R) - R^2}} = G(R).$$

Si l'on faisait $\Theta = 1$, on s'orienterait vers les *courbes isométriques* de Maurice d'Ocagne [9], qui s'apparentent également à la théorie des espaces à canaux. Mais ce sont les trajectoires planétaires einsteiniennes, dans le champ défini par le ds^2 de Schwarzschild [10] et Droste [11], qui nous occupent. On sait que leur équation est

$$(13) \quad \Psi - \Psi_0 = \int \frac{dr}{\sqrt{Cr - r^2 + \frac{C}{h^2} r^3 + \frac{K}{h^2} r^4}},$$

les notations employées étant celles du Second Mémoire (A. II, 10). Il suffit donc, pour qu'elles s'identifient avec (12), de prendre

$$(14) \quad F(r) = Cr + \frac{C}{h^2} r^3 + \frac{K}{h^2} r^4.$$

Attachons-nous maintenant au problème de la variation des canaux [I, p. 26]. L'équation (11) subsiste lorsqu'on y remplace la fonction P particulière aux canaux rectilignes par une fonction P* définissant des canaux plus généraux. Il suffit, pour obtenir ces derniers, d'intégrer l'équation aux dérivées partielles

$$(15) \quad \begin{vmatrix} \Phi_R & \frac{1}{R} \Phi_\Psi \\ P_R^* & \frac{1}{R} P_\Psi^* \end{vmatrix} \frac{\sqrt{F(R)}}{\sqrt{\Phi_R^2 + \frac{1}{R^2} \Phi_\Psi^2}} = 1,$$

la fonction Φ étant maintenant connue. La courbe $\Phi = 0$ sera découpée par ces nouveaux canaux en éléments d'arc de même expression que ceux des canaux rectilignes.

Une solution évidente est donnée en identifiant ce dernier déterminant avec celui de (11) écrit sous la forme équivalente

$$\begin{vmatrix} \Phi_R & \frac{1}{R} \Phi_\Psi \\ k \Phi_R & \frac{k \Phi_\Psi + 1}{R} \end{vmatrix},$$

ce qui donne

$$P_R^* = -kG'(R), \quad P_\Psi^* = k + 1;$$

d'où

$$(16) \quad P = (k + 1)\Psi - k \int \frac{dR}{\sqrt{CR - R^2 + \frac{C}{h^2} R^2 + \frac{K}{h^2} R^4}} = C_1.$$

Les canaux (16) découpent sur la trajectoire \mathcal{C} , d'équation $\Phi = 0$ l'élément d'arc dS' égal à celui que découpent, *au même niveau R*, les anciens canaux. Au lieu de considérer l'ensemble des premiers canaux, conservons un seul d'entre eux, mais rendons-le mobile avec la vitesse angulaire $\frac{dC_1}{dt}$. Si l'on fait tourner les nouveaux canaux à la vitesse angulaire

$$(17) \quad \frac{1}{k + 1} \frac{dC_1}{dt},$$

l'intersection M avec \mathcal{C} prendra le même mouvement que dans le cas précédent. M aura d'ailleurs sur le canal (16), considéré comme système de repère, un mouvement de vitesse angulaire

$$(18) \quad \frac{dC_1}{dt} \left(1 - \frac{1}{k + 1} \right) = \frac{k}{k + 1} \frac{dC_1}{dt}.$$

Tel est le double mouvement qui permet d'engendrer la trajectoire \mathcal{C} par le déplacement d'un point mobile avec le mouvement (18) sur le canal (16) animé du mouvement (17).

4. — Trajectoires dégénérées. Génération par le mouvement d'une conchoïde de conique.

Parmi les courbes (16) il en est de particulièrement simples qui se réduisent à des conchoïdes de coniques par rapport au foyer. Considérons en effet la courbe

$$r - \lambda = \frac{p}{1 + e \cos \psi}.$$

Elle donne

$$\frac{dr^2}{d\psi^2} = \frac{e^2 - 1}{p^2} (r - \lambda)^4 + \frac{2}{p} (r - \lambda)^3 - (r - \lambda)^2 = \varphi(r - \lambda).$$

Or la même expression calculée à partir de (16) est

$$(19) \quad \frac{dr^2}{d\psi^2} = \frac{(k+1)^2}{k^2} \left(\frac{Kr^4}{h^2} + \frac{C}{h^2} r^2 - r^2 + Cr \right).$$

En posant

$$\frac{e^2 - 1}{p^2} = \varepsilon, \quad \frac{2}{p} = \varpi, \quad \frac{(k+1)^2}{k^2} = \alpha, \quad \frac{K}{h^2} = \xi, \quad \frac{C}{h^2} = \eta,$$

ces deux expressions s'identifient moyennant les conditions

$$(20) \quad \lambda^2 \varepsilon - \lambda \varpi - 1 = 0, \quad -4\lambda^2 \varepsilon + 3\lambda^2 \varpi + 2\lambda = \alpha C, \quad 6\lambda^2 \varepsilon - 3\lambda \varpi - 1 = -\alpha, \quad -4\lambda \varepsilon + \varpi = \alpha \eta, \quad \varepsilon = \alpha \xi.$$

La résolution de ce système donne

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1 - \frac{3C^2}{h^2}}}{\frac{C}{h^2}}, \quad \varepsilon = \frac{2C - \lambda}{\lambda^2(\lambda - 3C)}, \quad \varpi = \frac{5C - 2\lambda}{\lambda(\lambda - 3C)}, \quad \alpha = \frac{\lambda}{\lambda - 3C}, \quad \xi = \frac{2C - \lambda}{\lambda^2}.$$

Si l'on veut que k et λ soient réels, en supposant C et h^2 positifs (comme le demande un ds^2 à trois carrés négatifs), on doit prendre + devant le radical de λ . La seule condition est alors $h^2 > 3C^2$. Les expressions de λ et ξ introduisent une relation entre k et h^2 . C'est la condition de dégénérescence des trajectoires, pour laquelle elles cessent d'être transcendentes. Pour l'obtenir sous sa forme rationnelle, le plus simple est d'éliminer λ entre les deux équations, conséquences du système,

$$\eta \lambda^2 - 2\lambda + 3C = 0, \quad \xi \lambda^2 + \lambda - 2C = 0,$$

ce qui donne

$$(21) \quad -27 \frac{C^2}{h^2} K^2 - 18 \frac{C^2}{h^2} K + \frac{C^2}{h^2} - \frac{4C^4}{h^4} + 4K = 0. \quad (A. III)$$

Étudions maintenant les coniques servant de point de départ à ces trajectoires dégénérées, dans le cas de l'hyperbole par exemple (celui de l'ellipse s'obtenant en remplaçant b par ib).

$$\varepsilon = \frac{e^2 - 1}{p^2} = \frac{1}{b^2}, \quad \omega = \frac{2}{p} = \frac{-2a}{b^2}, \quad \text{d'où } a^2 = \frac{\omega^2}{4\varepsilon^2} = \frac{\lambda^2(-2\lambda + 5C)^2}{4(-\lambda + 2C)^2}, \quad c^2 = \frac{\lambda^2 C^2}{4(\lambda - 2C)^2}.$$

La première équation du système (20) s'écrit

$$\lambda^2 + 2a\lambda - b^2 = 0,$$

d'où

$$\begin{aligned} \lambda &= -a + \sqrt{a^2 + b^2} \\ &= c - a. \end{aligned}$$

Nous observons au passage que la conchoïde passe par l'origine. Portons cette valeur de λ dans l'expression de c , $\frac{\lambda C}{2(\lambda - 2C)}$,

$$c = \frac{C(c - a)}{2(c - a - 2C)},$$

ce qui s'écrit

$$\frac{1}{C} - \frac{1}{2c} = \frac{2}{c - a}.$$

Trajectoires dégénérées du deuxième type.

On peut faire un calcul analogue en remplaçant, dans la conique, $\cos \psi$ par $\text{ch } \psi$. Soit

$$r = \frac{p}{1 + e \text{ch } \psi};$$

la conchoïde devient

$$(22) \quad r - \lambda = \frac{p}{1 + e \text{ch } \psi},$$

d'où

$$\frac{dr^2}{d\psi^2} = - \left[\frac{e^2 - 1}{p^2} (r - \lambda)^2 + \frac{2}{p} (r - \lambda) - (r - \lambda)^2 \right]$$

qui s'identifie avec (19), en posant

$$\frac{e^2 - 1}{p^2} = \varepsilon, \quad \frac{2}{p} = \omega, \quad \frac{(k + 1)^2}{k^2} = -x, \quad \frac{K}{h^2} = \xi, \quad \frac{C}{h^2} = \eta,$$

moyennant les mêmes conditions (20).

Les seules modifications aux résultats précédents viennent de ce que, pour que λ et k soient réels, x doit être négatif, et par suite λ compris entre 0 et $3C$. Il faut donc prendre — devant le radical de λ .

$$\lambda = \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{3C^2}{h^2}}}{\frac{C}{h^2}} = \frac{3C}{1 + \sqrt{1 - \frac{3C^2}{h^2}}}, \quad x = \frac{\lambda}{\lambda - 3C} = -\frac{(k+1)^2}{h^2}.$$

La seule particularité que présentent ces courbes, particularité très remarquable d'ailleurs, et qui semble bien en relation étroite avec l'existence des orbites stables atomiques (A. III, 18), est la présence d'un *cercle asymptote* sur lequel tend à s'enrouler indéfiniment la courbe pour $\psi = \infty$; cela étant vrai d'ailleurs aussi bien pour la conchoïde que pour la trajectoire planétaire correspondante, comme il est aisé de le voir d'après le mode de génération de cette dernière.

Nous examinons en détail dans le second Mémoire (A. III) comment ces trajectoires dégénérées, non seulement rendent un compte exact des discontinuités quantiques dans l'atome, mais encore se superposent aux branches spiralées des nébuleuses, ce qui institue la parenté annoncée entre ces deux champs gravitationnels d'échelles si différentes : l'atome et la nébuleuse-spirale.

L'équation de ces courbes du deuxième type s'obtient en appliquant le mouvement (18) à un point M de la conchoïde (22) animée elle-même du mouvement (17). Si ψ' est l'angle polaire du point de la trajectoire résultante,

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{k}{k+1} \frac{dC_1}{dt}, \quad \frac{d\psi'}{dt} = \frac{dC_1}{dt}, \quad \psi = \frac{k}{k+1} (\psi' - \psi'_0), \quad r - \lambda = \frac{p}{1 + e \operatorname{ch} \frac{k}{k+1} (\psi' - \psi'_0)}.$$

En posant

$$\sqrt{1 - \frac{3C^2}{h^2}} = 4b,$$

il vient

$$\lambda = \frac{3C}{1 + 4b}, \quad e = \frac{1 + 4b}{1 - 20b}, \quad p = \frac{72bC}{(1 + 4b)(1 - 20b)}$$

et l'équation précédente devient, après quelques transformations immédiates,

$$(23) \quad \boxed{\frac{C}{r} - \frac{1 + 4b}{3} = \frac{-4b}{\operatorname{ch}^2 \sqrt{b} (\psi' - \psi'_0)}}$$

qui n'est autre que l'équation (60) du Second Mémoire.

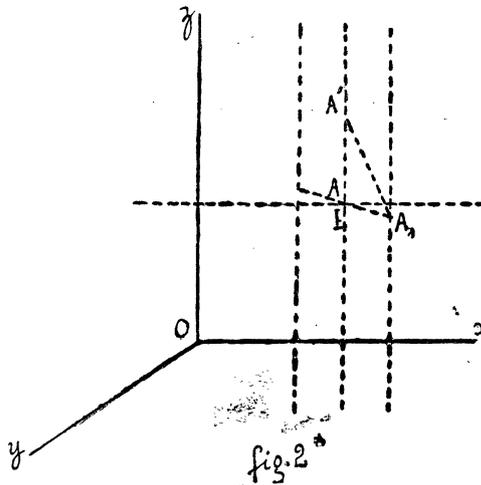
CHAPITRE II

Ondes imaginaires dans le champ électromagnétique pur.

5. — Onde associée au mouvement d'un point.

Etant définis, dans E_3 , trois axes coordonnés $Oxyz$, canalisons cet espace par des droites imaginaires de pente infinie, le contour d'un canal élémentaire étant quelconque. Soit d'abord une onde imaginaire plane \mathcal{J} , d'équation $z = ict$, se déplaçant normalement à la vitesse ic de la lumière. Soit (\mathcal{J}) l'élément découpé au point I par un canal élémentaire Γ . Nous formulerons les deux hypothèses suivantes :

- a) La propagation d'une onde est toujours *normale* à cette onde.
- b) Un élément quelconque, limité à un canal Γ , *se maintient constamment dans ce même canal*, auquel il reste limité.



Dès lors, si l'élément (I) prend une vitesse v par rapport à l'onde, il devra cesser d'être raccordé avec cette onde, sinon il ne se maintiendrait pas dans le même canal. Il prendra donc une inclinaison ω dans le sens de sa vitesse. Soit (A) sa nouvelle position. Le point A , d'abord en coïncidence avec I , viendra en A_1 (*fig. 2*) du fait de sa vitesse v , et durant le même temps, A_1 sera venu en A' du

*. Les ondes sont imaginaires, mais on peut les représenter en convenant de porter, en cote, non pas les z de leurs points, mais les quantités iz , qui sont réelles. Il en résulte

fait de la propagation normale. A sera resté constamment sur la même ligne de canalisation AA'. Soit \mathcal{A} le plan passant par l'élément (A). Il se propage normalement à la vitesse ic de la lumière. Les points de ce plan qu'on doit considérer comme immobiles sont ceux dont la propagation est normale. Tout point, tel que A, en propagation oblique, possède une vitesse aisément repérable sur le plan \mathcal{A} , puisqu'il suffit d'y choisir comme repères deux points immobiles.

Soient Ii et Aa les normales aux plans \mathcal{J} et \mathcal{A} , i et a étant leurs intersections avec la sphère imaginaire céleste (de rayon infini). La vitesse v est entièrement définie par le vecteur sphérique imaginaire \vec{ia} . Nous l'appellerons *vecteur vitesse sphérique relative de A par rapport à I*.

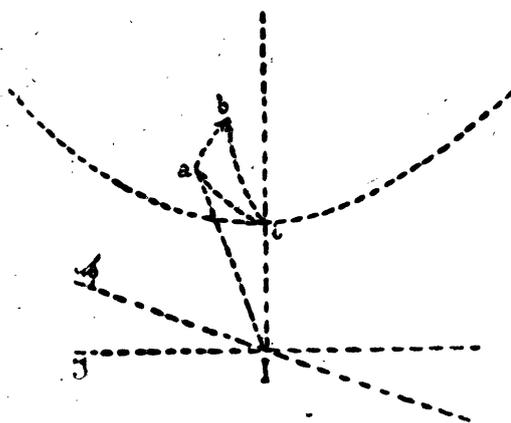


fig. 3

Imaginons maintenant que, sur l'élément (A) en mouvement, un élément du second ordre (B) prenne à son tour une vitesse relative v' par rapport à A.

une géométrie réelle des lignes et surfaces imaginaires dont le lecteur trouvera aisément les propriétés. Au reste, c'est un cas particulier de la géométrie de Cayley [12] lorsqu'on prend pour absolu l'hyperboloïde $x^2 + y^2 - z^2 = a^2$, avec $a = \infty$.

Ainsi, dans la fig. 2 la perpendiculaire A_1A_1' (dans le plan de cette dernière droite et de la ligne de canalisation) à la ligne de pente AA_1 est symétrique de AA_1 par rapport aux droites isotropes issues de A_1 (droites réelles inclinées à 45° sur la direction de Oz). L'angle $\widehat{AA_1A_1'}$ est égal à l'angle du plan \mathcal{J} et de l'élément (A).

Dans la fig. 3 la sphère imaginaire est représentée par l'hyperboloïde $z^2 - x^2 - y^2 = a^2$, avec $a = \infty$.

La distance de deux points $(x, y, z), (x', y', z')$ de la représentation réelle doit être prise égale à $\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 - (z-z')^2}$.

M. Buhl, dans *Ondes, Analyse, Géométrie, Arithmétique* (*Journ. de Math.*, XXI, 1942), a considéré le cas des ondes intégrales se propageant dans des canaux réels parallèles à Oz . Il s'agit d'abord de l'équation $p^2 + q^2 = \varphi(x, y)$ mise en relation avec les équations de Laplace et de D'Alembert d'où dérivent les principales formules de la Relativité restreinte.

Pour se maintenir dans un même canal, il doit s'incliner d'un angle ω' sur \mathcal{A} . Soit b le point où sa normale Bb perce la sphère céleste; le vecteur \vec{ab} sera la vitesse sphérique relative de B par rapport à I . Cette dernière sera la somme des deux précédentes

$$\vec{ia} + \vec{ab} = \vec{ib}.$$

Les vitesses sphériques obéissent donc à la règle ordinaire de sommation géométrique.

6. — Correspondance entre vitesses sphériques et vitesses réelles.

Composition relativiste des vitesses dans l'espace dépourvu de masse.

Calculons la vitesse $iv = \frac{ids}{dt}$ du point A sur sa ligne de canalisation. L'application du théorème de Pythagore au triangle rectangle IA_1A' donne

$$\overline{IA'}^2 = \overline{IA_1}^2 + \overline{A_1A'}^2,$$

c'est-à-dire

$$(iv)^2 = v^2 + (ic)^2,$$

d'où, en posant

$$v = \frac{d\sigma}{dt},$$

dans laquelle $d\sigma$, mesuré par rapport aux repères fixes du plan \mathcal{A} , répond à

$$d\sigma^2 = dr^2 + r^2 d\psi^2,$$

il vient

$$ds^2 = -dr^2 - r^2 d\psi^2 + c^2 dt^2.$$

Si l'on restitue à la figure la 4^e dimension, ce qui introduit l'angle de colatitude θ , ce ds^2 s'identifie avec celui de l'espace de Minkowski,

$$ds^2 = -dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\psi^2 + c^2 dt^2.$$

La dissociation de l'élément (A) et de l'onde \mathcal{J} se traduit à la fois par la rupture de la continuité tangentielle et par le changement de la vitesse de translation parallèlement à Oz .

Cette parenthèse étant close, l'angle $IA'A_1$ est égal à ω puisqu'ils ont leurs côtés perpendiculaires, d'où

$$(24) \quad \operatorname{tg} \omega = \frac{v}{ic},$$

$$(25) \quad \cos \omega = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

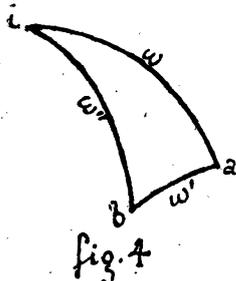
On retrouve en (24) la formule ancienne et bien connue de la relativité restreinte, qui lie une vitesse à une inclinaison par l'intermédiaire d'une tangente hyperbolique, relation que M. Buhl compare ingénieusement à une *perspective*. Nous verrons, par l'étude qui suit, que le mot est peut-être plus justifié encore qu'il ne semble à première vue. Quant à (25), elle donne en $\cos \omega$ le facteur de contraction de Lorentz relatif à la vitesse v , c'est-à-dire la contraction du système (A) observé de (1) et réciproquement.

Dans le triangle sphérique iab on a la formule de Delambre

$$\cos \omega'' = \cos \omega \cdot \cos \omega' + \sin \omega \cdot \sin \omega' \cos a,$$

avec, comme en (24),

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{v}{ic}, \quad \operatorname{tg} \omega' = \frac{v'}{ic}, \quad \operatorname{tg} \omega'' = \frac{v''}{ic}.$$



De plus, si α est l'angle des deux vitesses v et v' , l'angle a vaut $\pi - \alpha$; d'où

$$(26) \quad \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v''^2}{c^2}}} = \frac{1 + \frac{vv'}{c^2} \cos \alpha}{\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{v'^2}{c^2}\right)}}.$$

C'est la formule fondamentale de la cinématique einsteinienne

$$v''^2 = \frac{v^2 + v'^2 + 2vv' \cos \alpha - \left(\frac{vv' \sin \alpha}{c}\right)^2}{\left(1 + \frac{vv'}{c^2} \cos \alpha\right)^2}.$$

M. Buhl [13, p. 166] déduit cette dernière formule de la géométrie de Cayley. Dès 1914, M. Emile Borel [14] reliait le principe de la Relativité à cette même géométrie. Il y a là un rapprochement du même ordre que celui qui vient d'être fait.

Dans la relation fondamentale du triangle cayleyen

$$\cos \frac{a}{K} = \cos \frac{b}{K} \cos \frac{c}{K} + \sin \frac{b}{K} \sin \frac{c}{K} \cos A,$$

si l'on fait $K = i$ et si l'on désigne par α l'angle de b avec c prolongé, on a

$$\operatorname{ch} a = \operatorname{ch} b \operatorname{ch} c + \operatorname{sh} b \operatorname{sh} c \cos \alpha.$$

Si maintenant on pose

$$(27) \quad \frac{v}{c} = \operatorname{th} b, \quad \frac{v'}{c} = \operatorname{th} c, \quad \frac{v''}{c} = \operatorname{th} \alpha,$$

la formule précédente donne (26). Mais on remarquera que, dans ce calcul, le mode d'écriture (27) est un changement de notations suggéré par l'analyse des deux formules géométrique et mécanique, tandis que dans notre cinématique ondulatoire c'est une équation conséquente des hypothèses faites.

Enfin, pour déterminer la position de la résultante, c'est-à-dire l'angle $i = (v, v') = \beta$, nous avons

$$\sin \omega'' \cos \beta = \cos \omega' \sin \omega + \sin \omega' \cos \omega \cos \alpha$$

et en y joignant la relation des sinus

$$\frac{\sin \omega'}{\sin \beta} = \frac{\sin \omega''}{\sin \alpha},$$

il vient

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \omega' \sin \alpha}{\cos \omega' \sin \omega + \sin \omega' \cos \omega \cos \alpha},$$

ou enfin

$$(28) \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{v' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \sin \alpha}{v + v' \cos \alpha}.$$

7. — Hypothèse fondamentale sur l'onde cinétique associée.

Dans le champ électromagnétique pur, quel déplacement de l'onde associée à un point mobile correspond au mouvement de ce point? L'hypothèse la plus simple consiste à admettre que *la direction de cette onde plane reste constante*. On obtient bien ainsi, comme il convient, pour le mouvement d'un point, une vitesse constante en grandeur et direction.

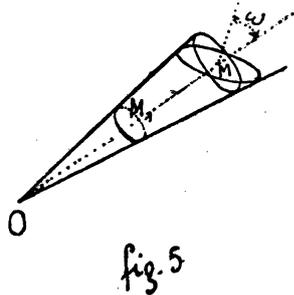
Or nous verrons qu'il s'agit là d'une hypothèse fondamentale et que sa remarquable simplicité ne résulte pas du caractère schématique du champ électromagnétique pur, puisqu'il y a lieu de l'étendre au cas plus complexe du champ gravitationnel. Le n° 12 montre en effet que, dans ce dernier, le mouvement d'un point *par rapport au milieu* est le même que si l'espace était dépourvu de masse. (V. également A. II, 11).

8. — Espace à canalisation centrale. — Onde de Buhl-Vincensini.

Si, au lieu d'utiliser pour canaliser l'espace des lignes parallèles à une direction fixe, on se sert de droites issues d'un même point O, les canaux deviennent des cônes élémentaires et le plan d'onde est à remplacer par une sphère de centre O en propagation normale, c'est-à-dire en état de dilatation à la vitesse de la lumière ic . On prendra tout naturellement ici les coordonnées polaires ψ, θ, ir et l'espace hyperbolique s'obtiendra en rendant le rayon vecteur imaginaire.

Une vitesse v appliquée à l'élément (M) aura pour effet de l'incliner d'un angle ω sur sa position première et par suite de le contracter dans le rapport

$$\frac{dS}{dS'} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \cos \omega.$$



Soit (M_1) l'élément situé dans le même canal et dont l'aire dS_1 équivaut à dS' . Son rayon est

$$ir_1 = \frac{ir}{\sqrt{\cos \omega}}.$$

Si, au lieu de considérer un canal infiniment délié, on se donne un canal fini Γ , la surface S' sera telle qu'elle découpe dans Γ et dans tout élément conique de Γ une aire équivalente à celle délimitée par la sphère de rayon ir_1 dans les mêmes conditions. Or de telles surfaces ont été récemment introduites par M. A. Buhl, à

propos de la théorie des espaces à canaux, et étudiées méthodiquement par M. P. Vincensini. Elles portent pour cela le nom de *surfaces de Buhl-Vincensini*. Ce sont des surfaces de Monge engendrées par une lemniscate de Bernoulli dont le plan roule sur un cône quelconque issu de son point double O. [1, p. 30.]

Telle sera donc, intégrée sous sa forme la plus générale, l'onde cinétique représentative dans un espace à canalisation centrale, c'est-à-dire dans l'espace dépourvu de masse et en état de dilatation. Il correspondrait, si l'on veut, au ds^2 de Friedmann et Lemaître [15] dans lequel on aurait annulé le coefficient gravitationnel; il répond au ds^2 étudié dans le second Mémoire [A. - I], dans lequel on fait $C = 0$. Il ressort en effet du n° 12 que la contraction $\cos \omega$ reste constante, c'est-à-dire que la surface S' est partout également inclinée sur le rayon vecteur.

Dans les idées qui viennent d'être exposées, l'hypothèse à faire sur la surface S' qui livre le mouvement d'un point est donc très simple et se réduit à une invariance angulaire, tout comme dans l'espace de Minkowski (les repères fixes de l'onde étant toujours les points en propagation normale).

CHAPITRE III

Ondes imaginaires dans le champ gravitationnel.

9. — Onde associée au mouvement d'un point dans le champ gravitationnel.

Partons d'un problème traité [7, p. 24], comme préambule à une *géométrie ondulatoire* qui va de pair avec la mécanique ondulatoire.

Il s'agit du mouvement d'un point matériel de masse m . En se reportant aux préliminaires de M. Eugène Bloch dans *L'ancienne et la nouvelle théorie des quanta* [16] et en utilisant ses notations pour désigner les coordonnées du point et leurs moments canoniquement conjugués, on a

$$\begin{aligned} 2T &= m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2), & U &= U(x, y, z), \\ p_x &= m\dot{x}, & p_y &= m\dot{y}, & p_z &= m\dot{z}, \\ (29) \quad E &= T + U = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + U(x, y, z); \end{aligned}$$

l'énergie potentielle étant U et la fonction des forces $-U$.

L'hamiltonien (29) est écrit comme on le voit en mécanique classique et la masse du point y est considérée comme invariable.

Les équations canoniques du mouvement sont

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial E}{\partial p_x}, & \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial E}{\partial p_y}, & \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial E}{\partial p_z}, \\ \frac{dp_x}{dt} &= -\frac{\partial E}{\partial x}, & \frac{dp_y}{dt} &= -\frac{\partial E}{\partial y}, & \frac{dp_z}{dt} &= -\frac{\partial E}{\partial z}. \end{aligned}$$

Pour intégrer ces équations en mécanique classique, il suffit de connaître une intégrale complète de l'équation de Jacobi

$$(30) \quad \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 = 2m[E - U(x, y, z)].$$

On introduit explicitement le temps en posant

$$(31) \quad V = S - Et,$$

d'où, pour la fonction S , supposée indépendante du temps, l'équation

$$(32) \quad \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 = 2m(E - U);$$

quant à la fonction $V(x, y, z, t)$, intégrale, dépendant du temps, de l'équation de Jacobi, si on l'égalé à une constante, elle représente la propagation d'un front d'onde. Or M. Buhl établit [1, p. 41] la formule fondamentale suivante donnant la vitesse u de propagation normale d'une telle onde

$$(33) \quad \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 = \frac{1}{u^2} \left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2.$$

En remplaçant le premier membre de (33) par le premier membre égal de (32) et en tenant compte de (31), il vient

$$(34) \quad u = \frac{E}{\sqrt{2m(E - U)}}.$$

Ainsi, à une fonction des forces $-U$ donnée, c'est-à-dire à un mouvement ponctuel défini, on associe une propagation ondulatoire, dont le front n'est évidemment pas entièrement déterminé, puisqu'il dépend de l'intégration d'une équation aux dérivées partielles, mais dont la vitesse est connue. Telles sont les bases de ce que M. Buhl considère comme une *géométrie ondulatoire* devant logiquement précéder la mécanique du même nom.

Si l'on remplace u par la vitesse de la lumière selon Einstein,

$$u = c \sqrt{1 - \frac{G}{r}},$$

tirée du ds^2 de Schwarzschild, l'onde (33) doit représenter un certain comportement du champ gravitationnel einsteinien. Or c'est bien ce qui a lieu en fait puisque, de la considération de cette onde, combinée avec celle du chapitre précédent, on déduit un hamiltonien dont l'intégration classique donne les équations des trajectoires planétaires einsteiniennes.

Pendant, il convient de remarquer que le $-U$ de la formule (34) ne donnera pas tout à fait la fonction des forces (il la donnerait avec une très grande approximation seulement) car l'hamiltonien (29) ne tient pas compte de la variation de la masse avec la vitesse, non plus que de la loi relativiste de composition des vitesses. Mais les modifications qu'on pourrait lui apporter dans ce sens n'altéreraient pas la forme de l'équation fondamentale (33).

Écrivons cette équation en coordonnées semi-polaires en y remplaçant u par sa

valeur et nous aurons l'équation aux dérivées partielles de l'onde gravitationnelle. Nous prendrons dans tout ce qui suit c pour unité de longueur.

$$(35) \quad \left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial V}{\partial \psi}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 = \frac{1}{\left(1 - \frac{C}{r}\right)} \left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2.$$

Cette équation n'est autre que l'équation

$$(36) \quad \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2 = 0$$

dans laquelle on a remplacé à la manière relativiste le 4^e élément différentiel dt par $u dt$, u étant ici fonction des coordonnées.

Si l'on prend

$$V = m[z - z(r, \psi) - t],$$

l'équation devient

$$(37) \quad \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial z}{\partial \psi}\right)^2 + 1 = \frac{1}{1 - \frac{C}{r}}.$$

Il est à remarquer que cette onde, ainsi que sa vitesse de propagation, sont réelles dans l'espace ordinaire, car l'élément superficiel est, non plus contracté par la vitesse comme dans le chapitre précédent, mais dilaté par la gravité.

Onde de révolution autour de Oz. Elle correspond à $\frac{dz}{d\psi} = 0$.

$$z = \int \sqrt{\frac{C}{r-C}} dr$$

et

$$(38) \quad V = z - 2\sqrt{Cr - C^2} - t = C^2.$$

Cette surface, à méridienne semi-parabolique, n'est pas déformée par sa propagation normale qui a pour effet de la déplacer en bloc par une translation de vitesse 1 le long de Oz. C'est cette onde qui correspond au problème de Schwarzschild.

10. — Etat dépressionnaire gravitationnel.

Canalisons l'espace comme au n° 5 par les trois familles de surfaces $r = r_0$, $\psi = \psi_0$, $z = z_0$, et soit dans un canal infinitésimal Γ un élément superficiel dS de l'onde gravitationnelle, dont la projection sur xOy est dS_1 . Soit \mathcal{A} le plan

tangent à dS en A et Aa sa normale, faisant avec Oz l'angle ω . Dans le chapitre précédent, l'élément dS était contracté par la vitesse v suivant la loi

$$\frac{dS_1}{dS} = \cos \omega = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

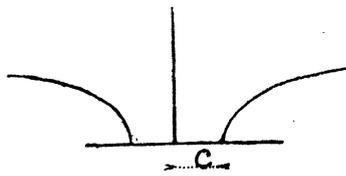


fig. 6

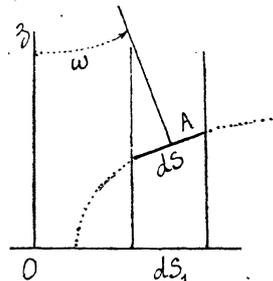


fig. 7

Ce rapport, ou contraction de Lorentz, caractérise une grandeur physique de la nature d'une *pression* (ou d'une densité) en rapport avec la vitesse du point mobile.

Dans le cas présent, nous avons quelque chose d'analogue

$$\frac{dS_1}{dS} = \cos \omega = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial z}{\partial \psi}\right)^2 + 1}} = \sqrt{1 - \frac{C}{r}}.$$

Mais ici, la pression correspondant à l'élément déformé est moindre que celle qui existerait si l'espace était dépourvu de masse. Il s'est produit une dépression dans laquelle on peut voir la cause des phénomènes de la gravité (A. - II, 8). Nous attribuerons pour cette raison à la grandeur $\sqrt{1 - \frac{C}{r}}$ la nature d'une *pression gravitationnelle*.

La direction Aa caractérisera un état *gravitationnel*, de même qu'elle caractérisait au n° 5 un état *cinétique*. On pourra le définir sur la sphère céleste, réelle cette fois, par un vecteur sphérique za . Les états gravitationnels se composeront comme des vecteurs sphériques réels, de même que les états cinétiques se composaient comme des vecteurs sphériques imaginaires.

11. — Composition des champs gravitationnels.

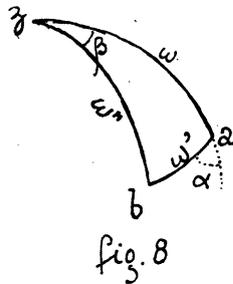
Les formules s'obtiennent comme au n° 6. Si $\alpha = \pi - a$ est l'angle des deux vecteurs sphériques za et ab à composer, de valeur ω et ω' , et si l'on désigne

par β l'angle z du vecteur initial za et du vecteur résultant zb , la formule de Delambre donne

$$\cos \omega'' = \cos \omega \cdot \cos \omega' - \sin \omega \sin \omega' \cos \alpha.$$

La première pression gravitationnelle résulte d'un premier centre placé à la distance r (centre principal); elle a pour valeur

$$\cos \omega = \sqrt{1 - \frac{C}{r}}.$$



La seconde résulte d'un second centre de diamètre c' placé à la distance r' (centre secondaire); elle a pour valeur

$$\cos \omega' = \sqrt{1 - \frac{C'}{r'}}.$$

La pression résultante est

$$(39) \quad \cos \omega'' = \sqrt{1 - \frac{C}{r}} \cdot \sqrt{1 - \frac{C'}{r'}} - \sqrt{\frac{C}{r}} \cdot \sqrt{\frac{C'}{r'}} \cos \alpha.$$

La position de la résultante est donnée par

$$\sin \omega'' \cos \beta = \cos \omega' \sin \omega + \sin \omega' \cos \omega \cos \alpha$$

à laquelle on joint

$$\frac{\sin \omega'}{\sin \beta} = \frac{\sin \omega''}{\sin \alpha}.$$

d'où

$$\text{tg } \beta = \frac{\sin \omega' \sin \alpha}{\cos \omega' \sin \omega + \sin \omega' \cos \omega \cos \alpha}$$

soit encore

(40)

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\sqrt{\frac{C'}{r'}} \sin \alpha}{\sqrt{\frac{C}{r} \left(1 - \frac{C'}{r'}\right)} + \sqrt{\frac{C'}{r'} \left(1 - \frac{C}{r}\right)} \cos \alpha}$$

Tel serait le principe de la composition des champs gravitationnels, point de départ du problème des deux corps. Il serait évidemment souhaitable de pouvoir appliquer ce résultat à l'étude du mouvement de deux masses finies, mais c'est un problème d'une grande difficulté. On pourrait l'aborder en construisant l'hamiltonien qui y est attaché, par une méthode analogue à celle du n° 13. Citons à ce propos les paroles de M. G. Darmois au sujet de ce problème [17].

« C'est par l'intermédiaire de cette forme quadratique particulière, de ce ds^2 de Schwarzschild, que la comparaison (de la théorie de la relativité) put se faire avec l'expérience. Et peut-être l'astronomie pourrait-elle se contenter de demander à cette seule solution les résultats pratiques de la relativité généralisée.

« Mais on n'obtient ainsi, en ajoutant un corps d'épreuve, que le mouvement d'une masse nulle dans le champ d'une masse finie. Il serait évidemment désirable d'aller plus loin, et les problèmes les plus voisins sont la construction du champ de deux masses, et le mouvement relatif que prennent deux masses finies libres.

« Ces problèmes sont difficiles, mais de la plus grande importance et l'intérêt qui s'attache à l'intégration des équations d'Einstein est non seulement mathématique, mais physique. »

12. — Relations mutuelles entre l'effet gravitationnel et l'effet cinétique. Équation du mouvement d'un point.

La contraction de Lorentz est un scalaire

$$\frac{dS}{dS'} = \cos \omega = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

de même la pression gravitationnelle

$$\frac{dS_1}{dS} = \sqrt{1 - \frac{C}{r}}$$

En fait, la première n'est elle-même qu'une pression conditionnée par une vitesse. Elles doivent donc se combiner comme des scalaires, c'est-à-dire se mul-

plier. On aura ainsi la *contraction totale* d'un système mobile dans un champ gravitationnel

$$(41) \quad \frac{dS'}{dS_1} = \frac{\sqrt{1 - \frac{C}{r}}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{e^2}}}$$

De même que nous avons admis que, dans l'espace de Minkowski, la contraction de Lorentz d'un système mobile est constante, nous admettons ici le principe suivant :

La contraction totale d'un système mobile dans un champ gravitationnel est constante.

Ceci donne l'équation différentielle du mouvement

$$(42) \quad \frac{\sqrt{1 - \frac{C}{r}}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{e^2}}} = \sqrt{1 + K}$$

(On a pris la constante sous la forme $\sqrt{1 + K}$ afin de rejoindre les notations du Second Mémoire, A. II, 10.)

On pourrait exposer ceci d'une manière plus détaillée si l'on admettait l'existence d'un fluide spatial, comme au n° 8 du Second Mémoire. On serait alors conduit à remplacer le principe ci-dessus par les deux suivants :

1° Principe : Le milieu spatial, déprimé par l'effet gravitationnel, tend à prendre un mouvement qui annule cette déformation.

2° Principe : Le mouvement de la particule, par rapport au milieu spatial en mouvement, est le même que si l'espace était dépourvu de masse.

Le premier principe donne, en effet, pour la vitesse v_2 du milieu,

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{e^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{C}{r}}}$$

de sorte que la contraction résultant de la superposition de l'effet de cette vitesse et de l'effet gravitationnel est égale à 1. D'où

$$v_2 = \sqrt{\frac{Ce^2}{r}}$$

Le deuxième principe donne la vitesse v_i de la particule par rapport au milieu en mouvement, car elle vérifie la constance du cosinus cinétique.

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_i^2}{e^v}}} = \cos \omega = \frac{1}{\cos V} = \text{constante.}$$

D'où

$$v_i = e^{\frac{v}{2}} \sin V.$$

Enfin, l'angle de la vitesse v_i et de la vitesse v_2 est constant. Si l'on veut se trouver placé dans le champ de Schwarzschild, on doit supposer que cet angle est droit. La vitesse résultante de la particule par rapport au système de référence s'obtient alors par la loi de composition des vitesses perpendiculaires (n° 6).

$$\left(1 - \frac{v^2}{e^v}\right) = \left(1 - \frac{v_i^2}{e^v}\right) \left(1 - \frac{v_2^2}{e^v}\right),$$

soit

$$v^2 = e^v \sin^2 V + \frac{C e^v}{r} \cos V,$$

c'est-à-dire, en posant $\cos^2 V = \frac{1}{1 + K}$,

$$v^2 = e^v \frac{K + \frac{C}{r}}{1 + K}.$$

C'est bien ce que donne, en effet, l'équation (42).

13. — Hamiltonien du mouvement d'un point. Trajectoires planétaires.

Rappelons d'abord la solution du problème dans l'espace dépourvu de masse et nous chercherons quelles modifications il convient de lui apporter pour passer à l'espace gravitationnel.

L'hamiltonien du mouvement dans l'espace de Minkowski est H tel que

$$(43) \quad \frac{H^2}{C^2} - (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) = m_0^2 c^2,$$

les notations étant les mêmes qu'au n° 9 et m_0 représentant la masse au repos.

A. Buhl [1, p. 45], P.-A.-M. Dirac [18, p. 138].

Cette formule ne fait que traduire l'expression de la masse einsteinienne et son équivalence en énergie.

$$(44) \quad m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{H}{C^2}.$$

Empruntons les notations de P.-A.-M. Dirac

$$(45) \quad x = \frac{c^2 p_x}{H}, \quad y = \frac{c^2 p_y}{H}, \quad z = \frac{c^2 p_z}{H}.$$

Il vient, en élevant au carré la deuxième équation (44), et remplaçant v^2 par $x^2 + y^2 + z^2$,

$$\frac{H^2}{C^2} = m_0^2 c^2 \left[1 - \frac{c^2}{H^2} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) \right]^{-1};$$

d'où la formule (43), qu'on peut écrire

$$H = c [m_0^2 c^2 + p_x^2 + p_y^2 + p_z^2]^{\frac{1}{2}}.$$

Les équations de Jacobi-Hamilton donnent d'abord

$$\frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{c^2}{H} p_x = \frac{dx}{dt}, \quad \frac{\partial H}{\partial p_y} = \frac{c^2}{H} p_y = \frac{dy}{dt}, \quad \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{c^2}{H} p_z = \frac{dz}{dt},$$

ce qui s'accorde bien avec les formules (45).

Il n'est plus maintenant que d'étendre la méthode à l'espace gravitationnel. On ne peut plus ici utiliser l'expression (44) de la masse. Mais on dispose encore d'une constante du mouvement, c'est $\sqrt{1 + K}$ de la formule (41), constante durant tout le mouvement de la particule libre, dont l'expression en fonction des variables dynamiques est invariante pour tout système de repère en mouvement (à la condition d'utiliser les formules de composition des vitesses du n° 31) et qui de plus se réduit à $\frac{H}{m_0 c^2}$ lorsque le centre gravitationnel s'évanouit.

Prenons donc pour hamiltonien

$$H = kc^2 \sqrt{1 + K} = \frac{kc^2 \sqrt{1 - \frac{G}{r}}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

k étant un facteur constant.

v est ici la vitesse réelle, c'est-à-dire la vitesse mesurée sur l'onde gravitationnelle.

Celle qui correspond au cas de Schwarzschild à symétrie sphérique est l'onde de révolution (38). En désignant par $d\rho$ l'élément du rayon vecteur déformé, c'est-à-dire l'élément de la méridienne, on a

$$v^2 = \frac{d\rho^2}{dt^2} + \frac{r^2 d\psi^2}{dt^2}$$

avec

$$(46) \quad d\rho = \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{C}{r}}}$$

Reprenons le calcul précédent, transposé en coordonnées polaires dans un plan, en y remplaçant le carré de la vitesse de la lumière par $e^2 = c^2 \left(1 - \frac{C}{r}\right)$. Il vient

$$v^2 = \dot{\rho}^2 + r^2 \dot{\psi}^2, \quad \dot{\rho} = \frac{e^2}{H} p_\rho, \quad r \dot{\psi} = \frac{e^2}{H} p_\psi.$$

D'où

$$(47) \quad \frac{H^2}{e^2} = k^2 c^2 + p_\rho^2 + p_\psi^2.$$

Les équations canoniques du mouvement donnent d'abord

$$\frac{\partial H}{\partial p_\rho} = \dot{\rho} = \frac{d\rho}{dt}, \quad \frac{\partial H}{\partial p_\psi} = r \dot{\psi} = r \frac{d\psi}{dt}.$$

L'équation de Jacobi relative à l'hamiltonien (47) sera

$$(48) \quad \left(\frac{\partial V}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial \psi}\right)^2 \cdot \frac{1}{r^2} + k^2 c^2 - \frac{H^2}{e^2} = 0$$

où l'on a posé

$$\frac{\partial V}{\partial \rho} = p_\rho, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \psi} = p_\psi.$$

En tenant compte de (43), elle devient

$$r^2 \left[\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2 \left(1 - \frac{C}{r}\right) + k^2 c^2 - \frac{H^2}{c^2 \left(1 - \frac{C}{r}\right)} \right] = - \left(\frac{\partial V}{\partial \psi}\right)^2.$$

C'est une équation à variables séparées, qui s'intègre en égalant chacun des deux membres à une constante. Prenons cette constante sous la forme

$$-k^2 h^2 c^2 = \frac{-h^2 H^2}{c^2 (1 + K)},$$

afin de rejoindre les notations du Second Mémoire. D'où en premier lieu

$$\frac{\partial V}{\partial \psi} = \frac{hH}{c \sqrt{1+K}}$$

et

$$r^2 \frac{d\psi}{dt} = \frac{he^v}{c \sqrt{1+K}},$$

qui est précisément l'équation (37) du Second Mémoire (A. - II, 10).

En second lieu,

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{1}{1 - \frac{C}{r}} \sqrt{\frac{H^2}{C^2} - \left(k^2 c^2 + \frac{h^2 H^2}{c^2 (1+K) r^2} \right) \left(1 - \frac{C}{r} \right)},$$

et en remplaçant

$$k^2 c^2 \quad \text{par} \quad \frac{H^2}{c^2 (1+K)},$$

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{1}{1 - \frac{C}{r}} \sqrt{\frac{H^2}{C^2} \left[1 - \frac{1}{1+K} \left(1 + \frac{h^2}{r^2} \right) \left(1 - \frac{C}{r} \right) \right]}.$$

Or

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\partial V}{\partial \varphi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{C}{r}}} = p_\varphi \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{C}{r}}} = \frac{H}{e^v \sqrt{1 - \frac{C}{r}}} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{H}{e^v \left(1 - \frac{C}{r} \right)} \frac{dr}{dt};$$

d'où enfin

$$\frac{dr}{dt} = c \left(1 - \frac{C}{r} \right) \sqrt{\frac{K + \frac{C}{r} - \frac{h^2}{r^2} \left(1 - \frac{C}{r} \right)}{1+K}}$$

qui s'identifie avec l'équation (46) du Second Mémoire.

L'intégration de l'hamiltonien de (47) conduit donc bien aux équations des trajectoires planétaires de Schwarzschild-Einstein. Ainsi que nous l'avons déjà fait remarquer, ce résultat n'emprunte à la théorie relativiste que l'expression de la vitesse de la lumière.

DEUXIÈME PARTIE

L'ATOME ET LA NÉBULEUSE SPIRALE DANS UNE MÉTRIQUE RIEMANNIENNE A POTENTIELS DÉPENDANT DU TEMPS

CHAPITRE I

Étude d'un ds^2 binaire à potentiels dépendant du temps.

1. — Les travaux de Friedmann et Lemaître [15] ayant mis en évidence la possibilité d'un univers *non statique*, il importe, lorsqu'on étudie l'espace au voisinage d'un centre matériel, de tenir compte d'une déformation éventuelle de cet espace en fonction du temps, dans le choix de la forme de ds^2 représentant le champ.

Si l'on apporte une telle modification à la forme classique du ds^2 de l'espace à symétrie sphérique, on constate qu'il s'introduit dans les calculs un paramètre nouveau, qui paraît avoir une certaine importance cosmologique.

2. — On considère l'espace gravitationnel comme une variété à quatre dimensions affectée d'une déformation de la nature d'une courbure dans un continuum euclidien. On désigne par r, θ, ψ, t les coordonnées polaires rapportées au centre de la déformation, et l'époque d'un point dans l'étendue de référence, et par ρ et V le rayon vecteur déformé et la vitesse de la lumière dans l'espace réel.

Le problème de Schwarzschild prend comme point de départ un ds^2 statique

$$ds^2 = -e^{\mu} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\psi^2 + V^2 dt^2.$$

M. J. Haag l'a traité en détail dans le *Mémorial des Sciences mathématiques* [19].

Si l'on interprète cette forme quadratique selon les vues géométriques développées dans la Première Partie (O. II, 5 et 6), on est conduit à poser

$$e^{\mu} = \frac{d\rho^2}{dr^2}, \quad e^{\nu} = V^2,$$

ou

$$e^{\mu} = -\frac{d\rho^2}{dr^2}, \quad e^{\nu} = -V^2, \text{ suivant le cas ;}$$

ce qui donne les deux formes de ds^2 suivantes :

$$\text{I} \quad ds^2 = -d\rho^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\psi^2 + V^2 dt^2,$$

$$\text{II} \quad ds^2 = d\rho^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\psi^2 - V^2 dt^2.$$

Supposons maintenant que ρ et V dépendent également du temps

$$\rho = \rho(r, t), \quad V = V(r, t),$$

en posant, suivant que le ds^2 est sous la forme I ou II,

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial r}\right)^2 = e^\mu, \quad \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)^2 = e^\nu, \quad V^2 = e^\nu$$

ou

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial r}\right)^2 = -e^\mu, \quad \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)^2 = -e^\nu, \quad V^2 = -e^\nu;$$

le ds^2 s'écrit dans les deux cas,

$$ds^2 = -e^\mu dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\psi^2 + (e^\nu - e^\nu) dt^2 - 2e^{\frac{\mu+\nu}{2}} dr dt.$$

Ce ds^2 peut se mettre sous la forme

$$dS^2 = \dot{\varphi}^2 ds^2 + f^2 d\sigma^2$$

en posant

$$\varphi^2 = r^2, \quad ds^2 = -d\theta^2 - \sin^2 \theta d\psi^2, \quad f^2 = 1, \quad d\sigma^2 = -e^\mu dr^2 - 2e^{\frac{\mu+\nu}{2}} dr dt + (e^\nu - e^\nu) dt^2.$$

Il rentre donc dans la catégorie de ceux que M. J. Delsarte appelle les ds^2 binaires. Dans ce cas particulier, les p variables du ds^2 se réduisent à deux ainsi que les q variables du $d\sigma^2$.

Nous utilisons les résultats de M. Delsarte, dont l'ouvrage [20] *Sur les ds^2 binaires et le problème d'Einstein* résoud complètement l'intégration de ds^2 de cette nature.

3. — Dans tout ce qui suit, conformément aux notations de M. Delsarte, les minuscules latines représentent des fonctions des seules variables du ds^2 , $u^1 = \theta$, $u^2 = \psi$, les minuscules grecques représentent des fonctions des seules variables du $d\sigma^2$, $v^1 = r$, $v^2 = t$, et les majuscules représentent des fonctions dépendant des deux systèmes de variables.

Les potentiels de gravitation sont, pour le ds^2 et le $d\sigma^2$,

$$\begin{aligned} g_{11} &= -1, & g_{22} &= 0, & g_{33} &= -\sin^2 \theta, \\ \gamma_{11} &= -e^\mu, & \gamma_{22} &= -e^{\frac{\mu+\nu}{2}}, & \gamma_{33} &= e^\nu - e^\nu. \end{aligned}$$

Les symboles de Christoffel de première espèce sont

$$\begin{aligned} g_{111} &= 0, & g_{112} &= 0, & g_{121} &= 0, & g_{122} &= -\sin \theta \cos \theta, & g_{212} &= \sin \theta \cos \theta, & g_{222} &= 0; \\ \gamma_{222} &= -\frac{1}{2} e^{\mu} \mu', & \gamma_{334} &= -\frac{1}{2} e^{\mu} \mu'_1, & \gamma_{343} &= -e^{\frac{\mu+\tau}{2}} \frac{\mu'+\tau'}{2} + \frac{1}{2} e^{\mu} \mu'_1, \\ \gamma_{344} &= \frac{1}{2} (e^{\nu} v' - e^{\tau} \tau'), & \gamma_{434} &= -\frac{1}{2} e^{\frac{\mu+\tau}{2}} \tau'_1 - \frac{1}{2} e^{\nu} v', & \gamma_{444} &= \frac{1}{2} (e^{\nu} v'_1 - e^{\tau} \tau'_1), \end{aligned}$$

en remarquant que

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial r \partial t} = e^{\frac{\mu}{2}} \frac{\mu'_1}{2} = e^{\frac{\tau}{2}} \frac{\tau'}{2}$$

et que par suite

$$(1) \quad \mu'_1 = e^{\frac{\tau-\mu}{2}} \tau.$$

Enfin, d'après l'ouvrage de M. Delsarte,

$$\begin{aligned} \Gamma_{ijk} &= \varphi^2 g_{ijk}; & \Gamma_{\alpha jk} &= \varphi g_{jk} \varphi_{,\alpha}; & \Gamma_{i\beta k} &= -\varphi g_{jk} \varphi_{,\beta}; & \Gamma_{ij\gamma} &= \varphi g_{ij} \varphi_{,\gamma}; \\ \Gamma_{\alpha\beta k} &= f \gamma_{\alpha\beta} f_{,\kappa}; & \Gamma_{\alpha jk} &= -f \gamma_{\alpha\gamma} f_{,\kappa}; & \Gamma_{i\beta\gamma} &= f \gamma_{\beta\gamma} f_{,\kappa}; & \Gamma_{\alpha\beta\gamma} &= f^2 \gamma_{\alpha\beta\gamma}. \end{aligned}$$

On a employé la notation habituelle de dérivation covariante pour les composantes covariantes des gradients de f et φ relativement à ds^2 et $d\sigma^2$. Ceci donne dans le cas présent

$$\begin{aligned} \Gamma_{122} &= -r^2 \sin \theta \cos \theta, & \Gamma_{212} &= r^2 \sin \theta \cos \theta, & \Gamma_{311} &= -r, \\ \Gamma_{322} &= -r \sin^2 \theta, & \Gamma_{434} &= r, & \Gamma'_{322} &= r \sin^2 \theta, \\ \Gamma_{333} &= -\frac{1}{2} e^{\mu} \mu', & \Gamma_{334} &= -\frac{1}{2} e^{\mu} \mu'_1, & \Gamma_{343} &= -e^{\frac{\mu+\tau}{2}} \frac{\mu'+\tau'}{2} + \frac{1}{2} e^{\mu} \mu'_1, \\ \Gamma'_{344} &= \frac{1}{2} (e^{\nu} v' - e^{\tau} \tau'), & \Gamma'_{434} &= -\frac{1}{2} e^{\frac{\mu+\tau}{2}} \tau'_1 - \frac{1}{2} e^{\nu} v', & \Gamma'_{444} &= \frac{1}{2} (e^{\nu} v'_1 - e^{\tau} \tau'_1), \end{aligned}$$

tous les autres Γ étant nuls.

Les symboles de seconde espèce ont pour valeur, pour le ds^2 et le $d\sigma^2$,

$$\begin{aligned} g^1_{11} &= 0, & g^1_{12} &= 0, & g^2_{11} &= 0, & g^2_{12} &= \cot g \theta, & g^2_{22} &= -\sin \theta \cos \theta, & g^2_{22} &= 0; \\ \gamma^2_{22} &= \frac{\mu'}{2}, & \gamma^2_{24} &= \frac{\mu'_1}{2} - \frac{1}{2} e^{\frac{\tau-\mu}{2}} v', & \gamma^2_{24} &= \frac{v'}{2}, \\ \gamma^2_{44} &= \frac{1}{2} \left[e^{\frac{\tau-\mu}{2}} (\tau'_1 - v'_1) + e^{-\mu} v' (e^{\nu} - e^{\tau}) \right] \end{aligned}$$

et pour le ds^2 ,

$$\begin{aligned} \Gamma_{ik}^j &= g_{ik}^j, & \Gamma_{\alpha\gamma}^{\beta} &= \gamma_{\alpha\gamma}^{\beta}, \\ \Gamma_{\alpha k}^j &= 0, & \Gamma_{\alpha j}^j &= \frac{\varphi_{, \alpha}}{\varphi}, & \Gamma_{ik}^{\beta} &= -g_{ik} \frac{\varphi}{f^2} \varphi_{, \beta}, & \Gamma_{i\gamma}^j &= 0, & \Gamma_{i\gamma}^i &= \frac{\varphi_{, \gamma}}{\varphi}, \\ \Gamma_{\alpha k}^{\beta} &= 0, & \Gamma_{\alpha k}^{\alpha} &= \frac{f_{, k}}{f}, & \Gamma_{\alpha\gamma}^j &= -\gamma_{\alpha\gamma} \frac{f}{\varphi} f_{, j}, & \Gamma_{i\gamma}^{\beta} &= 0, & \Gamma_{i\gamma}^{\beta} &= \frac{f_{, i}}{f}, \end{aligned}$$

avec la notation habituelle de dérivation contravariante pour les fonctions f et φ relativement à ds^2 et $d\sigma^2$ respectivement.

Ce qui donne dans le cas présent

$$\begin{aligned} \Gamma_{12}^2 &= \cotg \theta, & \Gamma_{22}^1 &= -\sin \theta \cos \theta, \\ \Gamma_{22}^3 &= \frac{\mu'}{2}, & \Gamma_{24}^3 &= \frac{\mu'}{2} - \frac{1}{2} e^{\frac{\tau-\mu}{2}} v', & \Gamma_{24}^4 &= \frac{v'}{2}, \\ \Gamma_{44}^3 &= \frac{1}{2} \left[e^{\frac{\tau-\mu}{2}} (\tau' - v_1') + e^{-\mu} v' (e^{\tau} - e^{\tau'}) \right], & \Gamma_{44}^4 &= \frac{v_1'}{2} + \frac{1}{2} e^{\frac{\tau-\mu}{2}} v', \\ \Gamma_{32}^3 &= \frac{1}{r}, & \Gamma_{13}^1 &= \frac{1}{r}, & \Gamma_{41}^3 &= r(e^{\tau-\mu-\nu} - e^{-\mu}), \\ \Gamma_{22}^3 &= r \sin^2 \theta (e^{\tau-\mu-\nu} - e^{-\mu}), & \Gamma_{41}^4 &= -r e^{\frac{\tau-\mu}{2}-\nu}, & \Gamma_{22}^4 &= -\sin^2 \theta e^{\frac{\tau-\mu}{2}-\nu}, \end{aligned}$$

tous les autres symboles de Christoffel de seconde espèce étant nuls.

Pour former les composantes du tenseur de courbure contracté à deux indices, nous appliquons toujours les formules de M. Delsarte

$$\begin{aligned} R_{ij} &= r_{ij} - \frac{q}{f} f_{, i, j} - \frac{g_{ij}}{f^2} [\varphi \Delta_1 \varphi + (p-1) \Delta_1 \varphi], \\ R_{\alpha\beta} &= \rho_{\alpha\beta} - \frac{p}{\varphi} \varphi_{, \alpha, \beta} - \frac{\gamma_{\alpha\beta}}{\varphi^2} [f D_1 f + (q-1) D_1 f], \\ R_{i\beta} &= R_{\beta i} = (p+q-2) \frac{f_{, i} \varphi_{, \beta}}{f \varphi} \end{aligned}$$

où p et q désignent les nombres de variables du ds^2 et du $d\sigma^2$, c'est-à-dire ici 2 et 2, où $\Delta_1 \varphi$ et $D_1 f$ représentent les laplaciens des fonctions f et φ calculés respectivement par rapport à ds^2 et $d\sigma^2$, et où $\Delta_1 \varphi$ et $D_1 f$ sont les carrés scalaires des gradients de φ et de f relativement à ces deux ds^2 .

4. — Formons maintenant les équations d'Einstein, G désignant la densité de matière, P la pression, V_i , U_α , V^i , U^α les composantes covariantes et contrava-

riantes de la vitesse unitaire. On a le système⁽¹⁾

$$(I) \begin{cases} (2) & \varphi^2 g_{ij} V^i V^j + f^2 \gamma_{\alpha\beta} U^\alpha U^\beta = 1, \\ (3) & r_{ij} - \frac{q}{f} f_{,i,j} - \frac{g_{ij}}{f^2} [\varphi \Delta_s \varphi + (p-1) \Delta_i \varphi] = k \left[\varphi^2 g_{ij} \frac{G-2P}{p+q-2} - G V_i V_j \right], \\ (4) & \rho_{\alpha\beta} - \frac{p}{\varphi} \varphi_{, \alpha, \beta} - \frac{\gamma_{\alpha\beta}}{\varphi^2} [f D_s f + (q-1) D_i f] = k \left[f^2 \gamma_{\alpha\beta} \frac{G-2P}{p+q-2} - G U_\alpha U_\beta \right], \\ (5) & (p+q-2) \frac{f_{,i,j} \cdot \varphi_{, \alpha, \beta}}{f \varphi} = -k G V_i U_\beta \\ (6) & \text{auquel on doit joindre une équation d'état } \Phi(P, G) = 0. \end{cases}$$

Comme, dans le cas présent, $p = q = 2$, $f = 1$, $\varphi = r$, on remarque d'abord que, $f_{,i}$ étant nulle, il en est de même de $V_i U_\beta$, ce qui exige que toutes les composantes V_i soient nulles ou que toutes les composantes U_β soient nulles. On a étudié, dans ce qui suit, le premier de ces deux cas.

$$V_i = 0.$$

Le système devient

$$(I') \begin{cases} (2') & \gamma_{\alpha\beta} U^\alpha U^\beta = 1, \\ (3') & r_{ij} - g_{ij} (\varphi \Delta_s \varphi + \Delta_i \varphi) = k \varphi^2 g_{ij} \frac{G-2P}{2}, \\ (4') & \rho_{\alpha\beta} - \frac{2}{\varphi} \varphi_{, \alpha, \beta} = k \left(\gamma_{\alpha\beta} \frac{G-2P}{2} - G U_\alpha U_\beta \right), \\ (6') & \Phi(P, G) = 0 \end{cases}$$

et par deux condensations, en multipliant (3') par g^{ij} et (4') par $\gamma^{\alpha\beta}$,

$$(7) \quad r - 2(\varphi \Delta_s \varphi + \Delta_i \varphi) = k \varphi^2 (G - 2P),$$

$$(8) \quad \rho - \frac{2}{\varphi} \Delta_s \varphi = -2kP.$$

L'équation (8) montre que la pression P ne dépend que des variables du $d\sigma^2$, c'est-à-dire r et t . Comme G est lié à P par l'équation d'état, G ne dépend lui-même que des variables r et t . En reprenant alors l'équation (3')

$$r_{ij} = g_{ij} \left(\varphi \Delta_s \varphi + \Delta_i \varphi + k \varphi^2 \frac{G-2P}{2} \right),$$

on voit que la parenthèse ne dépend que de r et t , et comme $\frac{r_{ij}}{g_{ij}}$ ne peut contenir

1. Les indices i et j , α et β , répétés deux fois dans le même monôme, étant indices de sommation.

ces variables, puisqu'il ne dépend que de celles du ds^2 , on en déduit que le crochet doit se réduire à une constante. On a en définitive

$$(II) \begin{cases} (9) & \varphi \Delta_s \varphi + \Delta_s \varphi + k \varphi^2 \frac{G - 2P}{2} = A, \\ (10) & r_{ij} = A g_{ij}, \\ (11) & V_i = 0, \\ (12) & \rho_{\alpha\beta} - \frac{2}{\varphi} \varphi_{, \alpha, \beta} = k \left(\gamma_{\alpha\beta} \frac{G - 2P}{2} - G U_\alpha U_\beta \right), \\ (13) & \gamma_{\alpha\beta} U^\alpha U^\beta = 1. \end{cases}$$

5. — Cas du fluide parfait incompressible.

L'équation d'état est ici

$$(14) \quad P = G - G_0.$$

L'équation (9) est une équation scalaire. La condensation de (12) donne également une équation scalaire

$$(15) \quad \rho - \frac{2}{\varphi} \Delta_s \varphi = -2kP.$$

L'élimination de G et de P entre ces deux dernières et l'équation d'état fournit une équation indépendante de la matière. Elle s'écrit

$$(16) \quad \rho + \frac{2}{\varphi} \Delta_s \varphi + \frac{4}{\varphi^2} \Delta_s \varphi - \frac{4A}{\varphi^2} + 2kG_0 = 0.$$

On peut maintenant tirer $G - 2P$ de (9) et porter sa valeur dans (12) ainsi que l'expression de $\frac{\Delta_s \varphi}{\varphi}$ d'après (16). Il vient

$$\rho_{\alpha\beta} - \frac{2}{\varphi} \varphi_{, \alpha, \beta} = \gamma_{\alpha\beta} \left(\frac{\rho}{2} + \frac{\Delta_s \varphi}{\varphi^2} - \frac{A}{\varphi^2} + kG_0 \right) - kG U_\alpha U_\beta$$

et, en remarquant que

$$(17) \quad \frac{\rho_{\alpha\beta}}{\gamma_{\alpha\beta}} = \frac{1}{2} \rho \gamma_{\alpha\beta},$$

$$\frac{2}{\varphi} \varphi_{, \alpha, \beta} + \gamma_{\alpha\beta} \left(\frac{1}{\varphi^2} \Delta_s \varphi - \frac{A}{\varphi^2} + kG_0 \right) = kG U_\alpha U_\beta.$$

Pour déduire de là une nouvelle équation indépendante de la matière, il suffit d'éliminer la densité et les composantes de la vitesse entre les équations que résume la relation (17).

Tout d'abord,

$$\frac{2}{\varphi} \varphi_{,3,4} + \gamma_{34} \left(\frac{1}{\varphi^2} \Delta_1 \varphi - \frac{A}{\varphi^2} + kG_0 \right) = kGU_3^2.$$

Or

$$\varphi_{,3,4} = -\frac{\mu'}{2},$$

$$\Delta_1 \varphi = e^{\tau-\mu-\nu} - e^{-\mu},$$

d'où

$$(18) \quad -\frac{\mu'}{r} - e^{\mu} \left[\frac{1}{r^2} (e^{\tau-\mu-\nu} - e^{-\mu}) - \frac{A}{r^2} + kG_0 \right] = kGU_3^2.$$

Eu second lieu

$$\frac{2}{\varphi} \varphi_{,3,4} + \gamma_{34} \left(\frac{1}{\varphi^2} \Delta_1 \varphi - \frac{A}{\varphi^2} + kG_0 \right) = kGU_3 U_4.$$

Or

$$\varphi_{,3,4} = -\frac{\mu'}{2} + e^{\frac{\tau-\mu}{2}} \frac{\nu'}{2},$$

d'où

$$(19) \quad \frac{1}{r} \left(-\mu' + e^{\frac{\tau-\mu}{2}} \nu' \right) - e^{\frac{\mu+\tau}{2}} \left(\frac{e^{\tau-\mu-\nu} - e^{-\mu} - A}{r^2} + kG_0 \right) = kGU_3 U_4.$$

Enfin

$$\frac{2}{\varphi} \varphi_{,4,4} + \gamma_{44} \left(\frac{1}{\varphi^2} \Delta_1 \varphi - \frac{A}{\varphi^2} + kG_0 \right) = kGU_4^2.$$

Or

$$\varphi_{,4,4} = \frac{1}{2} \left[e^{\frac{\tau-\mu}{2}} (\nu'_4 - \tau'_4) + e^{-\mu} \nu' (e^{\tau} - e^{\nu}) \right],$$

d'où l'équation

$$(20) \quad \frac{1}{r} \left[e^{\frac{\tau-\mu}{2}} (\nu'_4 - \tau'_4) + e^{-\mu} \nu' (e^{\tau} - e^{\nu}) \right] + (e^{\nu} - e^{\tau}) \left(\frac{e^{\tau-\mu-\nu} - e^{-\mu} - A}{r^2} + kG_0 \right) = kGU_4^2.$$

Éliminons G et les composantes de la vitesse unitaire en égalant au carré du premier membre de (19) le produit des premiers membres de (18) et (20). Il vient, en tenant compte de la relation (1),

$$(21) \quad e^{-\mu} \left(\nu' - \tau' + \frac{1 - e^{\tau-\nu} + Ae^{\mu}}{r} - kG_0 e^{\mu} r \right)^2$$

$$= \left(-\mu' + \frac{1 - e^{\tau-\nu} + Ae^{\mu}}{r} - kG_0 e^{\mu} r \right) \left[e^{\frac{\tau-\mu}{2}} (\nu'_4 - \tau'_4) + e^{-\mu} \nu' (e^{\nu} - e^{\tau}) \left(-\nu' - \frac{1 - e^{\tau-\nu} + Ae^{\mu}}{r} + kG_0 e^{\mu} r \right) \right].$$

Telle est la deuxième équation indépendante de la matière. Ces deux équations différentielles (16) et (21) permettraient d'obtenir par intégration les deux fonctions inconnues du ds^2 , $\rho(r, t)$ et $V(r, t)$.

Explicitons complètement l'équation (16).

$$\rho_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \rho \gamma_{\alpha\beta},$$

d'où

$$\rho_t = e^{-\mu} \left(\frac{v'^2}{2} + v'' - \frac{\mu' v'}{2} \right),$$

$$\Delta_s \varphi = e^{\tau-\mu-\nu} \frac{\tau' - \mu' - \nu'}{2} + e^{-\mu} \frac{\mu' - \nu'}{2} + e^{\frac{\tau-\mu}{2}-\nu} \frac{\mu'_1 + \nu'_1 - \tau'_1}{2}.$$

L'équation (16) s'écrit alors après réduction,

$$\frac{v''}{2} + v'' - \frac{\mu' v'}{2} + \frac{1}{r} [e^{\tau-\nu} (\tau' - \mu' - \nu') + \mu' - \nu' + e^{\frac{\tau+\mu}{2}-\nu} (\mu'_1 + \nu'_1 - \tau'_1)] + \frac{4}{r^2} (e^{\tau-\nu} - 1 - Ae^\mu) + 2kG_0 e^\mu = 0.$$

6. — Cas d'une pression constante et d'une densité nulle.

Si l'on prend comme équation d'état la double condition

$$G = 0, \quad P = P_0,$$

cas qui se déduit formellement du calcul précédent en faisant $G = 0$, $P = P_0 = -G$, on a, d'après l'équation (18),

$$(22) \quad -\frac{\mu'}{r} - e^\mu \left[\frac{1}{r^2} (e^{\tau-\mu-\nu} - e^{-\mu}) - \frac{\Lambda}{r^2} - kP_0 \right] = 0$$

et d'après (19)

$$-\frac{\mu'_1}{r} + e^{\frac{\tau-\mu}{2}-\nu} \frac{v'}{r} - e^{\frac{\mu+\tau}{2}} \left(\frac{e^{\tau-\mu-\nu} - e^{-\mu}}{r^2} - \frac{\Lambda}{r^2} - kP_0 \right) = 0.$$

D'où en comparant

$$-\frac{\mu'_1}{r} + e^{\frac{\tau-\mu}{2}-\nu} \frac{v'}{r} + \frac{e^{\frac{\mu+\tau}{2}} \mu' e^{-\mu}}{r} = 0.$$

On en tire

$$\mu'_1 = e^{\frac{\tau-\mu}{2}} (\mu' + \nu')$$

et en tenant compte de la relation (1), en supposant $e^\tau \neq 0$,

$$(23) \quad \tau' - \nu' = \mu'.$$

En intégrant par rapport à r il vient

(24)

$$e^{\tau-\nu} = f e^{\mu},$$

f étant une fonction du temps indépendante de r .

Portons cette valeur dans l'équation (18),

$$-\frac{\mu'}{r} - e^{\mu} \left[\frac{1}{r^2} (f - e^{-\mu}) - \frac{A}{r^2} - kP_0 \right] = 0,$$

ce qui donne

(25)

$$\mu' = \frac{1 + (A - f)e^{\mu}}{r} + kP_0 e^{\mu} r,$$

et $e^{-\mu} = \lambda$ s'obtiendra par une intégration par rapport à r de l'équation

$$e^{-\mu} (1 - r\mu') = -A + f - kP_0 r^2;$$

soit

$$\lambda + r\lambda' = -A + f - kP_0 r^2.$$

L'intégrale générale en est

(26)

$$e^{-\mu} = -A + f - \frac{C}{r} - \frac{kP_0}{3} r^2,$$

C étant, de même que f , une fonction du temps indépendante de r .

Enfin, on peut déterminer e^{τ} à l'aide de l'équation (9) qui devient

$$\varphi \Delta_1 \varphi + \Delta_1 \varphi - k\varphi^2 P_0 = A$$

et dans laquelle

$$\Delta_1 \varphi = e^{\tau-\mu-\nu} - e^{-\mu}$$

$$\Delta_2 \varphi = e^{-\mu} \frac{\mu' - \nu'}{2} + e^{\frac{\tau-\mu}{2}-\nu} \frac{\mu'_1 + \nu'_1 - \tau'_1}{2},$$

en tenant compte de (23). Il est facile d'éliminer $\tau'_1 - \nu'_1$ en remarquant que la relation (24), dérivée logarithmiquement par rapport au temps, donne

(27)

$$\tau'_1 - \nu'_1 = \mu'_1 + \frac{f'}{f}.$$

On ne laissera subsister comme dérivées partielles que μ' et τ' en observant que, d'après (1), puis (23)

$$\begin{aligned} \mu'_1 &= e^{\frac{\tau-\mu}{2}} \tau' \\ v' &= \tau' - \mu'. \end{aligned}$$

D'où

$$r \left[e^{-\mu} \left(\mu' - \frac{\tau'}{2} \right) - \frac{f'}{2f} e^{\frac{\tau-\mu}{2}-v} \right] + e^{\tau-\mu-v} - e^{-\mu} - kP_0 r^2 - A = 0.$$

Or (25) s'écrit, en y remplaçant f par $e^{\tau-\mu-v}$, de (24),

$$e^{\tau-\mu-v} - e^{-\mu} - kP_0 r^2 - A = -e^{-\mu} \mu' r,$$

ce qui conduit à

$$r \left[e^{-\mu} \left(\mu' - \frac{\tau'}{2} \right) - \frac{f'}{2f} e^{\frac{\tau-\mu}{2}-v} \right] - e^{-\mu} \mu' r = 0,$$

puis enfin

$$(28) \quad e^{\frac{\tau}{2}} \tau' = -f' e^{\frac{3\mu}{2}}.$$

Ceci s'intègre immédiatement par rapport à r ,

$$(28 \text{ bis}) \quad e^{\frac{\tau}{2}} = -\frac{f'}{2} \int e^{\frac{3\mu}{2}} dr + b(t).$$

On peut prouver d'ailleurs que C et P_0 sont des constantes absolues, indépendantes du temps. La relation (28) donne, combinée avec la relation (1),

$$e^{\frac{\tau}{2}} \cdot e^{\frac{\mu-\tau}{2}} \mu'_1 = -f' e^{\frac{3\mu}{2}},$$

d'où

$$-e^{-\mu} \mu'_1 = f'.$$

Or $-e^{-\mu} \mu'_1$ est la dérivée par rapport au temps de $e^{-\mu}$; calculée d'après (26), en désignant par C' et P'_0 les dérivées par rapport au temps de C et P_0 ; elle s'écrit

$$-e^{-\mu} \mu'_1 = f' - \frac{C'}{r} - \frac{kP'_0}{3} r^2$$

et l'on doit avoir identiquement par rapport à r

$$f' \equiv f' - \frac{C'}{r} - \frac{kP'_0}{3} r^2,$$

ce qui exige

$$C' = P'_0 = 0.$$

C et P_0 sont donc bien, de même que A , des constantes absolues.

7. — Cas de l'Univers vide.

Dans ce cas, pour lequel $P_0 = 0$, on peut obtenir les potentiels de gravitation sous des formes relativement simples. On a alors

$$(29) \quad e^{\frac{v}{2}} = -\frac{f'}{2} \int \frac{dr}{\left(-A + f - \frac{C}{r}\right)^{\frac{3}{2}}} + b(t),$$

ce qui donne par intégration

$$(30) \quad e^{\frac{v}{2}} = a + \frac{Cf'}{(-A+f)^2} \left(\frac{1}{\sqrt{-A+f-\frac{C}{r}}} - \frac{r\sqrt{-A+f-\frac{C}{r}}}{2C} - \frac{3}{2\sqrt{-A+f}} \operatorname{Log} \left| \frac{\sqrt{-A+f} + \sqrt{-A+f-\frac{C}{r}}}{\sqrt{\frac{C}{r}}} \right| \right)$$

Enfin, $e^{\frac{v}{2}}$ s'obtient à l'aide de (24)

$$(31) \quad e^{\frac{v}{2}} = \frac{a\sqrt{-A+f-\frac{C}{r}}}{\sqrt{f}} + \frac{Cf'}{(-A+f)^2\sqrt{f}} \left(1 - \frac{r\left(-A+f-\frac{C}{r}\right)}{2C} - \frac{3\sqrt{-A+f-\frac{C}{r}}}{2\sqrt{-A+f}} \operatorname{Log} \left| \frac{\sqrt{-A+f} + \sqrt{-A+f-\frac{C}{r}}}{\sqrt{\frac{C}{r}}} \right| \right)$$

Détermination de φ en fonction de r et t .

Il reste enfin à calculer φ connaissant ses dérivées partielles $e^{\frac{\mu}{2}}$ et $e^{\frac{v}{2}}$ par rapport à r et t . On vérifie facilement que

$$e^{\frac{\mu}{2}} dr + e^{\frac{v}{2}} dt = \frac{\partial \varphi}{\partial r} dr + \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt$$

est une différentielle totale exacte dont l'intégration donne

$$(32) \quad \varphi = \frac{r}{-A+f} \sqrt{-A+f-\frac{C}{r}} + \frac{C}{2(-A+f)^{\frac{3}{2}}} \operatorname{Arg ch} \left[\frac{2(-A+f)r - C}{C} - 1 \right] + at.$$

8. — L'espace gravitationnel considéré comme un champ de pression variable.

Dans le champ de Schwarzschild ($f = 0$),

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{C}{r}}},$$

indique que l'élément linéaire radial d'espace est dilaté par rapport à celui de l'espace de référence. Or il en est de même dans un milieu fluide admettant un centre de dépression (cyclone, tourbillon au sein d'un liquide, etc.). Ceci appelle donc une comparaison qui peut devenir une interprétation du phénomène gravitationnel. Si le milieu spatial physique était un champ de pression variable, on chercherait tout naturellement dans la variation de cette pression la cause de l'effet de gravitation. Montrons, par exemple, comment on pourrait, de là, déduire la loi de Newton.

Admettons que le milieu physique soit un fluide parfait incompressible, d'équation d'état $\varpi = \delta - \delta_0$, (ϖ pression, δ densité). Prenons pour unité de longueur le chemin parcouru par la lumière dans l'unité de temps en un lieu infiniment éloigné ($c = 1$). La densité du milieu sera

$$\delta = \frac{1}{\frac{\partial \varphi}{\partial r}} = e^{-\frac{z}{r}}$$

Si l'on considère comme négligeables les forces directement appliquées (attraction des particules du fluide lui-même, etc.), les équations générales du mouvement d'un fluide parfait donnent

$$\frac{\partial \varpi}{\partial r} = -\delta \gamma,$$

γ désignant l'accélération. D'où

$$(33) \quad \gamma = \frac{u'}{2} = -\frac{C}{2 \left(1 - \frac{C}{r}\right)} \cdot \frac{1}{r^2}$$

Lorsqu'on se place assez loin du centre, $C : r$ est négligeable devant 1 et l'équation (33) devient l'expression de la loi de Newton

$$\gamma = -\frac{C}{2} \cdot \frac{1}{r^2}$$

Si l'on applique cette formule à l'action exercée par la Terre sur un corps placé à sa surface, en prenant pour le rayon gravitationnel de la Terre la valeur 0^m44765 et pour le rayon moyen $r = \frac{4 \times 10^9}{2\pi}$, on obtient

$$\gamma = 980,9 \text{ cm/sec}^2,$$

qui est bien l'accélération moyenne de la pesanteur.

9. — Contraction de Lorentz due au vent radial. — Contraction totale.

Dans le champ de Schwarzschild, le facteur

$$I : \frac{\partial \rho}{\partial r} = \sqrt{1 - \frac{C}{r}}$$

mérite donc le nom de *facteur de dilatation gravitationnelle*.

Passons maintenant au champ étudié dans le présent Mémoire, (f non nul). Au point de vue des mesures, tout se passe comme si l'espace physique était un milieu en mouvement, chaque point suivant une direction radiale avec une vitesse $e^{\frac{\tau}{2}}$. C'est ce que nous appellerons le *vent radial*. Le facteur

$$I : \frac{\partial \rho}{\partial r} = \sqrt{-A + f - \frac{C}{r}}$$

D'après (24) et (26), on a

$$e^{\frac{\tau}{2}} = \frac{e^{\frac{\tau}{2}}}{\sqrt{f}} \sqrt{-A + f - \frac{C}{r}},$$

d'où

$$f = \frac{-A - \frac{C}{r}}{e^{\tau} - 1}$$

et

$$(34) \quad \sqrt{-A + f - \frac{C}{r}} = \frac{\sqrt{-A - \frac{C}{r}}}{\sqrt{1 - \frac{e^{\tau}}{e^{\nu}}}}$$

Nous verrons plus loin (n° 10) que $A = -1$. Le facteur de dilatation gravitationnelle $\sqrt{1 - \frac{C}{r}}$ est donc multiplié par le facteur

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{e^{\tau}}{e^{\nu}}}},$$

qui n'est autre que le *facteur de contraction de Lorentz dû au vent radial*, de vitesse $v = e^{\frac{\tau}{2}}$. En effet, si l'on revient à l'espace dépourvu de masse en faisant $C = 0$,

$e^v = c^2$, ce facteur s'écrit 1 : $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$. Le facteur

$$\frac{1}{\frac{\partial \varphi}{\partial r}} = \frac{\sqrt{1 - \frac{C}{r}}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

mérite le nom de *contraction totale due à la vitesse v et à la dépression gravitation-*

nelle $\sqrt{1 - \frac{C}{r}}$.

CHAPITRE II

Trajectoires planétaires. — Trajectoires lumineuses.

10. — Trajectoires planétaires. — Dans la théorie einsteinienne du champ solaire, les planètes décrivent des géodésiques de l'espace-temps.

Reprenons le calcul de ces géodésiques à partir du nouveau ds^2 obtenu au Chapitre précédent. Elles sont définies par l'équation différentielle

$$\frac{d^2 x_\alpha}{ds^2} + \Gamma_{ij}^\alpha \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_j}{ds} = 0,$$

i et j étant indices de sommation.

a) Soit $\alpha = 1$.

$$\frac{d^2 x_1}{ds^2} + \Gamma_{12}^1 \frac{dx_2}{ds} \frac{dx_3}{ds} + \Gamma_{33}^1 \frac{dx_3}{ds} \frac{dx_1}{ds} + \Gamma_{22}^1 \frac{dx_2^2}{ds^2} = 0,$$

et, en faisant $x_1 = \theta$, $x_2 = \psi$, $x_3 = r$, $x_4 = t$,

$$(35) \quad \frac{d^2 \theta}{ds^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{ds} \frac{d\theta}{ds} - \sin \theta \cos \theta \frac{d\psi^2}{ds^2} = 0.$$

Considérons, à partir du Soleil, les trois plans rectangulaires coordonnés et imaginons un petit corps d'épreuve qui obéisse au champ. Supposons-le lancé avec une certaine vitesse dans le plan $\gamma O x$. Les conditions initiales seront

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{d\theta}{ds} = 0, \quad \cos \theta = 0.$$

Les deux derniers termes de l'équation (35) sont nuls. Donc à l'origine du mouvement $\frac{d^2 \theta}{ds^2} = 0$. Si l'on dérive l'équation (35) par rapport à s et si l'on vérifie les conditions initiales dans l'équation dérivée, on trouve de même $\frac{d^3 \theta}{ds^3} = 0$, et ainsi de suite. Si l'on développe en série de Taylor, on aura donc

$$(36) \quad \theta = \frac{\pi}{2} + A \frac{d\theta}{ds} + B \frac{d^2 \theta}{ds^2} + \dots = \frac{\pi}{2}.$$

La trajectoire est donc plane.

b) Soit $\alpha = 2$.

$$\frac{d^2 x_3}{ds^2} + \Gamma_{42}^2 \frac{dx_1}{ds} \frac{dx_2}{ds} + \Gamma_{21}^2 \frac{dx_2}{ds} \frac{dx_1}{ds} + \Gamma_{32}^2 \frac{dx_3}{ds} \frac{dx_2}{ds} + \Gamma_{23}^2 \frac{dx_2}{ds} \frac{dx_3}{ds} = 0,$$

ou, en observant que $\theta = \frac{\pi}{2}$,

$$\frac{d^2 \psi}{ds^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{ds} \frac{d\psi}{ds} = 0.$$

Cette équation s'intègre immédiatement et donne

$$(37) \quad r^2 \frac{d\psi}{ds} = h,$$

h étant une constante.

c) Soit $\alpha = 3$.

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_3}{ds^2} + \Gamma_{33}^3 \frac{dx_3^2}{ds^2} + 2 \Gamma^3 \frac{dx_3}{ds} \frac{dx_4}{ds} + \Gamma_{44}^3 \frac{dx_4^2}{ds^2} + \Gamma_{41}^3 \frac{dx_4}{ds} + \Gamma_{22}^3 \frac{dx_2^2}{ds^2} = 0; \\ \frac{d^2 r}{ds^2} + \frac{\mu'}{2} \frac{dr^2}{ds^2} + \left(\mu'_1 - e^{\frac{\tau-\mu}{2}} \nu' \right) \frac{dr}{ds} \frac{dt}{ds} + \frac{1}{2} \left[e^{\frac{\tau-\mu}{2}} (\tau'_1 - \nu'_1) + e^{-\mu} \nu' (e^\nu - e^\tau) \right] \frac{ds^2}{dt^2} \\ + r (e^{\tau-\mu-\nu} - e^{-\mu}) \frac{d\theta^2}{ds^2} + r \sin^2 \theta (e^{\tau-\mu-\nu} - e^{-\mu}) \frac{d\psi^2}{ds^2} = 0. \end{aligned}$$

Or, d'après (1), $\mu'_1 = e^{\frac{\tau-\mu}{2}} \tau'$ et d'après (22) $\tau' - \nu' = \mu'$; de plus $\theta = \frac{\pi}{2}$:

$$\frac{d^2 r}{ds^2} + \frac{\mu'}{2} \frac{dr^2}{ds^2} + e^{\frac{\tau-\mu}{2}} \mu' \frac{dr}{ds} \frac{dt}{ds} + \frac{1}{2} \left[e^{\frac{\tau-\mu}{2}} (\tau'_1 - \nu'_1) + e^{-\mu} \nu' (e^\nu - e^\tau) \right] \frac{dt^2}{ds^2} + r (e^{\tau-\mu-\nu} - e^{-\mu}) \frac{d\psi^2}{ds^2} = 0.$$

D'autre part, d'après (27),

$$\tau'_1 - \nu'_1 = \mu'_1 + \frac{f'}{f} = e^{\frac{\tau-\mu}{2}} \tau' + \frac{f'}{f},$$

et, en tenant compte de (24),

$$\frac{d^2 r}{ds^2} + \frac{\mu'}{2} \frac{dr^2}{ds^2} + e^{\frac{\tau-\mu}{2}} \mu' \frac{dr}{ds} \frac{dt}{ds} + \frac{1}{2} \left[e^{\tau-\mu} \tau' + e^{\frac{\tau-\mu}{2}} \frac{f'}{f} + e^\nu \nu' (e^{-\mu} - f) \right] \frac{dt^2}{ds^2} + r (f - e^{-\mu}) \frac{d\psi^2}{ds^2} = 0.$$

Or l'expression du ds^2 sous la forme I nous donne

$$\frac{\mu'}{2} \frac{dr^2}{ds^2} + e^{\frac{\tau-\mu}{2}} \mu' \frac{dr}{ds} \frac{dt}{ds} + \frac{1}{2} (e^\tau - e^\nu) e^{-\mu} \frac{dt^2}{ds^2} + \frac{1}{2} e^{-\mu} \mu' + \frac{1}{2} e^{-\mu} \mu' r^2 \frac{d\psi^2}{ds^2} = 0;$$

et, en comparant,

$$\frac{d^2 r}{ds^2} + \frac{1}{2} \frac{dl^2}{ds^2} [e^{-\mu}(\tau' - \mu') + e^{\frac{\tau-\mu}{2}} \frac{f'}{f} + e^{\nu-\mu}(\mu' + \nu') - f e^{\nu} \nu'] - \frac{1}{2} e^{-\mu} \mu' + r \frac{d\psi^2}{ds^2} (f - e^{-\mu} - \frac{1}{2} e^{-\mu} \mu' r) = 0.$$

Or il est facile de voir que le crochet est nul puisque

$$e^{-\mu}(\tau' - \mu') = f e^{\nu} \nu'$$

et que, d'après (28)

$$\mu' + \nu' = \tau' = -f' e^{\frac{3\mu-\tau}{2}}$$

d'où

$$e^{\nu-\mu}(\mu' + \nu') = -f' e^{\frac{\mu-\tau}{2} + \nu} = -\frac{f''}{f} e^{\frac{\tau-\mu}{2}}.$$

Il reste donc, en utilisant l'expression (26) de $e^{-\mu}$ et l'expression (25) de μ' ,

$$2 \frac{d^2 r}{ds^2} + \frac{C}{r^2} + \frac{d\psi^2}{ds^2} (2Ar + 3C) = 0;$$

ce qui donne à l'aide de la relation (37)

$$2 \frac{d^2 r}{ds^2} + \frac{C}{r^2} + \frac{h^2}{r^3} \left(2A + \frac{3C}{r} \right) = 0.$$

Cette équation s'écrit

$$\frac{d\left(\frac{dr}{ds}\right)^2}{dr} + \frac{C}{r^2} + \frac{2Ah^2}{r^3} + \frac{3Ch^2}{r^4} = 0,$$

et en intégrant une première fois

$$\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 = K + \frac{C}{r} + \frac{Ah^2}{r^2} + \frac{Ch^2}{r^3}.$$

Posons $r = \frac{1}{u}$. Il vient, en tenant compte de (37)

$$(38) \quad \frac{du^2}{d\psi^2} = \frac{K}{h^2} + \frac{Cu}{h^2} + Au^2 + Cu^2$$

ou encore

$$(38 \text{ bis}) \quad d\psi = \frac{du}{\sqrt{Cu^2 + Au^2 + \frac{Cu}{h^2} + \frac{K}{h^2}}}.$$

Posons enfin

$$u = \frac{4z}{C} - \frac{A}{3C}, \quad \text{ou} \quad z = \frac{C}{4r} + \frac{A}{12},$$

$$(39) \quad g_2 = \frac{1}{12} \left(A^2 - \frac{3C^2}{h^2} \right)$$

$$(40) \quad g_3 = \frac{-A^3}{216} + \frac{AC^2}{48h^2} - \frac{KC^2}{16h^2},$$

on arrive à l'équation

$$d\psi = \frac{dz}{\sqrt{4z^2 - g_2 z - g_3}}, \quad \psi - \psi_0 = \int_{\infty}^z \frac{dz}{\sqrt{4z^2 - g_2 z - g_3}}.$$

En intégrant une deuxième fois, on trouve pour z

$$(41) \quad \boxed{\frac{1}{12} \left(A + \frac{3C}{r} \right) = \mathbf{p}(\psi - \psi_0)},$$

la fonction \mathbf{p} étant définie par les constantes g_2 et g_3 données en (39) et (40).

Comme la fonction $-\mathbf{p}(iu)$ caractérisée par les constantes g_2 et $-g_3$ est la même que la fonction $\mathbf{p}(u)$ caractérisée par les constantes g_2 et g_3 , on peut encore écrire

$$(41 \text{ bis}) \quad \frac{1}{12} \left(A + \frac{3C}{r} \right) = -\mathbf{p}^* i(\psi - \psi_0),$$

la fonction \mathbf{p}^* étant définie par

$$(39 \text{ bis}) \quad g_2^* = \frac{1}{12} \left(A^2 - \frac{3C^2}{h^2} \right)$$

$$(40 \text{ bis}) \quad g_3^* = \frac{A^3}{216} - \frac{AC^2}{48h^2} + \frac{KC^2}{16h^2}.$$

Détermination de A. — Trajectoires lumineuses.

L'équation (38) dérivée une fois donne

$$\frac{d^2 u}{d\psi^2} - Au = \frac{C}{2h^2} + \frac{3}{2} Cu^2.$$

Les trajectoires lumineuses correspondent à $ds = 0$, c'est-à-dire $h = \infty$, d'après (37). L'équation précédente devient

$$(42) \quad \frac{d^2 u}{d\psi^2} - Au = \frac{3}{2} Cu^2.$$

Si l'on fait $C = 0$, on supprime l'action du centre gravitationnel et l'espace devient minkowskien. On doit alors trouver des droites comme trajectoires lumineuses, ce qui exige que $A = -1$. Nous remplacerons dorénavant cette constante par la valeur -1 .

L'équation (42) s'écrit alors

$$\frac{d^2 u}{d\psi^2} + u = \frac{3}{2} Cu^2$$

et le calcul s'achève comme dans le champ de Schwarzschild, où l'équation est la même que la précédente.

REMARQUE. — Si le ds^2 est pris sous la forme II (n° 1) les trajectoires lumineuses deviennent imaginaires (en projection dans le continuum euclidien de référence et A doit être pris égal à 1).

11. — Indépendance du mouvement particulaire et du mouvement spatial.

Le fait fondamental à retenir du paragraphe précédent est que les caractéristiques f et f' du vent radial s'éliminent du calcul et que l'équation (41) est la même que dans le problème de Schwarzschild, pour lequel $f = 0$, c'est-à-dire pour lequel le milieu spatial est immobile.

Par rapport au continuum euclidien de référence, la trajectoire corpusculaire est donc la même, que le milieu physique soit en mouvement radial ou non. Cela veut dire que la particule prend, par rapport au milieu physique en mouvement, le même mouvement que si ce milieu était immobile : il y a superposition pure et simple du mouvement particulier et du mouvement d'entraînement général.

12. — Calcul de la vitesse.

La vitesse réelle, mesurée dans le milieu physique, s'obtient par

$$(43) \quad v^2 = \frac{d\varphi^2}{dt^2} + r^2 \frac{d\psi^2}{dt^2}.$$

Or

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial r} dr + \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt = e^{\frac{\alpha}{2}} dr + e^{\frac{\gamma}{2}} dt$$

d'où

$$(44) \quad v^2 = e^{\alpha} \frac{dr^2}{dt^2} + 2e^{\frac{\alpha+\gamma}{2}} \frac{dr}{dt} + e^{\gamma} + r^2 \frac{d\psi^2}{dt^2}.$$

Nous pouvons exprimer dt en fonction de $d\psi$ par les relations

$$r^4 \frac{d\psi^2}{ds^2} = h^2,$$

$$ds^2 = -e^{\nu} dr^2 - r^2 d\psi^2 + (e^{\nu} - e^{\tau}) dt^2 - 2e^{\frac{\mu+\tau}{2}} dr dt,$$

D'où

$$(45) \quad (e^{\nu} - e^{\tau}) dt^2 - 2e^{\frac{\mu+\tau}{2}} dr dt - r^2 \left(1 + \frac{r^2}{h^2}\right) d\psi^2 - e^{\mu} dr^2 = 0$$

et

$$(46) \quad dt = \frac{e^{\frac{\mu+\tau}{2}} dr \pm \sqrt{(e^{\nu} - e^{\tau}) \left(1 + \frac{r^2}{h^2}\right) r^2 d\psi^2 + e^{\mu+\nu} dr^2}}{e^{\nu} - e^{\tau}}.$$

L'expression de v^2 peut s'écrire, en comparant (44) et (45),

$$(47) \quad v^2 = e^{\nu} - \frac{r^4}{h^2} \frac{d\psi^2}{dt^2}.$$

ce qui donne l'analogie de la loi des aires en projection dans l'espace euclidien de référence,

$$r^4 \frac{d\psi^2}{dt^2} = \frac{4d\mathcal{A}^2}{dt^2} = (e^{\nu} - v^2) h^2.$$

La vitesse aréolaire est donc

$$(48) \quad \frac{d\mathcal{A}}{dt} = \frac{h}{2} e^{\frac{\nu}{2}} \sqrt{1 - \frac{v^2}{e^{\nu}}}.$$

Éliminons dt de l'expression (47) de v^2 :

$$v^2 = e^{\nu} - \frac{r^4}{h^2} \frac{(e^{\nu} - e^{\tau})^2}{e^{\mu}(e^{\tau} + e^{\nu}) \frac{dr^2}{d\psi^2} + (e^{\nu} - e^{\tau}) \left(1 + \frac{r^2}{h^2}\right) r^2 \pm 2e^{\frac{\mu+\tau}{2}} \frac{dr}{d\psi} \sqrt{(e^{\nu} - e^{\tau}) \left(1 + \frac{r^2}{h^2}\right) r^2} + e^{\mu+\nu} \frac{dr^2}{d\psi^2}}$$

Or,

$$\frac{d\psi}{dr} = \frac{1}{\pm \sqrt{Cr - r^2 + \frac{C}{h^2} r^2 + \frac{K}{h^2} r^4}}.$$

En remplaçant $\frac{dr}{d\psi}$ par son expression, et en remarquant que, d'après (24) et (26),

$$e^{\nu} - e^{\tau} = e^{\mu+\nu} \left(1 - \frac{C}{r}\right),$$

on trouve

$$1 - \frac{v^2}{e^v} = \frac{r^4}{h^2} \cdot \frac{\left(1 - \frac{C}{r}\right)^2}{D},$$

avec

$$D = r^2 \left(1 - \frac{C}{r}\right) \left[-f \left(1 + \frac{r^2}{h^2}\right)\right] + (1 + K) \frac{r^4}{h^2} \left(1 - \frac{C}{r} + 2f\right) \\ \pm 2 \sqrt{f \left(1 + f - \frac{C}{r}\right) \left[\frac{r^4}{h^2} (1 + K) - r^2 \left(1 + \frac{r^2}{h^2}\right) \left(1 - \frac{C}{r}\right)\right] \frac{r^4}{h^2} (1 + K)}.$$

Proposons-nous maintenant d'exprimer $1 + K$ en fonction de v et r . On obtient ainsi une expression des coordonnées et de la vitesse qui reste constante le long de la trajectoire et cette fonction prend une signification physique simple.

Posons pour cela

$$1 + K = x, \quad r^2 \left(1 + \frac{r^2}{h^2}\right) \left(1 - \frac{C}{r}\right) = m, \quad 1 + f - \frac{C}{r} = n, \quad \frac{r^4}{h^2} = p;$$

il vient

$$x^2 - 2x \left[\frac{n}{1 - \frac{v^2}{e^v}} + \frac{f}{1 - \frac{v^2}{e^v}} - \frac{mf}{p(n-f)} \right] + \left[\frac{n}{1 - \frac{v^2}{e^v}} - \left(\frac{f}{1 - \frac{v^2}{e^v}} - \frac{mf}{p(n-f)} \right) \right]^2 = 0,$$

équation de la forme

$$x^2 - 2(A + B)x + (A - B)^2 = 0;$$

d'où

$$\sqrt{x} = \sqrt{A} \pm \sqrt{B},$$

soit enfin

$$(49) \quad \sqrt{1 + K} = \sqrt{\frac{1 + f - \frac{C}{r}}{1 - \frac{v^2}{e^v}}} \pm \sqrt{f \left[\frac{1}{1 - \frac{v^2}{e^v}} - \left(1 + \frac{h^2}{r^2}\right) \right]}.$$

13. — Règle de composition des vitesses.

Remplaçons, dans la formule (49), f par sa valeur trouvée au n° 9; il vient en tenant compte de (34),

$$\sqrt{1 + K} = \frac{\sqrt{1 - \frac{C}{r}} \left(1 \pm \sqrt{\frac{e^v}{e^v} \left[1 - \left(1 + \frac{h^2}{r^2}\right) \left(1 - \frac{v^2}{e^v}\right)\right]}\right)}{\sqrt{\left(1 - \frac{e^v}{e^v}\right) \left(1 - \frac{v^2}{e^v}\right)}}.$$

Or, d'après (37),

$$\frac{h^2}{r^2} = \frac{r^2 d\psi^2}{ds^2} = \frac{r^2 \frac{d\psi^2}{dt^2}}{\frac{ds^2}{dt^2}}, \quad \text{avec } ds^2 = -d\rho^2 - r^2 d\psi^2 + e^v dt^2 = (e^v - v^2) dt^2;$$

$$1 + \frac{h^2}{r^2} = 1 + \frac{r^2 \frac{d\psi^2}{dt^2}}{-\frac{d\rho^2}{dt^2} - r^2 \frac{d\psi^2}{dt^2} + e^v} = \frac{e^v - \frac{d\rho^2}{dt^2}}{e^v - v^2} = \frac{1 - \frac{d\rho^2}{dt^2}}{1 - \frac{v^2}{e^v}}.$$

Portons cette expression dans l'équation précédente,

$$(50) \quad \sqrt{1+K} = \sqrt{1 - \frac{C}{r}} \frac{1 \pm \frac{e^v}{e^v} \cdot \frac{d\rho}{dt}}{\sqrt{\left(1 - \frac{e^v}{e^v}\right) \left(1 - \frac{v^2}{e^v}\right)}}.$$

Désignons par v' la vitesse radiale $\frac{e^v}{e^v}$, par v la vitesse de la particule mobile **M** et par α l'angle de ces deux vitesses; la formule (50) s'écrit

$$(51) \quad \sqrt{1+K} = \sqrt{1 - \frac{C}{r}} \frac{1 - \frac{vv'}{e^v} \cos \alpha}{\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{e^v}\right) \left(1 - \frac{v'^2}{e^v}\right)}}.$$

On doit prendre le signe — dans le double signe car, si le point **M** est immobile par rapport à l'éther, c'est-à-dire si $\alpha = 0$, $v = v'$, la valeur de $\sqrt{1+K} = 1 : \frac{\partial \rho}{\partial r}$ doit être $\sqrt{1 - \frac{C}{r}}$ (n° 9 et 11).

Si $v = 0$, $\sqrt{1+K}$ devient la contraction totale (n° 9) due à la vitesse v' ; si $v' = 0$, elle devient la contraction totale relative à la vitesse v . Il est donc naturel de définir la différence v'' des vitesses v et v' comme la vitesse pour laquelle la contraction totale est représentée par $\sqrt{1+K}$ de la formule (51) (').

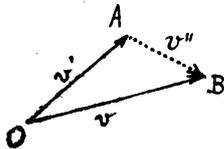


fig. 9

1. $v = \vec{OB}$ est la vitesse de la particule par rapport à l'observateur euclidien O,

$v' = \vec{OA}$ est celle du milieu physique par rapport à O.

La contraction résultante correspond à la vitesse de la particule par rapport au milieu, c'est-à-dire la différence géométrique entre v et v' .

D'où

$$\frac{\sqrt{1 - \frac{C}{r}}}{\sqrt{1 - \frac{v''^2}{e^v}}} = \sqrt{1 - \frac{C}{r}} \cdot \frac{1 - \frac{vv'}{e^v} \cos \alpha}{\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{e^v}\right) \left(1 - \frac{v'^2}{e^v}\right)}};$$

ce qui donne

$$(52) \quad \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v''^2}{e^v}}} = \frac{1 - \frac{vv'}{e^v} \cos \alpha}{\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{e^v}\right) \left(1 - \frac{v'^2}{e^v}\right)}}$$

ou encore

$$(53) \quad v''^2 = \frac{v^2 + v'^2 - 2vv' \cos \alpha - \left(\frac{vv' \sin \alpha}{e^v}\right)^2}{\left(1 - \frac{vv' \cos \alpha}{e^v}\right)^2}. \quad (1)$$

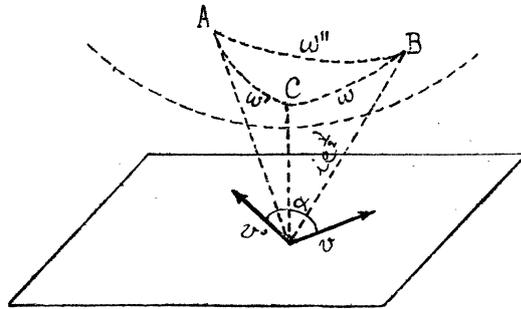


fig 10

V. le renvoi de la fig. 2 de la première partie (O. II, 5).

Ce n'est autre que la formule d'Einstein pour la composition des vitesses [13, note 4, p. 167] généralisée à l'espace gravitationnel. Dans la note citée, M. Buhl montre comment cette formule appelle une composition des vitesses par des vecteurs formant les côtés d'un triangle dans une géométrie cayleyenne.

1. Si, au lieu de calculer la *différence* de deux vitesses, on calcule leur *somme*; si l'on exprime par exemple v , somme des vitesses v' et v'' , on obtient

$$v^2 = \frac{v'^2 + v''^2 + 2v'v'' \cos \theta - \left(\frac{v'v'' \sin \theta}{e^v}\right)^2}{\left(1 + \frac{v'v'' \cos \theta}{e^v}\right)^2},$$

θ étant l'angle de v' et v'' .

On est effectivement conduit à un résultat de ce genre en posant, comme dans la Première Partie (O. 7, n° 30),

$$\frac{v}{ie^{\frac{v}{c}}} = \operatorname{tg} \omega, \quad \frac{v'}{ie^{\frac{v'}{c}}} = \operatorname{tg} \omega', \quad \frac{v''}{ie^{\frac{v''}{c}}} = \operatorname{tg} \omega''.$$

Alors la formule (52) devient

$$\cos \omega'' = \cos \omega \cos \omega' + \sin \omega \sin \omega' \cos \alpha.$$

formule de Delambre dans un triangle sphérique de côtés ω , ω' , ω'' , d'angle $(\omega, \omega') = \alpha$, sur une sphère imaginaire de rayon $ie^{\frac{v}{c}}$. Mais nous avons indiqué dans le renvoi de la fig. 3 (O. II, 5) qu'une telle géométrie imaginaire se ramène à une géométrie cayleyenne.

14. — Invariance de la contraction totale $\sqrt{1+K}$ pour un observateur en mouvement quelconque.

L'expression au second membre de (49), qui reste constante le long de la trajectoire, doit avoir une signification physique. Par suite, elle doit être invariante pour tout observateur, quel que soit son mouvement.

Reprenons son expression sous la forme (51), et supposons que les vitesses soient mesurées par un observateur O_1 , animé lui-même d'une vitesse V par rapport à l'origine fixe O , faisant un angle β avec v . Les vitesses v et v' deviendront, pour cet observateur, des vitesses v_1 et v'_1 faisant un angle α_1 et, s'il y a bien invariance, on devra pouvoir écrire

$$\sqrt{1+K} = \sqrt{1 - \frac{C}{r}} \frac{1 - \frac{v_1 v'_1}{e^{\frac{v_1}{c}} e^{\frac{v'_1}{c}}} \cos \alpha_1}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{e^{\frac{v_1}{c}}}} \sqrt{1 - \frac{v'^2_1}{e^{\frac{v'_1}{c}}}}}.$$

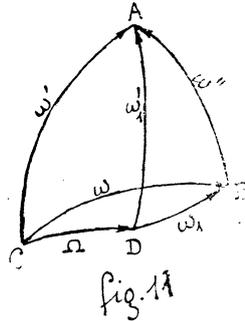
Complétant le changement de notations (54), nous écrivons,

$$\frac{V}{ie^{\frac{V}{c}}} = \operatorname{tg} \Omega, \quad \frac{v_1}{ie^{\frac{v_1}{c}}} = \operatorname{tg} \omega_1, \quad \frac{v'_1}{ie^{\frac{v'_1}{c}}} = \operatorname{tg} \omega'_1.$$

Dès lors,

$$\sqrt{1+K} = \sqrt{1 - \frac{C}{r}} \cos \omega'',$$

$\vec{\omega}''$ étant la différence entre $\vec{\omega}$ et $\vec{\omega}'$, comme l'indique la figure. Or, la vitesse v , résultant de la soustraction géométrique de la vitesse v et de la vitesse V , $\vec{\omega}_1$ est la différence entre $\vec{\omega}$ et $\vec{\Omega}$, c'est-à-dire le vecteur \vec{DB} ; de même, $\vec{\omega}'_1$, différence entre $\vec{\omega}'$ et $\vec{\Omega}$, est le vecteur \vec{DA} . La différence $\vec{\omega}_1''$ entre $\vec{\omega}_1$ et $\vec{\omega}'_1$ sera donc le vecteur \vec{AB} , c'est-à-dire $\vec{\omega}''$. Donc $\vec{\omega}_1'' = \vec{\omega}''$.



Par suite, le second membre de (55) s'écrit

$$\sqrt{1 - \frac{C}{r}} \cos \omega_1'' = \sqrt{1 - \frac{C}{r}} \cos \omega''$$

et l'invariance est bien établie par rapport à une origine en mouvement quelconque.

Il n'est donc pas douteux que cette quantité $\sqrt{1 + K}$ représente une réalité physique. Nous l'avons appelée d'une manière quelque peu schématique *la contraction au point M*, mais elle est certainement susceptible d'interprétations plus concrètes, relativement à la masse, à la densité et à l'énergie. Nous nous bornerons, pour le moment, à faire remarquer qu'elle se réduit à la masse einsteinienne unitaire lorsqu'on ramène l'espace gravitationnel au cas particulier de la relativité restreinte, c'est-à-dire en faisant $f = 0$, $c = 0$, $e' = c^2$. Il vient en effet

$$\sqrt{1 + K} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

qui n'est autre que la formule

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

dans laquelle m_0 est la masse au repos de la particule considérée et m sa masse en état de mouvement.

15. — Expansion de l'Univers. Décalage des raies du spectre des nébuleuses.

Dans l'expression (30) de la vitesse radiale $e^{\frac{r}{r_0}}$ du milieu, il est un terme,

$$(54) \quad \frac{-f' \sqrt{1+f-\frac{C}{r}}}{2(1+f)^2} r,$$

qui tend à devenir proportionnel à r lorsqu'on s'éloigne du centre, et indépendant du diamètre gravitationnel. Il traduit donc une propriété du milieu spatial universel sur laquelle le centre n'agit, en son voisinage, que d'une manière incidente. On doit y voir l'équivalent de l'expansion de l'Univers, mise en lumière par G. Lemaître [21]. Pour étudier le phénomène en lui-même, faisons $C = 0$. L'étendue devient homogène et isotrope et si le point o reste encore un centre dans le calcul, c'est par effet analogue à celui étudié par De Sitter en 1917 et qui introduit dans l'espace un *centre* et un *horizon* [22].

G. Lemaître déduit de cette expansion le décalage des raies du spectre des nébuleuses. Si R_1 et R_2 sont les rayons de l'Univers au départ et à l'arrivée d'un rayon lumineux, et δt_1 et δt_2 les intervalles de deux signaux, on a $\delta t_2 : \delta t_1 = R_2 : R_1$. La période est proportionnelle au rayon de l'espace [15]. Dans notre ds^2 , la présence du terme f et de ses dérivées permet de même d'interpréter le phénomène. Mais l'expansion de l'Univers n'est pas seule en cause; la variation de la vitesse de la lumière intervient aussi, puisqu'il existe une différence de vitesse pour deux signaux à leur passage en un même point, donc une cause de décalage progressif de l'un par rapport à l'autre.

Le calcul exact se fera de la manière suivante : sur une trajectoire radiale ($d\psi = 0$)

$$ds^2 = -e^{\nu} dr^2 + (e^{\nu} - e^{\tau}) dt^2 - 2e^{\frac{\nu+\tau}{2}} dr dt$$

d'où

$$(55) \quad \frac{dr}{dt} = \left(\frac{\nu}{e^2} - \frac{\tau}{e^2} \right) e^{-\frac{\nu}{2}}$$

L'intégration de cette équation différentielle donne

$$r = C_0 (1 + f - \sqrt{f(1+f)}) + \mathfrak{J}(t),$$

où $\mathfrak{J}(t)$ est une intégrale particulière. Soient deux signaux consécutifs de même phase répondant aux valeurs C_0 et C'_0 de la constante. Leurs distances, δr_1 au départ et δr_2 à l'arrivée, sont

$$\delta r_1 = (C_0 - C'_0) (1 + f_1 - \sqrt{f_1(1+f_1)}), \quad \delta r_2 = (C_0 - C'_0) (1 + f_2 - \sqrt{f_2(1+f_2)}).$$

Si δt_1 et δt_2 sont les périodes au départ et à l'arrivée, on a d'après (55)

$$\frac{\delta r_1}{\delta t_1} = \left(e^{\frac{v_1}{c}} - e^{-\frac{v_1}{c}} \right) \cdot e^{-\frac{v_1}{c}} = \left[a - \frac{f_1 r_1}{2(1+f_1)^{\frac{3}{2}}} \right] \left(\frac{1+f_1}{\sqrt{f_1}} - \sqrt{1+f_1} \right), \quad \frac{\delta r_2}{\delta t_2} = \left[a - \frac{f_2 r_2}{2(1+f_2)^{\frac{3}{2}}} \right] \left(\frac{1+f_2}{\sqrt{f_2}} - \sqrt{1+f_2} \right).$$

D'où finalement

$$\frac{\delta t_2}{\delta t_1} = \sqrt{\frac{f_2}{f_1}} \frac{a - \frac{f_1 r_1}{2(1+f_1)^{\frac{3}{2}}}}{a - \frac{f_2 r_2}{2(1+f_2)^{\frac{3}{2}}}}.$$

En développant f , au second ordre près. $f = f_0 + f' t$, et prenant $t = \frac{r}{V}$, où V est la vitesse moyenne de la lumière, il vient

$$(56) \quad \frac{\delta t_2 - \delta t_1}{\delta t_1} = \frac{f' r}{2fV} \left(1 + \frac{\sqrt{f}}{1+f} \right),$$

expression conforme à la formule empirique

$$(56 \text{ bis}) \quad \frac{\delta t_2 - \delta t_1}{\delta t_1} = \frac{1}{2} \cdot 10^{-27} r = \frac{3}{2} 10^{-17} \frac{r}{V}.$$

REMARQUES. — Certains auteurs, notamment M. Gheury de Bray [23] dépouillant de nombreux résultats expérimentaux, ont envisagé la possibilité d'une diminution lente de la vitesse de la lumière. D'après la formule (56 bis), il suffirait d'une décroissance relative extrêmement faible, de l'ordre de $3 \cdot 10^{-17}$, pour conditionner entièrement le phénomène. Si une variation du rayon de l'Univers agit par surcroît, elle pourra donc être très lente elle aussi. Or l'expansion universelle de G. Lemaître s'effectue à une vitesse relativement considérable, de sorte que le rayon de l'Univers aurait dû être nul il y a à peine deux ou trois milliards d'années. C'est ce qui fait que cette théorie a bouleversé les conceptions de l'astronomie moderne. Si elle reste très séduisante à presque tous les points de vue, elle n'est pas sans soulever quelques difficultés importantes touchant les données que nous avons sur l'âge des objets célestes [24, p. 94], [25]. L'hypothèse précédente permettrait de conserver tous les avantages de cette théorie, tout en s'affranchissant du taux de variation anormalement élevé du rayon de l'Univers.

CHAPITRE III

Champ gravitationnel de l'atome et de la nébuleuse spirale.

16. — La forme des nébuleuses spirales déduite des équations gravitationnelles.

La géodésique représentée par l'équation (41) des trajectoires planétaires, complétée par (39) et (40), en projection dans l'espace euclidien de référence, dépend de trois paramètres arbitraires, car si g est liée à h , cette dernière n'est elle-même qu'une constante d'intégration.

Rôle spécial des intégrales dégénérées. — Les cas de dégénérescence de l'intégrale elliptique méritent une attention particulière. ψ est donné (n° 10) par l'intégrale elliptique de première espèce

$$(57) \quad \psi - \psi_0 = \int \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}}.$$

Elle dégénère lorsque

$$(58) \quad g_2^3 = 27 g_3^2,$$

c'est-à-dire

$$g_3 = \pm \sqrt{\left(\frac{g_2}{3}\right)^3}.$$

Posons, suivant le cas,

$$\sqrt{3g_2} = \pm 2b, \quad \text{d'où} \quad g_3 = \left(\frac{2b}{3}\right)^3.$$

L'intégrale devient

$$\psi - \psi_0 = \int \frac{dz}{2 \left(z + \frac{b}{3}\right) \sqrt{z - \frac{2b}{3}}}.$$

En posant enfin

$$v^2 = z - \frac{2b}{3} = \frac{C}{4r} - \frac{1}{12} - \frac{2b}{3},$$

il vient

$$\psi - \psi_0 = \frac{1}{\sqrt{b}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{v}{\sqrt{b}}$$

ou enfin

$$(59) \quad \frac{C}{r} - \frac{C}{r_0} = \frac{4b}{\cos^2 \sqrt{b}(\psi - \psi_0)}, \quad \text{avec} \quad \frac{C}{r_0} = \frac{1-4b}{3}.$$

Si b est négatif et égal à $-b'$, cette formule devient

$$(60) \quad \frac{C}{r} - \frac{C}{r_0} = \frac{-4b'}{\operatorname{ch}^2 \sqrt{b'}(\psi - \psi_0)}, \quad \text{avec} \quad \frac{C}{r_0} = \frac{1+4b'}{3}.$$

Cette formule s'identifie avec l'équation des courbes (23) trouvées dans la Première Partie (O. I, 4) par la méthode, due à M. Buhl, de la variation des canaux dans l'espace à canalisation centrale. L'étude géométrique de ces courbes a été commencée au paragraphe cité.

Elles paraissent jouer un rôle prépondérant dans la structure des champs gravitationnels, du fait qu'elles admettent un *cerce asymptote*, atteint lorsque $\psi = \infty$, et sur lequel la particule tend à tourner indéfiniment. De là, semble-t-il, la stabilité et la fixité de certaines orbites électroniques : les orbites stationnaires de l'atome. De là également pourrait venir la structure spiralée des nébuleuses.

Mais toutes ces courbes ne jouent pas des rôles également importants.

17. — Relation supplémentaire de continuité.

Reprenons l'intégrale générale (57). La fonction ψ est définie par la forme de sa double période

$$w = 2n\omega + 2p\omega'.$$

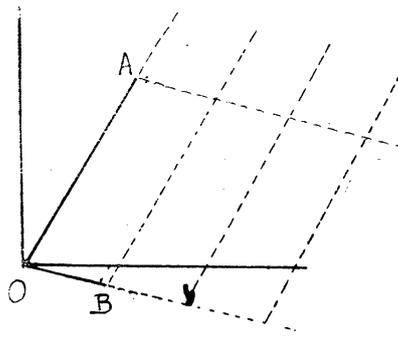


fig. 12

où n et p sont des nombres entiers quelconques et ω et ω' des nombres complexes fixes, qu'on représentera par les vecteurs OA et OB , et qui peuvent se déduire de g_2 et g_3 . Les infinis de la fonction \mathbf{p} sont les sommets du quadrillage construit sur ces deux vecteurs et les annulations de la dérivée correspondent, en vertu de la parité de la fonction, aux centres des parallélogrammes et aux milieux de leurs côtés.

Cela étant, je dis qu'il est impossible que r tende vers une limite lorsque ψ tend vers l'infini, à moins que l'une des dimensions des parallélogrammes ne tende vers zéro. En effet, soit Δ la direction suivant laquelle ψ tend vers l'infini. Il est évident que $\mathbf{p}(\psi - \psi_0)$ oscillera entre deux valeurs à chaque traversée de parallélogramme. Au contraire, si ω' par exemple est infiniment petit en module, et si Δ est parallèle à OB , le point représenté par le nombre complexe $\psi - \psi_0$ s'approchera infiniment lentement du centre du parallélogramme et tendra vers ce point à l'infini. La fonction $\mathbf{p}(\psi - \psi_0)$ tendra donc bien vers une limite et nous serons dans un cas de dégénérescence.

D'ailleurs,

$$g_2 = \sum \frac{60}{w^4}; \quad g_3 = \sum \frac{140}{w^6},$$

n et p prenant toutes les valeurs entières possibles, nulles, positives et négatives, sous réserve de ne pas s'annuler simultanément. Si $\omega' = 0$, il vient

$$g_2 = \frac{60}{16\omega^4} \sum \frac{1}{n^4}, \quad g_3 = \frac{140}{64\omega^6} \sum \frac{1}{n^6}.$$

Or

$$\sum \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{45}, \quad \sum \frac{1}{n^6} = \frac{2\pi^6}{945}.$$

D'où

$$(61) \quad g_2 = \frac{\pi^4}{12\omega^4}, \quad g_3 = \frac{\pi^6}{216\omega^6};$$

ce qui montre bien que nous sommes dans un cas de dégénérescence puisque $g_2^2 = 27g_3$.

D'autre part, b doit être réel, car g_2 est réel d'après (40), (38) et (37) et g_3 positif d'après (58). Or,

$$(62) \quad b = \pm \frac{\pi^2}{4\omega^2}.$$

Donc ω est réel ou purement imaginaire.

Nous nous arrêtons plus particulièrement au cas où b est négatif (existence du cercle asymptote). Dans ce cas, g_3 est également négatif et il convient de prendre l'intégrale (41) sous sa deuxième forme (41 bis),

$$\frac{1}{12} \left(A + \frac{C}{r} \right) = -\mathbf{p}^* i(\psi - \psi_0),$$

la fonction \mathbf{p}^* étant caractérisée par les constantes g_2^* et g_3^* (39 bis et 40 bis).

On prendra

$$b = -\frac{\pi^2}{4\omega^2}.$$

ω sera dirigé suivant l'axe réel, et comme $i(\psi - \psi_0)$ tend vers l'infini suivant l'axe imaginaire, la fonction \mathbf{p} tend bien vers une limite lorsque ψ augmente indéfiniment.

Si l'on désigne par Ψ l'argument du vecteur ω , on aura donc

$$\Psi = k\pi.$$

Mais on a vu, au paragraphe précédent, qu'on peut considérer les courbes (41) comme les trajectoires des points d'un milieu fluide où règne une pression variable, ou, si l'on préfère, en état tourbillonnaire (V. également O. III, 12). Il doit donc s'adjoindre aux relations établies une *équation de continuité* introduisant une dépendance entre les paramètres définissant les courbes, de manière qu'elles ne dépendent plus que d'un seul, et que, par un point, il ne passe qu'une seule ligne de fluide à un instant donné.

Nous nous contenterons de montrer que, pour rendre un compte exact de la forme des nébuleuses spirales et des lois des orbites stationnaires de l'atome, ainsi que de son rayonnement, il suffit de choisir la relation de continuité de manière qu'elle devienne, dans le cas de dégénérescence

$$(63) \quad \frac{1}{\omega^2} + \frac{1}{\lambda\Psi^2} = \frac{1}{\pi^2},$$

où λ est un facteur constant.

Comme $\Psi = k\pi$, les trajectoires dégénérées parmi ces lignes de fluide seront donc en nombre fini et répondront à la condition

$$(64) \quad \frac{\pi^2}{\omega^2} + \frac{1}{\lambda k^2} = 1, \quad \text{soit} \quad b' = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{\lambda k^2} \right).$$

La formule (60), dans laquelle on fait successivement

$$b' = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{\lambda} \right), \quad \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{4\lambda} \right), \quad \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{9\lambda} \right), \quad \dots$$

donne les diverses courbes de cette espèce.

Ce qui précède a trait au ds^2 sous la forme I. Si on l'écrit sous la forme II (n° 10, remarque), A devient égal à 1, C prend une valeur opposée, et e^u , e^v , e^z changent de signe ainsi que ds^2 . Il revient donc au même de remplacer, dans les calculs relatifs à la forme I, ψ par $i\psi$.

Les équations (59) et (60) deviennent alors

$$(59 \text{ bis}) \quad \frac{C}{r} - \frac{C}{r_0} = \frac{4b}{\text{ch}^2 \sqrt{b}(\psi - \psi_0)}, \quad \text{avec} \quad \frac{C}{r_0} = \frac{1-4b}{3} \quad \text{et} \quad b > 0,$$

$$(60 \text{ bis}) \quad \frac{C}{r} - \frac{C}{r_0} = \frac{-4b'}{\cos^2 \sqrt{b'}(\psi - \psi_0)}, \quad \text{avec} \quad \frac{C}{r_0} = \frac{1+4b'}{3} \quad \text{et} \quad b' > 0.$$

C'est la formule (59 bis) qui retiendra particulièrement notre attention.

Lorsque ψ tend vers l'infini, r tend vers une limite maxima

$$r_0 = \frac{3C}{1-4b},$$

c'est-à-dire, en remplaçant b par sa valeur,

(65)

$$r_0 = 3C\lambda k^2.$$

La valeur minima de r est d'ailleurs atteinte quand $\psi = \psi_0$; elle vaut

$$r_m = \frac{3C}{1+8b} = \frac{C}{1 - \frac{2}{3\lambda k^2}}.$$

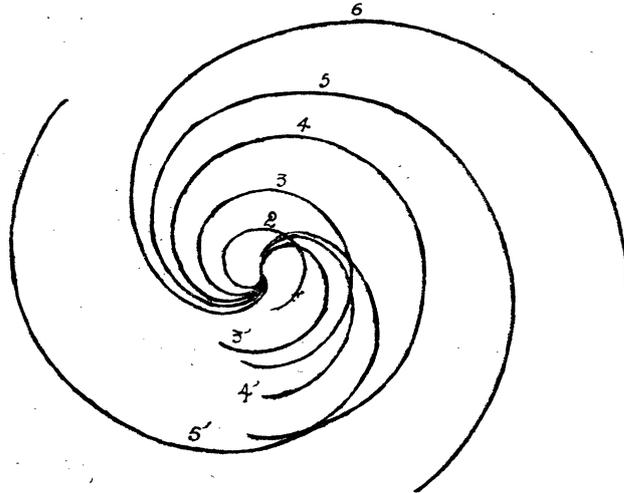


FIG. 13.

Si l'on donne à k les diverses valeurs entières 1, 2, 3, 4, ... et à λ une valeur numérique particulière convenant pour le champ de l'atome ($n^\circ 18$), $\lambda = 3.142,4$, on constate que, pour une échelle convenable, les courbes (59 bis) se superposent d'une manière satisfaisante, en forme, en nombre et en position, aux bras d'une nébuleuse vue de face. La figure 13 représente les courbes calculées à l'aide de la formule

(59 bis) complétées par leurs symétriques par rapport au centre (correspondant à la valeur opposée de C , par conséquent). La *figure 14* est la photographie de Messier 101, la belle nébuleuse de la Grande Ourse. Si le lecteur veut bien prendre la peine de lever un calque de la première figure et de superposer son cadre au cadre de la deuxième, il observera la coïncidence annoncée.

Il est à remarquer d'ailleurs qu'une telle formation stellaire serait constituée d'après cela par *deux champs gravitationnels opposés*, puisqu'aux courbes (59 bis) il convient d'adjoindre leurs symétriques par rapport au centre.

On peut tirer de là une méthode de détermination du rayon gravitationnel des nébuleuses spirales, connaissant leur diamètre apparent.

Prenons l'exemple de Messier 101. Le rayon r_k du cercle limite de la branche d'indice $k = 5$ est les 0,44 du rayon de la nébuleuse entière. Nous n'avons pas en notre possession la valeur exacte de ce dernier, mais nous pouvons le prendre égal à 25.000 années-lumière, puisque toutes les nébuleuses ont sensiblement ce même rayon.

$$r_k = 3C\lambda k^2,$$

c'est-à-dire

$$r_k = 3 \times C \times 3.142,4 \times 25 = 25.000 \times 0,44.$$

d'où

$$C = 0,0466 \text{ A.L} = 0,0438 \cdot 10^{18} \text{ km.}$$

Le diamètre gravitationnel du soleil étant 3 km., Messier 101 vaudrait donc *146 milliards de soleils*.

Or la méthode dynamique de détermination de la masse de la nébuleuse galactique (par l'étude de la rotation de ses étoiles) donne 165 milliards de soleils, d'après les chiffres de M. Paul Couderc [24, p. 26]. Comme toutes les nébuleuses sont des formations à peu près identiques, leurs masses doivent être à peu près les mêmes, ainsi qu'il arrive pour les masses des étoiles, quelles que soient leurs dimensions. Le résultat théorique concorde donc de façon satisfaisante avec le nombre expérimental.

18. — Les lois de l'atome et les équations gravitationnelles.

Si l'on passe à l'étude du champ atomique, en supposant $f = 0$, on voit que la formule (65) exprime la loi des orbites stables de l'atome, suivant laquelle l'électron, assimilable au corpuscule d'épreuve, circule sur des cercles de centre 0 et dont les rayons sont proportionnels aux carrés des nombres de la suite naturelle, l'orbite de stabilité maxima étant celle de rang 1. Ces orbites stationnaires ne seraient donc autre chose que les cercles asymptotes des courbes (59 bis), de rayons $r_k = 3C\lambda k^2$.

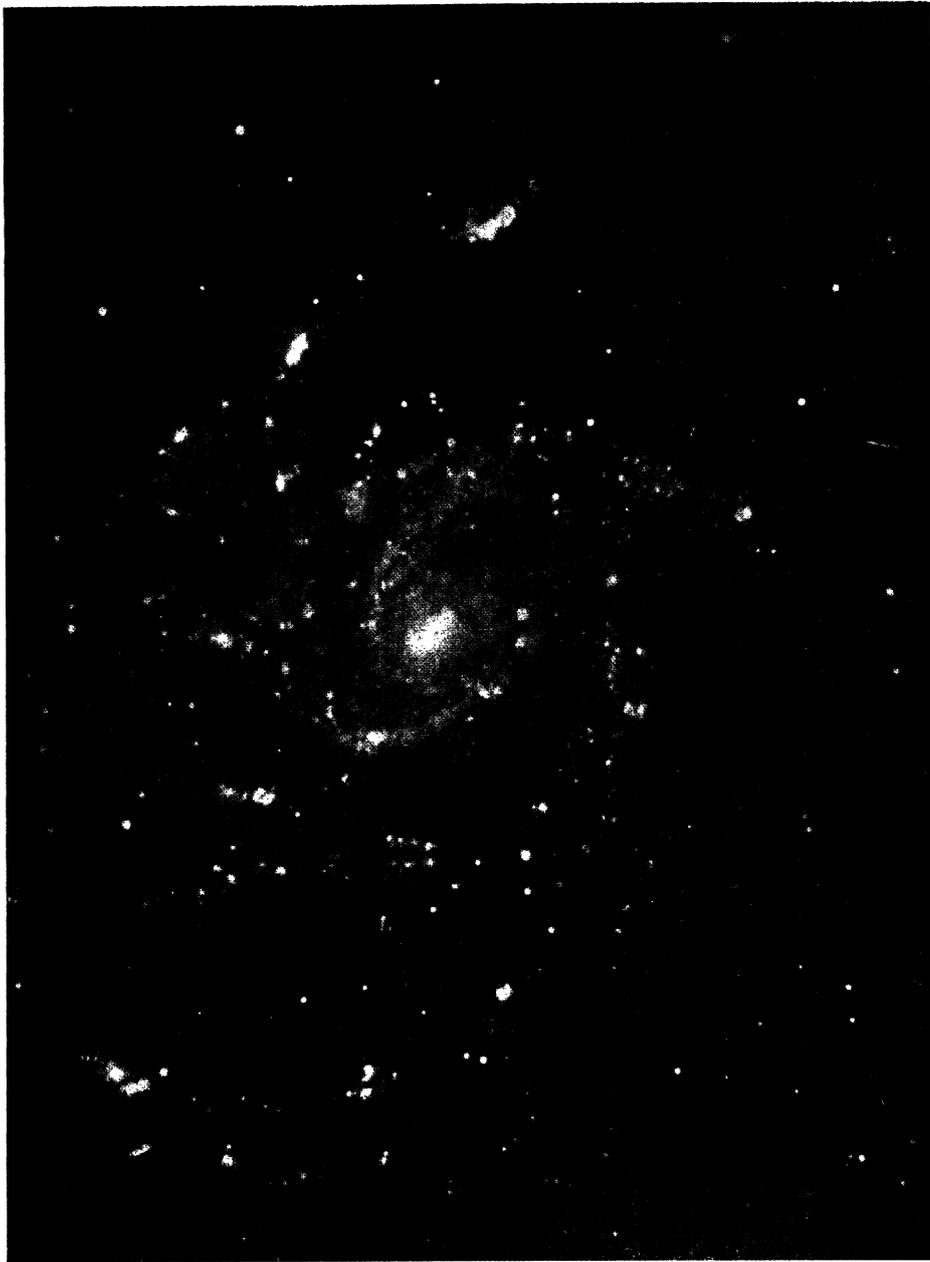


FIG. 14. — Photographie de Messier 101, la belle nébuleuse de la Grande Ourse.

Il est aisé de calculer λ . La formule (49) donne la vitesse du corpuscule sur le cercle r_k ,

$$v^2 = e^2 \left(1 - \frac{C}{1 + K} \right).$$

La valeur de $1 + K$ est obtenue au n° 19,

$$1 + K = \frac{\left(1 - \frac{1}{3\lambda k^2} \right)^2}{1 - \frac{1}{2\lambda k^2}},$$

d'où, en remplaçant e^2 par $c^2 \left(1 - \frac{C}{r_k} \right)$,

(66)

$$v^2 = \frac{c^2}{6\lambda k^2}.$$

Si ω désigne la vitesse angulaire, on a $v = \omega r_k$, et

(67)

$$\omega^2 r_k^3 = c^2 \frac{C}{2}.$$

C'est la troisième loi de Képler rigoureusement vérifiée. Empruntons quelques formules à la théorie atomique de Bohr (A. Berthoud [26, p. 88]). La deuxième équation (23) de M. Berthoud donne

$$\omega^2 r_k^3 = \frac{eE}{\mu},$$

dans laquelle e et E sont les charges électriques de l'électron et du noyau et μ la masse de l'électron (la lettre ω , qui désigne ici la vitesse angulaire, représente dans le texte de M. Berthoud le nombre de tours par seconde). Il vient

(68)

$$\frac{c^2 C}{2} = \frac{eE}{\mu}.$$

Pour l'atome d'hydrogène, on a par exemple, en C. G. S.,

$$e = E = 4,77 \cdot 10^{-10}, \quad \mu = 0,903 \cdot 10^{-27}.$$

d'où

$$C = 5,600 \cdot 10^{-12},$$

La valeur de r_k donnée par la formule (30) de [26] est

$$r_k = \frac{k^3 h^3}{4 \pi^3 \mu e E},$$

$h = 6,55 \cdot 10^{-27}$, constante de Planck. D'où par comparaison avec (68) et (65),

$$\lambda = \frac{h^3}{6 \pi^3 \mu^2 c^3 E^2}.$$

On trouve, pour l'atome d'hydrogène,

$$\lambda = 3,148,5$$

et

$$r_k = 5,29 \cdot 10^{-13}.$$

λ peut encore s'écrire, en tenant compte de (68),

$$\lambda = \frac{c^3 h^3}{24 \pi^3 e^3 E^2}.$$

REMARQUE. — Le moment cinétique d'orbite de l'électron a pour valeur, sur le cercle r_k ,

$$m = \mu r_k^2 \omega = \frac{\mu \omega^2 r_k^3}{v} = \mu c \frac{C}{2} \sqrt{6\lambda} k = k \frac{h}{2\pi}.$$

Ce résultat n'est autre que la propriété suivante, établie en mécanique ondulatoire [18, p. 167] : *les composantes du moment cinétique d'orbite de l'électron sont des multiples entiers de $\frac{h}{2\pi}$* , car ici le moment coïncide avec sa composante suivant Oz.

La propriété n'est établie rigoureusement en Mécanique quantique que pour un champ de force centrale, il est vrai, légèrement différent de celui-ci.

19. — Rayonnement de l'atome.

Le mouvement d'un corpuscule dans le champ gravitationnel est commandé par l'équation

$$\frac{H^2}{e^2} = \frac{k^2}{c^2} + p_\varphi^2 + p_\psi^2$$

avec

$$\dot{\varphi} = \frac{e^2}{H} p_\varphi, \quad r\dot{\psi} = \frac{e^2}{H} p_\psi, \quad (\text{O, III, n}^\circ 31)$$

où l'hamiltonien H a pour valeur

$$H = z \sqrt{1 + K},$$

et que nous avons intégrée en Première Partie (O, III, § 17). α est un facteur constant dans tout le champ et K est une constante caractéristique de la trajectoire, de sorte que H , somme des énergies potentielle et cinétique, reste constante le long de la trajectoire. Mais elle varie d'une trajectoire à l'autre et cette variation représente l'énergie radiée, ou l'énergie radiante absorbée, suivant que la nouvelle trajectoire est plus proche ou plus éloignée du centre que la première. Le calcul fait bien ressortir l'accord de cette manière de voir avec l'expérience, en ce qui concerne le rayonnement de l'atome :

On sait que les fréquences $\bar{\nu}$ des raies du spectre de l'hydrogène sont données par la formule

$$(69) \quad \bar{\nu} = \bar{\nu}_0 \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{k^2} \right),$$

où $k = 3, 4, 5, \dots$ et où $\bar{\nu}_0$, constante de Rydberg, a pour valeur

$$\bar{\nu}_0 = 109.677,69 \times 3.10^{10}.$$

Les données expérimentales du présent paragraphe sont empruntées à *La constitution des atomes* de A. Berthoud [26].

Les lignes spectrales données par la formule (69) sont obtenues quand l'électron saute de l'orbite de rang k sur l'orbite de rang 2; elles s'étendent du rouge jusque dans l'ultraviolet. Les séries de Paschen, dans l'infrarouge et de Lyman, dans l'ultraviolet, répondent aux formules

$$\bar{\nu} = \bar{\nu}_0 \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{k^2} \right) \quad \text{et} \quad \bar{\nu} = \bar{\nu}_0 \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{k^2} \right),$$

avec respectivement $k = 4, 5, 6, \dots$ et $k = 2, 3, 4, \dots$

Les variations d'énergie correspondantes de l'électron sont

$$h\bar{\nu} = h\bar{\nu}_0 \left(\frac{1}{j^2} - \frac{1}{k^2} \right),$$

où $j = 1, 2$ ou 3 suivant le cas.

Or, dans le champ gravitationnel précédemment décrit, considérons un électron, corpuscule de masse m , décrivant l'orbite de rang k , caractérisée par les constantes h et K . Calculons d'abord K en fonction de g_2 et g_3 de manière à l'exprimer à l'aide de b , puis de k .

On tire, de (39) et (40), en prenant $A = -1$,

$$\frac{3C^2}{h^2} = 1 - 12g_2,$$

$$K = \frac{-\frac{1}{3} - 144g_3 + 12g_2}{3(1 - 12g_2)}.$$

Et comme

$$g_2 = \frac{4b^2}{3}, \quad g_3 = \sqrt{\left(\frac{g_2}{3}\right)^2} = \left(\frac{2b}{3}\right)^2.$$

$$K = \frac{32b^2 - 4b - 1}{9(1 + 4b)},$$

$$\sqrt{1 + K} = \frac{\sqrt{8}}{3} \frac{(1 + 2b)}{\sqrt{1 + 4b}}.$$

Or

$$b = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{\lambda k^2}\right),$$

$$\sqrt{1 + K} = \frac{1 - \frac{1}{3\lambda k^2}}{\sqrt{1 - \frac{1}{2\lambda k^2}}}.$$

Comme $\frac{1}{\lambda k^2}$ est suffisamment petit, puisque $\lambda = 3.148.5$, on peut développer le second membre en se limitant au premier ordre; il vient :

$$\sqrt{1 + K} = 1 - \frac{1}{12\lambda k^2},$$

à moins de un cent-millionième près. Par suite

$$H = x \left(1 - \frac{1}{12\lambda k^2}\right)$$

$$\Delta H = \frac{x}{12\lambda} \left(\frac{1}{j^2} - \frac{1}{k^2}\right).$$

Au point de vue de la structure, la formule est bien identique à celle rappelée plus haut. Voyons ce qu'il en est au point de vue numérique. x est l'énergie de l'électron infiniment loin du centre gravitationnel ($K = 0$, $k = \infty$). On a donc

$$x = mc^2 = 0,903 \cdot 10^{-27} \cdot (3 \cdot 10^{10})^2 = 8,127 \cdot 10^{-7}.$$

Le rapport $\frac{x}{12\lambda}$ joue le rôle de la constante $h\bar{\nu}_0$, où la constante de Rydberg $\bar{\nu}_0 = 109.677,69c^2$, d'où

$$h\bar{\nu}_0 = 2,1551 \cdot 10^{-11}.$$

On en tire

$$\lambda = 3.142,4,$$

qui concorde d'une manière très satisfaisante avec la valeur obtenue au n° 18.

20. — Conclusion : Identité structurale de l'atome et de la nébuleuse spirale.

Il est très remarquable de constater que la même équation

$$\frac{C}{r} = \frac{1-4b}{3} = \frac{4b}{ch^2 \sqrt{b}(\psi - \psi_0)},$$

$$4b = 1 - \frac{1}{\lambda k^2},$$

avec la *même valeur* du coefficient numérique λ , semble régir à la fois l'atome d'hydrogène et les nébuleuses spirales que nous révèle l'étude du ciel. La nébuleuse serait ainsi une formation identique, ou du moins semblable, au sens géométrique du terme, à l'atome d'hydrogène, le rapport de similitude étant celui des diamètres gravitationnels.

Si cette conception était fondée, elle présenterait un grand intérêt cosmologique, puisque l'atome simple, si mystérieux encore, nous deviendrait connu avec une grande profusion de détails. C'est ainsi qu'on pourrait tenir le beau cliché précédent, du professeur G.-W. Ritchey, pour la photographie d'un atome d'hydrogène ionisé, agrandi vingt-cinq millions de fois⁽¹⁾.

Du point de vue philosophique, l'intérêt n'en serait pas moindre, car l'Univers résulterait ainsi d'une superposition, peut-être sans limite, du même motif architectural se répétant à une échelle sans cesse multipliée ou sans cesse réduite.

1. La grande nébuleuse des Chiens de chasse (Messier 51), avec sa particularité curieuse et assez rare d'un noyau secondaire à la périphérie, serait peut-être alors un atome d'hydrogène complet, avec son électron orbital.

BIBLIOGRAPHIE

1. A. BUHL. *Tourbillons, Corpuscules, Ondes, avec quelques Préliminaires sur le rôle des opérateurs en Physique théorique* (Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 1932).
 2. A. BUHL. *Gravifiques. Groupes. Mécaniques* (Bulletin des Sc. Math., 2^e série, t. LIV, octobre 1930).
 3. W. THRELFALL. *Quelques résultats récents de la Topologie des Variétés* (L'Enseign. math., t. XXXV, 1936).
 4. G. HUMBERT. *Œuvres* (publiées par P. Humbert et G. Julia, t. I, 1929).
 5. Th. DE DONDER. *Théorie du Champ électromagnétique de Maxwell-Lorentz et du Champ gravifique d'Einstein* (Gauthier-Villars, Paris, 1920).
 6. A. BUHL. *Formules stokiennes* (Mémorial des Sc. math., fasc. xvi. Gauthier-Villars, Paris, 1926).
 7. A. BUHL. *Structures analytiques et Théories physiques* (Mémorial des Sciences physiques, fasc. xxii. Gauthier-Villars, Paris, 1933).
 8. E. GOURSAT. *Leçons sur le problème de Pfaff* (J. Hermann, Paris, 1922).
 9. Maurice D'OCAGNE. *Sur les Isométries* (Bulletin Soc. math. de France, t. XIII, 1884-85 ; t. XVII, 1888-89).
 10. K. SCHWARZSCHILD. *Ueber das Gravitationsfeld einer Kugel aus inkompressibler Flüssigkeit nach der Einsteinschen Theorie* (Sitzungsber. Ak. Berlin, 1916).
 11. J. DROSTE. *On the field on a single centra in Einstein's theory of gravitation* (Proc. Ak. Sc. Amsterdam, t. XVII, 1915).
 12. ARTHUR CAYLEY. *On the homographic transformation of a surface of the second order into itself. — A sixth memoir upon quantics* (The Collected mathem. papers, vol. 2. 1859).
 13. P. BARBARIN et A. BUHL. *La Géométrie non euclidienne* (Scientia. n° 15. Gauthier-Villars, Paris, 1928).
 14. Emile BOREL. *Introduction géométrique à quelques Théories physiques* (Paris, 1914).
 15. G. LEMAÎTRE. *Un univers homogène de masse constante et de rayon croissant rendant compte de la vitesse radiale des nébuleuses extra-galactiques* (Annales de la Société scientifique de Bruxelles, série A, XLVII. 1927).
 16. Eugène BLOCH. *L'ancienne et la nouvelle Théorie des Quanta* (Hermann, Paris, 1930).
 17. G. DARMOIS. *Les Équations de la Gravifique einsteinienne* (Mémorial des Sc. math., fasc. xxv. Gauthier-Villars, Paris, 1927).
 18. P.-A.-M. DIRAC. *Les Principes de la Mécanique quantique* (Recueil des Conférences, Rapports de Documentation sur la Physique. Les Presses universitaires de France, Paris, 1931).
 19. J. HAAG. *Le Problème de Schwarzschild* (Mémorial des Sc. math., Gauthier-Villars, Paris, 1927).
 20. J. DELSARTE. *Sur les ds^2 binaires et le Problème d'Einstein* (Gauthier-Villars, Paris, 1934).
 21. G. LEMAÎTRE. *The expanding Universe* (Monthly Notices of the Roy. Astr. Soc., XCI, 1931).
 22. DE SITTER. *On Einstein's Theory of Gravitation and its astronomical Consequences* (third paper, Monthly Notices of the Roy. Astr. Soc., LXXVIII, 1917).
 23. GMEURY DE BRAY. *Sur une diminution possible de la Vitesse de la Lumière* (Bulletin de la Soc. astron. de France, août 1927).
 24. Paul COUDERC. *Univers 1937* (Les Éditions rationalistes, Paris, 1937).
 25. Paul COUDERC. *L'Architecture de l'Univers* (Gauthier-Villars, Paris, 1930).
 26. A. BERTHOUD. *La Constitution des Atomes* (Payot, Paris, 1925).
-